

С. В. РАКША, канд. техн. наук (Днепропетровский инженерно-строительный институт)

**ВЕСОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТЫХ
ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ
С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМ ПОТЕРИ
УСТОЙЧИВОСТИ**

Оптимальная стойка при использовании линейной теории устойчивости характеризуется равноустойчивостью по общей и местной формам. Однако при близких значениях критических нагрузок общего и местного выпучивания линейное решение оказывается недостаточным для реальных конструкций с общими и локальными неправильностями вследствие взаимовлияния форм потери устойчивости. Это взаимодействие может быть учтено при использовании нелинейной теории связанной потери устойчивости. В последние годы выполнен ряд исследований по оптимальному проектированию тонкостенных конструкций (оболочек, подкрепленных панелей) при учете связанности форм выпучивания [1, 2]. Оптимизации сжатых тонкостенных коробчатых

стержней были посвящены работы [3, 4], в которых при рассмотрении связанного выпучивания используется модель Нейта [5].

В данной работе на основе асимптотического метода Койтера исследуется влияние нелинейного взаимодействия общей и местных форм потери устойчивости на оптимальные параметры центрально-сжатых тонкостенных стержней прямоугольного и квадратного сечений. Анализ основывается на решении задачи о связанной потере устойчивости сжатых тонкостенных коробчатых стержней [6].

1. Постановка задачи оптимизации. Заданными считались длина стержня L , сжимающая сила P , характеристики материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести), а также относительные амплитуды несовершенств ($\zeta^* = \zeta^*/t$) по общей и местной формам. Варьируемыми параметрами, которые определялись из условия минимума веса, являлись толщина t и ширина b каждой из пластин, составляющих сечение стержня (рис. 1).

В случае квадратного поперечного сечения стержня толщина всех пластин принималась одинаковой и число параметров оптимизации равнялось двум (b, t). Для стержня прямоугольного профиля задавалось соотношение ширин стенки и полки ($b_2/b_1 = 1/2; 1/3$) и число параметров оптимизации равнялось трем (b_1, t_1, t_2).

Задача оптимизации ставилась как задача нелинейного программирования. Ограничения задачи включали в себя условия устойчивости, условия прочности, геометрические ограничения на параметры.

При расчете общей формы потери устойчивости использовалась схема шарнирно-опертой эйлеровой стойки. Для местной потери устойчивости стержень рассматривался как сочленение пластин, причем условия сопряжения ввиду двойной симметрии сечения составлялись лишь для одной пары пластин и приводили к характеристическому уравнению, определяющему критические напряжения местных форм. Для стержней с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, учет взаимодействия общей и одной местной формы требует построения смешанной формы второго порядка, задача определения которой весьма громоздка. Поэтому использовался подход, предложенный в [7] и основанный на учете наряду с основной местной формой, «вторичной» местной формы, имеющей ту же длину волны, но другой характер симметрии. Наложение двух местных форм приводит к несимметричности суммарного местного прогиба, что позволяет получить решение в первом нелинейном приближении.

По найденным собственным формам рассчитывались коэффициенты нелинейных уравнений равновесия и непосредственной минимизацией потенциальной энергии как функции параметров ζ_i ($i = 1 \div 3$) при данном λ строились равновесные ветви (ζ_i — амплитуда перемещений по i -й форме; λ — параметр нагрузки). Для предельных точек и точек бифуркации гессиан потенциальной энергии обращается в нуль.

В связи с наличием густого спектра местных форм с различным соотношением значений критических напряжений, рассматривалось взаимодействие общей формы с каждой парой местных форм в доста-

Таблица 1
Оптимальные параметры и предельные напряжения стойки квадратного сечения при $P^* = 1,0$

Теория устойчивости	Амплитуда общей погиби ζ_1^*	σ^*	G^*	b/L	t/L	t/b
Линейная	0	3,68	0,272	0,0462	$0,15 \cdot 10^{-2}$	0,0327
Нелинейная	0,5	3,47	0,288	0,0467	$0,16 \cdot 10^{-2}$	0,0336
	1,0	3,37	0,297	0,0471	$0,16 \cdot 10^{-2}$	0,0345

точно широком диапазоне волновых чисел m , т. е. по устойчивости включалось 10...15 ограничений.

В качестве геометрических ограничений в выполненных расчетах ставились ограничения по минимальной толщине пластин, составляющих сечение стержня. Ограничение по прочности состояло в условии достижения максимальными напряжениями предела текучести материала.

