ЕКАТЕРИНОСЛАВСКІЙ
Горный Институтъ [redacted].

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

по лекціямъ читаннымъ проф. А. Н. ДИННИКОМЪ

издалъ студ. Е. Т. КОЛИКОВЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ
Проф. А. Н. ДИННИКА.

ЕКАТЕРИНОСЛАВЪ
Типо-Литографія Екатерининской желѣзной дороги
1918 г.

Введеніе.

Отдѣлъ физики, изучающій равновѣсіе и движеніе физическихъ тѣлъ, называется механикой. Механика подраздѣляется обыкновенно на двѣ части: статику и динамику. Статика изучаетъ равновѣсіе, а динамика движеніе тѣлъ подъ дѣйствіемъ какихъ-угодно силъ.

Въ настоящемъ краткомъ курсѣ мы ограничимся механикой точки и твердаго тѣла; другихъ же отдѣловъ, касающихся равновѣсія и движенія жидкихъ, газообразныхъ и упругихъ тѣлъ касаться не будемъ.

Въ механикѣ видную роль играетъ такъ наз. матеріальная точка. Это тѣло опредѣленной массы, геометрическіе размѣры котораго ничтожно малы. Введеніе въ механику понятія о матеріальной точкѣ позволяетъ весьма упростить изложеніе многихъ вопросовъ динамики.

Отдѣлъ I.

Статика точки.

Глава I.

Силы по одной прямой.

§1. Силы. Силою называется всякая причина, приводящая въ движенiе покоющееся физическое тѣло или измѣняющая его прямолинейное равномѣрное движенiе на прямолинейное же, но неравномѣрное, или на криволинейное*).

Силы по своему происхожденiю могутъ быть весьма разнообразны: силы тяжести, тренiя,

---

*) Основныя положенiя механики формулированы И. Ньютономъ. У него сказано: „приложенная сила есть дѣйствiе, производимое надъ тѣломъ, чтобы измѣнить его состоянiя покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенiя." См. Ньютонъ. Матем. начала натуральной философiи. Переводъ А.Н. Крылова. стр. 25. „Изв. Ник. Морск. Академiи. Петроградъ 1915 г.

упругости, силы электрическія, магнитныя, давленіе одного тѣла на другое и т. п.

Силы могутъ дѣйствовать на тѣло, когда оно находится въ покоѣ или движется. Въ первомъ случаѣ мы говоримъ, что силы дѣйствующія на тѣло взаимно уравновѣшиваются и что тѣло находится въ равновѣсіи.

Каждая сила характеризуется тремя признаками: 1/ точкой приложенія; 2/ направленіемъ; 3/ величиной.

Точкой приложенія силы называется та матеріальная точка, на которую сила непосредственно дѣйствуетъ.

Направленіемъ силы называется та полупрямая, по которой сила стремится двигать свою точку приложенія.*)

*) Полупрямой или лучемъ называется отрѣзокъ прямой линіи, ограниченный съ одной стороны точкой и неопредѣленно продолжающійся въ другую сторону.

Величина силы опредѣляется изъ сравненія данной силы съ силой, принятой условно за единицу. Пояснимъ какъ дѣлается такое сравненіе въ статикѣ.

Силы называются равными, если онѣ будучи одинаковымъ образомъ приложены къ одному и тому же тѣлу, производятъ одинаковое дѣйствіе. Въ равенствѣ двухъ силъ можно убѣдиться еще и по тому, что онѣ дѣйствуя на одну и ту же точку приложенія по одной прямой въ противоположныя стороны, уравновѣшиваютъ другъ друга. Какую либо силу P называютъ въ n разъ большей другой силы Q, если P производитъ такое же дѣйствіе, какое произвели бы n силъ, равныхъ Q, дѣйствуя совмѣстно на ту же точку приложенія въ томъ же направленіи. $P = nQ$.

За единицу силы въ техникѣ принимается килограммъ; болѣе крупная единица — тонна равная 1000 кгр.; болѣе мелкая — граммъ — равный 0,001 кгр.*)
Графически сила изображается векторомъ.**)
Начало этого вектора соотвѣтствуетъ точкѣ приложенія силы; направленіе — направленію силы, а длина (въ опредѣленномъ масштабѣ чертежа) — величинѣ силы.

§ 2. Равнодѣйствующая сила. Если на тѣло дѣйствуетъ нѣсколько силъ, то говорятъ, что на тѣло дѣйствуетъ **система силъ**.

---

*) Въ физикѣ въ системѣ CGS за единицу силы принимается **дина** равная приблизительно (съ ошибкой около 2 %) 0,001 грамма. О динѣ см. отд. Динамика.

**) Векторомъ называется отрѣзокъ прямой опредѣленной длины и опредѣленнаго направленія.

Двѣ системы силъ называются эквивалентными, если онѣ производятъ одно и то же дѣйствіе на одно и то же тѣло.

Иногда можно бываетъ данную систему силъ замѣнить одной силой ей эквивалентной *). Такая эквивалентная сила назыв. равнодѣйствующей. Силы, входящія въ составъ системы, называются слагаемыми или составляющими, а нахожденіе равнодѣйствующей называется сложеніемъ силъ. Сила, которая будучи прибавлена къ нѣкоторой системѣ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, приводитъ тѣло въ равновѣсіе называется уравновѣшивающей данную систему силъ.

§ 3. Сложеніе силъ дѣйствующихъ по одной прямой. Разсмотримъ сперва случай

---

*) Для системы силъ, дѣйствующихъ на точку, это всегда возможно.

двухъ силъ направленныхъ въ <u>одну сторону</u>.

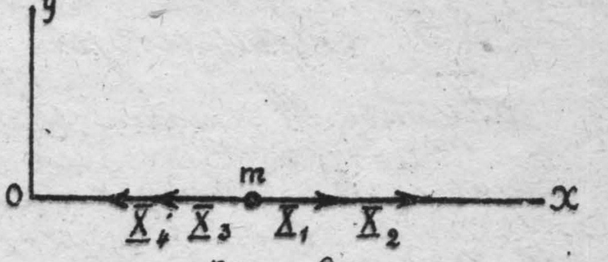
Пусть къ точкѣ М (черт. 1) приложены двѣ такія силы: одна P кгр., другая Q кгр.. Это значитъ (см. §1 опред. кратныхъ силъ), что первую силу можно замѣнить P силами каждая по 1 кгр., а вторую Q силами каждая тоже по 1 кгр. Всего получится $P+Q$ силъ по 1 кгр. или, что тоже самое, одна сила въ $P+Q$ кгр.. Отсюда равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, равна ихъ суммѣ и дѣйствуетъ въ ту-же сторону.

Черт. 1.

Подобнымъ же разсужденіемъ легко получить, что равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ въ противоположныя стороны, равна ихъ разности и направлена въ сторону бо<u>льш</u>ей изъ нихъ.

R направлена въ отрицательную сторону (на-лѣво).

§4. Равновѣсіе точки при дѣйствіи силъ по одной прямой. Пусть точка m можетъ двигаться лишь вдоль прямой OX. Первоначально точка m была въ покоѣ, затѣмъ къ ней приложена система силъ, дѣйствующихъ вдоль той же прямой OX. (Черт. 2). Силы $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$,... направлены на право (положительныя), силы $\underline{X}_3$, $\underline{X}_4$, ... - на-лѣво (отрицательныя)*). Ищемъ равнодѣйствующую системы силъ



черт. 2.

$$R = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \ldots - \underline{X}_3 - \underline{X}_4 - \ldots = \Sigma \underline{X}.$$

Если R положительна, то точка начнетъ дви-

*) Здѣсь и въ дальнѣйшемъ силы направленныя по координатнымъ осямъ x, y, z будемъ обозначать $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ съ соотвѣтственнымъ знакомъ $+$ или $-$.

гаться на право; если R отрицательна, то m начнетъ двигаться на лѣво. Для того, чтобы точка m не двигалась ни на право ни на лѣво необходимо:

$$\Sigma \underline{X} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

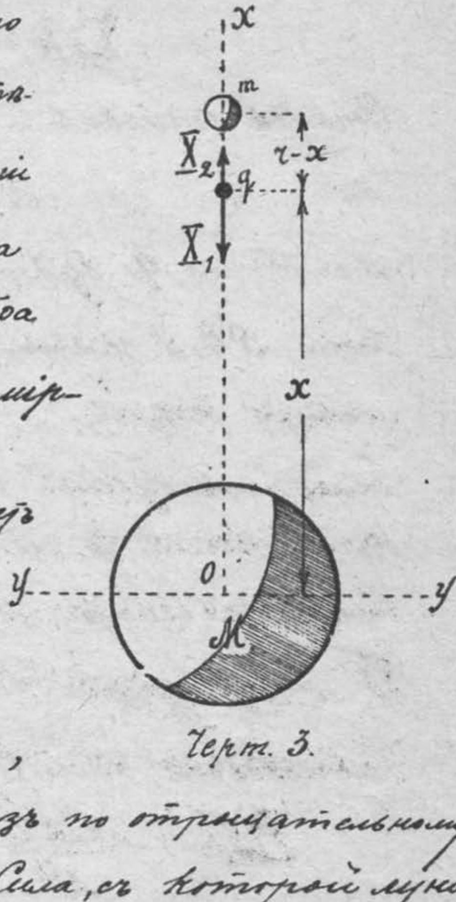
Это и есть условіе равновѣсія точки, если всѣ силы дѣйствуютъ вдоль одной прямой.

§5. Примѣръ.

Пусть M - масса земли, $m = 0{,}01\,M$ - масса луны; R - радіусъ земли; $r = 60R$ разстояніе между центрами земли и луны. Найти на прямой соединяющей центры земли и луны точку, гдѣ масса q будетъ въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ притяженія земли и луны (черт. 3). При рѣшеніи каждой задачи механики надо прежде всего посмотрѣть, какія дѣйствуютъ силы.

Помѣстимъ начало координатъ въ центрѣ земли и направимъ ось x по линіи центровъ. Пусть тѣло q находится на разстояніи x отъ центра земли и на разстояніи $r-x$ отъ центра луны. Тогда по закону всемірнаго тяготѣнія сила, съ которой земля притягиваетъ тѣло массы q:

$$\underline{X}_1 = -\frac{kMq}{x^2}.$$



Черт. 3.

Знакъ минусъ взятъ потому, что сила направлена внизъ по отрицательному направленію оси X-овъ. Сила, съ которой луна притягиваетъ массу q:

$$\underline{X}_2 = +\frac{kmq}{(r-x)^2}.$$

Знакъ плюсъ, ибо сила направлена вверхъ по положительному направленію координатн. оси OX.

Для того, чтобы тѣло q было въ равновѣсіи необходимо согласно § 4 (1)

$$\sum \underline{X} = -\frac{kMq}{x^2} + \frac{kmq}{(r-x)^2} = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

Откуда находимъ неизвѣстную величину x

$$x = 54,5\,R.$$

т.е. тѣло q будетъ въ равновѣсiи на разстоянiи 54,5 земныхъ радiусовъ, считая отъ центра земли.

Если мы будемъ искать положенiе равновѣсiя тѣла q не между землей и луной, а внѣ ихъ: напримѣръ за луной то обѣ силы $\underline{X}_1$ и $\underline{X}_2$ будутъ направлены внизъ и ур-нiе равновѣсiя напишется такъ:

$$\sum \underline{X} = -\frac{kMq}{x^2} - \frac{kmq}{(r-x)^2} = 0 \quad \ldots \quad (2).$$

Единственнымъ дѣйствительнымъ корнемъ этого уравненiя будетъ $x = \infty$, т.е. тѣло q будетъ въ равновѣсiи на весьма большомъ /теоретически безконечно большомъ/ разстоянiи отъ Земли и луны.

Глава II.

Силы на плоскости.

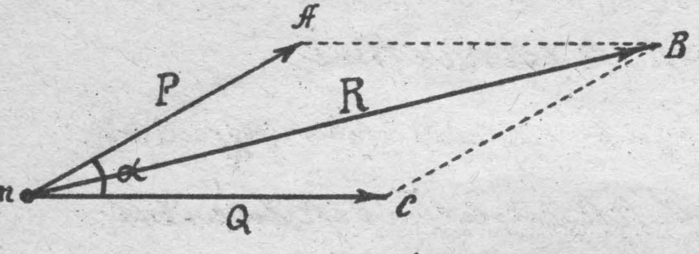
§6. Сложеніе двухъ пересѣкающихся силъ. Правило параллелограмма силъ. Если на точку дѣйствуютъ 2 силы составляющія между собой нѣкоторый уголъ, то равнодѣйствующая ихъ можетъ быть найдена на основаніи слѣдующаго правила: *) равнодѣйствующая двухъ силъ P и Q дѣйствующихъ на одну и ту же точку подъ угломъ, выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ.

Правило параллелограмма даетъ возможность весьма просто рѣшать задачи на

---

*) Это правило пока примемъ какъ результатъ опыта; въ отдѣлѣ „динамика" будетъ дано его доказательство.

сложеніе двухъ силъ приложенныхъ къ точкѣ.



Черт. 4.

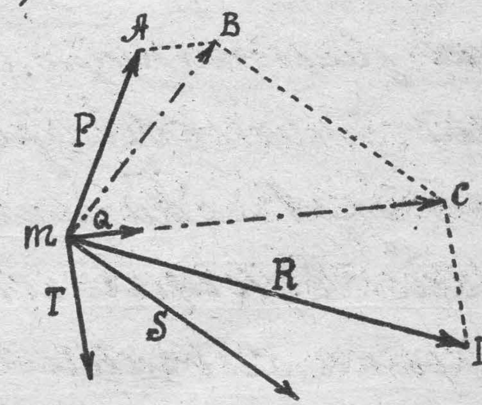
Замѣтимъ, что нѣтъ нужды строить весь параллелограммъ; достаточно строить треугольникъ силъ. Отъ точки m (черт. 4) строимъ векторъ $mA = P$; отъ конца его A строимъ векторъ AB равный и параллельный силѣ Q. Соединяя точки m и B прямой получимъ векторъ mB, изображающій по величинѣ и по направленію равнодѣйствующую R. Аналитически величина R находится по формулѣ:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha. \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Построеніе параллелограмма и треугольника силъ называется геометрическимъ сложеніемъ, а діагональ параллелограмма или замыкающая сторона треугольника наз. геометрической суммой силъ.

§7. Сложеніе нѣсколькихъ силъ.

На основаніи правила §6 легко сложить сколько угодно силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Напримѣръ пусть на точку m (черт 5) дѣйствуютъ четыре силы P, Q, S, T. Сложимъ P и Q по правилу треугольника и найдемъ ихъ равнодѣйствующую mB. Сложим далѣе по тому же правилу mB и S; получаемъ mC. Наконецъ сложимъ mC и T; получаемъ mD. Это и есть равнодѣйствующая R системы четырехъ силъ P, Q, S, T.



Черт. 5.

Изъ чертежа видно, что равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равна по величинѣ и по направленію замыкающей стороны mD многоугольника mABCD, стороны котораго равны и параллельны слагаемымъ силамъ.

Многоугольникъ OABCDO называется многоугольникомъ силъ. Примѣненіе правила многоугольника къ какимъ либо векторамъ называется геометрическимъ сложеніемъ, а векторъ mD, представляющій замыкающую сторону, называется геометрической суммой слагаемыхъ векторовъ. Такимъ образомъ равнодѣйствующая есть геометрическая сумма слагаемыхъ силъ.

Многоугольникъ силъ играетъ чрезвычайно важную роль въ графической статикѣ.

§ 8. Разложеніе силъ. Разложить силу — это значитъ замѣнить ее эквивалентной системой двухъ или нѣсколькихъ силъ. Разложенiе силы производится построенiемъ параллелограмма силъ по данной дiагонали. Разложить силу на двѣ /или больше/ составляющихъ можно безчисленнымъ числомъ способовъ, ибо существуетъ безчисленное множество параллелограммовъ имѣющихъ одну и ту же дiагональ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ часто примѣнять слѣдующее разложенiе: разложить силу F на двѣ составляющiя, имѣющiя данныя направленiя OX и OY.

черт. 6.

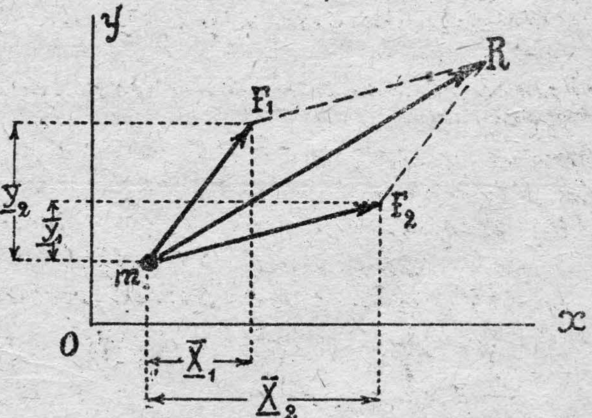
Изъ конца вектора $F = OC$ проводимъ прямую $CA \parallel OY$ и прямую $CB \parallel OX$. (черт. 6). Векторы OA и OB представляютъ искомыя силы.

§ 9. Проэкцiи силъ. Всѣ вопросы статики точки рѣшаются наиболѣе просто съ помощью проэкцій силъ на нѣкоторыя оси; эти оси обыкновенно выбираются взаимно перпендикулярными. Какъ извѣстно изъ геометріи, проэкціей какого либо вектора P на какую нибудь ось OX называется — произведеніе $P\cos(PX)$ вектора P на косинусъ угла, составляемаго векторомъ P съ осью OX. Далѣе изъ геометріи извѣстно, что проэкція замыкающей стороны какого либо многоугольника на любую ось равна суммѣ проэкцій сторонъ этого же многоугольника на ту же ось. Примѣняя эту теорему къ многоугольнику силъ, получаемъ: проэкція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, на любую ось равна суммѣ проэкцій составляющихъ на ту же самую ось. Пусть $F_1, F_2, \dots F_n$ составляющія силы, лежащія въ одной плоскости; R ихъ равнодѣйствующая (черт. 7).

Беремъ въ плоскости силъ двѣ взаимно перпендикулярныхъ оси OX и OY; проэкціи силъ F на эти оси обозначаемъ черезъ $\underline{X}$ и $\underline{Y}$.

$$\begin{aligned} \underline{X}_1 &= F_1 \cos\alpha_1 \qquad & \underline{Y}_1 &= F_1 \cos\beta_1 \\ \underline{X}_2 &= F_2 \cos\alpha_2 \qquad & \underline{Y}_2 &= F_2 \cos\beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

гдѣ $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ и $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ суть углы, которые силы $F_1, F_2 \ldots F_n$ образуютъ съ осями OX и OY.



Черт. 7.

Проэкціи равнодѣйствующей R (черт 7) обозначимъ черезъ R_x и R_y. Тогда на основаніи предыдущей теоремы:

$$\begin{aligned} R_x &= \underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \cdots + \underline{X}_n = \Sigma \underline{X} \\ R_y &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \cdots + \underline{Y}_n = \Sigma \underline{Y} \end{aligned} \qquad (2)$$

Величина равнодѣйствующей и ея направлен[ие]
находится изъ формулы:

$$R = \sqrt{\underline{X}^2 + \underline{Y}^2}$$

$$\cos(Rx) = \frac{R_x}{R} \qquad (3)$$

$$\cos(Ry) = \frac{R_y}{R}$$

§ 10. Условія равновѣсія точки, если всѣ дѣйствующія на нее силы лежатъ въ одной плоскости. Пусть на точку m, находящуюся первоначально въ покоѣ, прикладываются силы F_1, F_2 .... F_n, всѣ лежащія въ одной плоскости. Расположивъ произвольно въ этой плоскости Декартовы координаты xOy, ищемъ проэкціи силъ $F_1 F_2 \dots F_n$ на оси Ox и Oy. Пусть эти проэкціи:

$$\underline{X}_1, \underline{X}_2 \dots \underline{X}_n \qquad \underline{Y}_1, \underline{Y}_2 \dots \underline{Y}_n$$

Проэкціи равнодѣйствующей по § 9

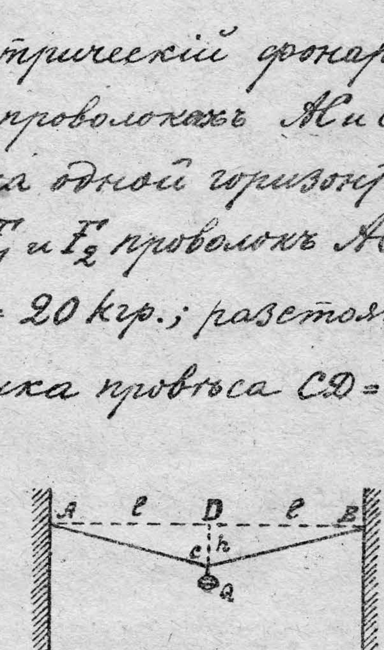
$$R_x = \Sigma \underline{X} \qquad R_y = \Sigma \underline{Y}.$$

Для равновѣсія точки необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая R всѣхъ силъ дѣйствующихъ на точку равнялось 0. А для этого необходимо и достаточно, чтобы ея проэкціи на двѣ взаимно перпендикулярныя оси равнялись 0.

$$\Sigma \overline{X} = 0 \qquad \Sigma \overline{Y} = 0 \qquad (1)$$

Эти два равенства и суть уравненія равновѣсія точки при дѣйствіи системы силъ, лежащихъ въ одной плоскости /плоская система силъ/.

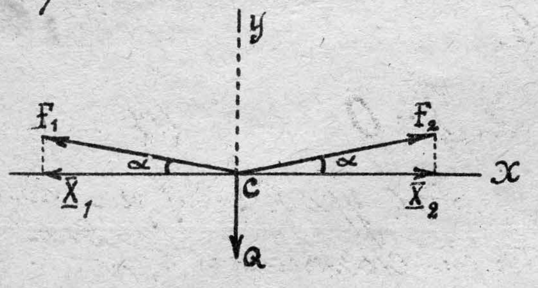
§ 11. Примѣръ. Электрическій фонарь подвѣшенъ въ точкѣ C на проволокахъ AC и CB. Точки A и B находятся на одной горизонтали. Опредѣлить натяженіе F_1 и F_2 проволокъ AC и CB, если вѣсъ фонаря $Q = 20$ кгр.; разстояніе $AB = 2l = 20$ мтр. и стрѣлка провѣса $CD = h = 0.1$ метра. (Черт. 8).



Черт. 8.

Разсмотримъ условія равновѣсія точки C. На нее дѣйствуютъ силы: вѣсъ фонаря Q, натяженіе F_1 проволоки AC и натяженіе

F_2 проволоки СВ. Выбираемъ точку С за начало координатъ xCy (черт. 9) и находимъ проэкціи трехъ силъ на оси СХ и Су.



черт. 9.

Сила	проэкціи	
	на ось х-овъ	на ось у-овъ.
F_1	$\underline{X}_1 = -F_1 \cos\alpha$	$\underline{Y}_1 = +F_1 \sin\alpha$
F_2	$\underline{X}_2 = +F_2 \cos\alpha$	$\underline{Y}_2 = +F_2 \sin\alpha$
Q	$\underline{X}_3 = 0$	$\underline{Y}_3 = -Q$

Для равновѣсія согласно § 10 (1) необходимо и достаточно:

$$\Sigma \underline{X} = -F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha + 0 = 0$$

$$\Sigma \underline{Y} = F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha - Q = 0.$$

Откуда $F_1 = F_2 = \dfrac{Q}{2\sin\alpha}$,

т.е. натяженіе проволокъ пропорціонально вѣсу фонаря Q и обратно пропорціонально синусу угла наклона проволоки къ горизонту. При малыхъ углахъ α, какъ это обыкновенно бываетъ на практикѣ, натяженіе проволокъ можетъ быть весьма значительнымъ. Такъ въ нашемъ случаѣ, подставляя числовыя данныя, получимъ

$$F_1 = F_2 = 1000 \text{ кгр.}$$

Глава III.

Силы въ пространствѣ.

§ 12. Сложеніе силъ въ пространствѣ.

Пусть на точку m дѣйствуетъ нѣсколько силъ $P_1 P_2 \ldots P_n$ расположенныхъ не въ одной плоскости, а въ пространствѣ. Примѣняя къ нимъ послѣдовательно правило параллелограмма силъ [см. §§ 6-7] мы придемъ къ слѣдующей теоремѣ: равнодѣйствующая пространственной системы силъ изображается по величинѣ и по направленію замыкающей стороной многоугольника силъ, стороны котораго изображаютъ по величинѣ и по направленію данныя силы. Надо помнить, что здѣсь въ отличіе отъ § 7 чертежъ многоугольника силъ будетъ не плоскимъ, а пространственнымъ. Эту же теорему можно выразить иначе: равнодѣйствующая любой системы силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равна по величинѣ и по направленію геометрической суммѣ данныхъ силъ.

Для равновѣсія системы силъ необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая равнялась нулю, т.е. чтобы многоугольникъ силъ былъ замкнутъ.

§ 13. Методъ проэкцій и уравненія равновѣсія точки при силахъ въ пространствѣ. Всѣ задачи на равновѣсіе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, рѣшаются наиболѣе просто, если ввести въ разсмотрѣніе проэкціи этихъ силъ на три взаимно ⊥-ныя оси (Декартовы координаты въ пространствѣ). Примѣняя извѣстную теорему геометріи относительно замыкающей какого угодно многоугольника (плоскаго или пространственнаго) къ многоугольнику силъ, мы получимъ слѣдующую теорему (см. § 9).

Проэкція на любую ось равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равна суммѣ проэкцій составляющихъ на ту же ось.

Пусть на точку m дѣйствуютъ силы $F_1 F_2 \ldots F_n$, беремъ три взаимно перпендикулярныя оси и находимъ проэкціи всѣхъ силъ на эти оси:

$$\overline{X}_1 = F_1 \cos\alpha_1;\quad \overline{Y}_1 = F_1 \cos\beta_1;\quad Z_1 = F_1 \cos\gamma_1$$

$$\overline{X}_2 = F_2 \cos\alpha_2;\quad \overline{Y}_2 = F_2 \cos\beta_2;\quad Z_2 = F_2 \cos\gamma_2$$

гдѣ α, β, γ - углы образуемые силой F съ осями x, y, z. Обозначая равнодѣйствующую черезъ R, а ея проэкціи черезъ R_x, R_y, R_z, получимъ по только что приведенной теоремѣ

$$R_x = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots + \overline{X}_n = \Sigma \overline{X},$$
$$R_y = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \dots + \overline{Y}_n = \Sigma \overline{Y}, \qquad (1)$$
$$R_z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \Sigma Z.$$

Зная проэкціи равнодѣйствующей, легко получить ея величину —

$$R = \sqrt{R_x + R_y + R_z} \qquad (2)$$

и направленіе

$$\cos|Rx| = \frac{R_x}{R};\quad \cos|Ry| = \frac{R_y}{R};\quad \cos|Rz| = \frac{R_z}{R},$$

гдѣ $|Rx|, |Ry|, |Rz|$ — углы составляемые (3) направленіемъ R съ осями x, y, z.

