СССР — МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инженер А. Я. ВЫСКРЕБЕНЦЕВ

ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

(01.022 — Сопротивление материалов
и строительная механика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1969

Библиотека ДИИТ

Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта направляет Вам автореферат кандидатской диссертации инженера А. Я. Выскребенцева. Просим Вас и всех заинтересованных лиц Вашего учреждения принять участие в публичной защите диссертации или прислать свой отзыв (в двух экземплярах).

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта.

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР, доктор технических наук, профессор **В. А. Лазарян.**

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор **А. П. Прусаков,**
кандидат технических наук, доцент **Ю. М. Майзель.**

Ведущее предприятие — Днепропетровский государственный университет им. 300-летия воссоединения Украины с Россией.

Автореферат разослан «20» декабря 1969 г.

Защита диссертации состоится «29» января 1970 г. на заседании совета Днепропетр... юго транспорта ... 2, ДИИТ.

С дисс...

Ученый се...

СССР — МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инженер А. Я. ВЫСКРЕБЕНЦЕВ

ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

(01.022 — Сопротивление материалов
и строительная механика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1969

В настоящее время при изготовлении различных аппаратов, машин, сооружений, приборов все шире используются двухслойные оболочки и пластины. Часто эти объекты работают в условиях высоких температур.

Для расчета двухслойных конструкций до сих пор в основном применялась классическая теория, опирающаяся на гипотезы Кирхгофа-Лява. Развитию и приложению классической теории расчета двухслойных оболочек и пластин посвящены работы Д. Ю. Панова, Э. И. Григолюка, В. И. Королева, В. И. Рачкова, Э. Рейсснера и В. Ставски, Д. Джонса и Д. Уитьера и др.

Однако в последнее время на отдельных примерах установлено, что классическая теория может давать значительные погрешности. В связи с этим возникла необходимость уточнения указанной теории. Но пока известны лишь несколько исследований этого направления. В работах С. А. Амбарцумяна предложен вариант теории уточненного расчета двухслойных оболочек без учета нагрева. Работа Рен Нанна посвящена колебаниям двухслойных пластин. В диссертации И. Т. Комозина рассматривается уточненный расчет двухслойных пластин с учетом нагрева, но упругие и термические характеристики материалов слоев полагаются неизменными в процессе изменения температуры.

Предметом данной диссертационной работы является получение достаточно простого и надежного варианта основных дифференциальных уравнений для уточненного расчета двухслойных оболочек в поле высоких температур.

Работа состоит из введения, четырех глав и заключения.

В первой главе устанавливаются пределы применимости классической теории изгиба и свободных колебаний двухслойных пластин с целью выяснения диапазона упруго-геометрических характеристик, в котором классическая теория нуждается в уточнении. Установление пределов применимости классической теории выполнено путем сравнения результатов точного решения задачи методами теории упругости и приближенного решения по классической теории. Вначале рассмотрена задача изгиба по цилиндрической поверхности двухслойной свободно опертой пластины под действием синусоидальной нагрузки, затем задача о свободных колебаниях той же пластины.

С помощью ЭВМ «Урал-3» в широком диапазоне упругогеометрических параметров пластин выполнены подсчеты нормальных и касательных напряжений σ, τ и перемещении w по нормали к исходной поверхности. Аналогичные расчеты по определению круговых частот выполнены для случая свободных колебаний.

Выяснилось, что погрешности, вносимые классической теорией, зависят одновременно от соотношения модулей уп ругости слоев E_1 E_2, относительных длин пластины $a : h_0$ (a — длина, h_0 — общая толщина пластины), от соотношения толщин слоев $h_2 : h_1$. Выразить эту зависимость в аналитическом виде оказалось затруднительным. Поэтому в результате анализа погрешностей были построены кривые допустимых относительных длин пластин $a : h_0$ в зависимости от $E_1 : E_2$ и $h_2 : h_1$ при расчетах на прочность и расчетах на жесткость. Аналогичные кривые допустимых относительных длин полуволн колебаний $l : h_0$ (l — длина полуволны колебаний) построены для расчетов по определению частот свободных колебаний. Все эти кривые соответствуют обычно допускаемой в технических расчетах погрешности 5%.

