

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Український державний університет науки і технологій

Кафедра «Прикладна математика»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
та завдання до модульного контролю

ЕЛЕКТРОННИЙ АНАЛОГ ДРУКОВАНОГО ВИДАННЯ

Дніпро – 2022

УДК 518 (075)

Укладачі:

Т. Ф. Михайлова, Ю. П. Бабич, С. О. Пічугов

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. *В. І. Шинкаренко*,
канд. фіз.-мат. наук, доц. *З. М. Гасанов*

Експерти:

канд. фіз.-мат. наук, доц. *З. М. Гасанов*,
канд. техн. наук, доц. *О. С. Куроп'ятник*

Рекомендовано МКФ КТС (протокол № 5 від 11.02.2022).

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 555 від 16.06.2022)

Вища математика. Аналітична геометрія [Текст] : метод. рекомендації до практичних занять та завдання до модульного контролю / уклад.: Т. Ф. Михайлова, Ю. П. Бабич, С. О. Пічугов; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро, 2022. – 34 с.

У методичних рекомендаціях викладено необхідний теоретичний матеріал та наведено розв'язання типових прикладів з курсу аналітичної геометрії. Складені варіанти завдань до модульного контролю та типового розрахунку.

Рекомендації призначені для студентів I курсу всіх спеціальностей.

Іл. 24. Бібліогр.: 6 назв.

© Михайлова Т. Ф., Бабич Ю. П.,
Пічугов С. О., укладання, 2022

© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2022

Зміст

Передмова	4
1 Метод координат	5
1.1. Поділ відрізка в заданому відношенні	5
2 Пряма на площині	7
2.1. Різновиди рівнянь прямої	7
2.2. Основні задачі на пряму	8
2.2.1. Перетворення рівнянь прямої	8
2.2.2. Побудова рівняння прямої	9
2.3. Кут між прямими	10
2.4. Відстань точки до прямої	10
2.5. Розв'язання типового завдання	11
2.6. Задачі для індивідуальних завдань	14
2.7. Завдання до модульного контролю	15
3 Криві другого порядку	17
3.1. Означення та рівняння	17
3.1.1. Коло	17
3.1.2. Еліпс	17
3.1.3. Гіпербола	18
3.1.4. Парабола	19
3.2. Варіанти завдань до модульного контролю	20
4 Площина та пряма в просторі	26
4.1. Нормальне рівняння площини	26
4.2. Загальне рівняння площини та його зв'язок з нормальним	26
4.3. Рівняння площини у відрізках на осях	27
4.4. Рівняння площини, що проходить через задану точку	28
4.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки	28
4.6. Кут між двома площинами	28
4.7. Відстань від точки до площини	28
4.8. Канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі	29
4.9. Загальні рівняння прямої	29
4.10. Кут між двома прямими	30
4.11. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	30
4.12. Взаємне розташування прямої та площини	30
4.13. Варіанти завдань до типового розрахунку	31
Бібліографічний список	33

Передмова

Метою даних рекомендацій є підготовка студентів першого курсу до здачі першого модульного контролю.

Дані рекомендації містять основні теоретичні положення та приклади розв'язування типових задач. Наводяться задачі для індивідуальних завдань.

Завдання містять задачі, які охоплюють такі теми:

1. Пряма на площині.
2. Лінії другого порядку.
3. Площина.
4. Пряма в просторі.

Завдання згруповані по темам і наводяться наприкінці кожної теми.

Електронний варіант рекомендацій подається у вигляді файлу формату PDF. Для полегшення навігації по документу організована структура закладок за кожною темою та параграфом в темі. Передбачена можливість пошуку в документі за заданим словом. Зауваження: якщо слово, за яким відбувається пошук, містить літеру «і», то її треба набирати латиницею.

Бібліографічний список містить основні добре відомі підручники і збірники задач. Автори вважають, що цей список можна було б значно розширити. Читачі, при бажанні, можуть знайти в мережі літературу за своїм вподобанням.

Тема 1

Метод координат

Ми виходимо з того, що читачу з курсу шкільної математики відомі основні положення методу координат: поняття декартової (прямокутної) системи координат на площині та в просторі, поняття координат точки. У цій темі ми зупинимось на питанні, що не розглядається в курсі шкільної математики.

1.1. Поділ відрізка в заданому відношенні

Під величиною напрямленого відрізка $\overline{AB}$ (рис. 1) числової осі розуміють число: Величина $\overline{AB} = AB = x_2 - x_1$.

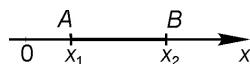


Рис. 1.

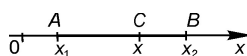


Рис. 2.

Кажуть, що точка C ділить напрямлений відрізок $\overline{AB}$ числової осі Ox у відношенні λ (рис. 2), якщо

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (1.1.1)$$

Із (1.1.1) знаходимо координату x точки C :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ — деякі задані точки площини і точка $C(x, y)$ ділить відрізок $\overline{AB}$ (рис. 3) у відношенні λ , то її координати обчислюються за формулами:

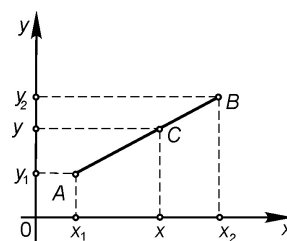


Рис. 3.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.1.2)$$

Зокрема, координати середини відрізка ($\lambda = 1$) можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} x_{\text{середини}} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_{\text{середини}} &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Приклад 1. Знайти координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M — середини відрізка BC :

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2},$$

$$y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Координати точки N перетину медіан знайдемо з умови, що точка N ділить відрізок AM у відношенні $\lambda = 2 : 1$. Тобто

$$x_N = \frac{x_A + \lambda x_M}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Аналогічно знаходимо, що $y_N = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

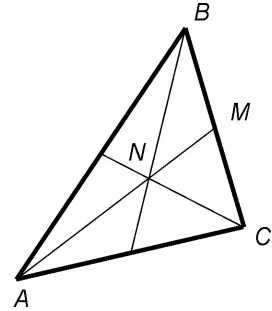


Рис. 4.

Тема 2

Пряма на площині

2.1. Різновиди рівнянь прямої

Відомо, що будь-яке рівняння першого степеня відносно двох змінних x та y є рівнянням прямої. Розглянемо 4 основні види рівнянь прямої.

1. Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b. \quad (2.1.1)$$

Коефіцієнт k називають кутовим коефіцієнтом: $k = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 5).

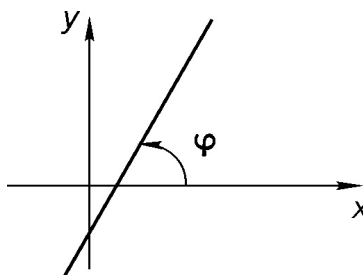


Рис. 5.

2. Загальне рівняння

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.1.2)$$

Коефіцієнти A і B — координати вектора $\mathbf{N} = \{A, B\}$, перпендикулярного до прямої (2.1.2). Вектор $\mathbf{N} = \{A, B\}$ називають вектором нормаллю до прямої (2.1.2).

3. Рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.1.3)$$

Тут a та b — величини відрізків, що відтинає пряма (2.1.3) на осях координат (рис. 6).

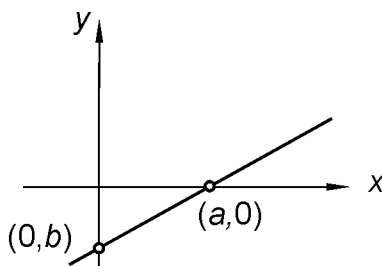


Рис. 6.

4. Нормальне рівняння

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (2.1.4)$$

Тут α — кут, утворений перпендикуляром, проведеним із початку координат до прямої, з додатним напрямом осі Ox (рис. 7). Тобто вектор $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ — одиничний вектор-нормаль, спрямований із початку координат на пряму (2.1.4), p — відстань початку координат до прямої (2.1.4).

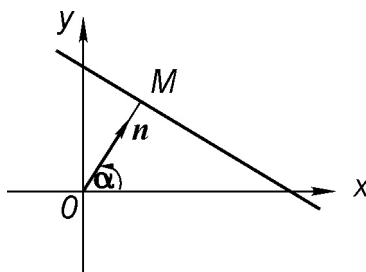


Рис. 7.

Звертаємо увагу, що рівняння прямої є її нормальним рівнянням, якщо сума квадратів коефіцієнтів при x і y дорівнює 1, а вільний член від'ємний. Наприклад, рівняння $0,6x + 0,8y + 2 = 0$ не є нормальним рівнянням: вільний член цього рівняння є додатним. Неважко переконатись, що рівняння $-0,6x - 0,8y - 2 = 0$ є нормальним рівнянням тієї самої прямої.

2.2. Основні задачі на пряму

2.2.1. Перетворення рівнянь прямої

Оскільки будь-яке рівняння прямої досить просто зводиться до загального вигляду (для цього усі доданки в рівнянні треба перенести ліворуч), то розглянемо перетворення загального рівняння прямої.

Отже, нехай відоме загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0.$$

Щоб отримати з нього рівняння з кутовим коефіцієнтом, треба його розв'язати відносно y . Це можливо, якщо $B \neq 0$:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Як бачимо, отримане рівняння має вигляд $y = kx + b$, де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Припустимо, що пряма не проходить через початок координат (у цьому випадку $C \neq 0$). Щоб отримати із загального рівняння рівняння у відрізках на осях, проведемо такі перетворення:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ Ax + By &= -C, \\ \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} &= 1, \\ \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} &= 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ми звели загальне рівняння прямої до вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Щоб із загального рівняння отримати нормальне рівняння, помножимо загальне рівняння на деяке (поки що невідоме) число M :

$$M \cdot Ax + M \cdot By + M \cdot C = 0.$$

Виберемо число M так, щоб отримане рівняння було рівнянням у нормальній формі: щоб сума квадратів коефіцієнтів при x та y дорівнювала одиниці

$$M^2 A^2 + M^2 B^2 = 1,$$

а вільний член був від'ємним

$$M \cdot C < 0.$$

Із цих двох умов знаходимо M :

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак числа M треба вибрати протилежним знакові числа C (якщо $C = 0$, то знак числа M можна взяти довільно). Число M називають *нормуючим множником*.

2.2.2. Побудова рівняння прямої

Усе розмаїття задач на побудову рівняння прямої зводиться до відшукування або двох точок, через які проходить пряма, або точки, що лежить на прямій, і кутового коефіцієнта прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.2.1)$$

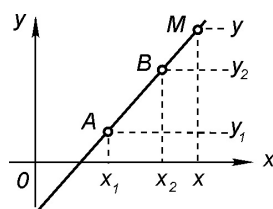


Рис. 8.

Справді, нехай точка $M(x, y)$ — поточна точка прямої. Тоді вектори $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ та $\overline{AM} = \{x - x_1, y - y_1\}$ — колінеарні, тобто їхні координати пропорційні. Ця умова і дає рівняння (2.2.1).

Перепишемо рівняння (2.2.1) у вигляді

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Враховуючи, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — тангенс кута нахилу прямої до осі Ox (рис. 8), тобто дорівнює кутовому коефіцієнту прямої, що проходить через дві точки, отримане рівняння запишемо у вигляді

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2.2.2)$$

Рівняння (2.2.2) називають *рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямі*.

2.3. Кут між прямими

Кут між прямими можна знайти з таких міркувань (рис. 9):

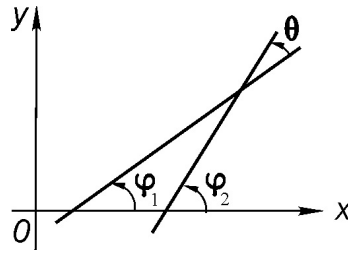


Рис. 9.

зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох інших його кутів, не суміжних з ним, тобто $\varphi_2 = \theta + \varphi_1$. Звідси знаходимо: $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Позначимо кутові коефіцієнти прямих через k_1 і k_2 : $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$. Тоді

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (2.3.1)$$

Очевидною є умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2. \quad (2.3.2)$$

Якщо $\theta = 90^\circ$, то $\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, або $1 + k_1 k_2 = 0$. Звідси маємо умову перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (2.3.3)$$

2.4. Відстань точки до прямої

Розглянемо спочатку задачу обчислення відстані між двома паралельними прямими. Паралельні прямі можуть проходити або по один бік від початку координат (рис. 10, а), або по різні боки від нього (рис. 10, б).

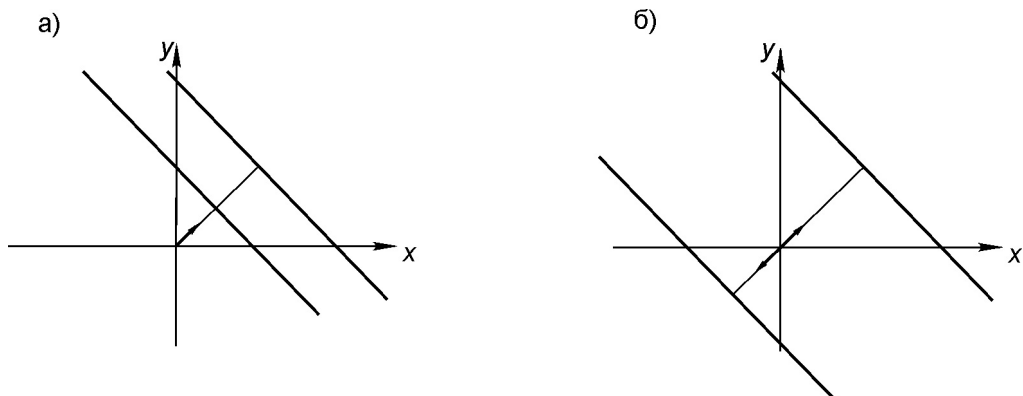


Рис. 10.