Условіе необходимое и достаточное для равновѣсія силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, состоитъ въ томъ, чтобы

$$R = 0.$$

Слѣдовательно:

$$\Sigma \underline{X} = 0 \quad \Sigma \underline{Y} = 0 \quad \Sigma Z = 0. \qquad (4)$$

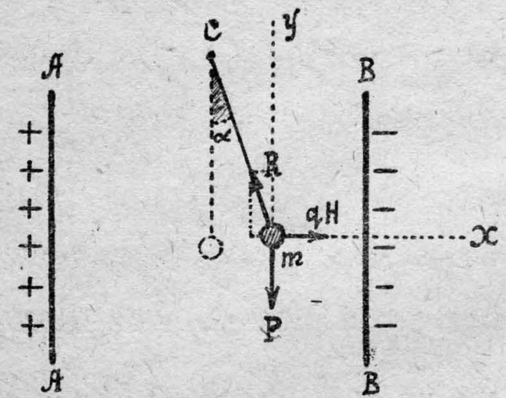
Это и суть уравненія равновѣсія точки при дѣйствіи любыхъ силъ. Всѣ задачи статики точки могутъ быть рѣшены съ помощью этихъ уравненій.

§14. Несвободная точка. Реакціи связей.

Несвободной точкой называется точка, которая не можетъ занимать произвольнаго положенія въ пространствѣ. Все то, что ограничиваетъ свободу движенія точки назыв. связью. Связью можетъ быть поверхность, на которой должна оставаться точка /напр. поверхность стола горизонтальная или наклонная, на которой должна находиться точка/; связью можетъ быть линія, съ которой точка не можетъ сойти, но вдоль которой она можетъ скользить /напр. шарикъ просверленный по діаметру и надѣтый на натянутую проволоку/ и. т. п.

Дѣйствіе связи, стѣсняющей свободу положенія точки, можно замѣнить силой (ср § 1), называемой сопротивленіемъ или реакціей связи. Введя эти силы реакціи мы можемъ разсматривать точку какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ всѣхъ заданныхъ силъ и реакціей и писать уравненія равновѣсія (§ 13, (4)) уже какъ для свободной точки.

§ 15. Примѣръ. AA и BB обкладки достаточно большого плоскаго конденсатора (черт. 10). Напряженіе электростатическаго поля между обкладками конденсатора равно H. Въ точкѣ C на нити подвѣшенъ шаръ m вѣсомъ P съ зарядомъ +q. Найти положеніе равновѣсія шарика и натяженіе нити.



Черт. 10.

Пусть шарикъ находится въ равновѣсіи въ положеніи m; нить отклонена отъ вертикали на уголъ α.

Посмотримъ какія дѣйствуютъ на шарикъ m силы.

1/ Электростатическая сила qH направленная горизонтально на право,

2/. Сила вѣса P направленная внизъ,

3/. реакція связи R, т.е. натяженіе нити, направленная вдоль нити отъ m къ C.

Выбираемъ центръ шарика за начало Декартовыхъ координатъ и пишемъ проэкціи силъ и реакціи на эти оси.

сила	проэкціи на ось X-овъ	проэкціи на ось Y-овъ
qH	$\bar{X}_1 = +qH$	$\bar{Y}_1 = 0$
P	$\bar{X}_2 = 0$	$\bar{Y}_2 = -P$
R	$\bar{X}_3 = -R\cos\alpha$	$\bar{Y}_3 = +R\sin\alpha$

Для равновѣсія точки m необходимо:

$$\sum \underline{X} = qH + 0 - R.\cos\alpha = 0,$$

$$\sum \underline{Y} = 0 - P + R\sin\alpha = 0;$$

откуда находимъ:

$$tg\alpha = \frac{P}{qH}; \quad R = \sqrt{P^2 + q^2H^2}$$

Отдѣлъ II.

Статика твердаго тѣла.

Глава I.

Силы пересѣкающіяся въ одной точкѣ.

§16. **Твердое тѣло.** Твердымъ тѣломъ *) называется въ механикѣ такое тѣло, въ которомъ разстояніе между любыми двумя точками остается неизмѣннымъ.

Всѣ тѣла, съ которыми приходится имѣть

---

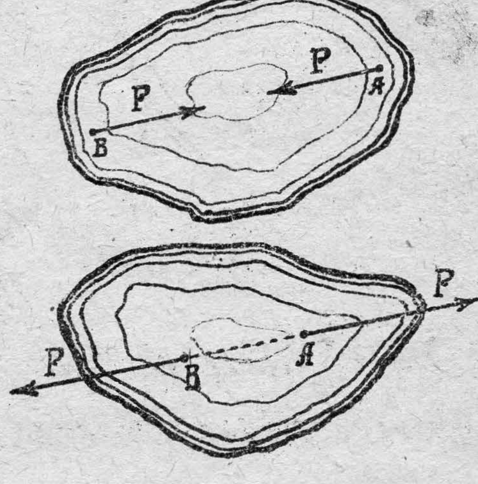
*) Иное названіе неизмѣняемая система точекъ.

дѣло въ инженерныхъ сооруженіяхъ, не являются вполнѣ твердыми, ибо разстоянія между ихъ отдѣльными точками мѣняются подъ дѣйствіемъ приложенныхъ силъ. Но въ большинствѣ случаевъ эти измѣненія не велики. Поэтому очень часто можно пренебрегать ими и разсматривать данное сооруженіе или часть его какъ тѣло вполнѣ твердое. Во многихъ случаяхъ такое упрощеніе задачи вполнѣ допустимо; въ другихъ же случаяхъ приходится считаться съ тѣми измѣненіями, которыя возникаютъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ силъ. Эти вопросы относятся къ теоріи упругости.

§ 17. Силы взаимно уравновѣшивающіяся. Ученіе о равновѣсіи твердаго тѣла основывается на слѣдующихъ двухъ положеніяхъ (аксіомахъ), которыя мы примемъ безъ доказательства:

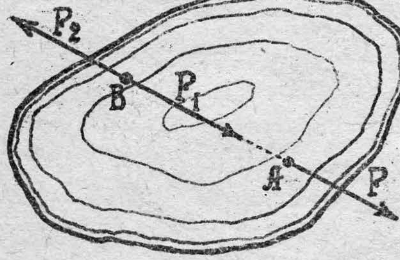
I. Двѣ равныя силы, направленныя въ противоположныя стороны по линіи соединяющей точки ихъ приложенія (черт. 11) уравновѣшиваются на твердомъ тѣлѣ.

II. Дѣйствіе силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, не измѣнится, если прибавить къ нимъ или отнять отъ нихъ сколько угодно силъ, уравновѣшивающихъ другъ друга на томъ же тѣлѣ. Т.е., если тѣло было въ равновѣсіи, то и послѣ прибавленія или отнятія системы уравновѣшивающихся силъ оно останется въ равновѣсіи.



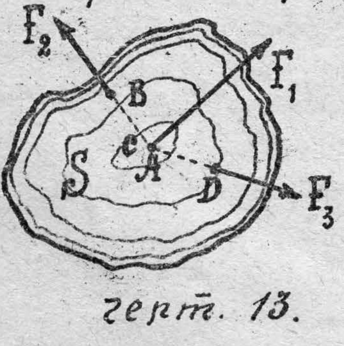
Черт. 11.

§ 18. Перенесеніе точки приложенія силы. Пусть на тѣло дѣйствуетъ сила P приложенная въ точкѣ A. На линіи, по которой направлена сила P, возьмемъ какую либо точку B и приложимъ къ ней двѣ силы P_1 и P_2, которыя равны силѣ P и взаимно противоположны. По аксіомѣ § 17 дѣйствіе силы P отъ этого не измѣнится. По той же аксіомѣ §17 силы P и P_2, какъ взаимно уравновѣшивающіяся, можно отбросить. Остается одна сила P_1 приложенная въ точкѣ В, т. е. точку приложенія силы, дѣйствующей на твердое тѣло, можно переносить въ любую точку тѣла по направленію линіи дѣйствія силы.



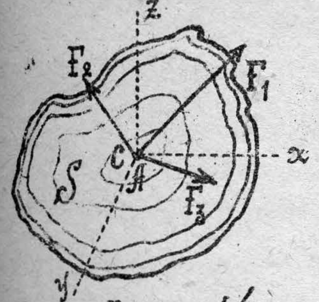
черт. 12.

§19. Равновѣсіе твердаго тѣла при дѣйствіи силъ пересѣкающихся въ одной точкѣ. На тѣло S дѣйствуютъ силы F_1, F_2, F_3, которыя, или продолженія которыхъ пересѣкаются въ точкѣ C /черт. 13/.



черт. 13.

Согласно теоремѣ §18 точки приложенія этихъ силъ можно перенести въ точку C /черт. 14/ и такимъ образомъ дѣло сведется къ нахожденію условія равновѣсія точки C. Эти условія были выведены



черт. 14.

въ главѣ I, § 13, /4/.

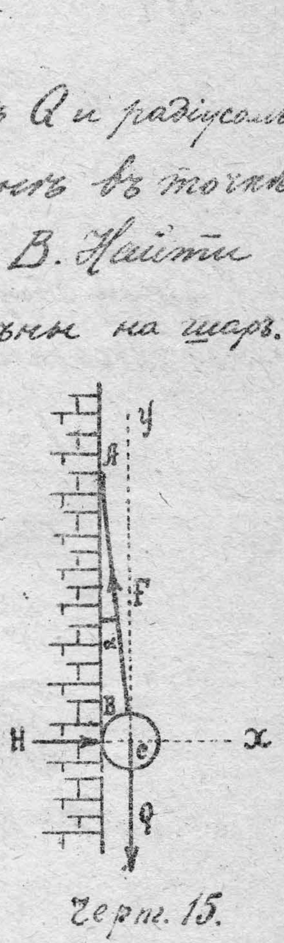
$$\sum \overline{X} = 0 \quad \sum \overline{Y} = 0 \quad \sum \overline{Z} = 0 \quad (1).$$

Очевидно, что это и будетъ условіемъ равновѣсія тѣла S.

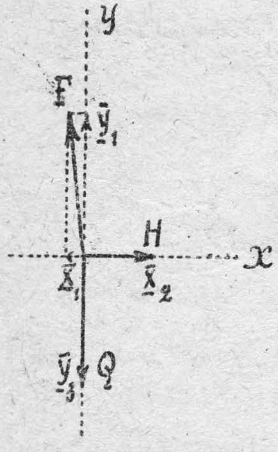
§ 20. Примѣръ. Шаръ вѣсомъ Q и радіусомъ $R = BC$ привѣшенъ на нити къ стѣнкѣ въ точкѣ A такъ, что касается ея въ точкѣ B. Найти натяженіе нити F и давленіе стѣны на шаръ. /черт. 15/. Очевидно, что всѣ эти силы Q, F, H пересѣкутся въ центрѣ шара C, куда и перенесемъ точки ихъ приложенія /черт. 16/.

Теперь найдемъ проэкціи силъ на координатныя оси Ox и Oy.

$$F \begin{cases} \overline{X}_1 = -F \sin\alpha \\ \overline{Y}_1 = +F \cos\alpha \end{cases}$$



черт. 15.



черт. 16.

$$H\begin{cases}\bar{X}_2 = +H\\ \bar{Y}_2 = 0\end{cases}$$

$$Q\begin{cases}\bar{X}_3 = 0\\ \bar{Y}_3 = -Q\end{cases}$$

Условія равновѣсія по § 19(1) будутъ:

$$\sum \bar{X} = -F\,Sin\alpha + H + 0 = 0$$

$$\sum \bar{Y} = F\,Cos\alpha + 0 - Q = 0.$$

Рѣшая эту систему уравненій относительно неизвѣстныхъ H и F, находимъ:

$$H = F\,Sin\alpha = \frac{Q}{Cos\alpha}\cdot Sin\alpha = Q\,tg\alpha;$$

$$F = \frac{Q}{Cos\alpha}.$$

Глава II.

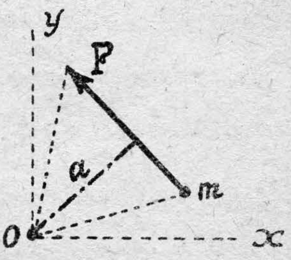
Плоская система силъ.

Моментъ силы. Параллельныя силы. Пара силъ.

§ 21. Моментомъ силы называется

произведеніе величины силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ нѣкоторой точки O на направленіе силы.

$$M = P.a$$



Черт. 17.

Точка O называется <u>центромъ момента</u>, перпендикуляръ a <u>плечомъ силы P</u>. Если сила P стремится вращать свое плечо отъ оси Ox къ оси Oy /отъ 1-ой оси ко 2-ой/ т.е. <u>противъ часовой стрѣлки</u>, то M мы будемъ считать ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМЪ; при вращеніи въ противоположную сторону ОТРИЦАТЕЛЬНЫМЪ. Изъ опредѣленія момента слѣдуетъ:

1/. <u>Моментъ силы не измѣняется при перенесеніи точки приложенія силы по ея направленію;</u>

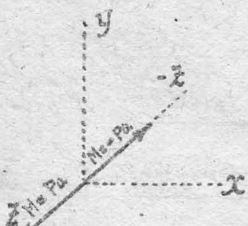
2/. <u>M=0, если сила проходитъ черезъ центръ моментовъ.</u>

3/ Соединивъ начало и конецъ вектора - силы m и P съ центромъ O, мы получимъ Δ-къ mPO. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}Pa$, т.е. <u>геометрически моментъ представляется</u>

<u>удвоенной площадью треугольника, основаніе к-го векторъ — сила P, а вершина — центръ моментовъ O.</u>

Если за единицу силы мы примемъ килограммъ, а за единицу длины сантиметръ, то единицей момента будетъ килограммо-сантиметръ.

Геометрически моментъ очень удобно изображать векторомъ численно равнымъ $P.a$ приложеннымъ въ центръ O и направленнымъ перпендикулярно къ плоскости OmP. Въ случаѣ черт. 17 сила P лежитъ въ координатной плоскости xOy. Векторъ-моментъ направленъ по оси Z въ положительную сторону. Если сила P вращаетъ свое плечо въ отрицательную сторону отъ оси

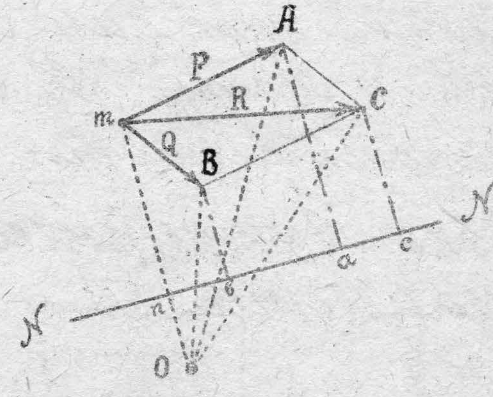


черт. 18.

oy къ оси Ox, т.е. по часовой стрѣлкѣ, то моментъ изобразится векторомъ $M=-Pa$, направленнымъ въ отрицат. сторону оси Oz (черт. 18).

§22. **Сложеніе моментовъ.** Моментъ равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагаемыхъ силъ относительно одного и того же центра.

Докажемъ эту теорему для того случая, когда моменты силъ P и Q приложенныхъ къ точкѣ m, относительно центра O одного знака.



Черт. 19.

Проводимъ прямую NN перпендикулярно mO и опускаемъ изъ точекъ A, B, C перпендикуляры Aa, Bв, Cc на прямую NN. Тогда

площадь Δ-ка $OmA = \frac{1}{2} Om.na$;

" " Δ-ка $OmB = \frac{1}{2} Om.nв$;

" " Δ-ка $OmC = \frac{1}{2} Om.nc$.

такъ какъ $nc = na + ac = na + nв$, то

площ. Δ-ка OmC = пл. Δ-ка OmA + пл. Δ-ка OmB,

а отсюда согласно слѣдствію 3 § 21:

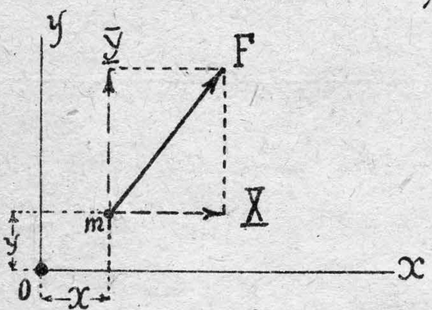
$$\mathcal{M}|R| = \mathcal{M}|P| + \mathcal{M}|Q|, \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ „M" означаетъ «моментъ»

Подобнымъ же образомъ доказывается теорема, если моменты разныхъ знаковъ. Изучающему полезно продѣлать это доказательство въ видѣ упражненія.

Въ случаѣ многихъ силъ, примѣняя послѣдовательно теорему только что доказанную для двухъ силъ, получаемъ: **Моментъ равнодѣйствующей плоской системы силъ равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ слагаемыхъ силъ относительно того же центра.**

§23. Аналитическое выраженіе для момента. Пусть къ точкѣ m приложена сила F; O - центръ моментовъ. Примемъ точку O за начало координатъ; проэкціи силы F будутъ $\bar{X}$, $\bar{Y}$; координаты точки m (x, y). Согласно §22



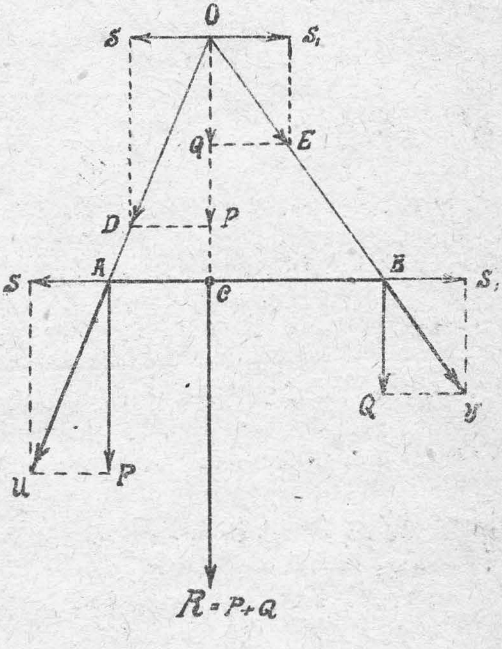
черт. 20

$$M(F) = M(\bar{X}) + M(\bar{Y}),$$

но $M(\bar{X}) = -\bar{X}y$; $M\bar{Y} = +\bar{Y}x$, а отсюда:

$$M(F) = x\bar{Y} - y\bar{X}. \qquad \ldots\ldots (1)$$

§24. Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ направленныхъ въ одну сторону. Равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону равна ихъ суммѣ и направлена въ ту же сторону по линіи, проходящей между точками приложенія данныхъ силъ и дѣлитъ прямую ихъ соединяющую на части, обратно пропорціональныя



Черт. 21.

силамъ. Пусть P и Q слагаемыя силы, приложенныя въ точкахъ A и B твердаго тѣла. Приложимъ въ точкахъ A и B двѣ взаимно уравновѣшивающіяся силы S и S_1, дѣйствующія по линіи AB. Затѣмъ по правилу параллелограмма сложимъ P съ S и Q съ S_1; получимъ равнодѣйствующія си...

U и V. Продолжимъ направленіе этихъ силъ до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ O и перенесемъ сюда силы U и V. Проведемъ черезъ O двѣ прямыя: одну параллельно AB, другую параллельно слагаемымъ силамъ P и Q. Далѣе разложимъ силы U и V по этимъ направленіямъ; получимъ четыре силы приложенныя въ точкѣ O. Изъ нихъ силы OS и OS_1 взаимно уравновѣшиваются и могутъ быть исключены изъ разсмотрѣнія; силы OP и OQ даютъ въ суммѣ равнодѣйствующую $\underline{R = P+Q}$ направленную въ сторону слагаемыхъ силъ. Точку приложенія силы R можно перенести изъ O въ C. ...... (1)

Далѣе изъ подобныхъ треугольниковъ ODP и AOC, OEQ и BOC

$$\frac{S}{P} = \frac{AC}{OC}\,; \quad \frac{S}{Q} = \frac{BC}{OC}$$

Дѣля почленно, получаемъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} \qquad (2)$$

Теорема доказана.

Изъ пропорціи (2), переставивъ средніе члены, получаемъ:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}, \quad \ldots\ldots (3)$$

а отсюда пользуясь извѣстнымъ свойствомъ пропорцій

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{BC+AC} = \frac{R}{AB} \ldots (4)$$

т.е. **отношеніе одной изъ трехъ силъ P, Q, R къ отрѣзку прямой AB, заключающемуся между двумя другими силами есть величина постоянная.**

Соотношеніе (1-4) даетъ возможность любую силу R, приложенную къ точкѣ C твердаго тѣла, разложить на двѣ параллельныя ей силы P и Q.

§25. Центръ двухъ параллельныхъ силъ. Любая точка, лежащая на линіи дѣйствія равнодѣйствующей R, можетъ быть принята за точку ея приложенія; но изъ такихъ точекъ одна, именно точка C, находящаяся на прямой AB, соединяющей точки приложенія составляющихъ силъ P и Q, обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ; непосредственно вытекающимъ изъ построенія § 24. Если силы P и Q повернуть вокругъ ихъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ α, то точка C сохранитъ свое положеніе; равнодѣйствующая R повернется около C на тотъ же уголъ α. Точка C называется центромъ двухъ параллельныхъ силъ P и Q. Легко вывести аналитическія формулы для координатъ центра параллельныхъ силъ C. Выберемъ (черт. 21) гдѣ либо въ сторонѣ координатныя оси XOY. Пусть координаты точки A будутъ $/x_1 y_1/$, координаты $B/x_2 y_2/$ и координаты центра $C/x_c y_c/$. Тогда изъ § 24 /2/:

$$\frac{P}{Q} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}$$

откуда:

$$x_c = \frac{Px_1 + Qx_2}{P+Q}; \quad y_c = \frac{Py_1 + Qy_2}{P+Q} \quad \ldots (1)$$

§ 26. Моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ направленныхъ въ одну сторону. Въ § 22 выведена теорема сложенія моментовъ для силъ пересѣкающихся въ одной точкѣ. Выведемъ такую же теорему для параллельныхъ силъ.

Моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ направленыхъ въ одну сторону равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагаемыхъ силъ.

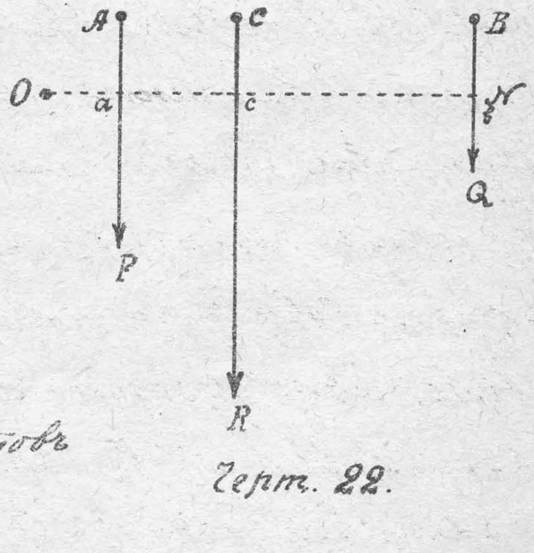
Пусть R (черт. 22) равнодѣйствующая силъ P и Q. O — центръ моментовъ.

Проведемъ прямую ON перпендикулярно R.

На основаніи § 24, (1-2)

$$R = P + Q;$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{bc}{ac} \qquad (1)$$



Черт. 22.

Составляемъ сумму моментовъ слагаемыхъ силъ:

$$M(P) + M(Q) = P \cdot oa + Q\, ob = P(oc - ac) + Q(oc + bc).$$ Но въ силу (1):

$$P\, ac = Q\, bc$$

Слѣдовательно

$$M(P) + M(Q) = (P+Q)\, oc = M(R) \quad \ldots (2)$$

При доказательствѣ предполагалось, что оба момента положительны (центръ O лежитъ влѣво отъ силъ). Ходъ доказательства ничѣмъ по существу не мѣняется, если одинъ изъ моментов будетъ отрицателенъ, т.е. центръ O лежитъ между направленіями силъ P и Q.

§ 27. Система параллельныхъ силъ направленныхъ въ одну сторону.

Обозначимъ величины этихъ силъ черезъ $P_1, P_2 \ldots P_n$; координаты точекъ приложенія $(x_1 y_1), (x_2 y_2) \ldots (x_n y_n)$. Примѣняя послѣдовательно теоремы §§ 24 – 26 о сложеніи двухъ параллельныхъ силъ, получаемъ: Равнодѣйствующая системы параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ одну сторону равна ихъ суммѣ, имъ параллельна, направлена

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P. \qquad \dots\dots (1)$$

въ ту же сторону; линія дѣйствія ея проходитъ черезъ точку C, координаты которой:

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum Px}{\sum P}$$

$$y_c = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum Py}{\sum P} \qquad (2)$$

Если силы $P_1 P_2 \dots P_n$ повернемъ на одинъ и тотъ же уголъ α около точекъ ихъ приложенія, то на тотъ же уголъ α около точки C повернется ихъ равнодѣйствующая. Точка C называется центромъ парал. силъ.

§ 28. Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ направленныхъ въ разныя стороны.

Равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ P и Q, направленныхъ въ—

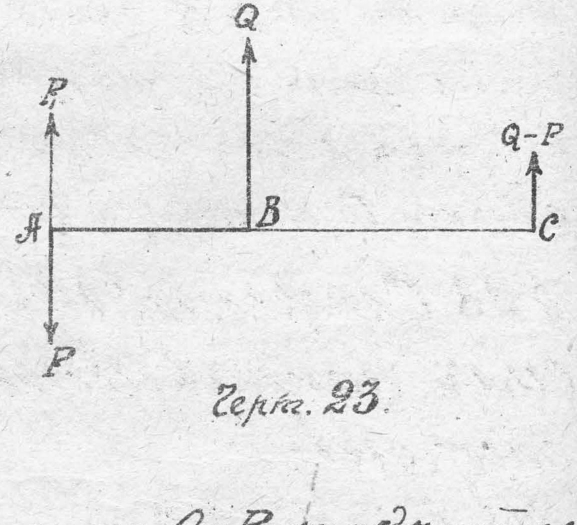
разныя стороны

1/. Равна их разности,

2/. Имъ параллельна и направлена въ сторону большей силы;

3/. Направлена по линіи, которая проходитъ внѣ точекъ приложенія слагаемыхъ силъ, со стороны большей силы и дѣлитъ прямую, ихъ соединяющую, на части обратно пропорціональныя силамъ.

Пусть P и Q данныя силы /черт. 23/. Разложимъ большую силу Q на двѣ параллельныя силы P_1 и $Q-P$, причемъ $P_1=P$ и приложена въ точкѣ



Черт. 23.

