

МНОГОМЕСТНЫЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ

Введены многоместные функции множества и даны некоторые их применения.

Введені багатомісні функції множини і дані деякі їх застосування.

The entered multi-seater functions of great number and information are some their applications.

Во многих инженерных и экономических задачах естественным является использование функций множеств, потому что могут быть измерены те показатели, которые в математическом плане представляет собой функции множества [1].

Пусть граф $G(V, E)$ является математической моделью сети железных дорог, где V – перечень, а E – перечень путей между городами (дуги графа). Каждая дуга $e \in E$ имеет длину $l(e)$ и заданы грузопотоки и пассажиропотоки между городами. Возникает задача разбиения графа $G(V, E)$ на три графа $G_r(V_r, E_r)$, $G_n(V_n, E_n)$, $G_{rn}(V_{rn}, E_{rn})$, которые описывали бы три разбиения сети железных дорог для чисто грузовых, пассажирских перевозок и совместного использования.

Насколько удачно выполнено разбиение будем оценивать следующими показателями:

- временем доставки грузов;
- временем доставки пассажиров;
- затратами на содержание в работоспособном состоянии соответствующих сетей.

Очевидно, что перечисленные показатели являются функциями множеств $V_r, E_r, V_n, E_n, V_{rn}, E_{rn}$, что приводит к изучению многоместных функций множеств, которые будем записывать в виде $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

В рассмотренном примере, например, затраты на содержание в работоспособном состоянии сети z , представляют собой многоместную (шестиместную) функцию

$$z = F(V_r, E_r, V_n, E_n, V_{rn}, E_{rn}).$$

Целью данной работы является рассмотрение основ исчисления многоместных функций множества.

В общем случае, когда рассматривается функция $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$, природа (инженерно-экономический смысл) множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ может быть произвольной, но фиксированной.

Последнее означает, что рассматриваются множества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются подмножествами соответствующих исходных множеств $\Omega_i, i = \overline{1, n}$.

Введем классы подмножеств $\mathfrak{A}(\Omega)$, $\mathfrak{A}(\Omega_1), \dots, \mathfrak{A}(\Omega_n)$, относительно которых будем предполагать, что каждый из перечисленных классов является как минимум кольцом, т. е., если A_i и B_i принадлежат $\mathfrak{A}(\Omega_i)$, то их объединение $A_i \cup B_i$ и разность $A_i \setminus B_i$ также принадлежат этому кольцу.

Определение 1. Отображение классов $\{\mathfrak{A}(\Omega), \mathfrak{A}(\Omega_1), \dots, \mathfrak{A}(\Omega_n)\}$ на действительную ось будем называть многоместной функцией множеств и обозначать через $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

На каждом классе $\mathfrak{A}(\Omega_i)$ определим свою меру $\mu_i(A_i)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\forall A_i \in \mathfrak{A}(\Omega_i) \rightarrow \mu_i(A_i) \geq 0$ и если $\mu_i(A_i) = 0$, то $A_i \neq \emptyset$.
2. $\forall A_i, B_i \in \mathfrak{A}(\Omega_i) \rightarrow \mu_i(A_i \cup B_i) = \mu_i(A_i) + \mu_i(B_i) - \mu_i(A_i \cap B_i)$

Определение 2. Если $\{A_{in}\}, n = 1, 2, \dots$ последовательность множеств $\mathfrak{A}(\Omega_i)$, то множество A_i будем называть предельным множеством данной последовательности, если имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i(A_{in} \Delta A_i) = 0, \quad (1)$$

где Δ – операция симметричной разности двух множеств.

Заметим, что множество A_i можно определить и как предел по Э. Борелю, т. е. вводятся два множества $\bar{A}_i$ и $\underline{A}_i$, которые определяются следующим образом:

- если $\omega \in \bar{A}_i$, то ω принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_{in}\}$;
- если $\omega \in \underline{A}_i$, то можно указать такой номер $n(\omega)$, что для $n > n(\omega)$ элемент ω принадлежит всем A_{in} , тогда если $\underline{A}_i = \bar{A}_i$, то $A_i^* = \underline{A}_i = \bar{A}_i$ называется пределом по Борелю.

Теорема 1. Если существует предел по Э. Борелю и имеет место (1), то $A_i^* = A_i$.

Доказательство. Пусть $\omega \in A_i^*$, но $\omega \notin A_i$, то-

гда $\mu_i(A_{in} \Delta A_i) \geq \mu_i(\omega) > 0$, что противоречит (1). Следовательно, $\omega \in A_i$ и тем самым $A_{i*} \subseteq A_i$. Если же $\omega \in A_i$, то в силу (1) можно указать такой номер $n(\omega)$, что $\omega \in A_{in}$ при $n > n(\omega)$, но это означает, что $\omega \in A_i$, а так как $A_i = A_{i*}$, то получаем $A_i \subseteq A_{i*}$, что и доказывает теорему.