Нехай прямі задані нормальними рівняннями. Тоді у першому випадку (див. рис. 10, а) їхні рівняння мають вигляд:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0,$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_2 = 0.$$

Очевидно, що у цьому випадку відстань між прямими можна обчислити за формулою

$$d = |p_2 - p_1|. \quad (2.4.1)$$

У другому випадку (див. рис. 10, б) одиничні нормалі, проведені з початку координат до кожної з цих прямих, мають протилежний напрям. Тобто, якщо одинична нормаль до однієї з цих прямих, наприклад, до першої, має координати $\mathbf{n}_1 = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, то $\mathbf{n}_2 = \{-\cos \alpha, -\sin \alpha\}$, і рівняння прямих можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 &= 0, \\ -x \cos \alpha - y \sin \alpha - p_2 &= 0. \end{aligned}$$

У цьому випадку відстань між прямими обчислюється за формулою

$$d = |p_2 + p_1| \quad (2.4.2)$$

Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ — деяка точка другої прямої. Тоді у першому випадку виконується рівність:

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p_2 = 0.$$

Звідки $p_2 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$. Підставивши це подання p_2 до формули обчислення відстані, знайдемо

$$d = |p_2 - p_1| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p_1|.$$

У другому випадку $p_2 = -x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$, а формула обчислення відстані набуває вигляду

$$d = |p_2 + p_1| = |-x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha + p_1| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p_1|.$$

Як бачимо, формули обчислення відстані в обох випадках мають однаковий вигляд.

Враховуючи, що відстань заданої точки до заданої прямої — це відстань між заданою прямою і паралельною їй прямою, що проходить через задану точку, маємо формулу обчислення відстані точки (x_0, y_0) до прямої $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (2.4.3)$$

З а у в а ж е н н я. Для обчислення відстані між паралельними прямими можна діяти так: взяти на одній із прямих яку-небудь точку і знайти відстань цієї точки до іншої прямої. При цьому відпадає потреба в дослідженні взаємного розташування паралельних прямих відносно початку координат.

2.5. Розв'язання типового завдання

Задача 1. Задані вершини трикутника ABC :

$$A(3, 2), B(4, 4), C(-2, 6).$$

Знайти:

- 1) рівняння медіани AM і подати його як загальне рівняння, рівняння з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях та в нормальному вигляді;
- 2) рівняння і довжину висоти BD ;
- 3) точку перетину медіани AM та висоти BD ;

4) кут між медіаною AM та висотою BD .

Побудувати трикутник, прямі AM та BD в декартовій системі координат.

Р о з в ' я з а н н я.

1. Знаходимо координати точки M – середини відрізка BC за формулою (1.1.3):

$$x_M = \frac{4+2}{2} = 1, \quad y_M = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Рівняння прямої AM знаходимо за формулою (2.2.1):

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-2}{5-2} \Rightarrow 3(x-3) = -2(y-2) \Rightarrow 3x+2y-13=0.$$

Загальне рівняння медіани AM має вигляд $3x+2y-13=0$.

Зводимо його до рівняння з кутовим коефіцієнтом (див. с. 6):

$$3x+2y-13=0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

Рівняння медіани AM з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

Побудуємо рівняння медіани AM у відрізках на осях:

$$3x+2y-13=0 \Rightarrow 3x+2y=13 \Rightarrow \frac{3x}{13} + \frac{2y}{13} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{13}{3}} + \frac{y}{\frac{13}{2}} = 1.$$

Рівняння медіани AM у відрізках на осях має вигляд

$$\frac{x}{\frac{13}{3}} + \frac{y}{\frac{13}{2}} = 1.$$

Зведемо рівняння медіани AM до нормального вигляду. Обчислюємо нормуючий множник. Оскільки вільний член у загальному рівнянні від'ємний, то нормуючий множник є додатним:

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Помножимо загальне рівняння на нормуючий множник:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \sqrt{13} = 0.$$

Це і є нормальне рівняння медіани AM .

2. Знайдемо рівняння висоти BD . Для того, щоб скласти рівняння прямої, треба знати або її дві точки, або одну її точку та кутовий коефіцієнт прямої. Нам відома точка прямої — точка B . Нам відомо також, що пряма BD перпендикулярна до прямої AC . Із цієї умови ми і знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BD :

$$k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}}.$$

Обчислюємо кутовий коефіцієнт прямої AC (див. с. 9):

$$k_{AC} = \frac{6-2}{-2-3} = -\frac{4}{5}.$$

Отже, $k_{BD} = \frac{5}{4}$, а рівняння висоти BD має вигляд $y - 4 = \frac{5}{4}(x - 4)$.

Довжину висоти BD знайдемо як відстань точки B до прямої AC . Для цього складемо рівняння прямої AC , зведемо його до нормального вигляду, підставимо до нормального рівняння прямої AC координати точки B і обчислимо відстань точки B до прямої AC :

$$\begin{aligned} y - 6 &= -\frac{4}{5}(x + 2) \Rightarrow 4x + 5y - 22 = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{\sqrt{41}} \Rightarrow \frac{4x + 5y - 22}{\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d &= \frac{|4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 22|}{\sqrt{41}} = \frac{14}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Довжина висоти BD : $h_{BD} = \frac{14}{\sqrt{41}}$.

3. Знайдемо точку перетину медіани AM та висоти BD . Для цього розв'яжемо систему, що складається з рівнянь прямих AM і BD :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 13 = 0, \\ y - 4 = \frac{5}{4}(x - 4). \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x = \frac{30}{11}$, $y = \frac{53}{22}$.

4. Обчислимо тангенс кута між прямими AM та BD . Наведемо значення кутових коефіцієнтів цих прямих: $k_{AM} = -\frac{3}{2}$, $k_{BD} = \frac{5}{4}$. Тоді

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{5}{4} - \frac{-3}{2}}{1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{-3}{2}} = \frac{88}{17}.$$

Наведемо рисунок:

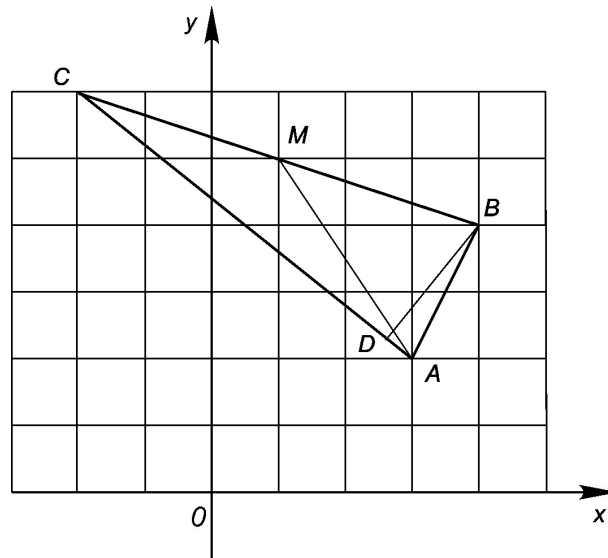


Рис. 11.