Построенные графики показывают, что уточнение классической теории изгиба и свободных колебаний двухслойных пластин необходимо для сравнительно небольших относительных длин пластин при изгибе и относительных длин полуволн при свободных колебаниях, не превышающих 12—14.

Установленные при рассмотрении пластин пределы применимости в дальнейшем распространяются и на пологие двухслойные оболочки, а результаты точного решения используются для оценки различных вариантов уточненной теории.

Во второй главе получены основные дифференциальные уравнения поперечного изгиба и свободных колебаний пологих двухслойных оболочек в поле высоких температур. Рассматривается прямоугольная в плане оболочка с различными ортотропными слоями. Для жесткого (более прочного) слоя приняты гипотезы Кирхгофа-Лява, для мягкого (менее прочного) введен линейный закон изменения тангенциальных перемещений по толщине слоя, позволяющий учесть деформации поперечного сдвига. Эти основные допущения хорошо согласуются с результатами точного решения главы 1.

Считается, что линейными поперечными деформациями можно пренебречь. На оболочку действует произвольная поперечная нагрузка и произвольный по толщине нагрев. Принято, что модули упругости и коэффициенты линейного температурного расширения материалов слоев зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона постоянны. Ползучесть материала не учитывается. Предполагается, что главные направления упругой и термической ортотропии оболочки совпадают. За исходную принята поверхность соединения слоев.

Выражения касательных напряжений в мягком слое согласно принятым допущениям предполагают постоянство этих напряжений по толщине слоя. Однако эти выражения используются лишь для вывода дифференциальных уравнений задачи. Рабочие же формулы для касательных напряжений получены обычным путем из условия равновесия и предполагают параболический закон изменения этих напряжений по толщине каждого слоя, что согласуется с точным решением задачи методами теории упругости.

Согласно принципу возможных перемещений получено вариационное уравнение задачи, откуда следует система пяти дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия. С помощью функции усилий F полученные уравнения сводятся к системе четырех уравнений.

В частном случае, если считать материал жесткого слоя изотропным, а мягкого — трансверсально изотропным и ввести приведенный коэффициент Пуассона ν, предложенный В. И. Королевым, система четырех уравнений упрощается. Если к тому же использовать функции перемещений φ и ψ, связанные с перемещениями по формулам

$$\beta_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{e_1}{G_0}\nabla^2\right)\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{e_1}{G_0}\nabla^2\right)\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$w = \left(1 + \frac{e_2}{G_0}\nabla^2\right)\varphi,$$

то решение задачи сводится к трем уравнениям:

$$\left(1 + e_2\frac{1-\nu}{2G_0}\nabla^2\right)\psi = 0,$$

$$\frac{1}{G_0}(e_2e_3-e_1e_4)\nabla^2\nabla^2\nabla^2\varphi+(e_3+e_4)\nabla^2\nabla^2\varphi+\Lambda^2 F=-q,$$

$$L(1-\nu^2)\Lambda^2\left(1+\frac{e_2}{G_0}\nabla^2\right)\varphi+\nabla^2\nabla^2 F=0,$$

В обеих группах выражений использованы обозначения: β_1, β_2 — углы поворота нормального элемента мягкого слоя в направлении координатных линий x, y;

$$e_1=\frac{A_1A_2}{L};\quad e_2=\frac{A_2^2}{L}-D_2;\quad e_3=A_1\frac{A_1+A_2}{L}-D_1;$$

$$e_4=A_2\frac{A_1+A_2}{L}-D_2;$$

$$L=B_1+B_2;\quad G_0=\mu\int_0^{h_2}G_3''dz;\quad B_1=\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-h_1}^{0}E_1dz;$$

$$B_2=\frac{1}{1-\nu^2}\int_0^{h_2}E_2dz;$$

$$A_1=\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-h_1}^{0}E_1zdz;\qquad A_2=\frac{1}{1-\nu^2}\int_0^{h_2}E_2zdz;$$

$$D_1=\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-h_1}^{0}E_1z^2dz;\qquad D_2=\frac{1}{1-\nu^2}\int_0^{h_2}E_2z^2dz;$$