Для общности анализа все ограничения и целевая функция формулировались в безразмерных параметрах. Использовались безразмерные параметры нагрузки $P^* = (P \cdot 10^6) / (E \cdot L^2)$, веса $G^* = A / L^2$, напряжений $\sigma^* = \sigma \cdot 10^3 / E$.

Задача нелинейного программирования решалась методом ЛМППГ — линейризованным методом приведенного градиента [8]. Опыт применения этого алгоритма при решении задач оптимизации подкрепленных пластин и оболочек (и других задач) показал высокую эффективность и надежность метода. Для достижения оптимума требовалось, как правило, 20...30 итераций при относительной погрешности определения оптимальных параметров 10^{-3} . Для контроля найденного оптимума расчет выполнялся из разных начальных точек. Во всех случаях процесс поиска приводил к одному и тому же результату, что позволяет считать найденные локальные минимумы глобальными.

2. Численный анализ решения. Стойка квадратного сечения. Важность решения задачи оптимизации в нелинейной постановке, а также влияние амплитуды общей погиби на оптимальные параметры стержня квадратного сечения иллюстрируют данные, приведенные в табл. 1, содержащей геометрические и весовые параметры, предельное напряжение оптимальной стойки, полученные с использованием линейной и нелинейной теории устойчивости. Как и следовало ожидать, учет связанности форм при наличии общей погиби приводит к увеличению веса стойки. Так при погиби $\zeta_1^* = 1,0$ вес увеличивается на 9 % по сравнению с решением при линейной оптимизации. При этом растет толщина стенок и несколько меньше ширина, так что отношение t/b в целом растет.

Спектр критических напряжений для оптимальной стойки квадратного сечения при параметре нагрузки $P^* = 1,0$ показан на рис. 2 ($\sigma^{(i)}$ — напряжения i -й формы потери устойчивости, $i=1$ соответствует общей форме, $i=2$ — первой местной форме, $i=3$ — вторичной мест-

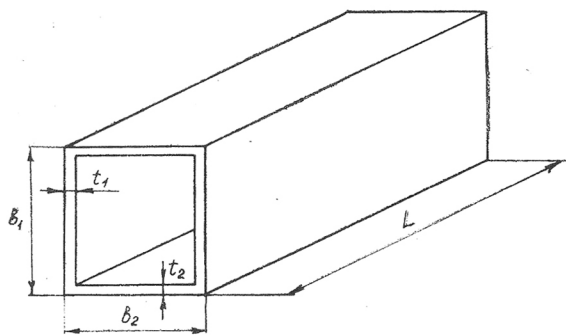


Рис. 1. Тонкостенный стержень прямоугольного сечения

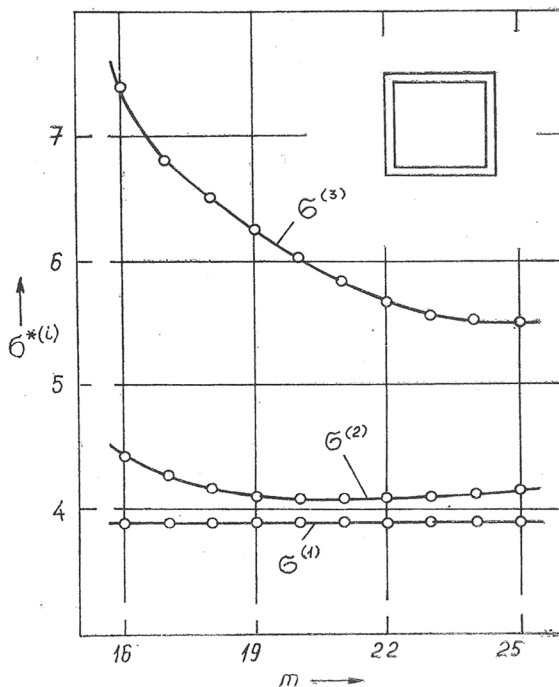


Рис. 2

Таблица 2

Оптимальные параметры и предельное напряжение стойки прямоугольного профиля ($b_2/b_1=1/2$) при $P^*=1,0$

Теория устойчивости	Амплитуда общей погиби ζ_1^*	σ^*	G^*	$\frac{b_1}{L}$	$\frac{t_1}{L}$	$\frac{t_1}{b_1}$	$\frac{b_2}{L}$	$\frac{t_2}{L}$	$\frac{t_2}{b_2}$
Линейная	0	2,90	0,345	0,070	$0,20 \cdot 10^{-2}$	0,0280	0,035	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0286
Нелинейная	0,5	2,66	0,376	0,070	$0,22 \cdot 10^{-2}$	0,0313	0,035	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0285
	1,0	2,56	0,391	0,071	$0,23 \cdot 10^{-2}$	0,0324	0,036	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0280

ной форме), из которого следует, что оптимальная стойка не будет равноустойчивой и критические напряжения местной формы выше эйлеровых критических напряжений на 6...7 %.