2.6. Задачі для індивідуальних завдань

Задача 1. Задані вершини трикутника ABC :

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3).$$

Знайти:

1) рівняння медіани AM і подати його як загальне рівняння, рівняння з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях та в нормальному вигляді;

2) рівняння і довжину висоти BD ;

3) точку перетину медіани AM та висоти BD ;

4) кут між медіаною AM та висотою BD .

Побудувати трикутник, прямі AM та BD в декартовій системі координат.

1. $A(8, -4), B(5, 8), C(3, 6)$.
2. $A(4, 1), B(8, 4), C(-2, 6)$.
3. $A(1, 1), B(0, 7), C(-1, 5)$.
4. $A(0, 3), B(6, 5), C(4, -5)$.
5. $A(6, 0), B(5, 0), C(7, 2)$.
6. $A(8, -5), B(5, 6), C(1, 4)$.
7. $A(6, 4), B(-2, 5), C(8, 1)$.
8. $A(1, 4), B(3, 6), C(5, 0)$.
9. $A(7, 8), B(4, 3), C(8, -1)$.
10. $A(1, 1), B(0, 7), C(6, 9)$.
11. $A(6, 1), B(4, 3), C(2, -1)$.
12. $A(5, 1), B(7, 2), C(3, 6)$.
13. $A(8, 0), B(4, 3), C(2, 1)$.
14. $A(1, 1), B(8, 4), C(2, 8)$.
15. $A(8, 7), B(2, 8), C(8, 4)$.
16. $A(6, 2), B(1, 2), C(7, 6)$.
17. $A(1, 0), B(8, 7), C(0, 3)$.
18. $A(1, 8), B(8, 4), C(6, 2)$.
19. $A(1, 6), B(0, 0), C(1, 0)$.
20. $A(8, 7), B(4, 6), C(2, 4)$.
21. $A(6, 3), B(2, 8), C(4, 6)$.

- 22. $A(0, 7), \quad B(5, 6), \quad C(1, 2).$
- 23. $A(5, 7), \quad B(8, -3), \quad C(-2, 5).$
- 24. $A(4, 5), \quad B(3, 7), \quad C(1, 3).$
- 25. $A(7, 6), \quad B(1, 4), \quad C(7, 6).$
- 26. $A(0, 6), \quad B(3, 7), \quad C(7, -3).$
- 27. $A(6, 3), \quad B(6, 4), \quad C(2, 6).$
- 28. $A(0, 6), \quad B(8, 2), \quad C(4, 8).$
- 29. $A(5, 5), \quad B(0, 4), \quad C(4, 8).$
- 30. $A(6, 6), \quad B(3, 4), \quad C(5, 8).$

2.7. Завдання до модульного контролю

Задані рівняння двох прямих і задана точка $M(x_0, y_0)$. Потрібно:

1. записати рівняння першої прямої
 - а) з кутовим коефіцієнтом;
 - б) у відрізках на осях;
2. визначити взаємне розташування двох прямих;
3. обчислити кут між прямими;
4. написати нормальне рівняння першої прямої і знайти відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до першої прямої;
5. знайти рівняння прямої, що проходить через точку M :
 - а) паралельно до першої прямої;
 - б) перпендикулярно до другої прямої;
 - в) паралельно до бісектриси першого координатного кута;
 - г) перпендикулярно до осі абсцис;
6. визначити площу трикутника, утвореного осями координат і першою прямою;
7. на осі ординат прямокутної системи координат знайти точку рівновіддалену від початку координат і другої прямої;
8. написати рівняння прямої, що проходить через точку M і точку перетину двох заданих прямих;
9. скласти рівняння бісектрис кутів, утворених заданими прямими;
10. знайти точку, симетричну з точкою M відносно першої прямої.

- | | |
|--|--|
| 1) $8x - 3y - 1 = 0,$
$4x + y - 13 = 0,$
$M(0; -1).$ | 2) $3x - y + 6 = 0,$
$4x - 3y - 5 = 0,$
$M(2; -2).$ |
| 3) $2x - 5y - 1 = 0,$
$x + 4y - 7 = 0,$
$M(4; -3).$ | 4) $3x + 7y - 15 = 0;$
$9x + 21y - 32 = 0;$
$M(-2; 3)$ |
| 5) $2x - y + 5 = 0;$
$3x - y + 6 = 0;$
$M(3; 1)$ | 6) $3x - 2y + 6 = 0;$
$x - 3y + 5 = 0;$
$M(-1; 2).$ |
| 7) $5x - 2y + 13 = 0;$
$x + 3y - 11 = 0;$
$M(2; 1)$ | 8) $5x - 3y - 15 = 0;$
$x + 5y - 3 = 0;$
$M(-2; -2)$ |
| 9) $5x - 2y + 6 = 0;$
$4x - y + 3 = 0;$
$M(1; 5)$ | 10) $5x - 3y - 15 = 0;$
$x + 5y - 3 = 0;$
$M(3; 1)$ |
| 11) $2x - y + 3 = 0;$
$x - y + 7 = 0;$
$M(3; -3)$ | 12) $x + 3y - 7 = 0;$
$5x - 2y + 6 = 0;$
$M(5; -1)$ |
| 13) $3x + y + 5 = 0;$
$x + 5y - 3 = 0;$
$M(1; -1)$ | 14) $3x - 5y - 8 = 0;$
$5x + y - 10 = 0;$
$M(2; 3)$ |
| 15) $2x - y + 3 = 0;$
$x + 5y - 7 = 0;$
$M(3; 4)$ | 16) $5x - 3y - 15 = 0;$
$x + 5y - 3 = 0;$
$M(-1; 1)$ |
| 17) $3x + y + 5 = 0;$
$x + 5y - 3 = 0;$
$M(2; -2)$ | 18) $3x - 2y + 6 = 0;$
$2x - y + 3 = 0;$
$M(4; 2)$ |
| 19) $2x - y + 3 = 0;$
$x - y + 7 = 0;$
$M(2; -1)$ | 20) $x + 2y + 3 = 0;$
$3x - 7y + 9 = 0;$
$M1; -1$ |
| 21) $4x + y - 12 = 0;$
$5x - 4y - 15 = 0;$
$M(3; 2)$ | 22) $x + 3y - 1 = 0;$
$5x + y - 10 = 0;$
$M(-1; 3)$ |
| 23) $5x - 3y - 11 = 0;$
$x + 2y + 3 = 0;$
$M(1; -2)$ | 24) $2x + 2y - 9 = 0;$
$5x - 4y - 15 = 0;$
$M(3; 1)$ |
| 25) $3x - 5y - 8 = 0;$
$x + 3y - 1 = 0;$
$M(3; 2)$ | 26) $7x - y + 3 = 0;$
$3x + 5y - 4 = 0;$
$M(2; -1)$ |
| 27) $x + 2y - 7 = 0;$
$3x - y + 5 = 0$
$M(1; 5)$ | 28) $x - y + 7 = 0;$
$3x - y - 1 = 0;$
$M(-3; 1)$ |

Тема 3

Криві другого порядку

3.1. Означення та рівняння

3.1.1. Коло

Колом називається геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї точки, що називається *центром*.