Следствие. Понятие предела последовательности множеств является инвариантным относительно меры, удовлетворяющей условиям определения 1.

Определение 3. Многочестная функция множеств $F(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$ непрерывна по множеству A_i , если имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(A_1, A_2, \dots, A_{ik}, \dots, A_n) = F(A_1, A_2, \dots, \lim A_{ik}, \dots, A_n)$$

на любой последовательности A_{ik} , сходящейся к A_i .

Из этого определения следует, что понятие непрерывности является свойством функции и не зависит от меры. Однако, если $\mu_i(A_*) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а $A_k \rightarrow \emptyset$, то непрерывность может быть сформулирована следующим образом:

Если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, то тогда из неравенства $\mu_i(A_i' \Delta A_i'') < \delta(\varepsilon)$ следует

$$|F(A_1, A_2, \dots, A_i', \dots, A_n) - F(A_1, A_2, \dots, A_i'', \dots, A_n)| < \varepsilon.$$

Пусть последовательность множеств $\{A_{ik}\}$ сходится к множеству A_i и введем в рассмотрение последовательность чисел

$$a_{ik} = \frac{F(A_1, A_2, \dots, A_{ik}, \dots, A_n) - F(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)}{\mu_i(A_{ik} \Delta A_i) - \mu(A_i)}$$

Определение 4. Если существует предел чисел a_{ik} при $k \rightarrow \infty$, то этот предел будем называть частной производной от многочестной функции F по мере μ_i на последовательности $\{A_{ik}\}$ и записывать следующим образом

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i} \Big|_{\{A_{ik}\}} \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ik}.$$

Замечание. Если F одночестная функция множества, то частную производную (2) будем называть просто производной от $F(A)$ по мере μ на последовательности $\{A_k\}$.

Теорема 2. Если $F(A) \leq F'(A)$ для любого $A' \in \mathfrak{A}(\Omega)$ и существует производная на последовательности $\{A_k\}$, такой, что $A_k \subseteq A$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = B$, то имеет место

$$\frac{dF(A)}{d\mu_i} \Big|_{\{A_k\} \rightarrow B \subset A} \leq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$\frac{F(A_k \Delta A) - F(A)}{\mu(A_k \Delta A) - \mu(A)} = \frac{F(A_k \Delta A) - F(A)}{-\mu(A_k)} \leq 0. \quad (3)$$

Так как $\mu(A_k) > 0$, а $F(A_k \Delta A) - F(A) \geq 0$ по условию теоремы. Устремляя $k \rightarrow \infty$ приходим к неравенству (3). Данной теореме в предположении непрерывности $\mu(A)$ и $F(A)$ можно придать следующую форму

$$\frac{dF(A)}{d\mu} \Big|_{\{A_k\} \rightarrow B} = \frac{F(A \Delta B) - F(A)}{\mu(A \Delta B) - \mu(A)},$$

которую можно использовать для нахождения множества A .

Пример 1. Пусть

$$F(A) = \int_A f(x) \mu(dx),$$

где интеграл принимается в смысле Лебега по введенной мере μ . В этом случае имеем

$$\frac{dF(A)}{d\mu} \Big|_{\{A_k\} \rightarrow B} = \frac{F(B) - 2F(A \cap B)}{\mu(B) - 2\mu(A \cap B)}.$$

Если $B \subseteq A$, то

$$\frac{dF(A)}{d\mu} \Big|_{\{A_k\} \rightarrow B \subset A} = \frac{\int_B f(x) \mu(dx)}{\mu(B)}.$$

Теперь предположим, что B является одноточечным множеством $\{x\}$, тогда приходим к соотношению

$$\frac{dF(A)}{d\mu} \Big|_{\{A_n\} \rightarrow \{x\} \subset A} = \frac{f(x) \cdot \mu(x)}{\mu(x)} = f(x),$$

откуда с необходимостью приходим к определению множества A в виде

$$A = \{x \in \Omega : f(x) \leq 0\}. \quad (4)$$

Данный результат очевиден, но метод его получения применим и в случае, когда Ω является дискретным множеством, а $F(A)$ представляема следующим образом

$$F(A) = \sum_{x \in A} f(x).$$

В этом случае

$$\frac{dF(A)}{d\mu} \Big|_{\{A_n\} \rightarrow \{x\} \subset A} = \frac{f(x)}{\mu(x)}$$

и с учетом того, что $\mu(x) > 0$, приходим к соотношению (4).