A. Точка приложенія силы $Q-P$ опредѣлится согласно § 24 /4/ изъ равенства:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{Q-P}{AB} \qquad \ldots\ldots (1)$$

Итакъ силу Q мы замѣнили черезъ P_1 и $Q-P$; силы P и P_1 въ точкѣ A взаимно уравновѣшиваются; остается одна сила равнодѣйствующая R въ точкѣ C

$$R = Q - P. \qquad \ldots\ldots (2)$$

направленная въ сторону большей силы Q.
Наконецъ изъ (1) слѣдуетъ:

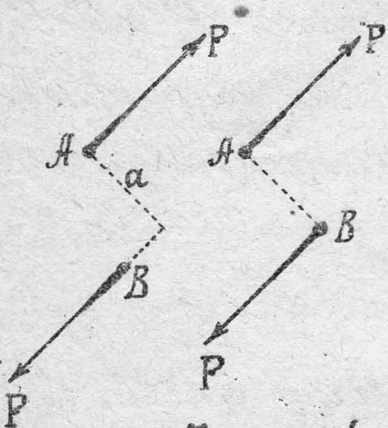
$$\frac{Q}{P} = \frac{AC}{BC} \qquad \ldots\ldots (3)$$

Теорема доказана.

На основаніи формулъ /1—3/ настоящаго § легко разложить данную силу R на двѣ составляющія параллельныя, направленныя въ разныя стороны.

§ 29. Пара силъ. Система двухъ равныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ противоположныя стороны называется парою силъ.

Разстояніе между линіями дѣйствія силъ называется <u>плечомъ</u> пары (черт. 24). Точки приложенія силъ пары всегда можно перенести такъ, что прямая, соединяющая эти точки, будетъ перпендикулярна къ силамъ.



Черт. 24.

Если по правиламъ § 28 будемъ искать равнодѣйствующую пары, то получимъ:

$$R=0.$$

т.е. пара не имѣетъ равнодѣйствующей.

Этимъ самымъ устраняется вопросъ о разысканіи направленія и точки приложенія равнодѣйствующей.

§ 30. Моментъ пары.

Найдемъ моментъ силъ, составляющихъ пару, около центра O (черт. 25.)

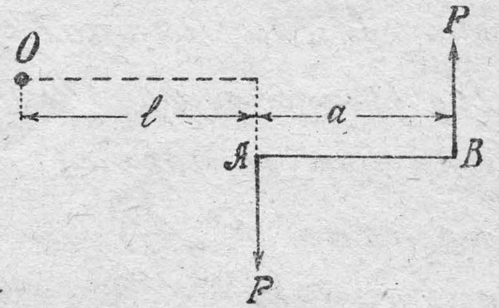
$$M = P(l+a) - Pl = P.a$$

т.е. M около любого центра O равенъ произведенію силы P на плечо a и не зависитъ отъ

положенія центра моментовъ O.
Величина $M = P.a$ называется <u>моментомъ пары</u>. Знакъ момента и его геометрическое представленіе опредѣляется правилами §-21.

§31. Переносъ пары.

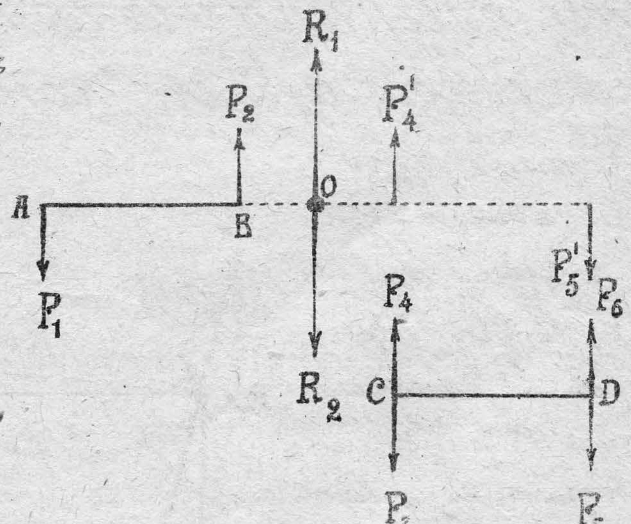
Дѣйствіе пары на твердое тѣло не измѣнится, если пару перенести



Черт. 25.

въ любое положеніе въ ея плоскости.

Пусть $P.\overline{AB}$ данная пара (черт. 26). Беремъ отрѣзокъ прямой CD равный и параллельный AB. Прикладываемъ въ точкахъ C и D четыре равныхъ силы $P_3\ P_4\ P_5\ P_6$. Силы P_2 и P_4 даютъ

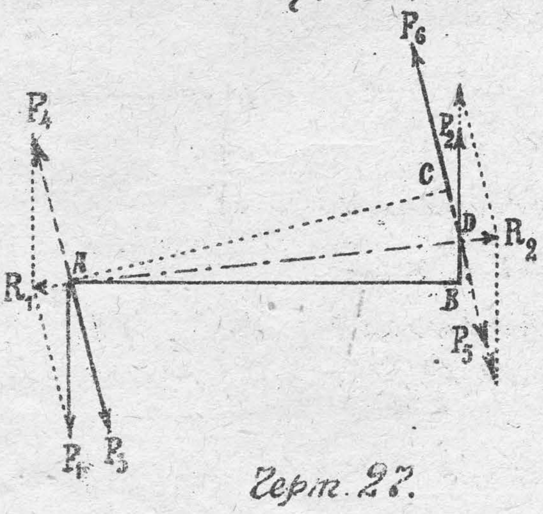


Черт. 26.

равнодѣйствующую $R_1 = P_2 + P_4$ приложенную въ точкѣ O и направленную вверхъ. Силы P_1 и P_5 даютъ равнодѣйствующую $R_2 = P_1 + P_5$ по величинѣ равную R_1, приложенную въ той же точкѣ O, но направленную внизъ. Силы R_1 и R_2 взаимно уравновѣшиваются и въ результатѣ остается пара $P.\overline{CD}$, т. е. данная пара $P.\overline{AB}$, но перенесенная въ другое мѣсто.

§ 32. Поворотъ пары. Дѣйствіе пары не измѣнится, если плечо пары повернемъ въ ея плоскости около одного изъ его концовъ.

Положимъ, что плечо данной пары AB повернуто на уголъ BAC. Прибавимъ къ даннымъ силамъ P_1 и P_2 составляющимъ пару еще четыре равныхъ имъ силы P_3 P_4 P_5 P_6.



Черт. 27.

Силы P_1 и P_4 замѣнимъ равнодѣйствующей R_1 (черт. 27). Точки приложенія силъ P_2 и P_5 перенесемъ по линіямъ ихъ дѣйствія въ точку Д пересѣченія этихъ силъ; равнодѣйствующей ихъ по § 6 будетъ R_2. R_1 и R_2, какъ силы равныя и направленныя по одной прямой въ противоположныя стороны, уравновѣшиваются. Остаются силы: P_3 въ точкѣ А и P_6 въ точкѣ С, т. е. наша пара, но повернутая на уголъ ВАС.

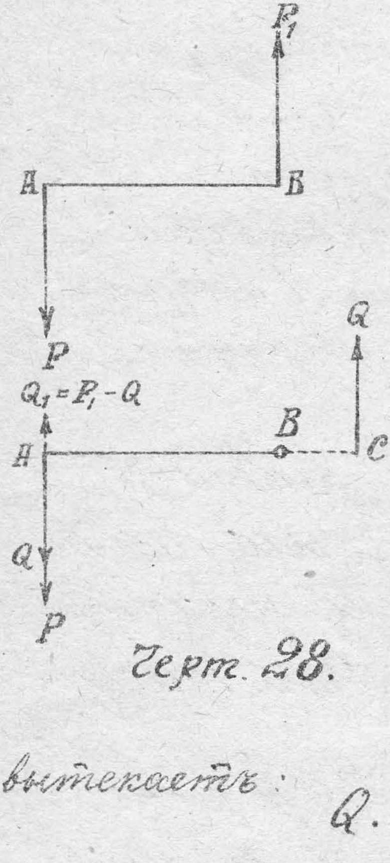
Слѣдствіемъ §§ 31–32 является слѣдующее положеніе: дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если пару перенести въ какое угодно положеніе въ ея плоскости.

§ 33. Преобразованіе паръ.

Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если измѣнить величину силъ и длину плеча такъ, чтобы моментъ пары оставался постояннымъ.

Дана пара съ моментомъ $M = P \cdot AB$. Разлож.

силу P_1 на двѣ параллельныя: одну Q приложенную въ точкѣ C (черт. 28), другую $Q_1 = P - Q$ приложенную въ точкѣ A.



Черт. 28.

Положеніе точки C опредѣлится согласно § 24 изъ уравненія:

$$Q \cdot BC = (P_1 - Q)\,AB \ldots (1)$$

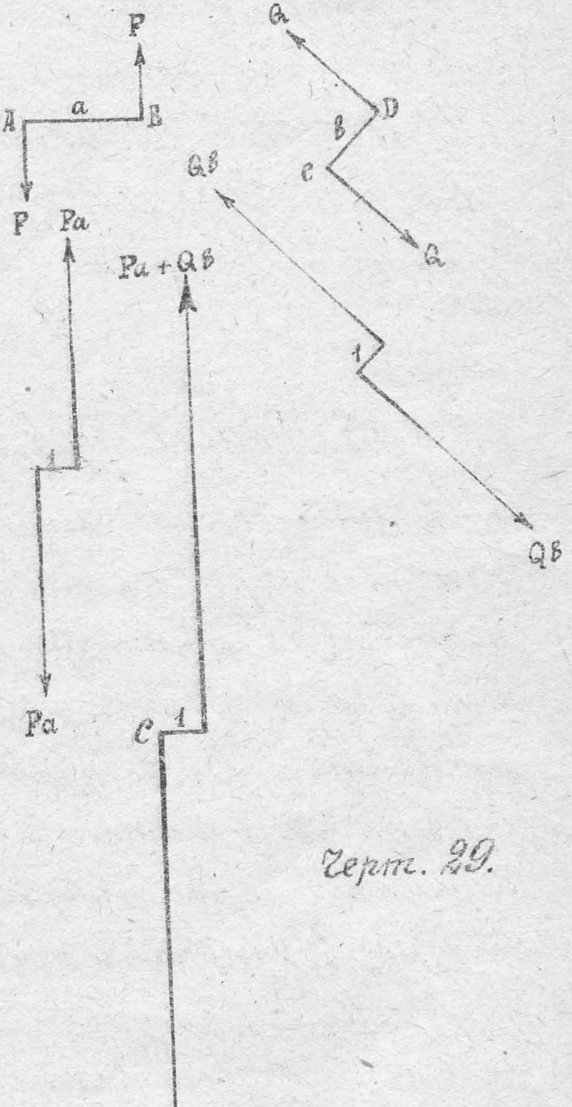
Силы приложенныя въ точкѣ A даютъ равнодѣйствующую Q, направленную внизъ. Въ результатѣ мы получимъ пару съ моментомъ $M = Q \cdot AC \ldots (2)$.

Изъ (1) и (2) настоящаго § вытекаетъ:

$$Q \cdot (AB + BC) = Q\,AC = P \cdot AB \ldots (3).$$

т.е. моментъ преобразованной пары равенъ моменту данной пары.

§ 34. Сложеніе паръ. При сложеніи паръ лежащихъ въ одной плоскости складываются алгебраически ихъ моменты.



Черт. 29.

Даны двѣ пары съ моментами:

$M_1 = P.AB = P.a$

$M_2 = Q.CD = Q.в.$

Преобразуемъ по § 33 обѣ пары такъ, чтобы плечи ихъ равнялись единицѣ; моменты ихъ

$M_1 = Pa.1;$

$M_2 = Qв.1,$

а силы Pa и $Qв$. Затѣмъ, выбравъ въ плоскости дѣйствія паръ какую-либо точку C, переносимъ туда обѣ пары съ преобразованными плечами поворачивая такъ, чтобы плечи совпали. Въ результатѣ получаемъ пару съ моментомъ

$$\mathcal{M} = (P.a. + Q.b).1 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

Если имѣемъ не двѣ, а нѣсколько паръ, то подобнымъ же построеніемъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Моментъ равнодѣйствующей пары равенъ суммѣ моментовъ слагаемыхъ паръ.

$$M = \sum \mathcal{M}_i \qquad \ldots\ldots(2)$$

§35. Общее заключеніе о парахъ.

Такимъ образомъ изъ §§ 31–34 мы видимъ, что дѣйствіе пары на твердое тѣло вполнѣ характеризуется ея моментомъ. Не надо знать въ отдѣльности силы и плеча пары, достаточно знать ея моментъ. Во всѣ разсужденія и вычисленія пр[иходится] вмѣсто силъ и плеча пары вводить ея моментъ. Моментъ пары изображается, какъ доказано въ §30, векторомъ перпендикулярнымъ къ плоскости пары. Моментъ пары можно сложить геометрически съ всякій другой векторъ, по правилу параллелограмма съ моментомъ другой пары; можно разложить его на составляющія, найти его проэкціи на координатныя оси и т. п. Словомъ можно производить надъ нимъ всѣ тѣ операціи, которыя мы уже умѣемъ дѣлать съ векторомъ-силой.

§36. Равновѣсіе твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ паръ лежащихъ въ одной плоскости.

Пусть на твердое тѣло дѣйствуютъ нѣсколько паръ съ моментами:

$$\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \ \ldots \ \mathcal{M}_n .$$

Т. какъ равнодѣйствующая всѣхъ силъ равна 0, то тѣло не будетъ перемѣщаться поступательно; оно можетъ только вращаться. Чтобы найти условіе равновѣсія, сложимъ всѣ пары по §34. Моментъ равнодѣйствующей пары

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \cdots + \mathcal{M}_n = \sum \mathcal{M}_i \qquad \ldots (1)$$

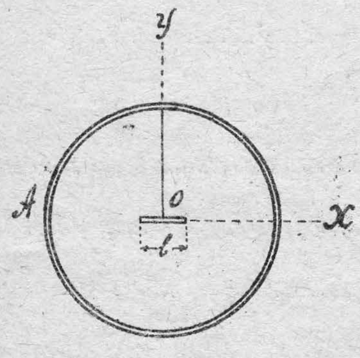
Если этотъ моментъ положителенъ, тѣло вращается въ положительную сторону, если отрицателенъ — въ отрицательную сторону. Отсюда слѣдовательно условіемъ равновѣсія будетъ:

$$\sum \mathcal{M} = 0 \qquad \ldots (2)$$

т. е. для равновѣсія тѣла подъ дѣйствіемъ только паръ необходимо и достаточно, чтобы сумма моментовъ всѣхъ паръ равнялась нулю.

§37. Примѣръ.

Тангенсъ-гальванометръ.



Черт. 30.

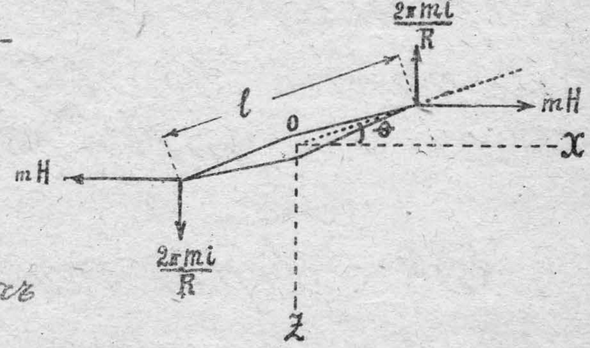
Проволока A согнута въ кругъ радіуса R и расположена въ плоскости магнитнаго меридіана XOY (черт. 30). Въ центрѣ круга O подвѣшена стрѣлка NS, длина которой l весьма мала сравнительно съ радіусомъ круга R. Масса магнитныхъ полюсовъ на концахъ стрѣлки $+m$ и $-m$. На эти полюсы дѣйствуетъ горизонтальная составляющая силы земного магнитизма H, дающая пару силъ $+mH$ и $-mH$. Эта пара, вращая стрѣлку NS около оси OY, стремится расположить ее въ плоскости магнитнаго меридіана XOY. Если по кругу идетъ токъ i, то на полюсы стрѣлки дѣйствуютъ магнитныя силы тока равныя по величинѣ $+\frac{2\pi.mi}{R}$ и $-\frac{2\pi.mi}{R}$ и направленныя перпендикулярно къ плоскости круга, т.е. по оси OZ *) (черт. 31).

Пусть стрѣлка отклонилась на уголъ θ. Моментъ силъ земного магнитизма

$$M_1 = -mH.l\,\sin\theta$$

Моментъ магнитныхъ силъ тока

$$M_2 = +\frac{2\pi.mi}{R}\,l\cos\theta$$



Черт. 31.

При равновѣсіи

$$\sum M = -mH.l.\sin\theta + \frac{2\pi mi}{R}\,l\cos\theta = 0,$$

откуда получаемъ формулу для опредѣленія силы тока съ помощью простѣйшаго тангенсъ-гальванометра:

$$i = \frac{RH}{2\pi}\,tg\theta.$$

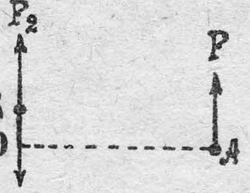
---

*) Выраженія для электромагнитной силы приведены здѣсь безъ доказательства. Выводъ ихъ см. Боргманъ. «Ученіе объ электричествѣ и магн. явленіяхъ» т. II §§ 337-339. Изд. 1916 г. или Зиловъ. «Физика» т. II гл. X §§ 5-7. Изд. 1916 г.

Глава III.

Силы въ одной плоскости. Приведеніе системы силъ къ силѣ и паръ. Уравненія равновѣсія твердаго тѣла.

§38. Переносъ силы. Точку приложенія силы можно перенести, безъ измѣненія ея дѣйствія, въ любую точку твердаго тѣла, если при этомъ добавить нѣкоторую пару. На твердое тѣло дѣйствуетъ сила P приложенная въ точкѣ A (черт. 32). Мы желаемъ перенести точку приложенія силы въ B. Для этого приложимъ къ B силы P_1 и P_2 равныя P и взаимно уравновѣшивающіяся. Получилась система силъ изъ силы P_2 приложенной къ точкѣ B и пары съ моментомъ $P.\overline{AD}$.



Черт. 32.

Въ частномъ случаѣ, если точка B лежитъ на продолженіи прямой AP, мы приходимъ къ § 18

§ 39. Приведеніе системы силъ къ одной силѣ и одной парѣ.

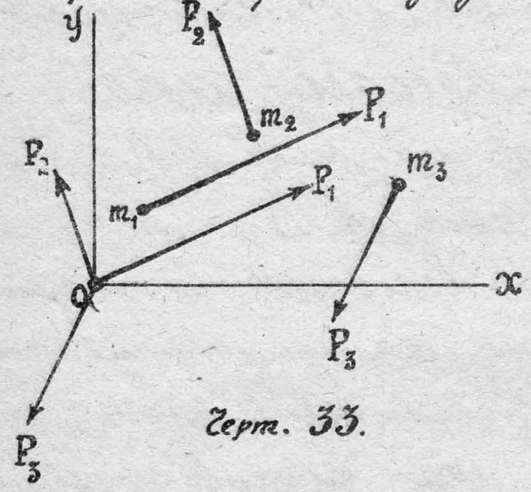
Пусть имѣется система силъ $P_1 P_2 \ldots P_n$ приложенныхъ къ точкамъ $A, B, \ldots N$. Перенесемъ согласно § 38 всѣ силы въ какую либо точку O называемую центромъ приведенія. При этомъ придется добавить n паръ съ моментами $M_1\ M_2 \ldots M_n$. сложивъ геометрически всѣ силы, перенесенныя въ точку O, получимъ равнодѣйствующую R. Сложивъ всѣ пары, получимъ равнодѣйствующую пару съ моментомъ $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$.

Итакъ: **Любую систему силъ на плоскости можно замѣнить силой и парой (силой и моментомъ).**

§ 40. Условія равновѣсія твердаго тѣла, если всѣ силы лежатъ въ одной плоскости.

Пусть на твердое

тѣло дѣйствуютъ силы $P_1 P_2 \dots P_n$ лежащія всѣ въ плоскости чертежа; ихъ точки приложенія пусть будутъ $m_1 m_2 \dots m_n$.



Черт. 33.

Выберемъ произвольную точку O (черт. 33) за центръ приведенія и перенесемъ туда всѣ силы. Согласно § 39 система силъ $P_1 P_2 \dots P_n$, приложенныхъ въ точкахъ $m_1 m_2 \dots m_n$, замѣнится одной равнодѣйствующей R, приложенной въ центрѣ приведенія O и одной парой (моментомъ).

Чтобы тѣло было въ равновѣсіи, необходимо по § 19 и § 36 чтобы

$$R = 0 \; ; \; M = \sum M_i = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Эти уравненія удобнѣе написать иначе. Выберемъ центръ O за начало Декартовыхъ координатъ xOy; пусть проэкціи силъ $P_1 P_2 \dots P_n$ на координатныя оси будутъ:

$$\underline{X}_1 \underline{Y}_1 \quad \underline{X}_2 \underline{Y}_2 \quad \dots \quad \underline{X}_n \underline{Y}_n$$

Тогда по §9 проэкціи равнодѣйствующей R

$$R_x = \sum \underline{X} \quad R_y = \sum \underline{Y} \quad \ldots (2)$$

и уравненія (1) замѣняются слѣдующими:

$$\sum \underline{X} = 0 \quad \sum \underline{Y} = 0 \quad \sum M = 0. \quad \ldots (3)$$

Это и есть уравненія равновѣсія твердаго тѣла при дѣйствіи плоской системы силъ.

Уравненіями (3) можно дать простое физическое толкованіе:

$\sum \underline{X} = 0$ для того, чтобы тѣло не двигалось ||-но оси Ox,

$\sum \underline{Y} = 0$ для того, чтобы тѣло не двигалось ||-но оси Oy,

$\sum M = 0$ для того, чтобы тѣло не вращалось около оси Oz.

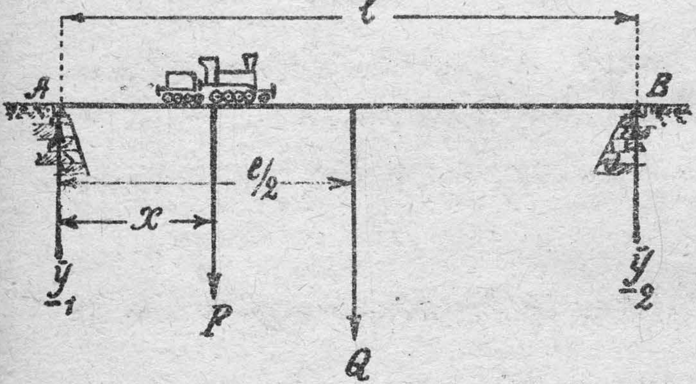
Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ на приложеніе основныхъ уравненій (3).

§41. Балочный мостъ.

Мостъ длиною l лежитъ на двухъ опорахъ A и B; вѣсъ моста Q; на мосту на разстояніи x отъ опоры A стоитъ паровозъ вѣсомъ P. Найти давленія опоръ на мостъ (опорныя реакціи). (Черт. 34).

Прежде всего смотримъ какія дѣйствуютъ на мостъ силы?

Собственный вѣсъ моста Q приложенный въ центрѣ тяжести моста на разстояніи $l/2$ отъ опоры A; вѣсъ паровоза P приложенъ въ центрѣ тяжести паровоза на разстояніи x отъ A; неизвѣстныя опорныя реакціи обозначимъ черезъ $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$. Пишемъ уравненія равновѣсія § 40 (3).



Черт. 34.

$$\sum \overline{X} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\sum \overline{Y} = \overline{Y}_1 - P - Q + \overline{Y}_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \mathcal{M}_A = \overline{Y}_1 . 0 - P . x - Q . \frac{l}{2} + \overline{Y}_2 . l = 0$$

Моменты взяты около точки A. Рѣшимъ эти уравненія

$$\overline{Y}_1 = \frac{Q}{2} + \frac{Px}{l}, \qquad (2)$$

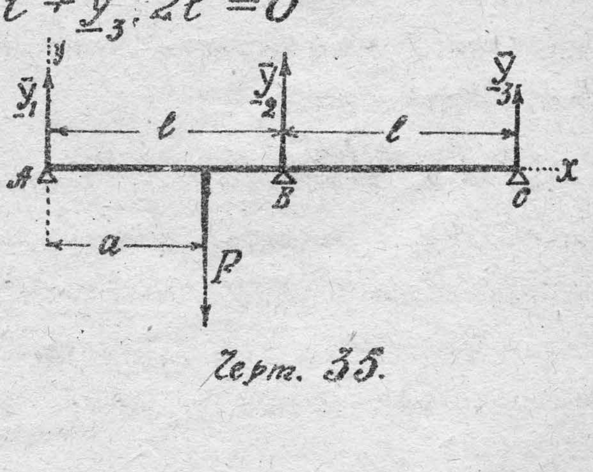
$$\overline{Y}_2 = \frac{Q}{2} + \frac{P(l-x)}{l}$$

Первые члены правой части уравнений (2) даютъ опорныя реакціи вызываемыя вѣсомъ моста; вторые — вѣсомъ паровоза. Совѣтуемъ разобрать въ видѣ примѣра, какъ мѣняются вторые члены при передвиженіи паровоза по мосту.

§42. Понятіе о статически неопредѣлимыхъ задачахъ.

На балку ABC лежащую на трехъ опорахъ дѣйствуетъ сила P, приложенная на разстояніи a отъ опоры A. Для опредѣленія опорныхъ реакцій пишемъ уравненія равновѣсія §40.(3). (Черт. 35).

$$
\begin{aligned}
&\sum \underline{X} = 0+0+0+0=0 \\
&\sum \underline{Y} = \underline{Y}_1 - P + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0 \qquad (1)\\
&\sum M = \underline{Y}_1 . 0 - P.a + \underline{Y}_2 . l + \underline{Y}_3 . 2l = 0
\end{aligned}
$$



Черт. 35.

Первое уравненіе обращается тождественно въ 0; остаются два уравненія съ тремя неизвѣстными. Ясно, что ихъ опредѣлить нельзя. Задача является

<u>статически-неопредѣлимой</u>, т.е. для ея рѣшенія недостаточно уравненій равновѣсія твердаго тѣла. Неизвѣстныя опорныя реакціи $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_3$ могутъ быть опредѣлены, если принять въ разсчетъ упругія свойства балки и опоръ. Эти вопросы относятся уже къ курсамъ теоріи упругости и сопротивленія матеріаловъ. Вообще для плоской системы статика твердаго тѣла даетъ три уравненія §40 (3). Если число неизвѣстныхъ больше трехъ, задача является статически неопредѣлимой. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ одно или даже два уравненія могутъ тождественно обращаться въ нуль; тогда задача становится статически неопредѣлимой. Но принимая въ разсчетъ упругія свойства тѣлъ, всегда можно написать добавочныя уравненія и опредѣлить лишнія неизвѣстныя.

§43. Шарнирныя фермы.

Въ мостахъ и стропилахъ примѣняются системы называемыя <u>шарнирными фермами</u>. Онѣ состоятъ изъ стержней, концы которыхъ соединены между собой <u>шарнирами</u>. Такова, напримѣръ, мостовая ферма (черт. 36); мостъ состоитъ изъ такихъ фермъ положенныхъ на устои. Если всѣ стержни фермы лежатъ въ одной плоскости, то ферма называется плоской, въ противномъ случаѣ—пространственной. Шарнирныя фермы раздѣляются на:

1/. Статически-опредѣлимыя; въ нихъ силы дѣйствующія во всѣхъ стержняхъ фермы можно опредѣлить на основаніи теоремъ статики твердаго тѣла.