Канонічне рівняння кола має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (3.1.1)$$

де a та b – координати центра кола $O(a; b)$, r – радіус кола.

3.1.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величиною сталою. Передбачається, що ця стала величина більша відстані між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.1.2)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, a, b – півосі еліпса, $2a$ – велика вісь, $2b$ – мала вісь.

Ексцентриситет (ε) еліпса визначається формулою

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon < 1. \quad (3.1.3)$$

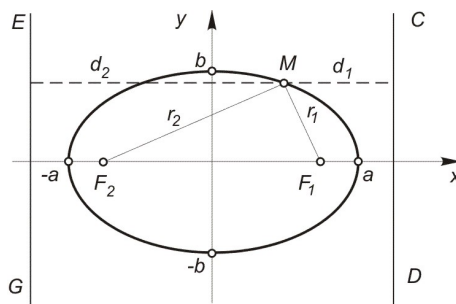


Рис. 12.

Відстані будь-якої точки еліпса $M(x, y)$ до фокусів називаються її *фокальними радіусами* r_1 та r_2 :

$$r_1 = a - \varepsilon x; \quad r_2 = a + \varepsilon x. \quad (3.1.4)$$

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі, що проходять від неї на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ (рис. 12). Директриси описуються рівняннями:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \quad (3.1.5)$$

3.1.3. Гіпербола

Г і п е р б о л о ю називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величиною сталою. Передбачається, що ця стала величина менша відстані між фокусами.

Рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.1.6)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

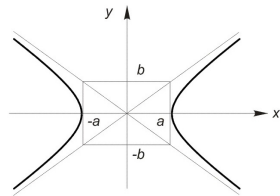


Рис. 13.

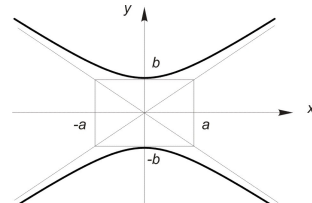


Рис. 14.

Якщо $a = b$, гіпербола називається *рівнобічною*.

Якщо уявна вісь має довжину $2a$ і направлена по осі Ox , а дійсна вісь, довжиною $2b$, розташована на осі Oy , то рівняння гіперболи буде

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.1.7)$$

Гіперболи (3.1.6), (3.1.7) називаються *спряженими*.

Асимптоти гіперболи визначаються рівняннями

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (3.1.8)$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \quad (3.1.9)$$

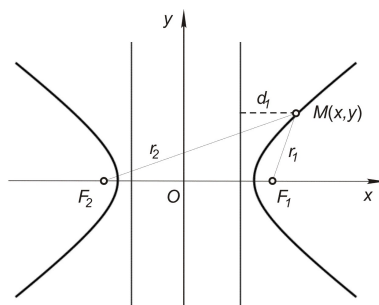


Рис. 15.

Для точок правої гілки гіперболи фокальні радіуси обчислюються за формулами:

$$r_1 = \varepsilon x - a; \quad r_2 = \varepsilon x + a; \quad r_2 - r_1 = 2a. \quad (3.1.10)$$

Для точок лівої гілки маємо:

$$r_1 = -\varepsilon x + a; \quad r_2 = -\varepsilon x - a; \quad r_1 - r_2 = 2a. \quad (3.1.11)$$

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі і віддалені від центра на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$. Їх рівняння мають вигляд

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \quad (3.1.12)$$

3.1.4. Парабола

П а р а б о л о ю називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, яку називають *фокусом*, і заданої прямої, яку називають *директрисою*.

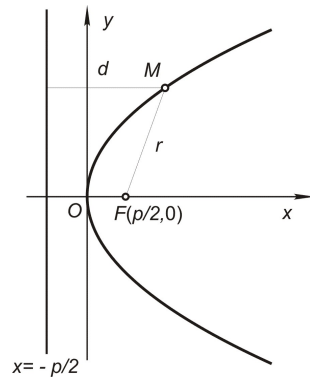


Рис. 16.

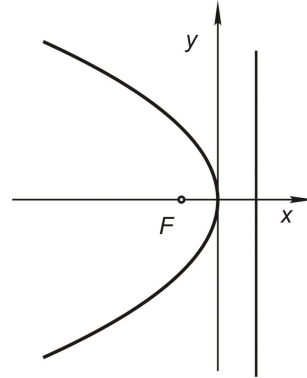


Рис. 17.

Рівняння параболы, зображеної на рис. 16, має вигляд

$$y^2 = 2px, \quad (3.1.13)$$

p — відстань від фокуса до директриси.

Фокальний радіус будь-якої точки параболы дорівнює

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Директриса параболы має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.

Парабола має віссю симетрії вісь Ox .

Якщо парабола лежить в лівій півплощині (рис. 8), то її рівняння має вигляд

$$y^2 = -2px, \quad (3.1.14)$$

рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$.

Якщо вісь симетрії параболы збігається з віссю Oy , а вершина параболы лежить в точці $O(0; 0)$ і вся парабола лежить у верхній чи нижній півплощині (рис. 9, 10), то її рівняння мають вигляд

$$x^2 = \pm 2py, \quad (3.1.15)$$

рівняння директриси $y = \mp \frac{p}{2}$.

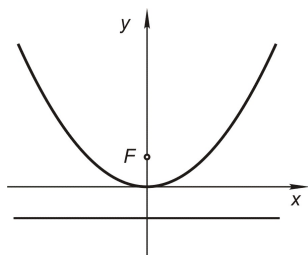


Рис. 18.

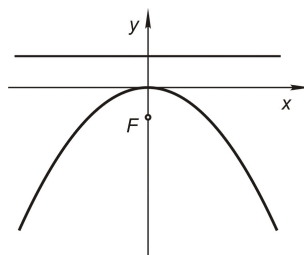


Рис. 19.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $M(a, b)$, то відповідні рівняння параболи набувають вигляду:

$$\begin{aligned}(y - b)^2 &= 2p(x - a); \\ (y - b)^2 &= -2p(x - a); \\ (x - a)^2 &= 2p(y - b); \\ (x - a)^2 &= -2p(y - b).\end{aligned}$$

Приклад. Побудувати параболу $(y - 2)^2 = 2(x - 3)$ (рис. 20).

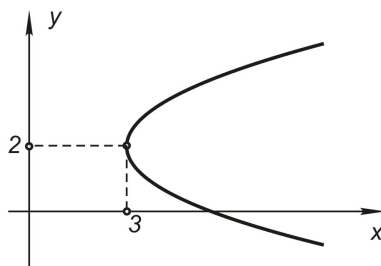


Рис. 20.

3.2. Варіанти завдань до модульного контролю

Завдання 1.

