Министерство Путей Сообщения СССР

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА имени Л. М. КАГАНОВИЧА

АВТОРЕФЕРАТ
по диссертации аспиранта
КОНАШЕНКО С. И.

„СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ГИБКОЙ АРКИ С БАЛКОЙ ЖЕСТКОСТИ“

ДНЕПРОПЕТРОВСК

1951 г.

В работе рассмотрена одна из задач динамики мостов — колебания комбинированной системы гибкой арки с балкой жесткости.

В первой части работы исследованы свободные колебания и во второй — вынужденные колебания.

По первой части работы выполнен эксперимент на модели.

Рассмотрены два вида систем гибкой арки с балкой жесткости: 1) безраспорные системы (с передачей распора на балку жесткости) и 2) распорные системы (с передачей распора на опоры).

Исследование проведено применительно к мостовым пролетным строениям.

Основные допущения приняты те же, что и при статическом расчете.

Рассматривается случай балки жесткости постоянного поперечного сечения.

Арка принята очерченной по квадратной параболе, как это обычно имеет место в мостовых конструкциях; работа арки на изгиб не учитывается, арка считается работающей только на осевые усилия.

Предполагается, что балка специальными приёмами освобождена от работы на постоянную нагрузку и что последняя полностью передана на арку.

В качестве основного рассматривается случай арки постоянного поперечного сечения.

Результаты исследования, при соответствующей корректировке, могут быть использованы при любом законе изменения площади поперечного сечения арки.

Масса пролетного строения принята равномерно распределенной по длине балки жесткости. Массы арки, подвесок и верхних связей отнесены к балке жесткости.

Свободные колебания

В главе I работы рассмотрены свободные колебания, исследован спектр частот и составлены рабочие формулы и графики для определения частот.

Решение получено для безраспорной системы без эксцентриситета и с эксцентриситетом в прикреплениях арки к балке и для распорной системы с учетом и без учета деформаций.

В качестве основного метода решения задачи избран точный метод. Балка, усиленная гибкой аркой, рассматривается как упругая система с непрерывно распределенными массами (с бесконечным числой степеней свободы), для нее составляются уравнение колебаний и граничные условия. Решение уравнения колебаний при заданных граничных условиях приводит к уравнению частот, с помощью которого устанавливается и исследуется спектр частот свободных колебаний.

Отдельно рассмотрено приближенное решение для низших частот, результаты которого сравнены с результатами точного решения.

В соответствии с исходными предпосылками уравнение колебаний для безраспорной системы без эксцентриситета принимает вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{8f}{ml^2} H,$$

где H — распор при колебаниях, зависящий от линии прогиба y. Распор H определен двумя способами:

1) путем загружения линии влияния его силами инерции балки; 2) путем установления зависимости распора непосредственно от линии прогиба (точнее площади линии прогиба). Второе представление распора оказалось более удачным. Использование его привело к следующему линейному интегро-диференциальному уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{a^2}{\alpha_0 l^5} \int_0^l y dx.$$

Здесь α_0—параметр, зависящий от жесткостей арки и балки и пологости арки.

Граничные условия при отсутствии эксцентриситета в прикреплениях арки к балке остаются теми же, что и для простой балки.

К решению уравнения колебаний применен метод Фурье.

В итоге получено уравнение частот, содержащее параметр α_0. С помощью этого уравнения построены графики зависимости собственных чисел от параметра α_0 и исследован спектр частот свободных колебаний.

В результате исследования уравнения частот установлено следующее.

Спектр частот для балки, усиленной гибкой аркой, существенно отличен от спектра частот для простой балки. Низшие частоты, соответствующие прямо-симметричным формам колебаний, выше частот этого типа для простой балки той же жесткости и той же погонной массы; эта разница тем больше, чем больше усиление балки аркой и чем ниже номер частоты; высшие частоты этого типа практически те же, что и для простой балки. Частоты, соответствующие обратно-симметричным формам колебаний, совпадают с четными (по номеру) частотами для простой балки при любом усилении балки аркой. С уменьшением усиления балки аркой совокупность собственных чисел стремится к совокупности собственных чисел для простой балки.