2/. Статически-неопредѣлимыя; въ нихъ надо разсматривать упругія измѣненія фермы.

Для того, чтобы ферма была статически опредѣлимой необходимо:

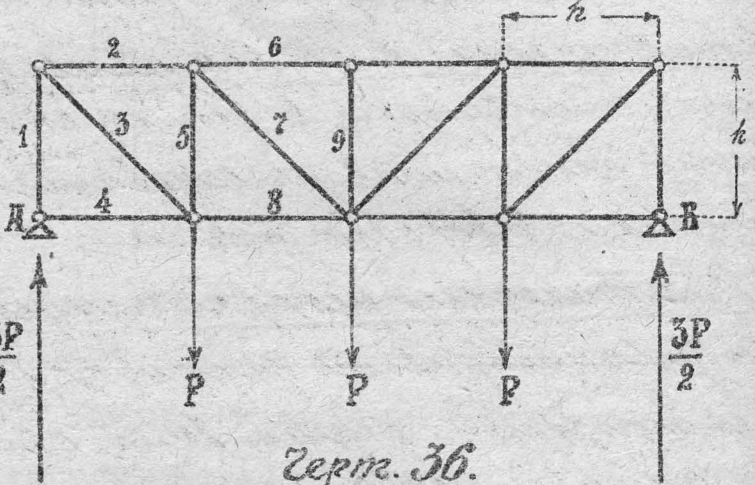
1/. Число опорныхъ реакцій поддерживающихъ ферму должно быть не болѣе трехъ.

2/. Ферма должна быть такой конструкціи, чтобы ея стержни были только растянуты или сжаты но не изогнуты,

3/. Ферма не должна имѣть лишнихъ частей. Въ составъ ея должны входить только части, необходимыя для приданія ей жесткости, ...

ее можно было считать твердымъ тѣломъ. Отбрасываніе любой изъ частей ея должно сдѣлать ее не жесткой, измѣняющей свою форму безъ сопротивленія.*) Здѣсь мы разсмотримъ только плоскія статически опредѣлимыя фермы.

На опорахъ А и В (черт. 36) лежитъ мостовая ферма; пусть на нее дѣйствуютъ три равныхъ груза P, опорныя реакціи въ А и В будутъ



Черт. 36.

$\frac{3P}{2}$ и направлены вверхъ. Надо опредѣлить силы сжимающія или растягивающія отдѣльные стержни фермы.

§ 44. Способъ отрѣзыванія узловъ.

Отрѣжемъ мысленно узелъ, гдѣ сходятся стержни 1 и 4 (черт. 37). На узелъ А дѣйствуетъ опорная

*) Подробнѣе: В. Кирпичевъ. Графическая статика гл. X; С. Тимошенко. Сопротивленіе матеріаловъ гл. XIV.

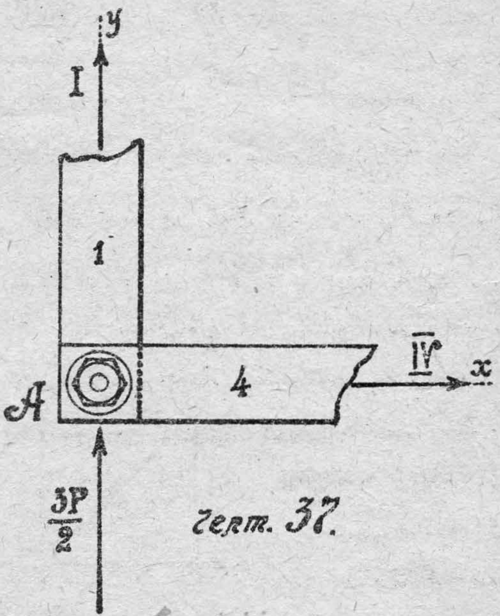
1 и 4 (черт. 37). На узелъ A дѣйствуетъ опорная реакція $\frac{3P}{2}$ и силы I и $\overline{IV}$ направленныя вдоль стержней. Для равновѣсія необходимо

$$\sum \bar{X} = 0 + 0 + \overline{IV} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \bar{Y} = \frac{3P}{2} + I + 0 = 0 \qquad (2)$$

откуда

$$\bar{I} = -\frac{3P}{2}; \quad \overline{IV} = 0 \qquad (3)$$



черт. 37.

т.е. сила I направлена не вверхъ, какъ мы изобразили на чертежѣ 37, а внизъ; стержень (1) сжатъ силой $\frac{3P}{2}$; въ стержнѣ (4) сила равна 0, т.е. онъ не растянутъ и не сжатъ.

Отрѣзавъ слѣдующій узелъ, гдѣ сходятся стержни (1), (2), (3), пишемъ уравненія равновѣсія (черт. 38)

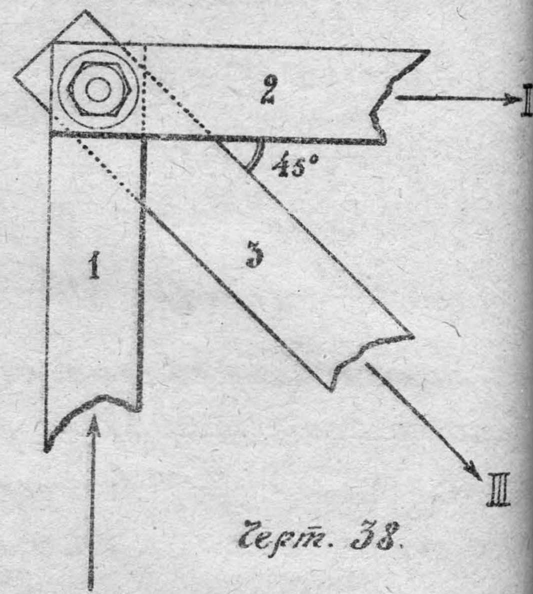
$$\sum \bar{X} = 0 + \overline{II} + \overline{III} \cos 45° = 0 \qquad (4)$$

$$\sum \bar{Y} = \frac{3P}{2} + 0 - \overline{III} \sin 45° = 0 \qquad (5)$$

откуда:

$$\overline{II} = -\frac{3P}{2} \quad ; \quad \overline{III} = \frac{3P\sqrt{2}}{2}. \qquad (6)$$

Переходя такъ шагъ за шагомъ отъ одного узла къ другому, мы можемъ опредѣлить силы дѣйствующія въ любомъ стержнѣ фермы. Зная ихъ инженеръ подбираетъ размѣры стержня такъ, чтобы онъ могъ выдержать безопасно эти силы.



Черт. 38.

§45. Способъ Риттера.

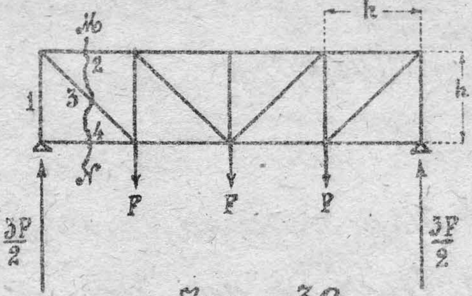
Проводимъ сѣченіе MN такъ, чтобы перерѣзать три стержня фермы и разсмотримъ равновѣсіе отсѣченной части. (Черт. 39). Для опредѣленія силы $\overline{II}$ беремъ моменты всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на отрѣзанную часть фермы, около точки пересѣченія силъ $\overline{III}$ и $\overline{IV}$, т. е. точки R_1 (точка Риттера).

$$\sum M = -\overline{II}\cdot h + \overline{III}\cdot 0 + \overline{IV}\cdot 0 - \frac{3P}{2}h = 0 \qquad (1)$$

Откуда

$$\underline{II} = -\frac{3P}{2}. \quad (2)$$

Знакъ – указываетъ на то, что сила II направлена съ права на лѣво, по знаку ⟵ на черт. 40, т.е. стержень II сжатъ.



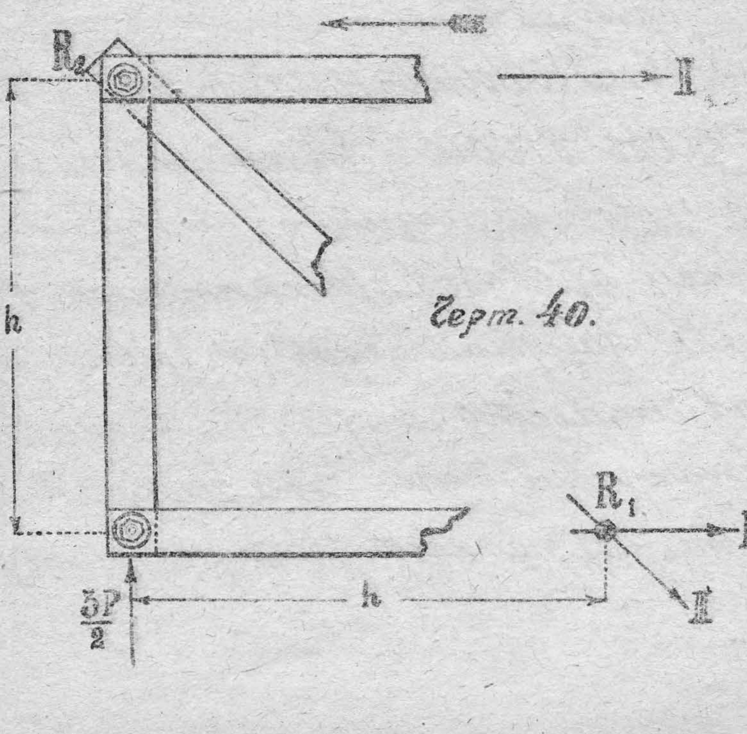
Черт. 39.

Для опредѣленія силы IV беремъ моментъ около точки пересѣченія силъ II и III, т.е. точки R_2 (вторая точка Риттера)

$$\sum M = \underline{II}.0 + \underline{III}.0 + \underline{IV}.h + \frac{3P}{2}\cdot 0 = 0 \quad (3)$$

Откуда $\underline{IV} = 0.$

Опредѣлить силу III по способу Риттера нельзя, т.к. силы II и IV параллельны. Тогда беремъ сумму проэкцій всѣхъ силъ на горизонталь:



Черт. 40.

$$\sum X = -\mathrm{II} + 0 + \mathrm{III}\cos 45^\circ = 0. \qquad (4)$$

Откуда $\mathrm{III} = \dfrac{3P\sqrt{2}}{2}$.

Если бы ферма имѣла иной видъ и стерж[ни] 1 и 4 были бы непараллельны, то способъ Рит[тера] былъ бы примѣнимъ ко всѣмъ тремъ стержнямъ. Сравнивая способы отрѣзыван[ія] узловъ и Риттера, мы видимъ, что въ первомъ случаѣ мы пользуемся первыми из[ъ] трехъ основныхъ уравненій равновѣсія /§ 40.(3)/; въ способѣ же Риттера послѣднимъ уравненіемъ /уравненіемъ моментовъ/.

§ 46. Гибкая нить подъ дѣйствіемъ силы вѣса.

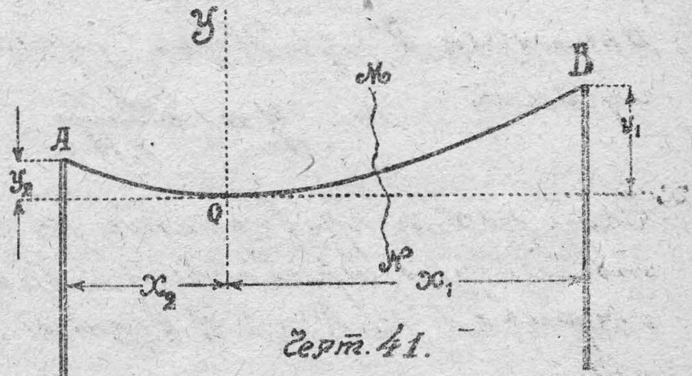
Тяжелая гибкая нить постоянной толщины /напримѣръ электрическій проводъ/ прикрѣплена въ точкахъ A и B. Найдемъ форму кривой провисанія и зависимость между натяженіемъ нити и направленіемъ. За начало координатъ (черт. 41) примемъ самую низшую точку нити

Горизонтальную касательную примемъ за ось Ox. Сѣченіями Oy и MN выдѣлимъ часть нити длиною S. На этотъ кусокъ нити дѣйствуютъ слѣдующія силы (черт. 42):

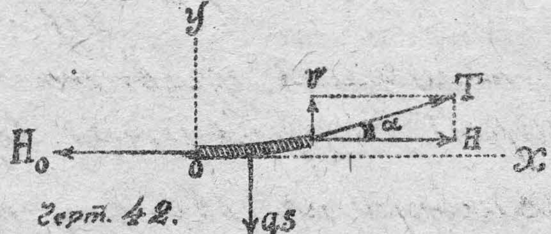
1/. Вѣсъ куска нити qS;

2/. Натяженіе H_0 направленное горизонтально;

3/. Натяженіе T направленное по касательной къ кривой провисанія въ сѣченіи MN.



Черт. 41.



Черт. 42.

Если обозначимъ проекціи T на горизонталь и вертикаль черезъ H и V, то ур. равновѣсія напишутся такъ:

$$\sum \underline{X} = -H_0 + 0 + H = 0$$

$$\sum \underline{Y} = 0 - qS + V = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\sum M = H_0 . 0 - qS \cdot \frac{x}{2} - H . y + V . x = 0.$$

Изъ перваго уравненія

$$H_0 = H. \quad \ldots (2)$$

т.е. проэкція натяженія нити на горизонталь есть величина постоянная равная натяженію нити въ самой низкой точкѣ. Далѣе исключая V изъ двухъ другихъ уравненій получаемъ

$$y = \frac{q.s.x}{2H} \quad \ldots (3)$$

Если нить провисаетъ по пологой кривой, то можно приблизительно вмѣсто длины отрѣзка нити s взять ея проэкцію x. Тогда

$$y = \frac{qx^2}{2H} \quad \ldots (4)$$

т.е. получаемъ уравненіе параболы, ось которой направлена вертикально.

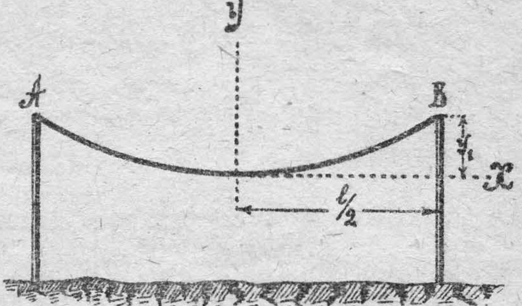
Разсмотримъ два случая:

I. Точки привѣса нити лежатъ на одной высотѣ. Тогда провѣсъ нити найдется (черт. 43) подстановкой въ (4) координатъ точки B — y_1 и $x_1 = l/2$

$$y_1 = \frac{ql^2}{8H} \quad \ldots (5)$$

Отсюда легко вычислить натяженіе нити H, зная q, l и y_1.

II. Точки подвѣса нити лежатъ на разной высотѣ (черт. 41). Тогда для точекъ B и A



черт. 43.

$$y_1 = \frac{qx_1^2}{2H} \quad y_2 = \frac{qx_2^2}{2H} \quad \ldots (6)$$

или обозначая $y_1 - y_2$ черезъ h, имѣемъ:

$$h = \frac{q}{2H}\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \frac{ql}{2H}\left(x_1 - x_2\right) \ldots (7)$$

$$\text{т. к. } x_1 + x_2 = l \quad \ldots (8)$$

Изъ (7-8)

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql} \quad x_2 = \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql} \quad \ldots (9)$$

Откуда можно вычислить натяженіе H, зная q, l и h.

Уравненіе (4) со всѣми слѣдствіями является приближеннымъ рѣшеніемъ задачи. Точное рѣшеніе даетъ такъ называемую цѣпную линію. Но при большихъ натяженіяхъ, какъ это бываетъ въ цѣпныхъ мостахъ, подвѣсныхъ желѣзныхъ дорогахъ, электрическихъ проводахъ и т. п., приближенное рѣшеніе мало отличается отъ точнаго. Такъ напримѣръ для желѣзной проволоки при пролетѣ $AB = l = 100$ метровъ (Черт. 43) приближенная и точная величина провѣса даны въ таблицѣ:

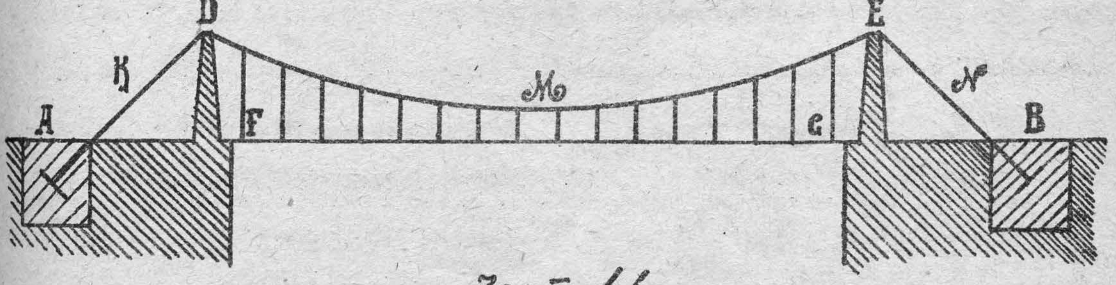
Натяженіе $H \frac{кгр}{сент^2}$	П Р О В Ѣ С Ъ	
	Приближ. рѣш.	Точное рѣшеніе
1000	0.95	0.94
500	1.88	1.87
300	3.15	3.13
100	9.38	9.48
10	95	270

На практикѣ натяженіе въ мѣдныхъ электрическихъ проводахъ около $400 \frac{кгр}{сент^2}$; въ желѣзныхъ значительно болѣе; въ цѣпныхъ мостахъ до $2000 \frac{кгр}{сент^2}$

§ 47. Цѣпной мостъ.

Устройство цѣпного моста показано схематически на чертежѣ 44. KMN проволочный канатъ или же цѣпь. A, B – бетонные массивы гдѣ закрѣплены концы цѣпи; DE – опоры; FG – проѣзжая часть моста, подвѣшенная на вертикальныхъ стержняхъ къ цѣпи DE. Если нагрузка (вѣсъ цѣпи, проѣзжей части моста и т. п.) распредѣляется равномѣрно вдоль длины FG и равна q кгр.

на единицу длины, то согласно § 46 можно считать, что цѣпь провисаетъ по параболѣ.



Черт. 44.

При болѣе сложномъ законѣ распредѣленія нагрузки кривая провисанія будетъ, конечно, иная.*)

Глава IV

Силы въ пространствѣ.

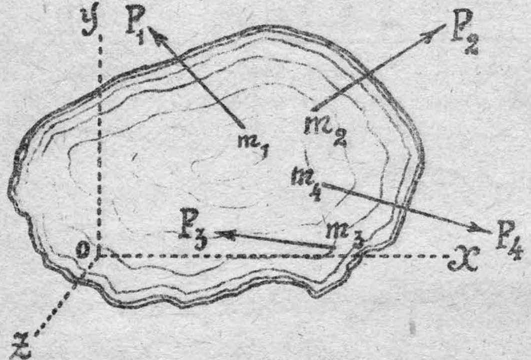
§ 48. Условія равновѣсія.

Пусть на твердое тѣло (черт. 45) дѣйствуютъ

---

*) Примѣромъ цѣпного моста въ нашихъ краяхъ можетъ служить мостъ черезъ рѣку Днѣпръ въ Кіевѣ; путепроводъ черезъ жел. дорожные пути на ст. Славянскъ К. ж. д. и т. п.

силы $P_1 P_2 \dots P_n$, расположенныя произвольнымъ образомъ въ пространствѣ. Точки приложенія ихъ соотвѣтственно $m_1\, m_2 \dots m_n$. Отнесемъ тѣло къ произвольно выбраннымъ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ $Oxyz$. Начало



Черт. 45.

координатъ O выберемъ за центръ приведенія. Переносимъ силу P_1, приложенную въ точкѣ m_1, въ центръ O; получаемъ силу P_1, приложенную въ O и пару съ моментомъ M_1. Векторъ, изображающій моментъ M_1, будемъ строить тоже изъ точки O (ср. §§30-35). Положительное направленіе вектора-момента мы выберемъ такъ, чтобы глядя вдоль него намъ казалось, что пара вращаетъ тѣло по часовой стрѣлкѣ *)

---

*) Это опредѣленіе направленія не противорѣчитъ данному въ §21, ибо глядя вдоль положительнаго направленія оси z-овъ, мы видимъ вращеніе по часовой стрѣлкѣ, а глядя противъ него — вращеніе противъ часовой стрѣлки.

Такъ же поступаемъ съ силой P_2, затѣмъ $P_3, P_4 \ldots P_n$. Въ результатѣ получаемъ двѣ системы векторовъ:

1/. векторы-силы $P_1\, P_2 \ldots P_n$ приложенные къ точкѣ O,

2/. векторы-моменты $M_1\, M_2 \ldots M_n$ тоже приложенные къ O. Всѣ силы складываемъ геометрически (см. §7) и получаемъ одну равнодѣйствующую силу R; всѣ моменты тоже складываемъ геометрически и получаемъ одинъ равнодѣйствующій моментъ M.

Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы

$$R = 0 \quad M = 0 \qquad \ldots (1)$$

Эти условія удобнѣе написать иначе. Пусть проэкціи силы P_1 будутъ $X_1\, Y_1\, Z_1$; проэкціи силы P_2 — $X_2\, Y_2\, Z_2$ и т. д. Тогда проэкціи равнодѣйствующей R по §9 и §13

$$\sum X \qquad \sum Y \qquad \sum Z \qquad \ldots (2)$$

Пусть моментъ первой пары, появившейся при переносѣ силы P_1 гдѣ m_1 въ O, будетъ M_1; проэкціи вектора-момента M_1 на оси координатъ $\mathcal{M}_{1x}$ $\mathcal{M}_{1y}$ $\mathcal{M}_{1z}$; проэкціи момента $\mathcal{M}_2$ второй пары, появившейся при переносѣ силы P_2 изъ m_2 въ O, пусть будутъ $\mathcal{M}_{2x}$ $\mathcal{M}_{2y}$ $\mathcal{M}_{2z}$ и т. д.. Тогда проэкціи вектора, изображающаго равнодѣйствующій моментъ, будутъ:

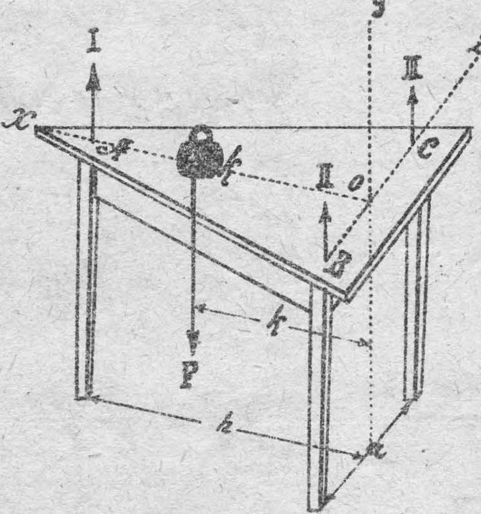
$$\sum \mathcal{M}_x \quad \sum \mathcal{M}_y \quad \sum \mathcal{M}_z \quad \ldots (3)$$

гдѣ значки 1, 2... n при $\mathcal{M}_n$ опущены. Такъ какъ по (1) $R = 0$ и $\mathcal{M} = 0$, то и ихъ проэкціи на любую ось должны обращаться въ 0, т. е.

$$\begin{aligned} &\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0 \\ &\sum \mathcal{M}_x = 0 \quad \sum \mathcal{M}_y = 0 \quad \sum \mathcal{M}_z = 0 \end{aligned} \quad \ldots (4)$$

это и есть основныя уравненія равновѣсія твердаго тѣла. Для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы сумма проэкцій всѣхъ силъ на прямоугольныя оси координатъ равнялась нулю, и чтобы сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно каждой изъ осей координатъ тоже равнялась нулю. Изъ (4), какъ частный случай, получаются условія равновѣсія §§ 19, 36, 40.

§ 49. Примѣръ. Столъ на трехъ ножкахъ. Столъ имѣетъ форму равнобедреннаго треугольника ABC. Въ точкѣ K лежитъ грузъ P. Найти реакціи ножекъ, т. е. тѣ силы, съ которыми ножки поддерживаютъ доску стола.



Черт. 46.

Прежде всего смотримъ, какія дѣйствуютъ силы? Въ точкѣ K дѣйствуетъ сила вѣса P направленная внизъ; въ точкахъ A, B, C реакціи ножекъ I, II, III направленныя вверхъ. Пишемъ уравненія равновѣсія по § 48 (4):

$$\sum X = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\sum Y = I + II + III - P = 0$$
$$\sum Z = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \qquad (1)$$
$$\sum M_x = I.0 + II.\frac{a}{2} - III.\frac{a}{2} + P.0 = 0$$
$$\sum M_y = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\sum M_z = I.h + II.0 + III.0 - P.k = 0$$

Откуда
$$I = \frac{k}{h}.P; \; II = III = \frac{h-k}{2h}P \qquad (2)$$

Предлагаемъ изслѣдовать измѣненіе опорныхъ реакцій въ зависимости отъ положенія груза P.

§ 50. Несвободное тѣло.

Уравненія равновѣсія § 48 (4) можно примѣнять и къ несвободному тѣлу, надо лишь къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы сопротивленія препятстві стѣсняющихъ свободу движенія тѣла, т.е. реакціи связей /ср. гл. I §14/. Задача §49 есть въ сущности примѣръ на равновѣсіе несвободнаго тѣла. Тѣло, равновѣсіе к-го мы изслѣдуемъ, — верхняя доска стола; дѣйствующая сила — грузъ P; препятствія (связи), мѣшающія движенію доски стола внизъ, — ножки стола; реакціи связей — силы I, II, III.

§51. Частные случаи. Если не интересоваться реакціями связей, а лишь искать условія равновѣсія дѣйствующихъ на твердое тѣло силъ, то иногда можно брать не всѣ 6 уравненій §48(4), а только нѣкоторыя изъ нихъ. Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

I. **Тѣло имѣетъ неподвижную точку.** Такое тѣло не можетъ двигаться поступательно; оно можетъ лишь вращаться около неподвижной точки. Условія равновѣсія:

$\sum M_x = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси X

$\sum M_y = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси Y

$\sum M_z = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси Z

II. Тѣло можетъ двигаться только параллельно данной плоскости. Возьмемъ эту плоскость за координатную плоскость xOy. Условія равновѣсія:

$\sum X = 0$ чтобы тѣло не двигалось вдоль оси X

$\sum Y = 0$ чтобы тѣло не двигалось вдоль оси Y

$\sum M_z = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси Z

III. Тѣло можетъ вращаться около оси Z-овъ и скользить вдоль нее. Условія равновѣсія:

$\sum M_z = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси Z

$\sum Z = 0$ чтобы тѣло не двигалось вдоль оси Z

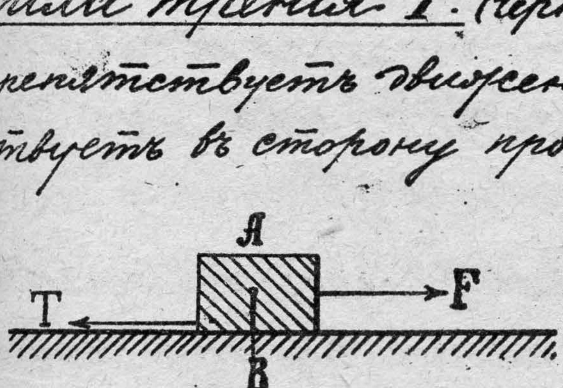
IV. Тѣло можетъ только вращаться около оси Z. Условіе равновѣсія:

$\sum M_z = 0$ чтобы тѣло не вращалось около оси Z

Глава V.
Тренiе.