Звести до канонічного вигляду рівняння:

- $x^2 + y^2 - 4x = 0;$
- $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0;$
- $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0;$
- $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0;$
- $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0.$
- На осі абсцис знайти центр кола, що проходить через точки $(2, 3)$, $(5, 2)$ і записати рівняння кола.
- Скласти рівняння кола, якщо відомо, що воно дотикається до осі Ox в точці $(0, 0)$ і перетинає вісь Oy в точці $(0, 4)$.
- Скласти рівняння кола, якщо відомо, що воно дотичне до осі Oy в точці $A(0, -3)$ і має радіус $r = 2$.
- Скласти рівняння кола, що дотичне до обох осей координат і проходить через точку $A(2, 9)$.

10. Написати рівняння кола, яке дотичне до осі Ox в точці $(5, 0)$ і відсікає на осі Oy хорду довжиною 10 одиниць.
11. Написати рівняння кола, що має центр у точці $(6, 7)$ і дотичне до прямої $5x - 12y - 24 = 0$.

Написати рівняння дотичної до кола:

12. $x^2 + y^2 = 5$ в точці $(1, -2)$;
13. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ в точці $(5, 5)$;
14. $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ в точці $(0, 0)$;
15. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ в точці $(0, 0)$;
16. $x^2 + y^2 = 25$ в точці $(7, 1)$.

Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами:

17. $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$;
18. $A(0, 4)$, $B(1, 2)$, $C(3, -2)$;
19. $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(2, -2)$.
20. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$ в точці $(1, -2)$.
21. Написати рівняння дотичної до кола $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ в точці $(5, 5)$.
22. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ в точці $(0, 3)$.
23. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ в точці $(0, 0)$.
23. Написати рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 25$ в точці $(0, 0)$.
25. Написати рівняння дотичної до кола $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ в точці $(7, 1)$.

Завдання 2.

1. Дано еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Написати рівняння його директрис.
2. Прямі $x = \pm 8$ є директрисами еліпса, мала вісь якого дорівнює 8. Знайти рівняння еліпса.
3. Меридіан земної кулі має форму еліпса з відношенням осей $a/b = 299/300$. Визначити ексцентриситет земного меридіана.
4. На еліпсі $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, що знаходиться на відстані 5 од. від його малої осі.
5. Еліпс проходить через точки $(3, -2)$, $N(-2\sqrt{3}; 1)$. Написати рівняння еліпса, прийнявши його осі за осі координат.

6. В еліпс вписано правильний трикутник, одна з вершин якого збігається з правою вершиною великої осі. Знайти координати двох інших вершин трикутника.
7. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша відстані її від лівого фокуса.
8. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ знайти точку, для якої добуток фокальних радіусів дорівнює квадрату малої півосі.
9. На еліпсі, один з фокусів якого має координати $F(3, 0)$ взята точка $(4; 2,4)$. Знайти відстань від цієї точки до відповідної директриси, якщо відомо, що центр еліпса збігається з початком координат.
10. В еліпс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписано прямокутник, дві протилежні сторони якого проходять через фокуси. Обчислити площу прямокутника.
11. Обчислити довжину сторони квадрата, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
12. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Через точку $(1, 1)$ провести хорду, що ділиться в цій точці пополам.
13. Написати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ в точці $(2, -3)$.
14. Написати рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ проведених із точки $A(-6, 3)$.
15. Знайти дотичні до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, які паралельні прямій $2x - y + 17 = 0$.
16. Знайти точку дотику прямої $4x - 5y - 40 = 0$ до еліпса $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$.
17. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.
18. Еліпс проходить через точку $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y = 25$. Написати рівняння цього еліпса, якщо відомо, що осі еліпса лежать на осях координат.
19. Написати рівняння спільних дотичних до еліпсів:
 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ і $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$;
20. Написати рівняння спільних дотичних до еліпсів:
 $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ і $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Дослідити криві зведенням їх рівнянь до канонічного вигляду:

21. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$.

22. $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$.
23. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$.
24. Еліпс дотикається осі ординат в точці $(0, 0)$, а центр знаходиться в точці $(5, 0)$. Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що ексцентриситет $e = 0,8$.
25. Еліпс дотикається осі абсцис у точці $(7, 0)$, а осі ординат у точці $(0, 4)$. Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що його осі паралельні осям координат.

Завдання 3.

Привести до канонічного вигляду рівняння гіпербол та побудувати їх:

1. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.
2. $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$.
3. $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.
4. $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$.
5. $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$.
6. $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.
7. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі рівняння її асимптот $y = \pm 1/2x$ і рівняння її дотичної $5x - 6y - 8 = 0$.
8. Гіпербола дотикається до прямої $x - y - 2 = 0$ в точці $M(4; 2)$. Скласти рівняння гіперболи.
9. До гіперболи $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ провести дотичну паралельно прямій $x + y - 7 = 0$.
10. До гіперболи $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ провести дотичну паралельно прямій $x - 2y = 0$.
11. До гіперболи $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ провести дотичну перпендикулярно $x - 2y = 0$.
12. Провести дотичну до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ через точку $A(2; 0)$.
13. Провести дотичну до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ через точку $B(-4; 3)$.
14. Провести дотичну до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ через точку $C(5; -1)$.
15. Провести дотичну до гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ через точку $M(5; -4)$.
16. Через точку $(2; -5)$ провести прямі, паралельні асимптотам гіперболи $x^2 - 4y^2 = 4$.
17. На гіперболі $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, яка втричі ближча від однієї асимптоти, ніж від іншої.

18. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, для якої фокальні радіуси-вектори перпендикулярні один одному.
19. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, для якої відстань від лівого фокуса вдвічі більша, ніж від правого.
20. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсциса якої дорівнює 10 і ордината додатна. Обчислити фокальні радіуси цієї точки та кут між ними.
21. Дано рівнобічну гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусну гіперболу, що проходить через точку $M(-5; 3)$.
22. Обчислити ексцентриситет гіперболи за умови, що кут між асимптотами дорівнює 90° .
23. Написати рівняння гіперболи, осі симетрії якої збігаються з осями координат, якщо дано точку перетину $P(3, 2; 2, 4)$ однієї з асимптот з однією з директрис цієї гіперболи.
24. Написати рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої дорівнює 7,2, а відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.
25. Написати рівняння дотичної до кола $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ в точці $(7, 1)$.

Завдання 4.

1. Обчислити параметр параболи $y^2 = 2px$, якщо до неї є дотичною пряма $x - 2y + 5 = 0$.
2. Знайти спільні дотичні еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ і параболи $y^2 = \frac{20}{3}x$.

Звести до канонічного вигляду рівняння параболи та побудувати її:

3. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.
4. $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$.
5. $y^2 + 8x - 16 = 0$.
6. $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.
7. $y = Ax^2 + Bx + C$.
8. $y = x^2 - 8x = 15$.
9. $y = x^2 + 6x$.
10. Мостова арка має форму параболи. Визначити параметр цієї параболи, якщо прогін арки дорівнює 24 м, а висота 6 м.