E_1, E_2 — модули упругости жесткого и мягкого слоя;
G_3'' — модуль сдвига мягкого слоя в плоскостях xz, yz;

$$\Lambda^2=\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2};$$

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны исходной поверхности оболочки.

Первое из трех дифференциальных уравнений оказалось не связанным с остальными и описывает своеобразный краевой эффект, порождаемый деформациями сдвига в мягком слое и аналогичный эффекту Рейсснера в трехслойных конструкциях. Как показали Г. Плантема и В. Альфен, А. П. Прусаков, Л. М. Куршин во многих практически важных случаях этим краевым эффектом можно пренебречь Тогда для решения задачи используется система двух оставшихся дифференциальных уравнений. В связи с понижением порядка разрешающих уравнений на две единицы, из шести граничных условий на каждом краю оболочки необходимо отбросить то, которое связано с перемещениями по касательной к контуру

В третьей главе исследована точность предлагаемого варианта уточненной теории расчета двухслойных конструкций и проведено его сравнение с вариантами, опирающимися на иные допущения. Вопросы решаются на примере плоской задачи изгиба и свободных колебаний свободно опертой двухслойной пластины с изотропными слоями. Для сравнения взяты как существующие, так и вновь рассмотренные для этой цели варианты уточненной теории, помимо полученного в главе II.

Вновь рассмотрены:

Вариант I. Предполагается, что тангенциальные перемещения имеют линейный закон изменения по толщине каждого слоя, а поперечным обжатием можно пренебречь. За исходную взята нейтральная поверхность, положение которой определялось без учета деформаций сдвига. Вариационным методом получена система трех дифференциальных уравнений и граничные условия. С помощью двух функций перемещений система трех уравнений сведена к одному разрешающему уравнению, имеющему различное выражение в зависимости от того, в каком слое располагается нейтральная поверхность.

Вариант IA. Принято, что деформациями поперечного сдвига в жестком слое можно пренебречь. Этот частный случай варианта I использован в работе И. Т. Комозина. Если ввести функцию перемещений, то в отличие от указанной работы для данной задачи получено одно разрешающее уравнение в двух видах в зависимости от расположения нейтральной поверхности.

Вариант IБ. Предполагается, что деформации сдвига в обоих слоях постоянны и одинаковы (гипотеза общего прямолинейного элемента). С помощью функции перемещений решение сведено к единственному уравнению.

По указанным вариантам уточненной теории, по варианту С. А. Амбарцумяна и по вариантам, рассмотреным в гл. II (общий случай назван вариантом 2, частный случай — 2А) получены формулы круговой частоты свободных колебаний и вычислены с помощью ЭВМ «Наири» значения частот в широком диапазоне упруго-геометрических параметров пластин. Путем сравнения с точными значениями, полученными на основе решений этой же задачи методами теории упругости (глава I), установлены пределы применимости всех сравнивавшихся вариантов уточненной теории. Для практического использования рекомендованы варианты 1Б и 2А, как наиболее простые и применимые в следующем достаточно широком диапазоне упруго-геометрических параметров: $a:h_0 \geqslant 5$, соотношение толщин мягкого и жесткого слоев $1 \leqslant h_2:h_1 \leqslant 19$ при $1 \leqslant E_1:E_2 \leqslant 2700$ для варианта 1Б и $1 \leqslant E_1:E_2 \leqslant 3400$ для варианта 2А.

Сравнение результатов показало, что варианты, учитывающие сдвиг в обоих слоях (вариант С. А. Амбарцумяна, вариант 1) либо имеют пределы применимости не шире, чем вышеуказанные, либо расширяют эти пределы незначительно, в то время как трудности использования этих вариантов возрастают по сравнению с вариантами 1Б и 2А весьма ощутимо.