§ 52. Тренiе скольженiя.

Если тѣло A двигается по поверхности другого тѣла B подъ влiянiемъ силы F, то на поверхности касанiя появляется <u>сила тренiя T.</u> (черт. 47). Эта сила препятствуетъ движенiю тѣла и дѣйствуетъ въ сторону противоположную ему.



Черт. 47.

Тренiе скольженiя изслѣдовано впервые Кулономъ. Изъ его опытовъ оказалось:

I. Сила тренiя при скольженiи T пропорцiональна нормальному давленiю N одного тѣла на другое:

$$T = k.N \quad \dots (1)$$

II. Сила тренія не зависитъ отъ величины трущейся поверхности.

III. Сила тренія не зависитъ отъ скорости движенія, но во время движенія она меньше чѣмъ въ покоѣ.

IV. Сила тренія T зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ и отъ свойства и состоянія ихъ поверхностей.

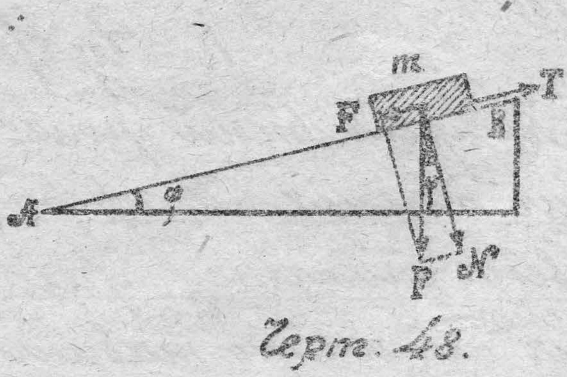
Позднѣйшія болѣе подробныя изслѣдованія показали, что законы Кулона лишь приблизительно вѣрны; въ частности сила тренія зависитъ отъ скорости и при большихъ скоростяхъ замѣтно уменьшается. Но въ первомъ приближеніи, въ особенности при рѣшеніи задачъ статики, эти законы вполнѣ удовлетворительны.

§53. Коэффиціентъ тренія.

Множитель k въ (1) предъидущаго § называется коэффиціентомъ тренія скольженія. Онъ зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ и состоянія и свойствъ трущихся поверхностей.

Коэффиціентъ тренія можетъ быть опредѣленъ изъ опыта такъ-же, какъ и всѣ другія физическія постоянныя (коэффиціентъ расширенія, показатель преломленія и т. д.) Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ опредѣленія k заключается въ слѣдующемъ:

На наклонной плоскости AB лежитъ тѣло вѣсомъ P. Силу вѣса P разложимъ на силу F



Черт. 48.

параллельную наклонной плоскости AB (черт. 48) и силу N къ ней перпендикулярную.

$$F = P\sin\varphi;\ N = P\cos\varphi \quad \dots (1)$$

Кромѣ F и N на твердое тѣло m дѣйствуетъ сила тренія T. По Кулону эта сила

$$T = kN = kP\cos\varphi \quad \dots (2)$$

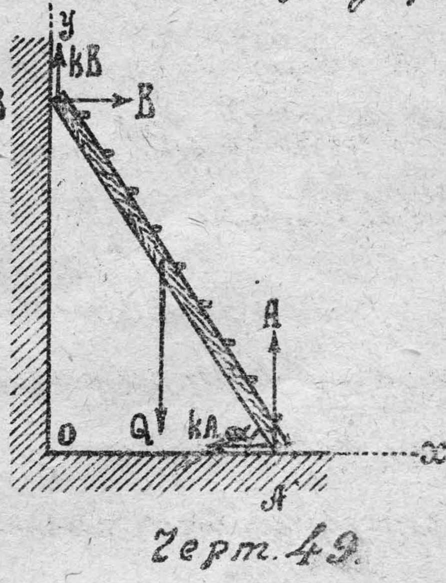
При маломъ углѣ наклона φ тѣло m находится въ покоѣ. Если постепенно увеличивать уголъ φ, то при нѣкоторой его величинѣ Φ тѣло начнетъ скользить по плоскости. Въ этотъ моментъ $F = T$, т. е. $P\sin\Phi = kP\cos\Phi$ откуда

$$k = \operatorname{tg}\Phi \quad \dots (3)$$

Этотъ предѣльный уголъ называется <u>угломъ тренія</u>. <u>Коэффиціентъ тренія k равенъ тангенсу угла тренія</u>. Приводимъ небольшую табличку коэффиціентовъ тренія скольженія.

— Тѣла —			— k —
Чугунъ	—	чугунъ	0.16
бронза	—	чугунъ	0.20
дерево	—	дерево	0.40-0.60
ледъ	—	сталь (коньки)	0.16-0.32.

§54. Примѣръ. Лѣстница стоитъ у стѣны. Опредѣлить при какомъ углѣ наклона α съ горизонталью лѣстница будетъ въ равновѣсіи? Пусть длина лѣстницы $AB=l$; вѣсъ ея Q; k — коэффиціентъ тренія (предполагаемъ, что стѣна и полъ изъ одного и того же матеріала); A — реакція пола въ точкѣ A; B — реакція стѣны. Силы тренія: въ точкѣ A — $T_A = kA$;



Черт. 49.

въ точкѣ B — $T_B = kB$. Пишемъ уравненія равновѣсія

$$\sum \overline{X} = B - kA = 0$$

$$\sum \overline{Y} = kB - Q + A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_0 = -B\sin\alpha - Q\frac{l}{2}\cos\alpha + Al\cos\alpha = 0$$

Откуда

$$tg\alpha = \frac{1-k^2}{2k} \qquad \ldots (2)$$

Уравненіе (2) даетъ тотъ наименьшій уголъ α при которомъ лѣстница будетъ еще въ равновѣсіи. При углѣ $\alpha < arctg\,\frac{1-k^2}{2k}$ лѣстница начнетъ скользить; при углѣ $\alpha > arctg\,\frac{1-k^2}{2k}$ лѣстница будетъ въ равновѣсіи. Ясно, что что отвѣтъ (2) надо написать въ формѣ неравенства

$$tg\alpha \geqslant \frac{1-k^2}{2k} \qquad \ldots (3)$$

Это характерная особенность тѣхъ задачъ, гдѣ входитъ силы тренія. Рѣшая уравненія статики, мы получаемъ то предѣльное значеніе того или иного параметра, характеризующаго положеніе равновѣсія, при которомъ еще можетъ быть равновѣсіе. Далѣе надо особо убѣдиться, сохраняется ли равновѣсіе при большемъ значеніи этого параметра или меньшемъ. Примѣромъ перваго случая можетъ служить задача § 54; примѣромъ второго — § 53. *)

§ 55. Треніе катанія. Когда одно тѣло катится безъ скольженія по другому, то тоже появляется сила тренія, величина которой по Кулону:

$$T_1 = k_1 \frac{N}{R} \quad \ldots (1)$$

гдѣ N — нормальное давленіе; R — радіусъ катящагося тѣла; k — коэф. тренія катанія. k_1, какъ видно изъ (1) измѣряется единицами длины. Для

*) См. также § 75.

катанія деревяннаго катка по деревянному полу $k_1 = 0,16$ сент.; для чугуна $k_1 = 0.12$ см.. Вообще сила тренія при катаніи далеко меньше чѣмъ при скольженіи. Такъ напримѣръ для чугуннаго листового катка вѣсомъ $N = 500$ клгр. и $R = 20$ сент. сила тренія катанія по чугуну по (1) будетъ

$$T_1 = 3 \text{ кгр.},$$

а треніе скольженія

$$T = kN = 0.16 . 500 = 80 \text{ кгр.}^{*)}$$

Глава VI.

Центръ тяжести.

§ 56. Центръ тяжести. Всѣ тѣ-

---

*) Подробности о треніи излагаются обыкновенно въ курсахъ прикладной механики. См. напр. Я. Грдина «Детали машинъ». Гл. II Изданіе 1914 г.

ла, находящіяся на землѣ или вблизи ея поверхности, подвергаются дѣйствію силы тяжести. Такъ какъ самыя крупныя инженерныя сооруженія /мосты, пароходы/ являются ничтожными сравнительно съ размѣрами Земли, то силы тяжести, приложенныя къ различнымъ частямъ ихъ, можно считать <u>параллельными</u> <u>направленными по вертикали внизъ.</u> Равнодѣйствующая силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ тѣла, называется <u>вѣсомъ</u> тѣла, а центръ параллельныхъ силъ тяжести — центромъ тяжести *). Общій способъ для нахожденія центра тяжести таковъ: тѣло дѣлится на части, вѣса и центры тяжести которыхъ извѣстны; затѣмъ примѣняемъ формулы, выведенныя въ §§ 25 и 27 для координатъ центра параллельныхъ

*) Понятно, что въ смыслѣ § 56 нельзя говорить о центрѣ тяжести «Крымскаго» полуострова или какого либо горнаго хребта, ибо ихъ размѣры не малы сравн. съ землей.

силъ. Пусть $p_1\, p_2 \dots p_n$ вѣса частей тѣла; $x_1\, y_1\, z_1$ $x_2\, y_2\, z_2$ ... $x_n\, y_n\, z_n$ координаты ихъ центровъ тяжести. Тогда координаты центра тяжести C:

$$x_c = \frac{\sum px}{\sum p} \quad y_c = \frac{\sum py}{\sum p} \quad z_c = \frac{\sum pz}{\sum p} \quad \dots (1)$$

Изъ (1) слѣдуетъ:

1/ если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ въ одной точкѣ, то въ этой точкѣ и будетъ центръ тяжести тѣла,

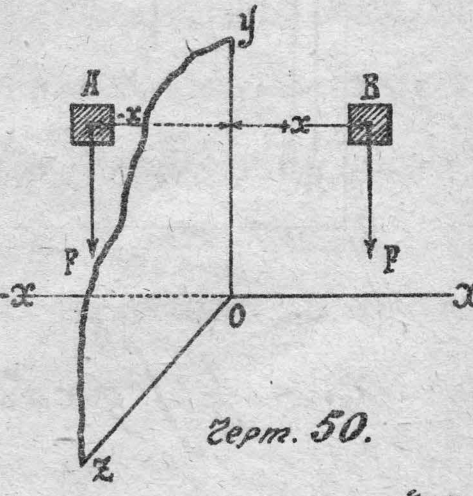
2/ если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ на одной прямой, то на этой же прямой лежитъ C тѣла,

3/ если центры тяжести всѣхъ частей тѣла лежатъ въ одной плоскости, то въ этой плоскости лежитъ C всего тѣла.

§57. Случай симметріи.

Нахожденіе центра тяжести сильно упрощается, если тѣло <u>симметрично относительно точки, прямой или плоскости</u>. Въ первомъ случаѣ центръ тяжести лежитъ <u>въ центрѣ симметріи</u>; во второмъ — <u>на оси симметріи</u>; въ третьемъ — <u>въ плоскости симметріи</u>.

Докажемъ это, напримѣръ, для плоскости симметріи. Пусть координатная плоскость yOz есть плоскость симметріи (черт. 50). Тогда каждой точкѣ A вѣсомъ p съ координатой $-x$ соотвѣтствуетъ точка B тоже вѣсомъ p съ координатой $+x$. Центръ тяжести каждой пары такихъ точекъ лежитъ въ плоскости симметріи yOz, слѣдовательно и центръ тяжести всего тѣла лежитъ въ той же плоскости. Пользуясь этими соображеніями легко найти центръ тяжести правильнаго треугольника,

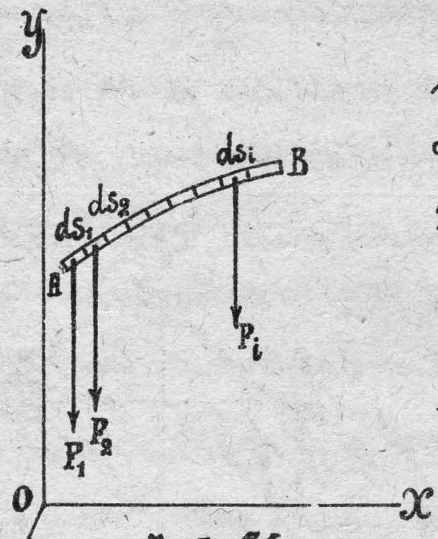


Черт. 50.

эллипсоида, зетоваго железа и т. п.

§ 58. Центръ тяжести линіи.

Иногда надо опредѣлить центръ тяжести мас[с] распредѣленныхъ по линіи (изогнутый стержен[ь] арка, криволинейный поясъ мостовой фермы) Разбиваемъ данную кривую AB (черт. 51) на элементы ds; пусть вѣсъ единицы длины кривой q; тогда вѣсъ каждаго элемента $P=q.ds$. Знаменатель основной формулы (1) § 56



Черт. 51.

$$\sum P=\int_A^B q\,ds = Q$$

/вѣсъ всей кривой (1)/; числитель

$$\sum Px=\int_A^B q\,x\,ds \quad \ldots(2)$$

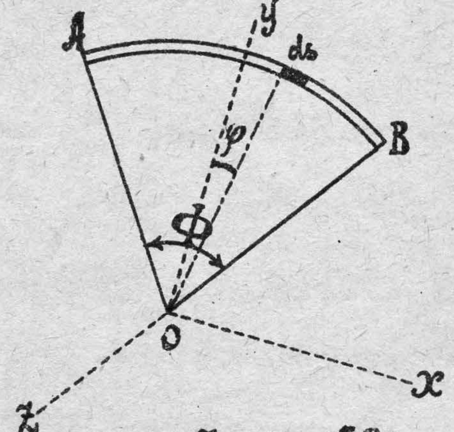
слѣдовательно

$$x_c = \frac{1}{Q}\int_A^B q\,x\,ds \qquad y_c = \frac{1}{Q}\int_A^B q\,y\,ds$$

$$z_c = \frac{1}{Q}\int_A^B q\,z\,ds. \quad \ldots(3)$$

§ 59. Примѣръ. Центръ тяжести дуги круга.

Примемъ биссекторъ центральнаго угла Φ за ось y; діаметръ къ нему $\perp$-ный за ось x (черт. 52); радіусъ круга R; уголъ $AOB = \Phi$; вѣсъ единицы дуги круга q. Такъ какъ дуга AB лежитъ въ плоскости xOy, то



Черт. 52.

$z_c = 0$; далѣе т. к. дуга AB симметрична относительно оси Oy, то $x_c = 0$. Остается вычислить y_c по § 58 (3). Знаменатель этой формулы, т. е. вѣсъ дуги $Q = qR\Phi$. Числитель

$$\int_A^B q\,y\,ds = \int_A^B qR\cos\varphi \cdot R\,d\varphi =$$

$$= \int_A^B qR^2\cos\varphi\,d\varphi = 2qR^2\sin\frac{\Phi}{2}$$ т. к.

точкѣ A соотвѣтствуетъ уголъ $\varphi = -\dfrac{\Phi}{2}$, а точкѣ B уголъ $\varphi = +\dfrac{\Phi}{2}$. Итакъ окончательно:

$$x_c = 0 \quad y_c = R\frac{\sin\frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \quad z_c = 0.$$

Въ частномъ случаѣ для полуокружности $\Phi = \pi$ и $y_c = \frac{1}{\pi}R$; для полной окружности $\Phi = 2\pi$; $y_c = 0$.

Предлагаемъ въ видѣ упражненія построить графикъ для y_c въ зависимости отъ угла Φ.

§60. Центръ тяжести плоской фигуры.

Разбиваемъ площадь S (черт. 53) на элементарныя площадки dS. Вѣсъ каждой площадки $q\,dS$, гдѣ q — вѣсъ единицы поверхности. Знаменатель основной формулы §56 (1)

$$\sum P = \int q\,dS = \iint q\,dx\,dy = qS = Q. =$$

вѣсу всей площади S.

Числитель по той же формулѣ

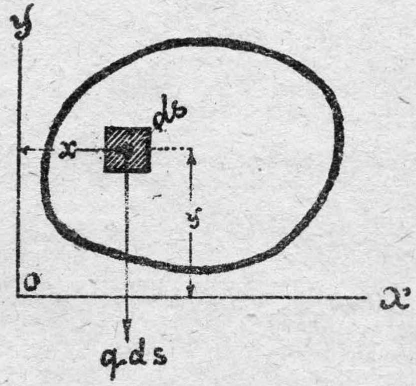
$$\sum Px = \int q\,x\,dS = \iint q\,x\,dx\,dy$$

при чемъ интегрированіе производится по всей площади S. Окончательно

$$x_c = \frac{1}{Q}\iint q x\,dx\,dy \qquad y_c = \frac{1}{Q}\iint q y\,dx\,dy$$

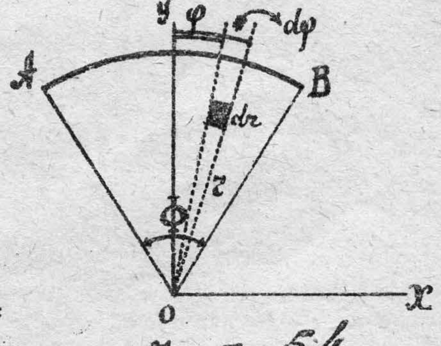
$$z_c = 0.$$

§61. Примѣръ. Центръ тяжести кругового сектора.



Черт. 53.

Разбиваемъ секторъ на элементы слѣдующимъ образомъ: проведемъ два радіуса, составляющіе съ осью OY углы φ и $\varphi + d\varphi$ и два концентрическихъ круга съ радіусами r и $r + dr$. Тогда $ds = r\,dr\,d\varphi$.



Черт. 54.

Знаменатель формулы §60: $Q = \frac{1}{2} q R^2 \Phi$.

Числитель:

$$\iint q y\,ds = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=-\frac{\Phi}{2}}^{\frac{\Phi}{2}} q r^2 \cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} q R^3 \sin\frac{\Phi}{2}.$$ Окончательно:

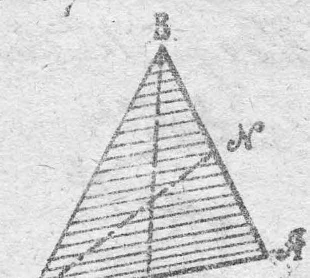
$$x_c = 0 \quad y_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin\frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \quad \dots (1)$$

Полагая въ (1) $\Phi = \pi$ получимъ центръ тяжести площади полукруга

$$x_c = 0 \quad y_c = \frac{4}{3\pi} R \quad \dots (2)$$

Предлагаемъ также построить графикъ аналогичный §59.

§62. Центръ тяжести площади треугольника. Разбиваемъ тр.-къ на узкія полоски прямыми параллельными сторонѣ AC. Центръ тяжести каждой



черт. 55.

полоски находится въ серединѣ ея; геометрическимъ мѣстомъ срединъ всѣхъ полосокъ является медіана BM; слѣд. центръ тяжести C лежитъ гдѣ то на медіанѣ BM. Такое разсужденіе можно повторить для другой стороны AB и медіаны CN; въ результатѣ получимъ, что центръ тяжести треугольника лежитъ на пересѣченіи его медіанъ.

Для нахожденія центра тяжести многоугольника можно разбить его на треугольники, найти центры тяжести отдѣльныхъ треугольниковъ, а затѣмъ уже по формулѣ § 56,(1) опредѣлить координаты центра тяжести всего многоугольника.

§ 63. Центръ тяжести поверхности.

Пусть q — вѣсъ единицы поверхности; ds — элементъ поверхности. Тогда числитель и знаменатель основной формулы § 56,(1) напишутся

$$\sum P = \int q\,ds = Q = \text{вѣсу всей поверхности}$$

$$\sum Px = \int q\,x\,ds\ ,$$

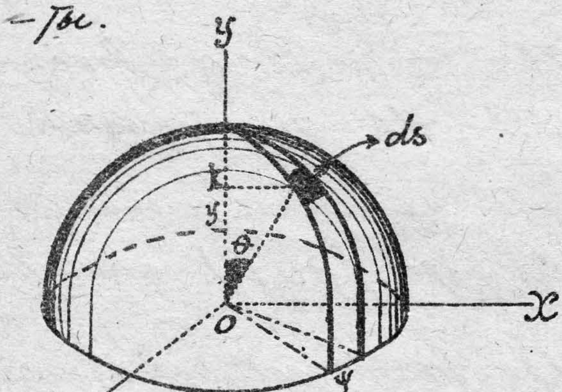
причемъ интегрированіе распространяется по всей поверхности, т. е. вообще приходится вычислять двойной интегралъ.

$$x_c = \frac{1}{Q}\iint q\,x\,ds\ ;\ y_c = \frac{1}{Q}\iint q\,y\,ds$$

$$z_c = \frac{1}{Q}\iint q\, z\, ds \qquad \ldots (1)$$

§ 64. Центръ тяжести поверхности полушарія.

Въ силу симметріи $x_c = z_c = 0$. Знаменатель въ выраженіи для y_c, т. е. вѣсъ полушарія $Q = 2\pi R^2 q$. Для вычисленія $\int$-ла въ числителѣ удобно ввести полярныя коор-ты.



Черт. 56

Элементъ поверхности $ds = R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$

$$y = R\cos\theta$$

$$\iint q\, y\, ds = \iint q R^3 \sin\theta \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = q R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\pi} d\varphi = \pi R^3,$$

и окончательно:

$$x_c = 0 \qquad y_c = \frac{1}{2} R \qquad z_c = 0.$$

т. е. центръ тяжести поверхности полушарія лежитъ на половинѣ радіуса.

Предлагаемъ найти центръ тяжести сферической зоны.

§65. Центръ тяжести объема.

Пусть q вѣсъ единицы объема (удѣльный вѣсъ); dv — элементъ объема. Исходя изъ основной формулы §56. (1), путемъ тѣхъ же самыхъ разсужденій, что для линій и поверхностей, получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$x_c = \frac{1}{Q}\iiint q x\,dv \quad y_c = \frac{1}{Q}\iiint q y\,dv$$
$$z_c = \frac{1}{Q}\iiint q z\,dv. \qquad (1)$$

Задача приводится вообще къ вычисленію тройного интеграла.

§66. Примѣръ. Центръ тяжести объема полушарія.

Въ полярныхъ

координатахъ (черт. 56) элементъ объема

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$y = r\cos\theta$$

$$\int y dv = \int r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}$$

и окончательно

$$x_c = 0 \quad y_c = \frac{3}{8} R \quad z_c = 0$$

т. е. центръ тяжести объема полушарія лежитъ на разстояніи $3/8\, R$ отъ центра.

§ 67. Заключеніе. Такимъ образомъ съ помощью основныхъ формулъ § 56 (1) положеніе центра тяжести можетъ быть вычислено для любого тѣла. Для отдѣльныхъ точекъ задача сводится къ вычисленію простой суммы; для массъ распредѣленныхъ по линіи, поверхности или объему — къ вычисленію опредѣленнаго интеграла простого, двойного или тройного. Выведенныя общія формулы примѣнимы и для тѣла перемѣнной плотности, т. е. для того случая, когда q есть функція координатъ.

Добавимъ еще, что для тѣлъ простѣйшей формы центръ тяжести можно найти элементарнымъ путемъ по большей части съ помощью довольно искусственныхъ построеній геометрическаго характера.*) Для тѣлъ весьма сложной формы положеніе центра тяжести можно опредѣлять на опытѣ, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что въ положеніи равновѣсія центръ тяжести и точка опоры лежатъ на одной вертикали. Пріемъ этотъ излагается въ элементарныхъ учебникахъ физики.

---

*) Много примѣровъ см. Н. Жуковскій «Теоретическая механика» изд. 5-ое § 18–37 1915 г.

Отдѣлъ III.

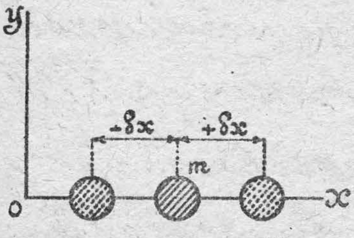
Аналитическая теорія равновѣсія.

Глава I.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

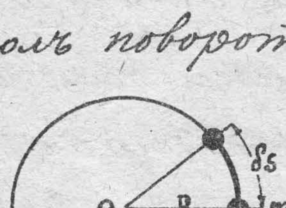
§ 68. Всѣ задачи на равновѣсіе точки и твердаго тѣла наиболѣе просто рѣшаются на основаніи уравненій § 48, (1); въ случаѣ же нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ, а также тѣлъ упругихъ и жидкихъ, методъ § 48 ведетъ къ очень длиннымъ вычисленіямъ. Тогда много проще воспользоваться другимъ пріемомъ, т. называемымъ началомъ возможныхъ перемѣщеній. Начало возможныхъ перемѣщеній составляетъ основаніе аналитической статики. Установлено оно въ окончательной формѣ творцомъ аналитической механики Лагранжемъ въ концѣ XVIII столѣтія. Началомъ оно называется потому, что положивъ его въ основу статики, можно изъ него вывести всѣ условія равновѣсія тѣлъ.

§ 69. Возможныя перемѣщенія. Свободная точка или свободное твердое тѣло могутъ совершать какія угодно перемѣщенія. Любое перемѣщеніе является для нихъ возможнымъ. Несвободная точка или твердое тѣло могутъ совершать не всякія перемѣщенія, а только нѣкоторыя. Такъ напримѣръ, шарикъ т, нанизанный на вполнѣ жесткій стержень, можетъ скользить только вдоль него въ ту или другую сторону, но не можетъ сойти съ него (черт. 57). Его возможное перемѣщеніе будетъ $\pm \delta x$. Если не считаться со знакомъ $\pm$, то можно сказать, что **шарикъ** имѣетъ только одно возможное перемѣщеніе δx или, какъ говорятъ, **шарикъ** имѣетъ одну **степень свободы**.



черт. 57.

Для точки m колеса, могущаго только вращаться около неподвижной оси (черт 58) единственнымъ возможнымъ перемѣщеніемъ будетъ $\delta s = R\,\delta\varphi$, гдѣ $\delta\varphi$ уголъ поворота. Колесо тоже одной степени свободы.



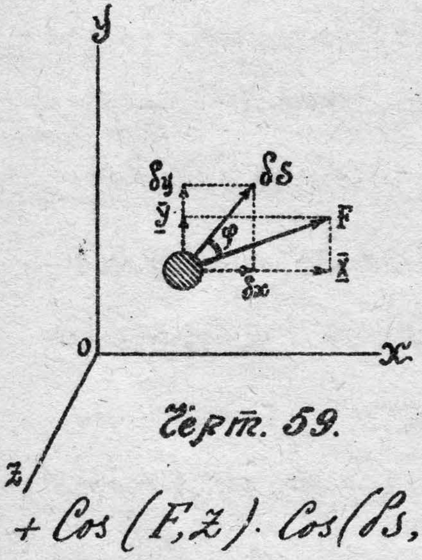
черт. 58.