На рис. 3, а построены зависимости веса оптимальной стойки от параметра нагрузки при линейной оптимизации (пунктирная кривая) и нелинейной оптимизации с общей погибью $\zeta_1^*=0,5; 1,0$ и местной погибью $\zeta_2^*=0,5$. Увеличение параметра нагрузки и учет начальных несовершенств ведут к увеличению веса оптимальной стойки, причем влияние местной погиби оказывается более значительным, чем общих несовершенств. Вес стойки при несовершенствах $\zeta^*(0,5; 0,5)$ и $P^*=1,0$ увеличивается на 30 % по сравнению с линейным расчетом.

Зависимости безразмерных напряжений связанной потери устойчивости для оптимальной стойки от параметра нагрузки представлены на рис. 3, б (учитывалась только общая погибь $\zeta_1^*=0,5; 1,0$; расчет по линейной теории — пунктирная кривая). Предельное напряжение возрастает приблизительно пропорционально $\sqrt{P^*}$ и при больших P^* напряжение может превысить предел текучести. В этом случае данный расчет, вообще говоря, неприменим.

Стойка прямоугольного профиля. Анализ оптимизации стойки прямоугольного профиля проводился при фиксированном отношении ширины стенки к ширине полки. Оптимальные параметры при $P^*=1,0$ для стойки с отношением $b_2/b_1=1/2$ приведены в табл. 2, с отношением $b_2/b_1=1/3$ — в табл. 3. Задача решалась с введением дополнительного геометрического ограничения — минимальной толщины стенки t_2 — вида $t_2/L \geq 0,001$. Это ограничение во всех случаях являлось активным для стенки. По сравнению с квадратным сечением вес оптимальной стойки прямоугольного профиля при общем изгибе относительно оси наименьшей жесткости заметно повышается. Так, при $b_2/b_1=1/2$ и погиби $\zeta_1^*=1,0$ вес повышается на 27 % для линейного оптимума и на 32 % для нелинейного оптимума. При увеличении общей погиби ширина полки и стенки практически не изменяется, а

Таблица 3

Оптимальные параметры и предельное напряжение стойки прямоугольного профиля ($b_2/b_1=1/3$) при $P^*=1,0$

Теория устойчивости	Амплитуда общей погиби ζ_1^*	σ^*	G^*	$\frac{b_1}{L}$	$\frac{t_1}{L}$	$\frac{t_1}{b_1}$	$\frac{b_2}{L}$	$\frac{t_2}{L}$	$\frac{t_2}{b_2}$
Линейная	0	2,26	0,443	0,089	$0,22 \cdot 10^{-2}$	0,0247	0,045	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0225
Нелинейная	0,5	2,04	0,491	0,089	$0,23 \cdot 10^{-2}$	0,0256	0,045	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0222
	1,0	1,98	0,504	0,090	$0,25 \cdot 10^{-2}$	0,0270	0,046	$0,1 \cdot 10^{-2}$	0,0221