Одновременно выяснилось, что приведенный коэффициент Пуассона не вносит заметной дополнительной погрешности даже при значительной разнице действительных коэффициентов Пуассона материалов слоев. Подтвержден вывод, сделанный в работе И. Т. Комозина о том, что вполне допустимо определять положение нейтральной поверхности без учета деформаций сдвига.

Поскольку результаты решения задачи колебаний для ряда вариантов оказались близки друг другу, то рассмотрение изгиба было ограничено сравнением лишь вариантов 1А и 2А. По обоим вариантам в широком диапазоне упруго-геометрических параметров пластины подсчитаны нормальные и касательные напряжения, а также прогибы. Для оценки влияния температурной зависимости упругих и термических характеристик материалов слоев на результаты расчета в конце главы по варианту 2А решена задача изгиба по цилиндрической поверхности двухслойной свободно опертой пластины под действием равномерно распределенной по толщине температуры.

Анализ результатов показал, что погрешность при определении максимальных нормальных напряжений в жестком слое, максимальных касательных напряжений и прогибов в случае нагружения пластин со стороны жесткого слоя не превышает 5%. Максимальные нормальные напряжения в мягком слое получаются на 3—8% меньше точных. Если их умножать на коэффициент 1,03, то они во всем рассмотренном диапазоне упруго-геометрических параметров пластин будут иметь погрешность в пределах 5%.

В случае нагружения со стороны мягкого слоя погрешность определения напряжений в жестком слое, касательных напряжений и прогибов тоже находится в пределах допустимой величины. Погрешность же максимальных напряжений в мягком слое становится весьма значительной, особенно при $a:h_0=5$, $h_1:h_2=1$ и достаточно больших значениях $E_2:E_1$. Это обусловлено, по- видимому, обжатием мягкого слоя, которое не учитывают все рассмотренные варианты уточненной теории.

Выяснено также влияние поправочного коэффициента μ для касательных напряжений, аналогичного тому, который использовал В. И. Королев и И. Т. Комозин. Этот коэффициент находился из условия эквивалентности потенциальной энер гии сдвига в мягком слое при постоянных по толщине слоя касательных напряжениях и при их изменении по параболи ческому закону, который подтверждается точным решением. Коэффициент μ не оказывает заметного влияния на величины напряжений вообще, а на прогибы — в случае нагружения со стороны мягкого слоя, но уточняет прогибы до 5% при нагружении со стороны жесткого слоя. При определении частот свободных колебаний μ дает уточнение лишь в диапазоне

$$1 \leqslant E_1 : E_2 \leqslant 500,$$

На основе анализа результатов установлены пределы применимости вариантов 1А и 2А уточненной теории при изгибе

а) в случае нагружения со стороны жесткого слоя

$$a:h_0 \geqslant 5, \quad 1 \leqslant h_2:h_1 \leqslant 19, \quad 1 \leqslant E_1:E_2 \leqslant 4000;$$

при этом прогибы вычисляются с учетом коэффициента μ, а значения напряжений в мягком слое умножаются на 1,03;

б) нагружение со стороны мягкого слоя

$$a:h_0 \geqslant 5 \begin{cases} 1 \leqslant E_2:E_1 \leqslant 100, & 3 \leqslant h_1:h_2 \leqslant 19; \\ 1 \leqslant E_2:E_1 \leqslant 350, & 8 \leqslant h_1:h_2 \leqslant 19. \end{cases}$$

Несмотря на близость результатов по рассмотренным вариантам при изгибе, вариант 1А оказался менее удобным при решении конкретной задачи. Неудобство этого варианта связано, во-первых, с тем, что в зависимости от положения нейтральной поверхности, как отмечено выше, дифференциальные уравнения, записанные в перемещениях, имеют различный вид. При этом в случае изотропных материалов слоев получаются две различные системы уравнений, для ортотропных материалов — четыре системы.