Для системы гибкой арки с балкой жесткости могут иметь место случаи кратных собственных чисел кратности 2, из них практически возможен лишь один случай кратности (совпадение первой и второй частот колебаний).

Для распорной системы, рассчитываемой без учета деформаций, уравнение колебаний, граничные условия и уравнение частот имеют тот же вид, что и для безраспорной системы без эксцентриситета. Отличие заключается лишь в том, что параметр α_0 здесь определяется несколько иным выражением.

Для безраспорной системы с эксцентриситетом в прикреплениях арки к балке иной вид получают, прежде всего, граничные условия, что связано с наличием опорных моментов. Кроме того, изменяется правая часть уравнения колебаний, так как распор здесь зависит не только от линии прогиба y, но и от второй производной линии прогиба $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

К решению уравнения колебаний также применен метод Фурье.

Уравнение частот здесь содержит два параметра: α_0 и α (последний характеризует величину эксцентриситета). На основе уравнения частот составлены графики зависимости собственных чисел от параметров α_0 и α.

Произведенное исследование показало, что и при наличии эксцентриситета усиление балки аркой влияет существенно лишь на низшие частоты, соответствующие прямо-симметричным формам колебаний. Высшие частоты этого рода мало изменяются по сравнению с простой балкой. Частоты, соответствующие обратно-симметричным формам колебаний, совпадают с четными (по номеру) частотами простой балки. По сравнению с системой без эксцентриситета несколько изменяются лишь низшие частоты, соответствующие прямо-симметричным формам колебаний.

Далее, в работе исследовано влияние деформаций на частоты свободных колебаний. Учет деформаций производится по двум направлениям: во первых, учитывается изменение нагрузки, передаваемой на балку подвесками, в связи с деформацией арки; во-вторых, учитывается (для безраспорной системы) изгибающее влияние осевых растягивающих сил H вследствие деформации балки.

Показано, что для безраспорной системы при определении частот свободных колебаний, как и при статическом расчете, нет необходимости учитывать деформации. Для распорной системы можно не учитывать деформации, если коэфициент деформативности не превышает 3. В случае, если коэфициент деформативности более 3, деформации следует принимать во внимание. При расчете с учетом деформаций низшие частоты, соответствующие и прямо-симметричным, и обратно-симметричным формам колебаний, оказываются меньше, чем при расчете без учета деформаций. На высшие частоты деформации практически не влияют. Учет деформаций выполнен приближенно: учтено только влияние распора от постоянной нагрузки. В результате исследования получены графики зависимости собственных чисел от параметра α_0 и коэфициента деформативности.

В главе I представлено также приближенное решение для низших частот свободных колебаний, полученное путем сосредоточения масс пролетного строения в конечном числе точек балки жесткости. Результаты приближенного решения весьма близки к точному. На базе приближенного решения с использованием результатов точного решения составлены рабочие формулы для вычисления первых двух частот колебаний, которые могут быть использованы наравне с графиками.

Результаты, полученные в первой главе, проверены экспериментом на модели пролетного строения моста рассматриваемой системы. Модель имела пролет $l = 400$ см, стрелу арки $f = 71{,}2$ см и была составлена из двух главных ферм с балкой жесткости из 2-х швеллеров № 10 с укороченными полками ($I_б = 227$ см^4, $F_б = 18{,}3$ см^2) и аркой прямоугольного сечения, меняющегося по закону $F_a = \frac{F_0}{\cos\alpha}$, где $F_0 = 3{,}80$ см^2 — площадь сечения арки в замке. Эксперимент имел целью опытное определение частоты основного тона собственных колебаний. Последняя устанавливалась из опыта путем приведения модели в резонанс. Возмущающая нагрузка создавалась электромотором с неуравновешенным маховиком. Колебания фиксировались виброметрами Р-37-13 и записывались с помощью осциллографа типа МПО-2. Полученная экспериментально первая частота собственных колебаний (33,3 герц) хорошо совпала с вычисленной теоретически (34,1 герц).

Вынужденные колебания.