11. Камінь, кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи і впав на відстані 16 м від початкового положення. Знайти параметр параболічної траєкторії польоту, якщо відомо, що найбільша висота, досягнута каменем, дорівнює 12 м.
12. Струмінь води, викинутий фонтаном, має форму параболи з параметром $p = 0,1$ м. Визначити висоту струменя, якщо відомо, що він падає до басейну на відстані 2 м від фонтана.
13. Симетрична відносно осі Ox парабола з вершиною в точці $(-5; 0)$ на осі ординат відсікає хорду, довжиною $l = 12$. Написати рівняння цієї параболи.
14. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy , якщо вона відтинає на осі абсцис відрізки $\pm a$, а на осі ординат — відрізок b .
15. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox , якщо вона відтинає на цій осі відрізок a , а на осі ординат — відрізки $\pm b$.
16. Знайти геометричне місце центрів кіл, що дотикаються осі ординат і кола $x^2 + y^2 = 1$.
17. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2 = 64x$ від прямої $4x + 3y + 46 = 0$.
18. На параболі $y^2 = 12$ взяті три точки з ординатами $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -3$. Обчислити відношення площ двох трикутників: трикутника з вершинами у вказаних точках і трикутника утвореного дотичними в цих точках.
19. Провести дотичну до параболи $y^2 = 12x$ в точці з абсцисою $x = 3$.
20. Провести дотичну до параболи $y^2 = 12x$ паралельно прямій $3x - y + 5 = 0$.
21. Провести дотичну до параболи $y^2 = 12x$, що утворює з прямою $4x - 2y + 9 = 0$ кут $\pi/4$.
22. На параболі $\rho = \frac{\rho}{1 - \cos \varphi}$ знайти точку, радіус вектор якої має найменшу довжину.
23. На параболі $\rho = \frac{\rho}{1 - \cos \varphi}$ знайти точку з радіусом-вектором, довжина якого дорівнює параметру параболи.
24. Відносно прямокутної системи координат написати рівняння параболи $\rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}$.
25. На параболі $\rho = \frac{8 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ знайти точку, радіус-вектор якої має довжину, рівну відстані цієї ж точки від директриси параболи.

Тема 4

Площина та пряма в просторі

4.1. Нормальне рівняння площини

Положення площини в просторі буде визначено, якщо задати її відстань від початку координат p та перпендикулярний до неї одиничний вектор $\bar{n}$. Де b не знаходилась на площині точка M , очевидною є рівність

$$\text{Pr}_{\bar{n}} \overline{OM} = OT = p.$$

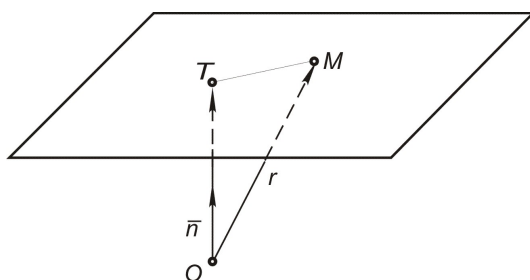


Рис. 21.

Позначимо $\overline{OM} = \bar{r} = \{x, y, z\}$. Знаходимо, що

$$\text{Pr}_{\bar{n}} \bar{r} = |\bar{r}| \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{r}}) = |\bar{r}| \frac{(\bar{r}, \bar{n})}{|\bar{r}| |\bar{n}|} = (\bar{r}, \bar{n}),$$

або

$$(\bar{r}, \bar{n}) = p. \quad (4.1.1)$$

Оскільки $|\bar{n}| = 1$, то координатами вектора $\bar{n}$ є його напрямні косинуси $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Рівняння (4.1.1) в координатній формі набуває вигляду:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (4.1.2)$$

Це рівняння називають *нормальним* рівнянням площини.

4.2. Загальне рівняння площини та його зв'язок з нормальним

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними визначає площину. Рівняння виду

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4.2.1)$$

називається *загальним* рівнянням площини. Тут A, B, C – координати вектора $\vec{n}$, нормального вектора площини.

Щоб звести рівняння (4.2.1) до нормального вигляду потрібно помножити його почленно на нормуючий множник λ , який визначається із формули

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

і має знак протилежний знаку вільного члена D . Одночасно ми отримуємо формули для визначення напрямних косинусів нормалі площини:

$$\cos \alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4.3. Рівняння площини у відрізках на осях

Рівняння площини, що перетинає всі три координати осі і не проходить через початок координат, має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.3.1)$$

де жоден з коефіцієнтів A, B, C, D не дорівнює нулю.

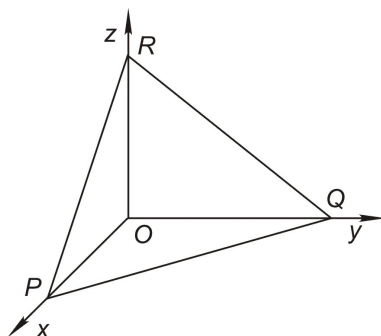


Рис. 22.

Позначимо через a, b, c величини відрізків, що відтинає площина на осях координат. Ці величини є координатами точок $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$ та $R(0, 0, c)$. Оскільки ці точки лежать на площині, то їх координати задовольняють рівняння (4.3.1)

$$Aa + D = 0,$$

або $A = -\frac{D}{a}.$

Аналогічно $B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$

Підставивши значення A, B, C у рівняння площини (4.3.1), одержимо:

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{z}{c} + D = 0$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.3.2)$$

Це і є рівняння площини *у відрізках на осях*.

4.4. Рівняння площини, що проходить через задану точку

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M(x_1, y_1, z_1)$ і має нормальним вектором $\vec{n} = \{A, B, C\}$, має вигляд:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

4.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$, задається співвідношенням

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.1)$$

4.6. Кут між двома площинами

Якщо задані рівняння двох площин

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

то кут між двома площинами (один із двох суміжних двограних кутів, утворених цими площинами) визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (4.6.2)$$

Якщо площини перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$, а, значить, умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (4.6.3)$$

Умова паралельності площин означає пропорційність між коефіцієнтами

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

4.7. Відстань від точки до площини

Відхиленням даної точки $M(x_0, y_0, z_0)$ від даної площини

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

є число δ , рівне

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p. \quad (4.7.1)$$

Відстань від точки M до площини дорівнює абсолютній величині відхилення

$$d = |\delta|. \quad (4.7.2)$$

Обчислити відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ можна за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4.7.3)$$

4.8. Канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі

Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і має напрям, заданий вектором $\bar{p} = \{l, m, n\}$, отримуємо з векторного рівняння прямої

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = t \bar{p}. \quad (4.8.1)$$

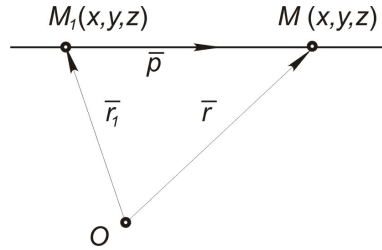


Рис. 23.