Во-вторых, при решении температурных задач положение нейтральной поверхности, которая в варианте 1А принята за исходную, заранее неизвестно. Более того, как показал пример решения температурной задачи возможно появление двух нейтральных поверхностей, что отмечено также в работах Э. И. Григолюка, Л. Е. Андреевой. Это вызывает дополнительные осложнения при использовании варианта 1А.

Вариант уточненной теории 2А свободен от указанных недостатков, поэтому он и рекомендуется при расчетах на изгиб двухслойных пластин, особенно при нагреве.

Все сделанные выше выводы относительно сравнивавшихся вариантов уточненной теории расчета двухслойных пластин при колебаниях и изгибе распространяются и на пологие оболочки, в которых, очевидно, влияние деформаций сдвига меньше, чем в пластинах.

Расчеты напряжений и прогибов при действии на двухслойную пластину одних температур показали, что пренебрежение температурной зависимостью упругих и термических констант может внести в расчет погрешность до 14—16%. При других законах распределения температур по толщине пластины можно ожидать значительно больших погрешностей. Поэтому указанную зависимость необходимо учитывать при расчетах двухслойных конструкций, работающих в условиях высоких температур.

В связи с тем, что при рассмотрении температурных задач граничные условия обычно оказываются неоднородными и трудности аналитического решения в этом случае общеизвестны, в качестве метода решения подобных задач принят приближенный численный метод конечных разностей, или метод сеток. Однако, несмотря на широкое применение этого метода (работы С. П. Тимошенко, Н. А. Динника, П. М. Варвака, М. С. Корнишина и др.) точность его при использовании уравнений в частных производных выше второго порядка исследована мало, а для уравнений выше четвертого порядка, насколько нам известно, вообще не исследовалась.

Поэтому значительная часть четвертой главы, посвященной применению метода сеток к расчету двухслойных конструкций, отведена исследованию этого вопроса на примерах решения целого ряда задач, изгиба и свободных колебаний. Выяснение точности и сходимости решения по методу сеток сначала велось на основе классической теории двухслойных пластин, затем, после получения разностной формы разрешающих уравнений варианта 2А уточненной теории, — на основе этих уравнений.

В результате для определенного класса задач найдена оптимальная густота сетки, обеспечивающая достаточную точность при минимальной затрате времени расчетов с использованием ЭВМ типа «Наири». Одновременно установлено, что эффективным способом уточнения решения по методу сеток является экстраполяция по Ричардсону.

Затем решена задача об изгибе двухслойной квадратной пластины со свободно опертыми краями под действием синусоидальной нагрузки. Для этой задачи известно точное решение методами теории упругости, выполненное в работе А. П. Мелконяна. Там же приведен пример определения прогибов по варианту уточненной теории С. А. Амбарцумяна. Решение на основе варианта 2А при густоте сетки $n=6$ ($n=a:h$, где h — шаг квадратной сетки) показало, что в данном случае точность метода сеток удовлетворительна как при вычислении прогибов, так и вычислении напряжений. Сравнение же прогибов по вариантам С. А. Амбарцумяна и 2А показало их близость к точным значениям и друг к другу.

Решена задача об изгибе цилиндрической квадратной в плане двухслойной оболочки со свободно защемленными краями под действием произвольной поперечной нагрузки и произвольного по толщине нагрева до высокой температуры. При густоте сетки $n=6$ решение свелось к 18 разностным уравнениям.

Получено решение задачи о свободных колебаниях сферической квадратной в плане двухслойной оболочки со свободно опертыми краями. Задача допускает аналитическое решение в замнутом виде, которое и было получено с помощью двойных тригонометрических рядов. Затем задача решена методом сеток при густоте $n=2$ и $n=3$. При густоте $n=3$ первая частота колебаний для взятого примера имеет погрешность 2%. Экстраполированное значение частоты по методу Ричардсона на основании значений при $n=2$ и $n=3$ отличается от точного значения всего лишь на 0,2%.