Во второй главе рассмотрены вынужденные колебания системы гибкой арки с балкой жесткости, дано общее решение для вынужденных колебаний и разобран ряд частных случаев.

Решение получено для безраспорной системы без эксцентриситета и с эксцентриситетом и для распорной системы, рассчитываемой без учета деформаций.

В §§ 1 — 2 этой главы исследованы фундаментальные функции системы. Показано, что обратно-симметричные фундаментальные функции совпадают с четными (по номеру) фундаментальными функциями для простой балки, прямосимметричные фундаментальные функции отличаются от соответствующих функций для простой балки. При малом усилении балки аркой первая фундаментальная функция и, следовательно, первая форма колебаний прямо-симметричны, при большом усилении — обратно-симметричны. Границей между этими двумя случаями является первый случай кратности частот.

Показано, что фундаментальные функции как при наличии эксцентриситета, так и при отсутствии его образуют ортогональную систему. Вопрос о виде фундаментальных функций в случае кратных частот рассмотрен отдельно.

В главе 2 получено общее решение для вынужденных колебаний рассматриваемой системы.

Уравнение вынужденных колебаний для системы без эксцентриситета имеет вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x,t) - \frac{a^2}{\alpha_0 l^5} \int_0^l y dx,$$

где: $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{m}$, $F(x,t)$ — интенсивность возмущающей нагрузки, m — погонная масса пролетного строения.

Граничные условия остаются прежними.

Общее решение для вынужденных колебаний отыскивается в виде ряда по фундаментальным функциям при заданных начальных условиях. Структура общего решения остается той же, что и для простой балки, изменяются лишь фундаментальные функции и собственные числа.

Для решения задачи о вынужденных колебаниях использован также метод обобщенных координат, приводящий к тому же общему решению. Задача эта допускает две постановки:

1) уравнения Лагранжа второго рода составляются для системы гибкой арки с балкой жесткости в целом; кинетическая энергия берется только для балки, поскольку все массы пролетного строения отнесены к балке; потенциальная энергия берется для балки и арки; вычисление обобщенных сил производится обычным порядком;

2) уравнения Лагранжа второго рода составляются для балки, в связи с чем и кинетическая, и потенциальная энергии берутся только для балки; арка и подвески считаются внешними по отношению к балке элементами; нагрузка, передаваемая на балку подвесками, учитывается при вычислении обобщенных сил наравне с заданной нагрузкой $F(x,t)$.

Обе постановки задачи эквивалентны в смысле получаемых результатов.

Метод обобщенных координат оказывается более удачным при рассмотрении частных случаев.

В качестве примеров рассмотрены следующие виды возмущающих нагрузок:

1) неподвижная пульсирующая сила;

2) неподвижная пульсирующая полоса равномерно распределенной нагрузки;

3) прокатывающаяся с постоянной скоростью постоянная сила;

4) прокатывающаяся полоса распределенной нагрузки;

5) прокатывающаяся пульсирующая сила.

Во всех случаях решение для динамического прогиба представлено в виде ряда по фундаментальным функциям. Рассмотрен вопрос о сходимости получаемых рядов.

Для случая неподвижной пульсирующей силы произведены вычисления динамических коэфициентов для ряда отношений частоты возмущающей нагрузки к низшей частоте собственных колебаний.

Полученные динамические коэфициенты сравнены с динамическими коэфициентами для простой балки, находящейся в тех же условиях. Вычисления показали, что динамические коэфициенты для прогиба балки, усиленной гибкой аркой, в случае пульсирующей силы будут, вообще говоря, отличаться от динамических коэфициентов для простой балки (разница в динамических добавках может достигать 20 — 30%).

Причиной этого является иное расположение частот в спектре. Разумеется, это еще не дает оснований судить о динамических коэфициентах от поездной нагрузки, однако можно ожидать и в случае поездной нагрузки различия динамических коэфициентов для простой балки и балки, усиленной гибкой аркой.

тип. диит, зак. № 158, 0,5 печ. л., 43000 зн. в печ. л., подписано к печати 15-V 1951 г
Тираж 100 экз. БТ 06315.