Точка, которая можетъ двигаться только въ плоскости xOy, имѣетъ два возможныхъ перемѣщенія δx и δy. Любое перемѣщеніе

δS слагается изъ этихъ двухъ. Наша точка обладаетъ двумя степенями свободы. Твердое тѣло, которое должно оставаться въ данной плоскости (плоская система), обладаетъ тремя степенями свободы. Разсмотримъ какую либо точку твердаго тѣла, напримѣръ, центръ тяжести. Тѣло можетъ передвинуться вмѣстѣ съ нимъ на разстоянія $\delta x, \delta y$ (поступательное движеніе); кромѣ того оно можетъ повернуться около этой точки на уголъ $\delta \varphi$ (вращательное движеніе). Итакъ возможными перемѣщеніями называются тѣ безконечно малыя перемѣщенія, съ помощью которыхъ можно перемѣстить точки системы изъ даннаго положенія въ другое смежное, не нарушая цѣльности связей. Весьма важно помнить, что эти перемѣщенія являются <u>безконечно малыми</u>, что и отмѣчается знакомъ δ.

§70. Возможная работа.

Пусть на точку m дѣйствуетъ сила F, причемъ точка совершаетъ возможное перемѣщеніе δs, составляющее уголъ φ съ силой F. Тогда возможной работой силы F на перемѣщеніи δs называется



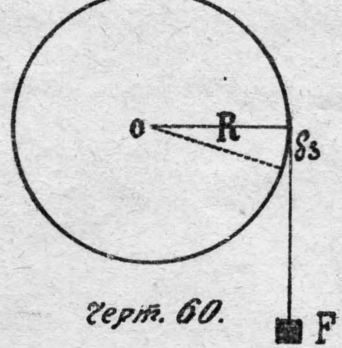
Черт. 59.

$$\delta A = F\,\delta s \,\mathrm{Cos}\,(F, \delta s) =$$
$$= F\,\delta s\,\mathrm{Cos}\,\varphi \qquad \dots.\ (1)$$

Замѣняя по извѣстной формулѣ аналитической геометріи $\mathrm{Cos}\,(F\delta s) = \mathrm{Cos}(F,x)\,\mathrm{Cos}\,(\delta s, x) + \mathrm{Cos}\,(F,y)\,\mathrm{Cos}\,(\delta s, y) + \mathrm{Cos}\,(F,z)\cdot \mathrm{Cos}(\delta s, z)$, мы получимъ изъ (1) другое выраженіе для возможной работы, куда входитъ проэкція силы F и перемѣщенія δs

$$\delta A = \underline{X}\,\delta x + \underline{Y}\,\delta y + Z\,\delta z. \qquad \ldots (2)$$

§ 71. Работа момента. Пусть на ободъ колеса (черт. 60) дѣйствуетъ сила F. Колесо повернулось на уголъ $\delta\varphi$. Работа силы F — $\delta A = F\delta s = FR\,\delta\varphi = M\,\delta\varphi$ .... (1) ибо $F.R = M$. Итакъ работа момента равна моменту силы умноженному на уголъ поворота.



черт. 60.

§ 72. Формулировка начала. Возьмемъ систему несвободныхъ точекъ. Всѣ силы, приложенныя къ точкамъ, раздѣлимъ на двѣ группы:

1/. внѣшнія силы дѣйствующія на точки системы,

2/. реакціи связей.

Затѣмъ предположимъ, что на систему не дѣйствуютъ силы тренія. Тогда начало возможныхъ перемѣщеній формулируется такъ: для равновѣсія необходимо, чтобы при любомъ возможномъ перемѣщеніи системы возможная работа всѣхъ дѣйствующихъ силъ равнялась нулю.

$$\delta A = \sum F \delta s \cos(F, \delta s) = 0$$

или

$$\delta A = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

Какъ измѣнится начало при существованіи силъ тренія, объ этомъ будетъ рѣчь въ § 77. Провѣримъ теорему § 72 на двухъ уже знакомыхъ намъ случаяхъ.

§ 73. Свободная точка.

На точку дѣйствуетъ система силъ съ равнодѣйствующей R, ея проэкціи на оси координатъ

$$R_x = \sum X \quad R_y = \sum Y \quad R_z = \sum Z \quad \ldots (1)$$

Проэкціи возможнаго перемѣщенія δs суть δx, δy, δz. Возможная работа

$$\delta A = R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z \quad \ldots (2)$$

Если точка находится въ равновѣсіи, то проэкціи R суть 0; отсюда слѣдуетъ, что $\delta A = 0$ при любыхъ перемѣщеніяхъ. Обратно, если $\delta A = 0$ при любыхъ δx, δy, δz, то

$$R_x = R_y = R_z = 0.$$

и точка находится въ равновѣсіи /ср. § 13/.

§ 74. Твердое тѣло можетъ двигаться только въ данной плоскости xOy.

Пусть на тѣло дѣйствуетъ плоская система силъ. Возьмемъ какую либо точку тѣла /напрім. центръ тяжести/ за центръ приведенія C. Всѣ силы замѣнимъ одной равнодѣйствующей приложенной въ точкѣ C, проэкціи коей $R_x = \sum X; R_y = \sum Y$ и однимъ моментомъ /парой/, направленнымъ по оси Z. Возможныя перемѣщенія по § 69 $\delta x, \delta y, \delta \varphi$. Возможная работа

$$\delta A = \sum X \cdot \delta x + \sum Y \cdot \delta y + \sum M \cdot \delta \varphi \quad \ldots (1)$$

Если тѣло находится въ равновѣсіи, то по § 40

$$\sum X = \sum Y = \sum M = 0 \qquad \ldots (2)$$

Откуда слѣдуетъ, что $\delta A = 0$ при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ. Обратно, если $\delta A = 0$, то въ силу произвольности количествъ $\delta x, \delta y, \delta \varphi$, получимъ уравненія равновѣсія (2).

§ 75. Доказательство Лагранжа*)

«Положимъ, что всѣ внѣшнія силы, прило-

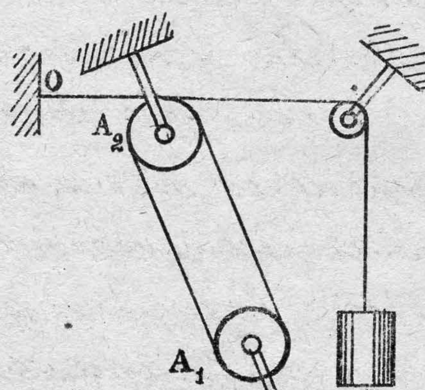
*) § 75 взятъ цѣликомъ изъ очень поучительной книги В. Л. Кирпичева «Бесѣды о механикѣ». С.П.Б. 1907 г. Болѣе строгое доказательство Ампера см. Н. Е. Жуковскій. «Аналитическая механика § 41, 1910 г.

женныя къ системѣ

$$P, Q, R \ldots,$$

имѣютъ общую мѣру Π, которая содержится m разъ въ силѣ P, n разъ въ силѣ Q и т. д. Доказавъ нашу теорему для этого случая, мы безъ труда распространимъ ее и на случай, когда внѣшнія силы несоизмѣримы между собою, т. е. не имѣютъ общей мѣры; это распространеніе сдѣлается съ помощью обыкновенныхъ математическихъ пріемовъ для перехода отъ величинъ соизмѣримыхъ къ величинамъ несоизмѣримымъ. Всѣ наши внѣшнія силы могутъ быть получены или воспроизведены помощью одной силы Π, повторенной нѣсколько разъ. Фактически можно получить ихъ помощью одного груза равнаго Π, пользуясь извѣстнымъ механизмомъ, называемымъ полиспастомъ. Чтобы получить силу P, приложенную въ точкѣ A (черт. 61), поступимъ слѣдующимъ образомъ:

расположимъ обойму съ подвижными блоками A_1 и обойму съ неподвижными блоками A_2 по направленію силы P; A_2 прикрѣпимъ къ неподвижному предмету а помощью подвижной обоймы блока A_1 захватимъ точку A. Затѣмъ оснастимъ этотъ полиспастъ гибкой веревкой; одинъ конецъ ея прикрѣпимъ къ неподвижной точкѣ O, обведемъ веревку черезъ блоки A_1, A_2 такъ что



Черт. 61.

между ними будетъ m вѣтвей веревки; наконецъ проведемъ веревку черезъ отводной блокъ и на концѣ ея повѣсимъ грузъ π. Если веревка вполнѣ гибкая и если въ блокахъ вовсе нѣтъ тренія, то на точку A будетъ дѣйствовать сила равная m разъ π, т. е. заданная сила P.

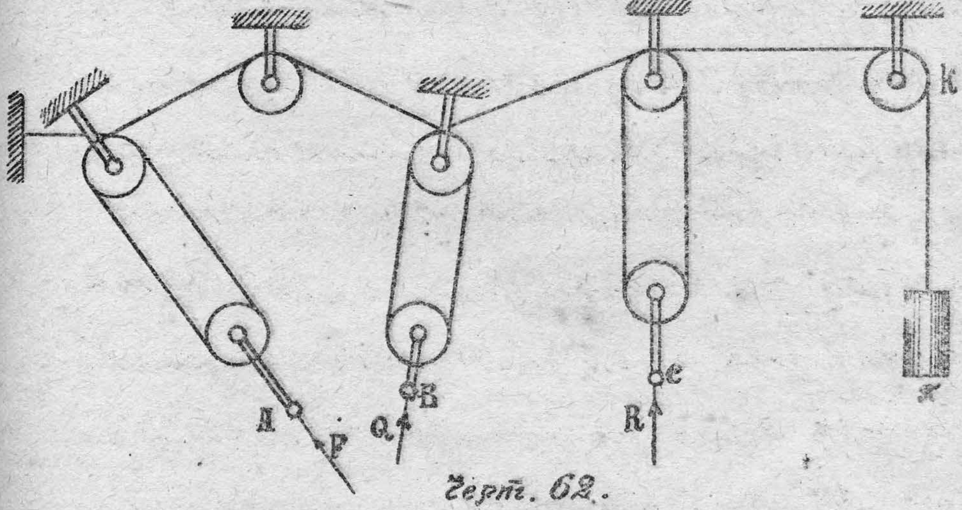
Такимъ же образомъ можемъ получить и остальныя силы Q, R, причемъ для полученія всѣхъ ихъ можно воспользоваться однимъ грузомъ $П$ и одной веревкой; нужно послѣдовательно оснастить этой веревкой полиспасты, соединенные съ точками $A, B, C \ldots$, гдѣ приложены эти силы, переходя отъ одной точки къ другой при помощи неподвижныхъ отводныхъ блоковъ, какъ это показано на черт. 62. Окончивъ оснастку блоковъ, соединенныхъ со всѣми точками приложенія внѣшнихъ силъ, проведемъ веревку черезъ отводной блокъ K и на концѣ ея привѣсимъ грузъ $П$. Дѣйствіемъ его будутъ вызваны всѣ внѣшнія силы

$$P, Q, R, \ldots,$$

приложенныя къ системѣ; онъ одинъ замѣняетъ ихъ всѣхъ, изображаетъ всю совокупность внѣшнихъ дѣйствій на систему, которыя стремятся вывести с

изъ равновѣсія.
Будемъ мысленно наблюдать за этимъ грузомъ; это наблюденіе дастъ намъ возможность вывести условія равновѣсія нашей системы.
Перепробуемъ мысленно различныя возможныя перемѣщенія точекъ нашей системы. Пусть окажется, что при одномъ изъ нихъ грузъ П опускается.
Тогда мы можемъ съ увѣренностью утверждать, что наша система не находится въ равновѣсіи. На самомъ дѣлѣ всѣ внѣшнія силы замѣнены грузомъ П, который стремится опуститься; у насъ оказалось, что есть такое возможное перемѣщеніе, при которомъ грузъ понижается. Но связи идеальныя, т.е. не представляютъ никакого препятствія возможнымъ перемѣщеніямъ. Очевидно, при такихъ условіяхъ получится пониженіе груза П, т.е. получится движеніе, и равновѣсіе будетъ нарушено.

Предположимъ теперь противуположный случай, т. е. что, пробуя мысленно различныя возможныя перемѣщенія нашей системы, мы встрѣчаемъ въ числѣ ихъ такое, при которомъ грузъ П подымается. Такъ какъ у насъ связи двусторонніе, то возможно и перемѣщеніе прямо противуположное; а при немъ очевидно



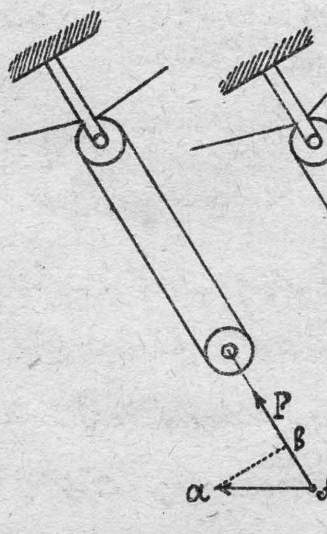
Черт. 62.

грузъ П будетъ опускаться; слѣд. навѣрно есть такое перемѣщеніе, при которомъ грузъ П опускается и неизбѣжно равновѣсіе будетъ нарушено.

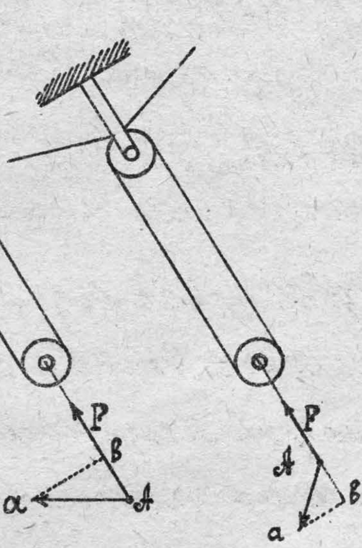
Итакъ если пробы намъ покажутъ, что есть возможныя перемѣщенія, при которыхъ грузъ П или подымается или опускается, то мы заключаемъ, что система не находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ.

Но если, перепробовавъ всѣ возможныя перемѣщенія, мы увидимъ, что при всѣхъ ихъ нашъ грузъ П не поднимается и не опускается, а остается на прежней высотѣ, то мы должны заключить, что заданная совокупность силъ уравновѣшивается на нашей системѣ. Это слѣдуетъ изъ того, что совокупность внѣшнихъ силъ замѣняется однимъ грузомъ П; стоитъ только первоначально уничтожить въ немъ всякую скорость и онъ не вызоветъ никакого движенія, такъ какъ нѣтъ ни одного возможнаго перемѣщенія, при которомъ этотъ грузъ опускается.

Выразимъ математическимъ языкомъ то что доказано выше. Для этого посмотримъ какъ выражается опусканіе нашего груза П въ зависимости отъ внѣшнихъ силъ и возможныхъ перемѣщеній системы. Разсмотримъ одну изъ точекъ системы: напр. А, къ которой приложена внѣшняя сила P (черт. 63). Пусть возможное перемѣщеніе точки А будетъ Аа; оно не должно непремѣнно совпадать съ направленіемъ внѣшней силы P, т. к. это перемѣщеніе опредѣляется связями системы. При передвиженіи точки А въ а, разстояніе между



Черт. 63.



Черт. 64

блоками уменьшится, и, съ точностью

до величинъ 2-го порядка, это уменьшеніе представится длиной Ав, т.е. проэкціей перемѣщенія Аа на направленіе силы Р; эту проэкцію назовемъ буквою р. При нашемъ перемѣщеніи разстояніе блоковъ уменьшается на р, и если между блоками веревка проходитъ n разъ, то полная длина веревки, оснащающей эти блоки, уменьшится на

$$n.p.$$

Слѣдствіемъ этого перемѣщенія будетъ то, что грузъ П, повѣшенный на концѣ веревки, опустится на высоту

$$n.p.$$

Здѣсь проэкція Ав совпадаетъ съ направленіемъ силы Р, и мы считаемъ ее положительной. Въ случаѣ представленномъ на чертежѣ 64, проэкція $Ав = p$ идетъ противуположно силѣ Р, и мы будемъ считать ее отрицательной. Тогда результатомъ перемѣщенія будетъ увеличеніе разстоянія между блоками, и на оснастку ихъ понадобится длина веревки большая прежней, т.е. при этомъ грузъ Π поднимается. Для обоихъ случаевъ (черт. 63 и 64) можно формально писать, что происходитъ опусканіе груза на величину

$$nr,$$

но въ случаѣ первомъ величина r положительная, т.е. дѣйствительно происходитъ опусканіе груза, а въ случаѣ второмъ величина проэкціи r отрицательная, т.е. получается отрицательное опусканіе, слѣд. подъемъ груза.

Разсматривая всѣ точки приложенія силъ

$$P,\ Q,\ R,\ \ldots$$

и называя проэкціи перемѣщеній на направленія этихъ силъ черезъ

$$p,\ q,\ r,\ \ldots,$$

а число вѣтвей веревки, оснащающихъ

соотвѣтствующіе блоки черезъ

$$n, m, \ldots,$$

получимъ, что результатомъ перемѣщенія всѣхъ точекъ системы будетъ опусканіе груза Π на величину суммы:

$$np + mq + \ldots.$$

Если такая сумма окажется не равной нулю, то это означаетъ, что равновѣсіе не существуетъ. Условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія, заключается въ томъ, что опусканіе груза Π должно быть равно нулю для каждаго возможнаго перемѣщенія т. е. должно быть

$$np + mq + \cdots = 0$$

Умножая на Π, получимъ

$$n\Pi.\,p + m\Pi.\,q + \cdots = 0$$

Но такъ какъ $n\Pi = P$, $m\Pi = Q \ldots$, то имѣемъ условіе

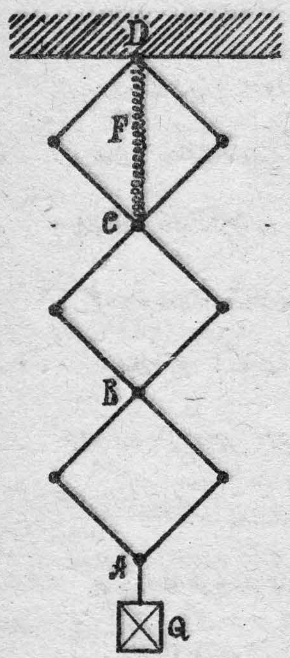
$$Pp + Qq + \cdots = 0$$

Здѣсь каждая внѣшняя сила умножается

на проэкцію перемѣщенія; такое произведеніе есть работа силы для перемѣщенія, поэтому наше условіе заключается въ томъ, что сумма работъ внѣшнихъ силъ для возможныхъ перемѣщеній точекъ ихъ приложенія должна быть равна нулю. А въ этомъ и заключается начало возможныхъ Перемѣщеній, содержаніе котораго мы уже излагали, и которое такимъ образомъ доказано предъидущими разсужденіями»

§76. Примѣръ. Изъ восьми стержней, соединенныхъ шарнирами, устроенъ механизмъ, состоящій изъ трехъ равныхъ ромбовъ. Точка Д закрѣплена неподвижно; къ точкѣ А подвѣшенъ грузъ Q. Между Д и С вставлена пружина F. Какова должна быть сила пружины

F, чтобы вся система была въ равновѣсіи?



Черт. 65.

На систему дѣйствуютъ двѣ силы: F и Q. Пусть подъ дѣйствіемъ силы F шарниръ C поднялся на величину δy; при этомъ всѣ ромбы сожмутся; точка B поднимется на $2\delta y$ /на δy отъ измѣненія формы ромба и еще на δy отъ поднятія всего ромба/. Точка A поднимется на $3\delta y$ /δy — отъ измѣненія формы и $2\delta y$ отъ поднятія всего ромба AB/.

Возможная работа

$$\delta A = F\delta y - Q \cdot 3\delta y = 0.$$

Откуда

$$F = 3Q$$

Еслибы механизмъ состоялъ изъ n ромбовъ, то $F = nQ$. Съ помощью подобнаго механизма малой силой P можно сжимать сильную пружину.

На этомъ примѣрѣ видно преимущество начала возможныхъ перемѣщеній при изслѣдованіи равновѣсія системъ. Если бы захотѣли здѣсь воспользоваться методомъ § 40, то должны были бы разсматривать каждый изъ восьми стержней особо, написать 3.8 = 24 уравненія равновѣсія и ихъ рѣшить.

На этомъ же примѣрѣ видно, какъ надо поступать, при рѣшеніи задачъ статики по методу возможныхъ перемѣщеній:

1./ Смотримъ, какія на систему дѣйствуютъ силы,

2/. каковы возможныя перемѣщенія,

3/. составляемъ возможную работу δA,

4/. приравнивая $\delta A = 0$, получаемъ уравненія равновѣсія.

Предлагаемъ, какъ упражненія, вывести изъ начала возможныхъ перемѣщеній условія равновѣсія: рычага 1-го и 2-го родовъ, ворота, лебедки, гидравлическаго и винтоваго прессовъ, пренебрегая вездѣ силами тренія.

§77. Начало возможныхъ перемѣщеній при силахъ тренія.

Здѣсь мы ограничимся однимъ примѣромъ, достаточно поясняющимъ суть дѣла.

На наклонной пластинкѣ AB лежитъ тѣло вѣсомъ P. Между тѣломъ и плоскостью есть треніе; коэффиціентъ тренія k данъ. Найти условія равновѣсія (черт. 66).

По §§52, 53

$$T = kN = kP\cos\alpha$$

Возможныя перемѣщенія тѣла по плоскости δs; возможная работа по §70

$$\delta A = P\sin\alpha\,\delta s - kP\cos\alpha\,\delta s = 0 \quad \ldots(1)$$

Откуда при равновѣсіи

$$tg\alpha = k. \quad \ldots(2)$$

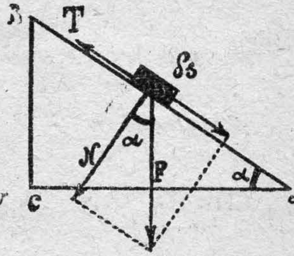
Ясно, что тѣло будетъ въ равновѣсіи так

же и въ томъ случаѣ, когда

$$\operatorname{tg}\alpha < k \quad \text{т.е.} \quad \delta A < 0$$

Но тѣло обязательно будетъ двигаться *) если

$$\operatorname{tg}\alpha > k \quad \text{т.е} \quad \delta A > 0$$



Черт. 66.

Обобщая этотъ случай, можно сказать, что если въ числѣ дѣйствующихъ силъ имѣются силы тренія, то начало возможныхъ перемѣщеній надо писать $\delta A \leqq 0.$

Глава II.

Объ устойчивости равновѣсія.

§78. Три рода равновѣсія.

Равновѣсіе тѣлъ можетъ быть устойчи-

*) Сравните съ результатами §55.

вымъ, неустойчивымъ и безразличнымъ.

Устойчивымъ называется такое положеніе равновѣсія, когда при маломъ отклоненіи отъ этого положенія тѣло опять къ нему возвращается.

Неустойчивымъ — когда тѣло при маломъ отклоненіи уже не возвращается въ прежнее положеніе, а отклоняется далѣе.

Безразличнымъ — когда тѣло, будучи отклонено, остается въ равновѣсіи и въ новомъ положеніи.

Примѣромъ можетъ служить тяжелое бревно въ видѣ эллиптическаго и круговаго цилиндра, лежащее на горизонтальной плоскости (черт. 67, 68, 69.) Добавимъ, что въ инженерныхъ сооруженіяхъ допустимы только случаи устойчиваго равновѣсія, причемъ устойчивость должна соблюдаться для отклоненій по всѣмъ направленіямъ.*)

Черт. 67. Черт. 68. Черт. 69.

§79. Критерій для опредѣленія характера равновѣсія.**)

« Мы не будемъ разбирать вопросъ о характерѣ равновѣсія во всей его полнотѣ и общности. Ограничимся нѣсколькими соображеніями,

*) Ср. главы о продольномъ изгибѣ въ строительной механикѣ. Напр. С. Тимошенко. Сопротивленіе матеріаловъ отд. VII.

**) §79 Взять цѣликомъ изъ упомянутыхъ уже « Бесѣдъ о механикѣ » В. Л. Кирпичева.

которымъ не придаемъ значенія строгихъ доказательствъ; но они хотя отчасти разъяснятъ этотъ важный вопросъ.

Вернемся къ Лагранжеву доказательству основного закона равновѣсія. Въ немъ фигурировалъ грузъ П, который одинъ замѣнялъ и представлялъ собою всѣ внѣшнія силы, приложенныя къ системѣ. Мы разсматривали безконечно малыя перемѣщенія дозволяемыя связями.

Въ случаѣ равновѣсія, высота груза П не перемѣнялась при такихъ безконечно малыхъ передвиженіяхъ. Теперь предположимъ, что перемѣщенія, хотя очень малыя, но конечныя. Опять мысленно перепробуемъ всѣ перемѣщенія, дозволяемыя связями, начиная съ положенія равновѣсія, и будемъ слѣдить за грузомъ П.

Предположимъ, что эта проба покажетъ слѣдующее: положеніе груза П для равновѣснаго положенія есть самое низкое положеніе изъ всѣхъ другихъ, занимаемыхъ имъ при нашихъ пробахъ. Тогда мы можемъ утверждать, что это положеніе равновѣсія будетъ устойчивое.

Если же при нашихъ пробахъ окажется: положеніе груза П при равновѣсіи есть самое высокое изъ всѣхъ положеній, занимаемыхъ имъ при нашихъ пробахъ. Тогда естественно приходимъ къ заключенію, что это положеніе равновѣсія неустойчивое.

По прежнему будемъ называть внѣшнія силы черезъ

$$P, Q, R, S \ldots,$$

а соотвѣтствующія имъ проекціи безконечно малыхъ возможныхъ перемѣщеній черезъ

$$p, q, r, s \ldots$$

Тогда, какъ видѣли въ § 75, вслѣдствіе такихъ перемѣщеній получится пониженіе груза равное

$$np + mq + \ldots -$$

т. е. равное

$$\frac{1}{\pi}\left\{Pp + Qq + Rr + Ss + \cdots\right\} \quad \cdots (1)$$

Складывая эти величины для элементарныхъ безконечно малыхъ перемѣщеній, на которыя можно раздѣлить конечное перемѣщеніе, мы получимъ въ суммѣ пониженіе груза для конечнаго перемѣщенія системы. Если оно будетъ всегда положительное, то равновѣсіе неустойчивое. Предположимъ теперь обратное — пусть выраженіе (1) отрицательное (это возможно такъ какъ проэкціи перемѣщеній

$$p, q, r, s$$

могутъ быть отрицательными). Такой результатъ укажетъ на повышеніе груза П при перемѣщеніяхъ, и слѣд. равновѣсіе устойчивое.

Конечно при этомъ разборѣ можно не обращать вниманія на величину груза П, и вмѣсто выраженія (1) разсматривать только множитель

$$Pp + Qq + Rr + \cdots \quad (2),$$

т. е. работу внѣшнихъ силъ. Итакъ окончательно получаемъ такой критерій для различія характера равновѣсія: суммируемъ выраженія элементарной работы внѣшнихъ силъ, начиная отъ положенія равновѣсія и кончая другими близкими къ нему возможными положеніями.