Выводы

1. Установлены пределы применимости классической теории расчета двухслойных пластин при поперечном изгибе и свободных колебаниях путем сравнения результатов решения задачи по классической теории и точного решения методами теории упругости.

2. Получены основные дифференциальные уравнения для уточненного расчета пологих двухслойных оболочек с ортотропными слоями в поле высоких температур при изгибе и свободных колебаниях. При этом учтены деформации поперечного сдвига в мягком слое. Путем введения функции усилий и двух функций перемещений, а также приведенного коэффициента Пуассона система уравнений общего случая сведена к трем уравнениям. Одно из уравнений оказывается не связанным с остальными и описывает своеобразный сдвиговый краевой эффект.

4. Детальный анализ результатов, полученных с помощью предложенных уравнений для уточненного расчета, путем их сравнения с результатами точного решения и результатами других вариантов уточненной теории показал ряд преимуществ этих уравнений (особенно при решении температурных задач), относительную простоту их использования и достаточно широкие пределы применимости при решении задач изгиба и свободных колебаний. Некоторые из сравнивающихся вариантов, помимо предложенных, получены впервые (варианты 1 и 1Б).

Установлено также, что:

а) учет сдвига в обоих слоях двухслойной конструкции по сравнению с его учетом только в мягком слое малоэффективен и значительно усложняет решение;

б) при расчетах двухслойных оболочек и пластин, работающих в условиях высоких температур, необходимо учитывать зависимость упругих и термических характеристик материалов слоев от температуры;

в) приведенный коэффициент Пуассона не вносит заметную дополнительную погрешность даже при значительной разнице действительных коэффициентов Пуассона слоев.

5. Для целого ряда задач изгиба и свободных колебаний двухслойных пластин и оболочек установлена оптимальная для каждого случая густота сетки при использовании метода сеток на основе классической и уточненной теорий. Показано, что при недостаточной точности результатов при густоте

сетки $n=4$—6 вместо дальнейшего увеличения густоты целесообразно применять экстраполяцию по Ричардсону.

6. Решена задача об изгибе цилиндрической квадратной в плане двухслойной оболочки со свободно защемленными краями под действием произвольной поперечной нагрузки и произвольного по толщине нагрева. При густоте сетки $n=6$ решение свелось к 18 разностным уравнениям.

7. Получено решение в двойных тригонометрических рядах и методом сеток ($n=2$ и $n=3$) задачи о свободных колебаниях сферической квадратной в плане двухслойной оболочки со свободно опертыми краями. Частоты, найденные по обоим решениям для взятого примера, оказались близкими по величине.

Диссертационная работа содержит страниц 196, таблиц 28, рисунков 24. Перечень литературы включает 101 название.

Материалы работы докладывались на:

1. Заседании кафедры сопротивления материалов Днепропетровского инженерно-строительного института, 1967 г.

2. Заседаниях семинара по механике научно-технического общества «Стройиндустрия», г. Днепропетровск, 1968, 1969 гг.

3. Первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников, Днепропетровск, 1969 г.

4. Заседании семинара по механике Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, 1969 г.

Основное содержание диссертации опубликовано в статьях автора:

1. К теории изгиба двухслойных пластин. Прикладная механика, 1969, т. V, в. 4 (в соавторстве с А. И. Холодом).

2. Об одной из возможностей построения технической теории изгиба двухслойных оболочек. Тезисы докладов первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников. Днепропетровск, 1969 (в соавторстве с А. И. Холодом).

3. Учет сдвига при поперечных колебаниях двухслойных пластин. Тезисы докладов первой республиканской конференции молодых ученых-железнодорожников. Днепропетровск, 1969 (в соавторстве с А. И. Холодом)

БТ 00648. Областная книжная типография
Днепропетровского областного управления по печати,
г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.
Заказ № 3530-м. Тираж 200. Объем 1 п. л. Подписано к печати 10.XII-69 г.