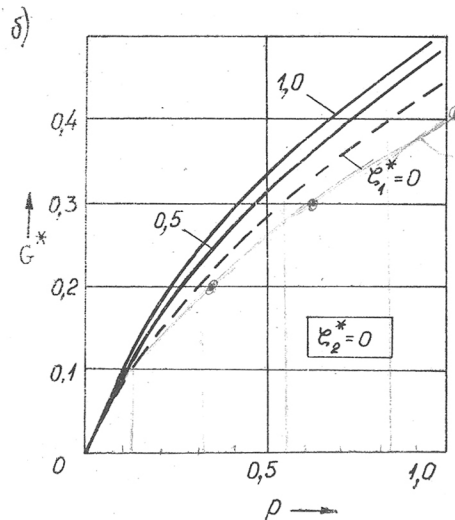
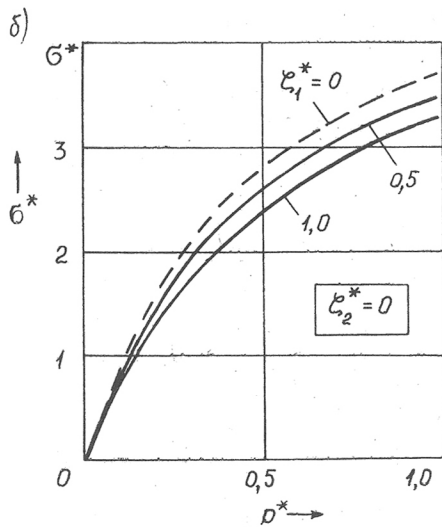
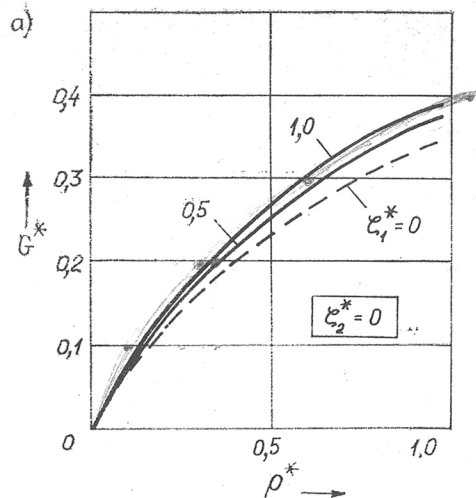
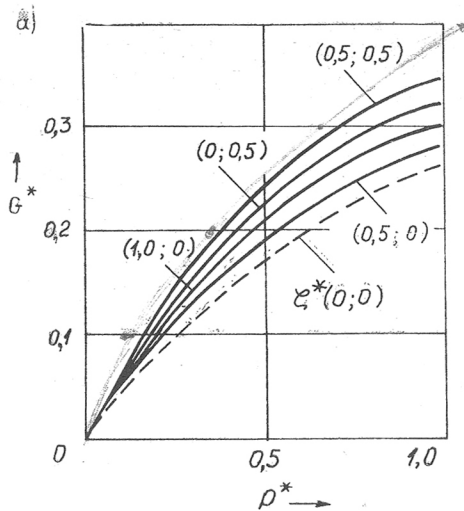


Рис. 3. Вес (а) и напряжения (б) оптимальной стойки квадратного сечения

Рис. 4. Вес оптимальной стойки прямоугольного профиля с соотношениями $b_2/b_1=1/2$ (а) и $b_2/b_1=1/3$ (б)

увеличивается в основном толщина полки, которая в 2...2,5 раза больше толщины стенки.

Зависимости веса от параметра нагрузки для стержней прямоугольного сечения с различным соотношением b_2/b_1 приведены на рис. 4, а, б (пунктирной линией показан расчет по линейной теории).

Выводы. При оптимизации реальных сжатых тонкостенных стержней, имеющих несовершенства формы, необходимо учитывать связанность форм потери устойчивости. При этом оптимальные параметры и, в частности, вес будут зависеть от амплитуд несовершенств. Для реальных амплитуд вес повышается на 25...30 %.

В отличие от линейной теории, оптимальная стойка, полученная с учетом взаимодействия форм потери устойчивости, не является равноустойчивой по общей и местной формам — критическое напряжение местной формы будет выше критического напряжения общей формы на 5...10 %. Оптимальная стойка, полученная по линейной теории, может разрушаться при нагрузке на 10...20 % меньше расчетной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маневич А. И. Весовая оптимизация продольно сжатой панели с ребрами таврового профиля // Прикладная механика. — 1990. — 26. — № 2. — С. 82—88.
2. Маневич А. И. Оптимизация сжатой продольно подкрепленной цилиндрической

- оболочки на основе линейной и нелинейной теории устойчивости//Строительная механика и расчет сооружений.— 1990.— № 3.— С. 57—62.
3. Rondal J. On the optimal design of thin-walled compressed members//Int. Collog. East-Eur. Sess. "Stab. Steel Struct.", Budapest, Apr. 25—27, 1990: Final Rept.— Budapest, 1990.— S. 253—257.
 4. Thompson J. M., Lewis G. M. On the optimum design of thin-walled members//J. Mech. Phys. Solids.— V. 20, N 2.— 1972.
 5. Neut A. van der. The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members//Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech. (Stanford Univ., 1968), Springer-Verlag) 1969.— P. 389—399.
 6. Маневич А. И., Ракша С. В. Связанная потеря устойчивости сжатых тонкостенных стержней закрытого поперечного сечения//Прикладная механика.— 1993.— 29.— № 2.— С. 62—68.
 7. Koiter W. T., Neut A. van der. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels//Thin-Walled Structures.— 1980: part. 1.— P. 51—66; part 2.— P. 66—86.
 8. Маневич А. И., Зайденберг А. И. Линеаризованный метод приведенного градиента для решения задач нелинейного программирования//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1974.— № 6.

Получено 22.12.93