Если эта сумма окажется положительной для каждаго возможнаго перемѣщенія, то равновѣсіе неустойчивое. Если же она отрицательная, то равновѣсіе устойчивое.

§ 80. Примѣръ. Беремъ два положенія равновѣсія эллиптическаго цилиндра (черт. 67, 68, 69). На чертежѣ 67 при маломъ, но конечномъ отклоненіи цилиндра отъ положенія равновѣсія, центръ тяжести C повышается; слѣд. работа силы вѣса отрицательна — равновѣсіе устойчивое. На чертежѣ 68 при такомъ же отклоненіи, центръ тяжести понижается и работа силы вѣса положительна — равновѣсіе неустойчивое. Наконецъ на чертежѣ 69 (круговой цилиндръ) C не повышается и не понижается — равновѣсіе безразличное.

§ 81. О потенціальной энергіи.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакихъ ограниченій относительно силъ дѣйствующихъ на систему тѣлъ находящихся въ равновѣсіи. Теперь предположимъ, что каждая изъ этихъ силъ обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: проэкціи силы на оси координатъ могутъ быть представлены какъ частныя производныя со знакомъ минусъ по соотвѣтственнымъ координатамъ отъ нѣкоторой функціи Π

$$\underline{X} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad \underline{Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad \ldots (1)$$

Если сила удовлетворяетъ этому условію, то говорятъ, что сила имѣетъ потенціалъ; функція Π называется потенціальной энергіей.

Оказывается, что огромное большинство силъ, съ которыми приходится сталкиваться инженеру, какъ разъ обладаютъ этимъ свойствомъ. Таковы силы: вѣса, упругости, электрическія, магнитныя и т. д. Не подходятъ сюда силы тренія.

Если силы даны то потенціальную энергію можно вычислить изъ (1).

§ 82. **Примѣръ.** Найти Π тѣла вѣсомъ P поднятаго на высоту y надъ поверхностью земли. Проэкціи силы вѣса

$$\underline{X}=0\ ;\ \underline{Y}=-P\ ;\ Z=0 \quad \dots (1),$$

откуда согласно § 81

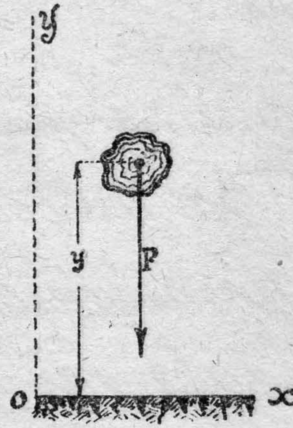
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}=0 \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial y}=-P \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z}=0 \quad \dots (2)$$

т. е. Π не зависитъ отъ x и z.

Интегрируемъ второе изъ уравненій (2)

$$\Pi = Py.$$

Произвольную постоянную интегрированія можно приравнять 0, считая условно, что Π тѣла лежащаго на поверхности земли равно нулю.



Черт. 70.

§ 83. Теорема Дирихле.

Посмотримъ, какъ измѣнится начало возможныхъ перемѣщеній, если силы имѣютъ потенціалъ. Сравнивая § 72 и § 81,(1), получаемъ

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\delta z\right\};$$

но выраженіе въ скобкахъ есть полный

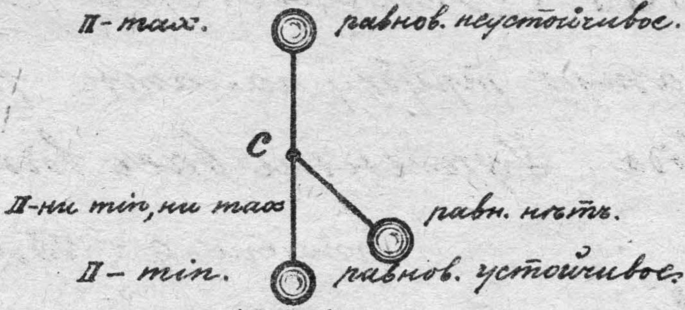
дифференціалъ функціи Π, слѣдовательно

$$\delta \Pi = 0 \quad \dots (1)$$

Отсюда теорема Дирихле:

Въ положеніи равновѣсія потенціальная энергія имѣетъ либо minimum, либо maximum. Если minimum — равновѣсіе устойчивое; если maximum — неустойчивое.

Вторая половина теоремы Дирихле вытекаетъ изъ § 79. Пояснимъ теорему Дирихле на слѣдующемъ чертежѣ: маятникъ состоитъ изъ шара m, укрѣпленнаго на несгибающимся стержнѣ. C — ось вращенія маятника.

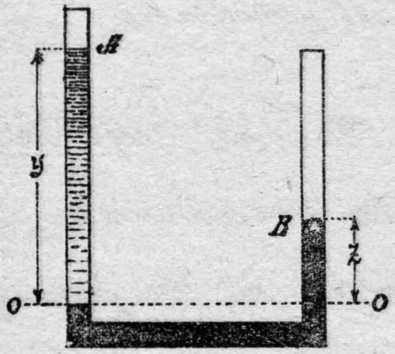


Черт. 71.

Теорема Дирихле даетъ еще одинъ пріемъ для рѣшенія задачъ статики: сперва ищется потенціальная энергія системы, а затѣмъ уже вопросъ сводится къ извѣстной задачѣ дифференціальнаго исчисленія о нахожденіи minimum'а и maximum'а функціи одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Этотъ методъ находитъ себѣ обширное примѣненіе какъ въ физикѣ, такъ и въ техникѣ.

§ 84. Примѣръ. Въ U-образную трубку налиты ртуть и вода. Удѣльный вѣсъ воды $p = 1$, ртути $q = 13,6$. Показать, исходя изъ теоремы Дирихле, что въ положеніи равновѣсія высоты столбовъ жидкости надъ уровнемъ OO обратно пропорціональны удѣльнымъ вѣсамъ и что равновѣсіе устойчивое.



Черт. 72.

Потенціальная энергія тѣла вѣсомъ P, поднятаго на высоту y надъ нѣкоторымъ горизонтомъ OO, согласно § 82 равна $Py + C$, причемъ произвольную постоянную C можно для простоты приравнять 0. Вѣсъ столба воды $p\delta y$, гдѣ S площадь сѣченія трубки; центръ тяжести столба воды лежитъ на высотѣ $\frac{1}{2}y$ надъ OO; слѣд. потенціальная энергія $\Pi_1 = \frac{1}{2}pSy^2$.

Потенціальная энергія столба ртути

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}qSz^2.$$

Вся потенціальная энергія

$$\Pi = \frac{1}{2}pSy^2 + \frac{1}{2}qSz^2 \quad \dots (1),$$

при чемъ

$$y + z = l, \quad \dots (2)$$

гдѣ l длина частей трубки AO и OB, занятыхъ столбами воды и ртути.

Итакъ задача сводится къ нахожденію minimum'a и maximum'a Π при условіи (2) /относит. min.-max./.

Исключаемъ напримѣръ z

$$\Pi = \frac{1}{2}pSy^2 + \frac{1}{2}qS(l-y)^2 \quad \dots (3)$$

Ищемъ производную:

$$\frac{d\Pi}{dy} = p\,S\,y - q\,S\,(l-y) \qquad \ldots (4)$$

Приравниваемъ къ 0 и, пользуясь (2), находимъ окончательно

$$\frac{y}{z} = \frac{q}{p} \qquad \ldots (5),$$

т.е. высоты столбовъ жидкостей обратно пропорціональны удѣльнымъ вѣсамъ ихъ. Чтобы узнать, устойчиво ли положеніе равновѣсія, ищемъ вторую производную:

$$\frac{d^2\Pi}{dy^2} = pS + qS \quad (\text{со знакомъ } +).$$

Вторая производная положительна, т.е. Π имѣетъ minimum и равновѣсіе устойчиво.

Важнѣйшія формулы.

Отдѣлъ I.

Уравненія равновѣсія точки при любыхъ силахъ:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum Z = 0.$$

Отдѣлъ II.

Уравненія равновѣсія твердаго тѣла при силахъ пересѣкающихся въ одной точкѣ:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum Z = 0.$$

Моментъ силы около точки O.

$$M_0 = \pm P.a\,,$$

гдѣ P - сила, a — плечо; такъ же

$$M_z = xY - yX\,,$$

гдѣ X, Y проэкціи силы, x, y — координаты точки приложенія силы.

Координаты центра параллельныхъ силъ:

$$x_c = \frac{\sum Px}{\sum P} \qquad y_c = \frac{\sum Py}{\sum P} \qquad z_c = \frac{\sum Pz}{\sum P},$$

гдѣ P одна изъ силъ; x, y, z – координаты точки приложенія ея.

Моментъ пары силъ

$$M = \pm P.a.$$

Онъ не измѣняется при переносѣ пары въ ея плоскости и при поворотѣ на любой уголъ.

Условія равновѣсія плоской системы силъ:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum M_z = 0.$$

Условія равновѣсія пространственной системы силъ:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum Z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Главнѣйшіе частные случаи:

1/. Тѣло имѣетъ неподвижную точку

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

2/. Тѣло можетъ двигаться только въ плоскости XY:

$$\sum X = \sum Y = \sum M_z = 0.$$

3/. Тѣло имѣетъ неподвижную ось Z:

$$\sum Z = \sum M_z = 0.$$

4/. Тѣло можетъ только вращаться около оси Z.

$$\sum M_z = 0.$$

Сила Тренія при скольженіи

$$T = kN$$

Коэффиціентъ тренія при скольженіи — k ;

N — нормальное давленіе.

Сила тренія при катаніи:

$$T = k_1 \frac{N}{R}$$

k_1 — коэффиціентъ тренія при катаніи ;

R — радіусъ катка.

Координаты центра тяжести отдѣльныхъ точекъ.

$$x_c = \frac{\sum Px}{\sum P} \quad y_c = \frac{\sum Py}{\sum P} \quad z_c = \frac{\sum Pz}{\sum P}.$$

гдѣ P вѣсъ каждой отдѣльной точки ; x, y, z ея координаты.

Координаты центра тяжести линіи.

$$x_c = \frac{1}{Q}\int qx\,ds \quad y_c = \frac{1}{Q}\int qy\,ds \quad z_c = \frac{1}{Q}\int qz\,ds.$$

$Q = \int q\,ds$ - вѣсъ линіи ; q - вѣсъ единицы длины линіи ; ds - элементъ длины линіи. ∫-лъ распространенъ по всей длинѣ линіи (опредѣленный ∫-лъ).

Координаты центра тяжести поверхности

$$x_c = \frac{1}{Q}\iint qx\,ds \quad y_c = \frac{1}{Q}\iint qy\,ds \quad z_c = \frac{1}{Q}\iint qz\,ds$$

$Q = \iint q\,ds$ - вѣсъ всей поверхности ; q - вѣсъ единицы поверхности ; ds - элементъ поверхности.

Координаты центра тяжести объема.

$$x_c = \frac{1}{Q}\iiint qx\,dV \quad y_c = \frac{1}{Q}\iiint qy\,dV \quad z_c = \frac{1}{Q}\iiint qz\,dV$$

$Q = \iiint q\,dV$ - вѣсъ объема ; q - вѣсъ единицы объема (удѣльный вѣсъ) ; dV - элементъ объема.

Отдѣлъ III.

Работа силы F на перемѣщеніи δs

$$\delta A = F.\delta s.\,\cos(F,\delta s),$$

или же черезъ проэкціи силы и перемѣщенія

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

Работа момента

$$\delta A = M\,\delta\varphi,$$

гдѣ $\delta\varphi$ – уголъ поворота.

Начало возможныхъ перемѣщеній

$$\delta A = 0;$$

если есть силы тренія, то

$$\delta A \leqq 0.$$

Если силы имѣютъ потенціалъ, то

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

$$-d\Pi = Xdx + Ydy + Zdz.$$

$$\Pi = -\int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Π – потенціальная энергія.

Условіе равновѣсія въ этомъ случаѣ

1/. П - minimum либо
2/. П - maximum

1/.- Равновѣсіе устойчивое ;
2/ – равновѣсіе неустойчивое

Приложеніе.

къ первой части.

Сборникъ задачъ.

Отдѣлъ I.

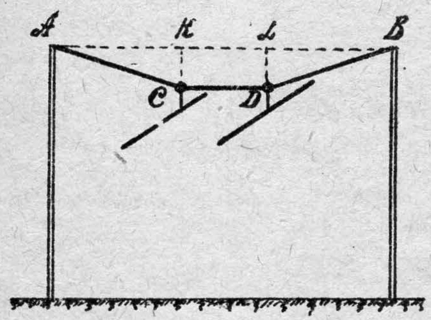
1.* Два трамвайныхъ провода подвѣшены къ поперечнымъ проволочнымъ канатамъ, изъ коихъ каждый прикрѣпленъ къ двумъ столбамъ. Столбы разставлены на разстояніи 40 метр.

Въ русской литературѣ имѣется прекрасный «Сборникъ задачъ» проф. И. В. Мещерскаго. Тамъ содержится весьма большое число интересныхъ задачъ техническаго характера.

Задачи помѣченныя * взяты у Мещерскаго;

** – Составлены горнымъ инженеромъ Я. О. Бабинскимъ и студентомъ Е. Т. Кочиковымъ.

другъ отъ друга. Для каждаго поперечнаго каната разстояніе $AK = KL = LB = 5$ м.;

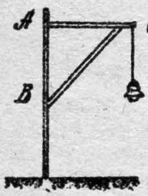


$KC = LD = 0,5$ м. Пренебрегая вѣсомъ проволочн. каната, найти натяженіе T_1, T_2 и T_3 въ частяхъ его AC, CD и DB, если вѣсъ 1 м. провода равенъ 0,75 кгр.

Отв. $T_1 = T_3 \cong 301,5$ кгр.

$T_2 = 300$ кгр.

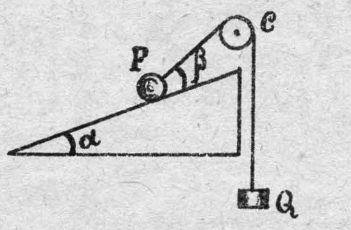
2.* Дуговая лампа вѣсомъ 30 кгр. подвѣшена къ вертикальному столбу помощью горизонтальной поперечины $AC = 4$ фут. и подкоса $BC = 5$ фут. Найти силы S_1 и S_2 въ брускахъ AC и BC.



Отв. $S_1 = 40$ кгр.; $S_2 = -50$ кгр.

3. Шаръ вѣсомъ P лежитъ на гладкой наклонной плоскости составляющей уголъ α

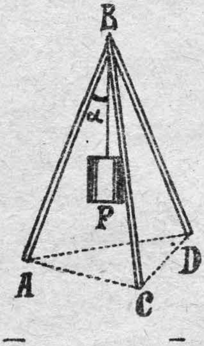
съ горизонтомъ. Къ шару прикрѣплена нить переброшенная черезъ блокъ C съ грузомъ Q на концѣ. Опредѣлить уголъ β и давленіе шара P на наклонную плоскость.



Отв. $\cos\beta = \frac{P}{Q}\sin\alpha$

$N = P\cos\alpha - \sqrt{Q^2 - P\sin\alpha}$.

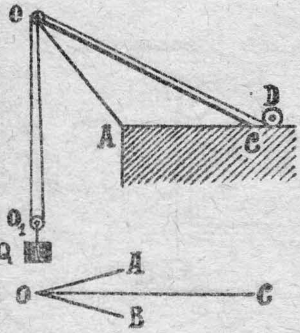
4. Къ вершинѣ треножника ABCD подвѣшенъ грузъ P, вѣсъ котораго 100 кгр. Ножки имѣютъ равную длину, укрѣплены на горизонтальномъ полу и образуютъ между собой равные углы. Опредѣлить силу въ каждой изъ ножекъ, если извѣстно, что онѣ образуютъ съ веревкой углы $\alpha = 30°$



Отв. $200\frac{\sqrt{3}}{9}$ кгр.

5. Кранъ состоитъ изъ трехъ мачтъ: OA, OB, OC. Въ O помѣщенъ блокъ и на немъ виситъ грузъ $Q = 60$ тон. на цѣпи OO_1. Цѣпь закрѣплена неподвижно однимъ концомъ въ O, охватываетъ

блокъ O_1, потомъ блокъ O и идетъ къ лебедкѣ D. Уголъ плоскости стержней AOB съ горизонтомъ $\alpha = 60°$; уголъ $OCA = \beta = 45°$; уголъ между стержнями AO и BO — $\gamma = 30°$. Цѣпь OD идетъ вдоль стержня OC. Найти силы дѣйствующія въ стержняхъ крана.

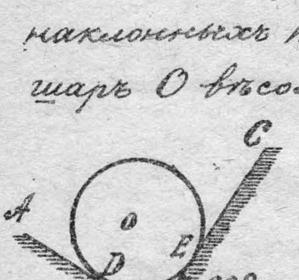


Отв. -78т. и $+77$т.

Отдѣлъ II.

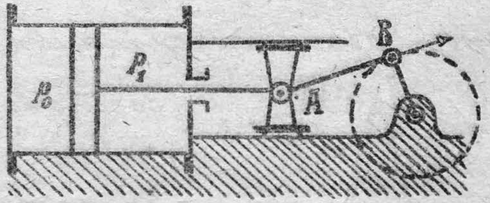
Глава I.

6.* На двухъ взаимно перпендикулярныхъ наклонныхъ плоскостяхъ AB и BC лежитъ шаръ O вѣсомъ 6 кгр. Опредѣлить давленіе шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляетъ съ горизонтомъ уголъ $60°$.



Отв. $N_d = 3\sqrt{3}$ кгр.; $N_e = 3$ кгр.

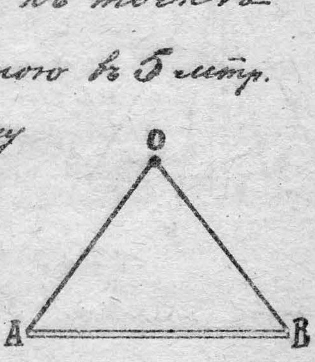
7.* Въ паровой машинѣ площадь поршня равна 0,1 кв. метр.; длина шатуна $AB = 2$ м; длина кривошипа BC = $= 0,4$ м.; давленіе пара въ цилиндрѣ за поршнемъ $p_0 = 6$ атм., передъ поршнемъ $p_1 = 1$ атм. Найти силу P, вращающую кривошипъ, и давленіе N крейцкопфа A на направляющія параллели при томъ положеніи поршня, когда уголъ $ABC = 90°$.



1 атм. = 1 кгр. на см.^{2} Треніемъ между крейцкопфомъ и параллелями пренебрегаемъ.

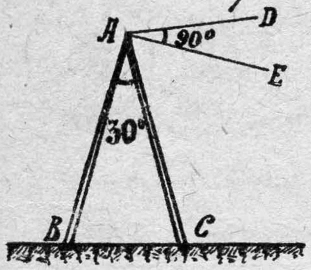
Отв. $P \cong 5,1$ тн.; $N = 1$ тн.

8. Призматическій стержень AB длиною $l = 6$ м. и вѣсомъ $Q = 4$ т. подвѣшенъ къ точкѣ O на двухъ канатахъ AO и OB длиною въ 5 метр. найти натяженіе канатовъ F и силу H, съ которой сжатъ стержень AB.



Отв. $F = 2,5$ т. $H = 1,5$ т.

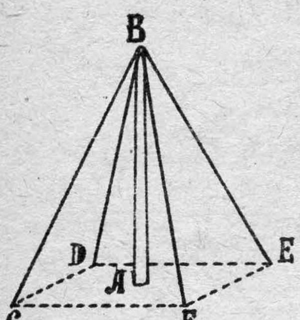
9.* Угловой столбъ составленъ изъ двухъ одинаково наклоненныхъ брусьевъ AB и AC, скрѣпленныхъ въ вершинѣ. Уголъ BAC = 30°. Столбъ поддерживаетъ два горизонтальныхъ провода AD и AE,



составляющихъ другъ съ другомъ прямой уголъ. Натяженіе каждаго провода равно 100 кгр. Опредѣлить силы въ брусьяхъ, предполагая, что плоскость BAC дѣлитъ уголъ DAE пополамъ, и пренебрегая вѣсами столбовъ.

Отв. $S_b = -S_c = 100\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ кгр.

10.* Мачта AB удерживается въ вертикальномъ положеніи посредствомъ четырехъ симметрично

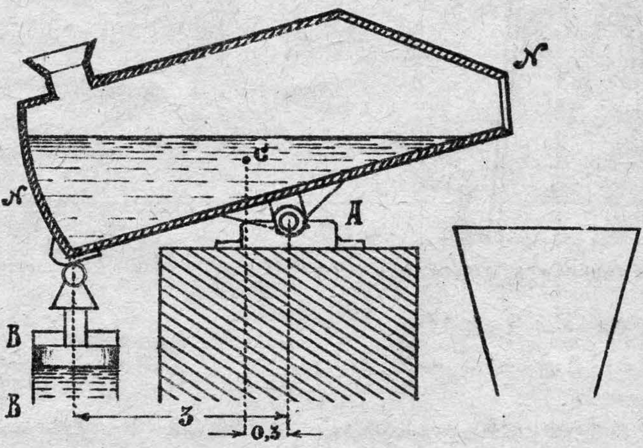


расположенныхъ оттяжекъ. Уголъ между каждыми двумя смежными оттяжками равенъ 60°. Опредѣлить давленіе мачты на землю, если натяженіе каждой изъ оттяжекъ равно 100 кгр., а вѣсъ мачты 200 кгр.

Отв. $200(1+\sqrt{2}) = 482$ кгр.

Глава II.

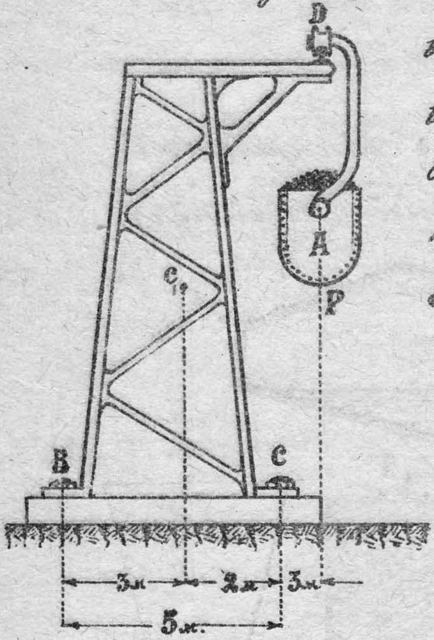
11.** Миксеръ NN можетъ вращаться около оси A; BB — гидравлическій цилиндръ. Вѣсъ миксера Q вмѣстѣ съ расплавленнымъ чугуномъ равенъ 200 тн. и приложенъ въ центръ тяжести C. Размѣры въ метрахъ даны на чертежѣ.



Найти діаметръ гидравлическаго цилиндра для поворачиванія миксера, если давленіе воды $p = 25$ атмосферъ.

Отв. $\backsim$ 32 см.

12.** Вагонетка A, груженная углемъ проходитъ по подвѣсной желѣзной дорогѣ. Опредѣлить реакціи въ точкахъ B и C въ моментъ прохожденія вагонетки черезъ точку D и послѣ удаленія ся на слѣдующій пролетъ, знал, что вѣсъ вагонетки съ грузомъ $P = 250$ кгр., вѣсъ опоры и кронштейна съ канатомъ $Q = 1$ тоннѣ и приложенъ въ центрѣ тяжести C_1.



Отв. I. $R_B = 0$; $R_C = 1250$ кгр.

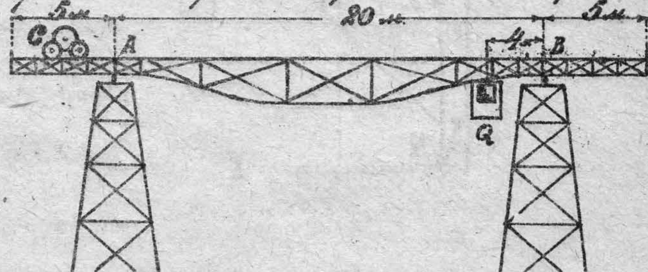
II. $R_B = 600$; $R_C = 400$.

13*. Предохранительный клапанъ A парового котла соединенъ стержнемъ AB съ однороднымъ рычагомъ CD длины 50 см. и вѣса 1 кгр., вращающимся вокругъ неподвижной точки C; діаметръ клапана $d = 6$ см., $BC = 7$ см.

Какой грузъ Q нужно подвѣсить къ концу D рычага для того, чтобы клапанъ самъ открывался при давленіи въ котлѣ 11 атмосферъ, причемъ слѣдуетъ считать 1 атм. = 1 кгр. на кв. см.?

Отв. $Q = 43$ кгр.

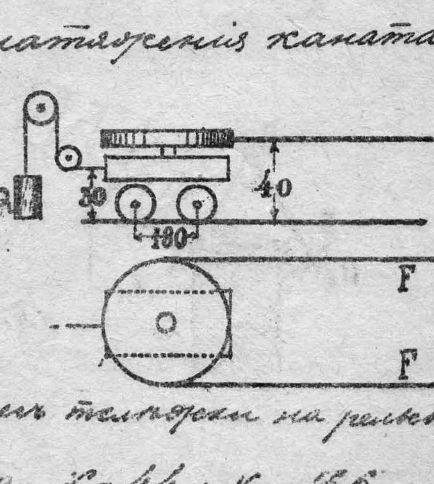
14** Опредѣлить максимумъ и minimum реакцій опоръ A и B литейнаго крана при движеніи вдоль него лебедки C, если собственный вѣсъ крана приложенъ въ серединѣ его и равенъ 2,5 тоннамъ; вѣсъ лебедки H = 1 тоннѣ; вѣсъ будки Q = 0,6 т.



Отв. $R_{a\,max} = 2,6$ тн. $R_{a\,min} = 1,1$ тн.
$R_{b\,max} = 2,9$ тн. $R_{b\,min} = 1,4$ тн.

Глава III и IV.

15.** Приспособленіе для натяженія каната FF изображено на чертежѣ. Вѣсъ Q = 1000 кгр.; вѣсъ тележки P = 200 кгр. Предполагая, что натяженіе обѣихъ вѣтвей каната FF одинаково найти силы F и давленіе колесъ тележки на рельсы (опорныя реакціи).

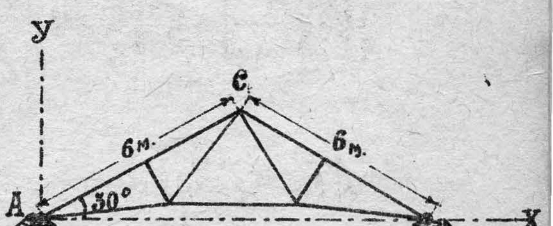


Отв. F = 500; $N_1 = 44$; $N_2 = 156$.

вертикали, разстояніе которой отъ точки А равно 5 м. Вылетъ крана, считая отъ точки А, при этомъ равенъ 15 м. Поднимаемый грузъ вѣситъ 20 тн. Опредѣлить опорныя реакціи и напряженіе T винта.