Пример 2. Пусть $F(A)$ определяется формулой

$$F(A) = \int_A f_1(x) dx + \int_{\Omega \setminus A} f_2(x) dx,$$

тогда с учетом (4) множество A , доставляющее минимум функции $F(A)$ с необходимостью имеет вид

$$A = \{x \in \Omega : f_1(x) - f_2(x) \leq 0\}.$$

Данное представление следует из того, что $F(A)$ можно записать в виде

$$F(A) = \int_A (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_{\Omega} f_2(x) dx$$

и так как Ω фиксированное множество, то можно ограничиться рассмотрением функции

$$\tilde{F}(A) = \int_A (f_1(x) - f_2(x)) dx,$$

которая от $F(A)$ отличается на постоянное слагаемое $\int_{\Omega} f_2(x) dx$.

Пример 3. Пусть множество Ω разбито на три подмножества A_1, A_2, A_3 так, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, если $i \neq j$ и $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$. Рассматривается трехместная функция множеств

$$F(A_1, A_2, A_3) = F_1(A_1) + F_2(A_2) + F_3(A_3).$$

Необходимо найти такое разбиение множества Ω , чтобы данная функция принимала минимальное значение.

Если на множества A_1, A_2, A_3 не наложено никаких ограничений, то с необходимостью должно иметь место

$$\left. \frac{dF(A_1, A_2, A_3)}{d\mu_i} \right|_{\{B_k\} \rightarrow \{B_i\} \subset A_i} \leq 0, i = \overline{1, 3},$$

что следует из определения (2).

В нашем случае $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. С учетом условия $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ на последовательность множеств $B_k \in \mathcal{A}(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$ наложим требование, что все $B_k \subseteq A_1$ и так как $(A_1 \Delta B_k) \cup (A_2 \Delta B_k) \cup A_3 = \Omega$ имеем последовательность чисел

$$a_k = \frac{F(A_1 \Delta B_k, A_2 \Delta B_k, A_3) - F(A_1, A_2, A_3)}{\mu(A_1 \Delta B_k) - \mu(A_1)}.$$

Если эта последовательность имеет предел, то его естественно назвать условной частной производной, и в рассматриваемом случае получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_1(A_1 \Delta B_k) - F_1(A_1) + F_2(A_2 \Delta B_k) - F_2(A_2)}{\mu(A_1 \Delta B_k) - \mu(A_1)}.$$

Чтобы продвинуться далее будем предполагать аддитивность функций

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-F_1(B_k) - F_2(B_k)}{-\mu(B_k)} = \frac{F_1(B) - F_2(B)}{\mu(B)},$$

где $B = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$.

Если $B = \{x\}$, то имеем

$$A_1 \subset \{x \in \Omega : (F_1(\{x\}) - F_2(\{x\})) / \mu(\{x\}) \leq 0\}.$$

Аналогично получаем, что

$$A_1 \subset \{x \in \Omega : (F_1(\{x\}) - F_3(\{x\})) / \mu(\{x\}) \leq 0\}.$$

Следовательно, в качестве A_1 можно взять

$$A_1 = \{x \in \Omega : F_1(\{x\}) - F_2(\{x\}),$$

$$F_1(\{x\}) - F_3(\{x\}) \leq 0\},$$

т. к. $\mu(\{x\}) > 0$, а множества A_2 и A_3 будут следующими

$$A_2 = \{x \in \Omega : F_2(\{x\}) - F_1(\{x\}) \leq 0,$$

$$F_2(\{x\}) - F_3(\{x\}) \leq 0\};$$

$$A_3 = \{x \in \Omega : F_3(\{x\}) - F_1(\{x\}) \leq 0,$$

$$F_3(\{x\}) - F_2(\{x\}) \leq 0\}.$$

Пусть

$$F_i(A_i) = \int_{A_i} f_i(x) \mu(dx),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега-Стальтьеса, тогда

$$A_1 = \{x \in \Omega : f_1(x) - f_2(x); f_1(x) - f_3(x) \leq 0\};$$

$$A_2 = \{x \in \Omega : f_2(x) - f_1(x); f_2(x) - f_3(x) \leq 0\};$$

$$A_3 = \{x \in \Omega : f_3(x) - f_1(x); f_3(x) - f_2(x) \leq 0\}.$$

Заметим, что в рассмотренных примерах использовались простейшие правила дифференцирования функций множества [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М. - Л., Гостехиздат, 1934. – 342 с.
2. Босов А. А. Функции множества и их применение. – Днепропетровск: Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2007 г.