При заміні векторного рівняння (4.8.1) рівносильними йому координатними рівняннями маємо

$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \\ z - z_0 = nt. \end{cases} \quad (4.8.2)$$

Виражаючи параметр t з рівнянь (4.8.2), одержимо *канонічні* рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (4.8.3)$$

4.9. Загальні рівняння прямої

Будь-які дві не паралельні між собою площини визначають пряму як лінію їх перетину.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.9.1)$$

Ці рівняння, що розглядаються сумісно, називають *загальними* рівняннями прямої.

Приклад. Привести до канонічного вигляду рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0, \\ 3x + y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо який-небудь частинний розв'язок цієї системи. Виберемо одну з невідомих так, щоб визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих, що залишилися, був відмінним від нуля. Вибраній невідомій надамо довільне значення і розв'яжемо систему двох рівнянь з двома невідомими.

У даному прикладі за вільну невідому можна взяти, наприклад, z . Нехай $z = 1$. Тоді маємо систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + y = 6, \end{cases}$$

з якої отримуємо $x = 2$, $y = 0$. Ми знайшли точку $M(2, 0, 1)$, що лежить на прямій. Напрямний вектор прямої знайдемо як векторний добуток векторів-нормалей до заданих площин $\bar{n}_1 = \{2; -3; 1\}$ та $\bar{n}_2 = \{3; 1; -2\}$:

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5i + 7j + 11k.$$

Запишемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{11}.$$

4.10. Кут між двома прямими

Нехай задані рівняння двох прямих

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Кут між ними можна трактувати як кут між їх напрямними векторами. Маємо

$$\cos \varphi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4.10.1)$$

Умовою паралельності прямих є паралельність їх напрямних векторів

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.10.2)$$

Щоб ці вектори, а значить, і прямі були перпендикулярні, треба, щоб $\cos \varphi = 0$, тобто виконувалась умова

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (4.10.3)$$

4.11. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (4.11.1)$$

4.12. Взаємне розташування прямої та площини

Під кутом між прямою і площиною розуміють кут між прямою та її проекцією на площину

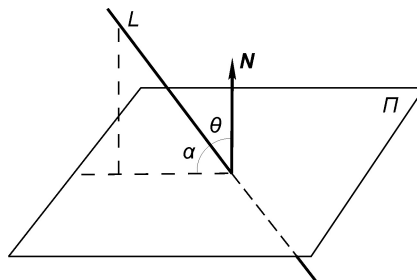


Рис. 24.

Кут α між прямою і площиною обчислюється за формулою

$$\sin \alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (4.12.1)$$

Умова паралельності прямої та площини

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (4.12.2)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (4.12.3)$$

Рівняння пучка площин

$$Ax + By + Cz + D + \lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \quad (4.12.4)$$

Щоб знайти точку перетину прямої з площиною, підставимо координати точки прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (4.12.5)$$

у рівняння площини

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0.$$

Визначимо звідси значення параметра t , що відповідає шуканій точці перетину

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn},$$

якщо

$$Al + Bm + Cn \neq 0. \quad (4.12.6)$$

Підставляючи значення t до формули (4.12.5), одержимо координати точки перетину прямої з площиною. Якщо умова (4.12.6) не виконується, то пряма паралельна площині і не має з нею спільних точок.

4.13. Варіанти завдань до типового розрахунку

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M(1; 2; 0)$, $N(1; -1; 2)$, $P(0; 1; -1)$ і знайти кути її нормалі з осями координат.
2. Знайти об'єм куба, якщо дві його грані лежать на площинах $2x - 2y + z + 1 = 0$ і $2x - 2y + z + 5 = 0$.
3. Знайти кут між прямою $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 4x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ і площиною $4x - y + 2z - 1 = 0$.
4. Знайти точки перетину прямої з площиною $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$, $x + 2y + 3z - 29 = 0$.
5. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

6. Знайти рівняння площин паралельних $x - 2y + 2z - 5 = 0$ та віддалених від неї на дві одиниці.
7. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведеними в точки перетину його з віссю Oy .
8. Знайти кут між площинами $x - 2y + 2z - 8 = 0$ та $x + z - 6 = 0$ і відстані від початку координат до площин.
9. Знайти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $(-2, 1, -1)$ і паралельна вектору $\vec{a}(1, -2, 3)$.
10. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(3, 4, 0)$ і через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$.
11. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{12} = \frac{z+2}{2} = y+1$ і перпендикулярна площині $2x + 3y - z = 4$.
12. Знайти напрямні кути прямої $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$
13. Знайти відстань від точки $(4, -1, 3)$ до площини $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ і напрямні кути нормалі площини.
14. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(-1, 2, 3)$ і паралельна прямій $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$
15. Знайти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 6 = 0$, $x + 5y - z + 10 = 0$ і перпендикулярна площині $2x - y + 5z - 5 = 0$.
16. Знайти кут між площинами $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
17. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(2, 3, 4)$ і перпендикулярна прямій $\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + 3z - 10 = 0. \end{cases}$
18. Знайти площину, що проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ і перпендикулярна площині $2x + 3y - z - 4$.
19. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = 2t. \end{cases}$
20. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, -2, 0)$ і $M_2(1, 1, 2)$ і перпендикулярна площині $x + 2y + 2z - 4 = 0$.
21. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

22. Знайти відстань між площинами і напрямні косинуси їх нормалей $x - 2y - 2z - 12 = 0$ і $x - 2y - 2z - 6 = 0$.
23. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $2x - y + 3z - 5 = 0$ і $x + 2y - z + 2 = 0$ і паралельна вектору $\vec{a}(2, -1, 2)$.
24. Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$
25. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$ $M_2(-3, 2, 1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$.
26. Чи є паралельними прямі $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = -3t + 2. \end{cases}$
27. Чи лежить пряма $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ в площині $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.
28. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -3, -4)$ і відсікає на координатних осях відрізки однакової величини.
29. При яких значеннях A і D пряма $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежить в площині $Ax + 2y - 4z + D = 0$?
30. Чи є перпендикулярними прямі $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$
31. При яких значеннях l і C пряма $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?
32. Доведіть, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок обмежений точками $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(-2, 5, 2)$.
33. Чи є паралельними прямі $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Бібліографічний список

- [1] *Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.
- [2] *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К: А.С.К., 2006. – 648с.
- [3] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1986. — 223 с.
- [4] *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика, ч.1.— К.: Техніка, 2003. — 600 с.
- [5] *Привалов И. И.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1964. — 272 с.
- [6] *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Физматгиз, 1963. — 296 с.

Для нотаток

Виробничо-практичне видання

Михайлова Тетяна Федорівна
Бабич Юрій Панасович
Пічугов Сергій Олексійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації до практичних занять
та завдання до модульного контролю

У авторській редакції
Комп'ютерна верстка *Ю. П. Бабич*

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,03. Обл.-вид. арк. 2,05.
Тираж 5 пр. Зам. № 54.

Український державний університет науки і технологій
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010