Отв. $X_a = 15\sqrt{3}$ тн.;
$Y_a = 77$ тн.; $T = 30\sqrt{3}$ тн.

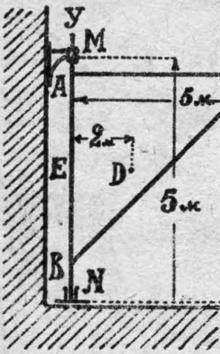
18.* Симметричная стропильная ферма АСВ однимъ концомъ укрѣплена въ неподвижной точкѣ А, а другимъ концомъ В опирается на гладкую горизонтальную плоскость катками. Вѣсъ фермы 10 тн. Сторона АС находится подъ равномѣрно



распредѣленнымъ давленіемъ вѣтра, нормальнымъ къ поверхности АС и равнымъ 0,8 тн. Длина АС = 6 м.; уголъ САВ = 30°. Опредѣлить опорныя реакціи.

Отв. $X_a = -0{,}4$ т.; $Y_a = 5 + \frac{4}{15}\sqrt{3}$ тн.;
$X_b = 0$; $Y_b = 5 + \frac{2}{15}\sqrt{3}$ тн.

16*. Литейный кранъ ABC имѣетъ ось вр-
щенія MN; разстоянія: MN = 5 м.; AC = 5

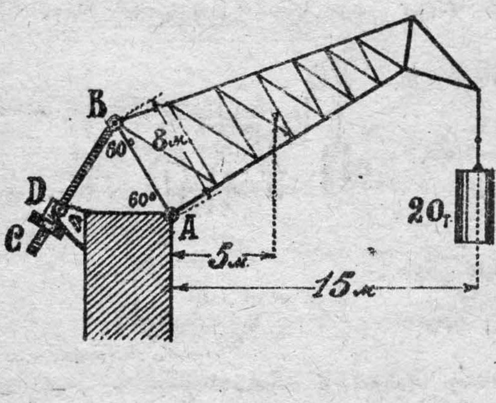


вѣсъ крана 2 тн.; центръ
тяжести его D находится
на разстояніи ED = 2 м. о
оси вращенія; вѣсъ груза
подвѣшеннаго въ точкѣ C
равенъ 3 тн. Найти реак
подшипника M и подпятника N.

Отв. $X_m = -3,8$ тн.; $Y_m = 0$;

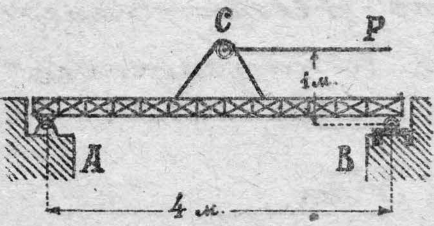
$X_n = 3,8$ тн.; $Y_n = 5$ тн.

17*. Кранъ имѣетъ шарниръ въ точкѣ
и можетъ наклоняться при помощи винта



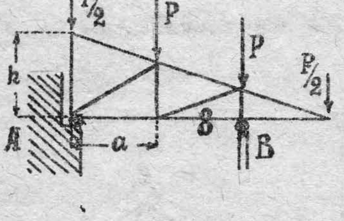
соединеннаго съ фермою
крана шарниромъ B
проходящаго черезъ гайк
D, при чемъ AB = AD = 8
Вѣсъ фермы равенъ 12
и въ тотъ моментъ, ко
треугольникъ ABD равн
сторонній, направленъ

19. Лебедка укрѣплена на серединѣ балки АВ. Въ А шарниръ, въ В катокъ. Опредѣлить опорныя реакціи, если канатъ СР натянутъ горизонтальной силой P = 4 тн.



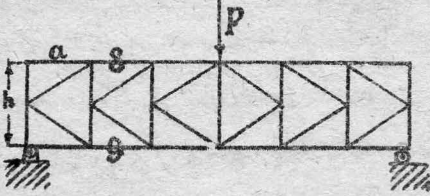
Отв. A = 4,1 т. B = 1 т.

20. Треугольная ферма опирается въ А на шарниръ; въ В на качающуюся опору. a = 3 м.; h = 4 м.; P = 4 т. Найти по способу Риттера и отрѣзыванія узловъ силу въ 8-омъ стержнѣ.



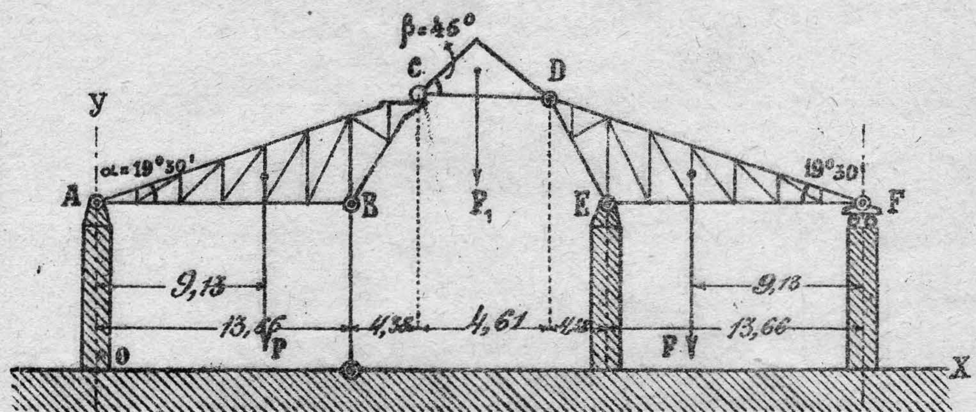
0 $\frac{3P.a}{2h}$.

21. Полураскосная ферма. Найти силу въ 8-омъ и 9-омъ стержняхъ при дѣйствіи силы P, приложенной къ серединѣ моста.



Отв. ± $\frac{P.a}{2h}$.

22.* Покрытіе паровозной мастерской Александровскаго завода Николаевской ж. д. сдѣлано по схемѣ, указанной на чертежѣ. Размѣры даны въ метрахъ. Опоры A, D и E — шарнирныя неподвижныя, C и F — шарнирныя скользящія, B — качающаяся. Разстояніе между смежными фермами равно 3,09 метра.



Опредѣлить опорныя реакціи подъ дѣйствіемъ: 1) вѣса фермы съ кровлей $P = 6,88$ т. и вѣса фонаря $P_1 = 2,2$ т.; 2) снѣга, вѣсъ котораго составляетъ 0,094 т. на квадр. метръ горизонтальной проэкціи кровли; на фонарѣ, уголъ наклона котораго 45°, снѣгъ не держится; 3) вѣтра, направленнаго подъ угломъ 10° къ горизонту; вѣтеръ можетъ дѣйствовать и справа и слѣва; давленіе вѣтра равно 0,18 т. на 1 кв. метръ плоскости, перпендикулярной къ его направленію.

Имѣемъ : $\alpha = 19^\circ 30$; $\sin\alpha = 0{,}334$; $\cos\alpha = 0{,}943$;

$\beta = 45^\circ$; $\sin\beta = \cos\beta = 0{,}707$; $\sin(\alpha + 10^\circ) = 0{,}492$;

$\sin(\beta + 10^\circ) = 0{,}819$.

Отв.

1). $Y_a = Y_f = 1{,}9$ тн. ; $Y_b = Y_e = 6$ тн.

$Y_c = Y_d = 1{,}1$ тн.

2). $Y_a = Y_f = 1{,}7$ тн.; $Y_b = Y_e = 3{,}5$ тн.

3а). $Y_c = Y_d = 0{,}4$ тн. $X_d = -0{,}85$ тн.

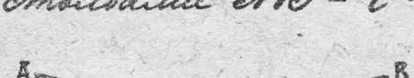
$Y_a = 0{,}87$; $X_a = -0{,}86$ тн. ; $Y_b = 2{,}3$ тн.

$Y_e = 0{,}16$ тн. $X_e = -0{,}85$ тн.; $Y_f = 0{,}16$ тн.

3в). $Y_c = Y_d = 0{,}33$; $X_d = 0{,}85$; $Y_a = -0{,}12$ тн.

$Y_b = 0{,}56$ тн.; $X_e = 1{,}7$ тн.; $Y_e = 1{,}96$ тн.; $Y_f = 0{,}36$ тн.

23. Электрическій проводъ натянутъ между столбами $AB = l = 50$ м. Стрѣлка провѣса $h = 1$ м.



Вѣсъ провода $Q = 40$ кгр. Найти натяженіе провода на серединѣ и у точекъ привѣса.

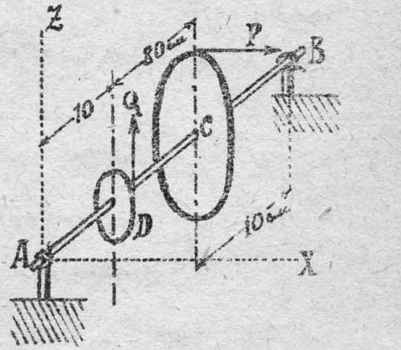
Отв. $H = 250$ к. $T = 250{,}75$

24. По мѣдному проводу передается энергія въ 10 киловаттъ при напряженіи въ 250 вольтъ. Разстояніе

между столбами $l = 50$ м.; высота столбовъ $H = 7$ м. Плотность тока 2 ампера на 1 кв. миллиметръ сѣченія, удѣльный вѣсъ мѣди 8,8. Съ какой силой нужно натянуть проводъ, чтобы высота его надъ землей была 6 метровъ?
Сдѣлать тотъ же разсчетъ для аллюминія.
[уд. вѣсъ аллюминія 2,5].

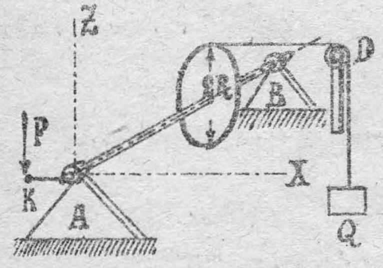
Отв. 55 кгр. и 16 кгр.

25.* На горизонтальномъ валу AB насажено зубчатое колесо C радіуса 1 м. и шестерня D радіуса 10 см. Другіе размѣры указаны на чертежѣ. Къ колесу C по направленію касательной приложена горизонтальная сила $P = 10$ кгр., а къ шестернѣ D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Опредѣлить силу Q и реакціи подшипниковъ A и B въ положеніи равновѣсія.



Отв. $Q = 100$ кгр.; $X_a = -1$ кгр.; $Z_a = -90$ кгр.;
$X_b = -9$ кгр.; $Z_b = -10$ кгр.

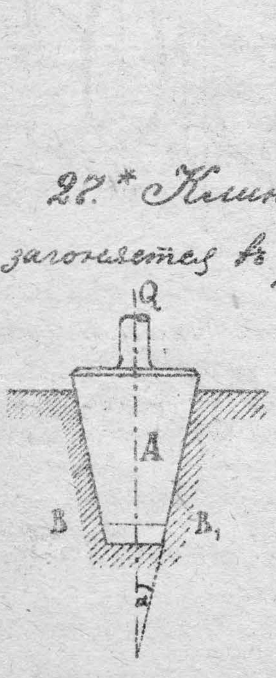
26.* Рабочій поднимаетъ грузъ $Q = 80$ кгр. съ помощью ворота, схематически изображеннаго на чертежѣ; радіусъ барабана $R = 5$ см.; длина рукоятки $AK = 40$ см.; $AC = CB = 50$ см. Опредѣлить давленіе P на рукоятку и давленія оси ворота на опоры A и B при томъ положеніи ворота, когда рукоятка AK горизонтальна, а сила P вертикальна.



Отв. $P = 10$ кгр.; $X_a = -40$ кгр.; $Z_a = 10$ кгр.; $X_b = -40$ кгр. $Z_b = 0$.

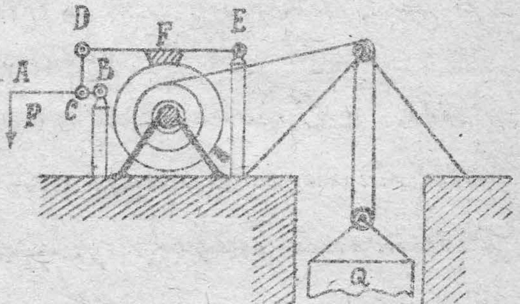
Глава V.

27.* Клинъ A, уклонъ котораго $tg\alpha = 0,05$, загоняется въ углубленіе BB_1 усиліемъ $Q = 6$ тн. Опредѣлить нормальное давленіе N на щеки клина, а также усиліе P, необходимое для того, чтобы вытащить клинъ, если коэффиціентъ тренія $k = 0,1$.



Отв. $N \cong 20$ т.; $P = 2$ т.

28*. Для опусканія грузовъ въ шахту употребляютъ воротъ съ тормазомъ, изображенный на чертежѣ. Съ барабаномъ, на который намотана цѣпь, скрѣплено концентрическое деревянное колесо, которое тормазятъ, надавливая на конецъ A рычага AB соединеннаго цѣпью CD съ концомъ D тормазного рычага ED. Діаметръ колеса $a = 50$ см.; діаметръ барабана $b = 20$ см.; $ED = 120$ см.; $FE = 60$ см.; $AB = 1$ м.; $BC = 10$ см. Опредѣлить силу P, уравновѣшивающую грузъ $Q = 800$ кгр., подвѣшенный къ подвижному блоку, если коэффиціентъ тренія дерева о желѣзо $k = 0,4$.



Отв. $P = 20$ кгр.

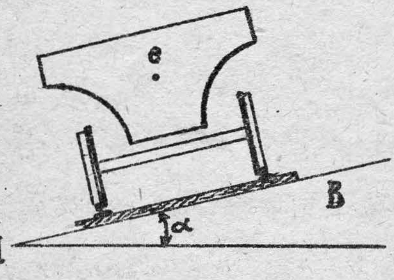
29. Шаръ вѣсомъ P лежитъ на шероховатой наклонной поверхности /черт. задачи 3/ составляющей уголъ α съ горизонтомъ. Къ шару прикрѣплена нить переброшенная черезъ блокъ C съ грузомъ Q на концѣ

Опредѣлить уголъ β и давленіе шара P на наклонную поверхность, если коэффиціентъ тренія шара о поверхность — k.

$\angle\beta$ опредѣляется изъ сл. у-нія $Q\cos\beta - KQ\sin\beta = P\sin\alpha - kP\cos\alpha$

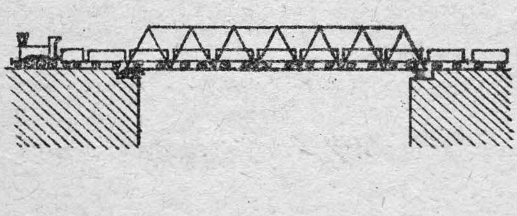
$N = P\cos\alpha - Q\sin\beta$.

30.** Вагонетка съ углемъ стоитъ на закругленіи. Уголъ наклона шпалы AB съ горизонтомъ $\alpha = 15°$; разстояніе между рельсами $a = 60$ см.; коэффиц. тренія колеса о рельсы при скольженіи $k = 0.15$; вѣсъ вагонетки $Q = 1000$ кгр. приложенъ въ ея центрѣ C. Найти нормальное давленіе колесъ на рельсы A и B и давл. выступа колеса на рельсъ A направленное параллельно AB.



Отв. $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}\cdot Q\cos\alpha$; $F = Q(\sin\alpha - k\cos\alpha)$.

31. Пролетъ моста $l = 50$ метровъ, вѣсъ $Q = 70$ т. Правая опора неподвижна (шарниръ); лѣвая подвижна — на 4-хъ каткахъ (по 2 съ каждой стороны) діаметромъ



въ 20 см. Вѣсъ части поѣзда, находящейся на мосту, $P = 150$ т.; поѣздъ при движеніи тормазится при чемъ сила тормаженія на разсматриваемую часть поѣзда $F = 15$ т. Коэффиціентъ тренія катанія $k_1 = 5/100$ сент. Найти опорныя реакціи.

Отв. $Y_1 = Y_2 = 110$ т. $X_1 \cong 0,3$ т.

$X_2 \cong 14,7$ т.

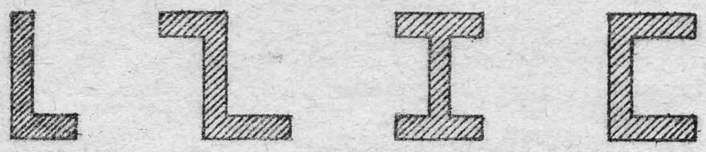
Глава VI.

32. Найти правильно ли дано положеніе центра тяжести фермы крана въ задачѣ № 16, предполагая, что площадь поперечнаго сѣченія всѣхъ стержней одинакова и $AM = BN = \frac{1}{2}$ м.

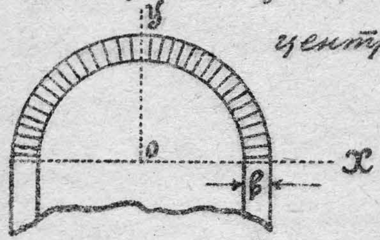
33. Найти центръ тяжести неравнобокаго уголка № 5/10 при толщинѣ $d = 1$ см. При рѣшеніи этой задачи пренебрегать закругленіями и сравнить результатъ съ таблицами нормальныхъ профилей данными въ справочникѣ Hütte.

34. Сдѣлать то-же для зетоваго, тавроваго и

корытнаго желѣза (швеллера).



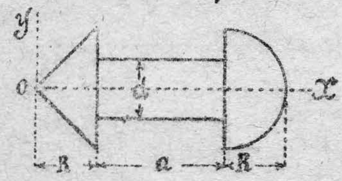
35. Наружный радіусъ полусферической вершины каупера (воздухонагрѣвателя доменной печи) $a =$ $= 4$ м.; толщина стѣнки $b = 40$ см. Найти центръ тяжести?



Отв. $x_c = 0$;

$$y_c = \frac{3}{8}\,\frac{4a^2+6a^2b+4ab^2+b^2}{3a^2+3ab+b^2}$$

36. Найти центръ тяжести заклепки съ одной стороны имѣющей сферическую, съ другой коническую головки при $d = 20$ мм. $D = 2d$; $a = 2d$.

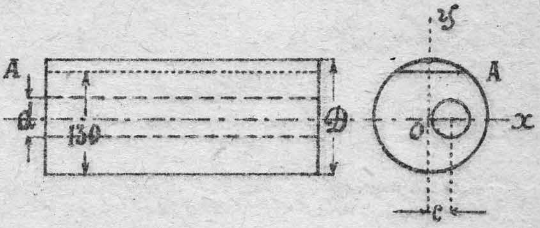


При рѣшеніи надо знать, что ц. т. конуса лежитъ на $3/4$ высоты его считая отъ вершины; ц. т. полушарія на $3/8\,R$ отъ основанія.

Отв. ∾ 46,7.

37. Корнвалийскій паровой котелъ состоитъ изъ наружнаго цилиндра съ цилиндрической же жаровой трубой поставленной эксцентрично.

Дано $D = 150$ сент.; $d = 75$ см. $c = 15$ см.; толщина стѣнокъ $h = 1$ см. Найти центръ тяжести котла пустого, наполненнаго сплошь водой и наполненнаго водой до горизонта A на высотѣ $H = 130$ см. отъ основанія котла. Дано: удѣльный вѣсъ желѣза 7.8; удѣльный вѣсъ воды 1.

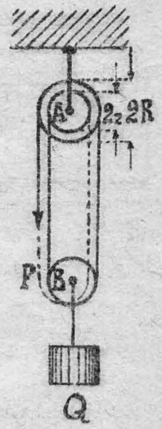


$x_c^1 = 5$ см, $y_c^1 = 0$; $x_c^2 = \sim -2$ см.; $y_c^2 = 0$; $x_c^3 = \sim 2$ см

Отдѣлъ III.

Глава I.

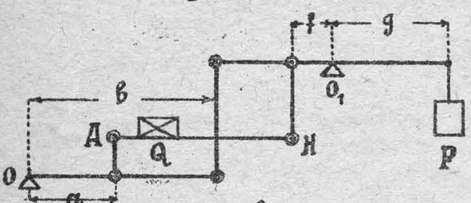
38.* Главную часть дифференціальнаго блока Вестона составляютъ два неизмѣнно связанныхъ между собой шкива A, ось которыхъ подвѣшена къ неподвижному крюку. Желоба ихъ снабжены зубцами, захватывающими безконечную цѣпь, образующую двѣ петли, въ одну изъ которыхъ помѣщенъ подвижной блокъ B. Къ подвижному блоку подвѣшивается поднимаемый грузъ Q, а къ свисающей съ большаго блока вѣтви свободной петли приложена сила P. Радіусъ шкивовъ A суть R и r, причемъ $r < R$. Требуется найти,



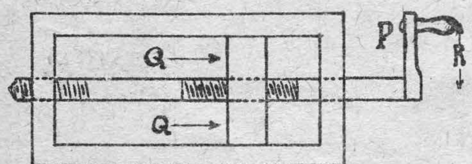
пренебрегая тренiемъ, зависимость силы P отъ величины поднимаемаго груза Q и опредѣлить эту силу въ случаѣ: $Q = 500$ кгр; $R = 25$ см., $r = 24$ см.

Отв. $P = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ кгр.

39. Платформенные вѣсы строятся такъ, что $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$ (для десятичныхъ $\frac{1}{10}$). Показать, что при этомъ $Q : P = g : f$ — независимо отъ положенiя груза на платформѣ AH.



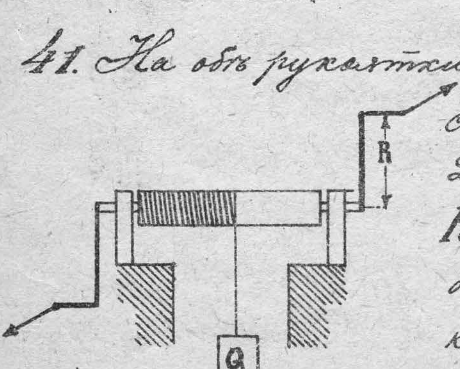
40. Найти силу Q пресса съ дифференцiальнымъ винтомъ, если радiусъ рукоятки R; сила приложенная къ рукояткѣ равна P и направлена $\perp$ — но къ R; шагъ одного винта h другого h_1.



Тренiемъ пренебрегаемъ.

Отв. $Q = \frac{2\pi RP}{h_1 - h}$.

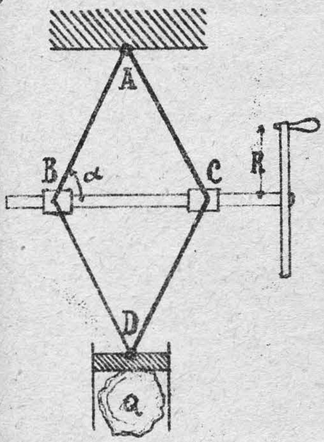
41. На обѣ рукоятки ворота давятъ 4 человѣка съ силой $P = 8$ кгр. каждый. Длина кривошипа рукоятки $R = 40$ см. Дiаметръ барабана $D = 16$ см., дiаметръ каната $d = 2$ см. На тренiе



въ подшипникахъ расходуется 4 % всей работы. Найти грузъ Q, который можно поднять этимъ воротомъ.

Отв. $Q = 149$ кгр.

42. Коленчатый прессъ состоитъ изъ шарнирнаго ромба ABDC. Шарниръ A неподвиженъ; при вращеніи винта шарниры B и C сближаются; шарниръ D опускается и тѣло Q сжимается. Зная радіусъ рукоятки R, силу P вращающую рукоятку и шагъ винтовъ h, найти силу прессованія въ зависимости отъ угла α.

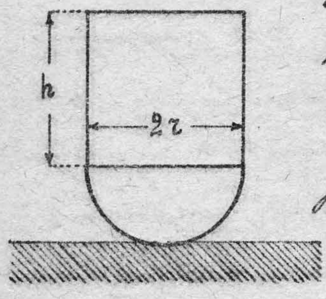


Отв. $Q = \frac{\pi P R}{h} \operatorname{tg} \alpha$.

43. Примѣнить начало возможныхъ перемѣщеній къ рѣшенію задачъ NN 4, 7, 13, 17 (натяженіе винта), 27 — 30.

Глава II.

44. Поперечное сѣченіе деревянной балки ограничено полукругомъ радіуса r и прямоугольникомъ высотою h. При какой высотѣ прямоугольника h равновѣсіе въ положеніи чертежа будетъ устойчивымъ?



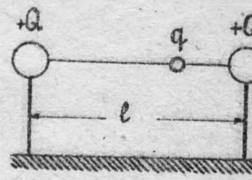
Отв. h

45. Рѣшить туже задачу для заклепки съ шаровой головкой.

46. Исходя изъ теоремы Дирихле, показать, что горизонтальная магнитная стрѣлка имѣетъ два положенія равновѣсія: одно устойчивое, другое неустойчивое. Дано: длина стрѣлки l, масса магнитныхъ полюсовъ на ея концахъ $\pm m$, горизонтальная составляющая земного магнитнаго поля H.

47. Показать тоже для тангенсъ и синусъ-гальванометровъ (см. § 37).

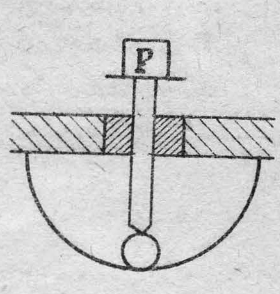
48. Два наэлектризованныхъ шара съ зарядами $+Q$ находятся на разстояніи $l = 100$ см. Между ними натянута струна изъ непроводящаго матеріала; вдоль струны можетъ скользить шарикъ съ зарядомъ $+q$. Найти положеніе равновѣсія шарика q и посмотрѣть устойчиво ли оно? Сдѣлать тоже для шарика съ зарядомъ $-q$.



Отв. $\frac{l}{2} = 50$ см.

Въ 1-омъ случаѣ устойчиво;
во 2-омъ — неустойчиво.

49. Шарикъ вѣсомъ Q и радіусомъ r лежитъ въ низшей точкѣ вполнѣ гладкой шаровой впадины радіуса R. На шарикъ передается вѣсъ груза P при помощи стерженя перемѣщающагося въ особыхъ направляющихъ по вертикальному діаметру шаровой впадины. Устойчиво ли равновѣсіе шарика?



Отв. Если $P < \frac{Q \cdot r}{R-2r}$, то устойчиво; если $P > \frac{Q \cdot r}{R-2r}$ — неустойчиво (Southwell).

Оглавленіе.

Введеніе

Отдѣлъ I.

Статика точки.

Глава I.

Силы по одной прямой

Глава II.

Силы на плоскости.

Глава III.

Силы въ пространствѣ.

Отдѣлъ II.

Статика твердаго тѣла.

Глава I.

Силы пересѣкающіяся въ одной точкѣ.

Глава II.

Плоская система силъ. Моментъ силы. Параллельныя силы. Пары силъ.

Глава III.

Силы въ одной плоскости. Приведенiе системы силъ къ силѣ и парѣ. Уравненiя равновѣсiя твердаго тѣла.

§§ Стр.

Глава IV.

Силы въ пространствѣ.

Глава V.

Тренiе.

Глава VI.

Центръ тяжести.

Отдѣлъ III.

Аналитическая теорiя равновѣсiя.

Глава I.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

Глава II.

Объ устойчивости равновѣсія.