УДК 624.042.8

ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

д.т.н., доц. Распопов А.С.

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна

В работе [1] показано, что использование графов и автоматов позволяет получить новый источник информации о свойствах стержневой системы, ускоряющий проведение динамических расчетов по традиционным методикам. При этом удается перейти к более рациональному построению и упрощению как основной топологической модели, так и отображающей алгебраической системы уравнений. Получение уравнения состояния всей системы по уравнениям состояния отдельных ее частей включает следующие этапы: разделение системы на подсистемы или отдельные части, каждую из которых удобно проанализировать в отдельности; построение изоморфного представления динамической системы в виде графа и анализа состояния подсистем (подавтоматов) с помощью таблиц переходов; идентификация характеристических функций автомата и формирование ассоциированных матриц для каждой из подсистем; объединение полученных матриц в единое ортогональное уравнение состояния соединенной системы.

Если решить исходную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных параметров, то для различных значений λ по рекуррентным соотношениям [2] можно определить формы собственных колебаний.

Для нахождения n неизвестных НП (x_1, x_2, ..., x_n) систему n линейных уравнений приводят к виду

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ или } Ax = b, \tag{1}$$

при условии, что одна произвольная компонента вектора x, например x_1, принимается равной единице, а все остальные неизвестные вычисляются в относительной форме x_k / x_1.

В этом случае столбец коэффициентов a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1} при параметре x_1 преобразуется с изменением знака в столбец свободных членов b_i, который расположен в правой части уравнений (1), т. е. $b_i = -a_{i1}$. Для уравнивания числа неизвестных с числом уравнений одно из уравнений системы, соответствующее нулевому значению какого-либо КП, например x_j, исключается. Тогда ранг матрицы системы $r = n - 1$.

Далее обычно рассматривают два основных подхода к решению системы неоднородных алгебраических уравнений. Первый из них сводится к определению вектора x по некоторому заданному вектору b, и второй – к непосредственному построению обратной матрицы A и нахождению $x = A^{-1}b$.

Если обозначить определитель, составленный из коэффициентов левой части уравнения (1), через $D = \left| a_{ik} \right|^n$, то согласно правилу Крамера [3–6], система (1) имеет единственное решение

$$x_k = \frac{D_k}{D} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где D_k – определитель, составленный подобным образом как и D, но с заменой элементов k-го столбца, соответствующего определяемому неизвестному НП, свободными членами b_1, b_2, ..., b_n, или, если выразить алгебраическое дополнение элемента a_{ik} через A_{ik}, то можно записать

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i . \qquad (3)$$

Таким образом, определение неизвестных x_k сводится к нахождению всех миноров порядка $n-1$ определителя системы D и, применительно к расчету колебаний стержневой системы, составлению обратной матрицы B_{tk}^{-1} [1]

$$B_{tk}^{-1} = \frac{\tilde{B}_{tk}}{D(B)}, \qquad (4)$$

где $\tilde{B}_{tk}$ – союзная матрица [5], составленная из алгебраических дополнений A_{ik}.

Получение обратной матрицы путем определения ее элементов связано с раскрытием определителей матрицы B_t порядка m, равного для продольных, крутильных колебаний $m=1$, изгибных в плоскостях xy, xz – $m=3$, изгибно-продольных или изгибно-крутильных – $m=4$, пространственных – $m=8$. Характерной особенностью союзной матрицы $\tilde{B}_{tk}$ является то, что каждый ее элемент для простых типов колебаний тождественен элементу матрицы B_{tk}, за исключением знака $(-1)^{i+k}$ определителя D_{ik}, полученного из D вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент a_{ik}. Это обстоятельство позволяет значительно упростить процедуру обращения матрицы B_{tk} для каждого участка стержня и использовать изложенный выше алгоритм построения частотных уравнений для определения форм собственных колебаний стержневой системы.

Практически необходимо определить только независимые произвольные начальные параметры всех стержней системы, так как зависимые параметры в каком-либо сечении $k-1$ определяются автоматически с учетом следующих соотношений

$$u_{k-1}^{\text{кп}} = u_k^{\text{нп}}; \; q_{k-1}^{\text{кп}} = q_k^{\text{нп}} . \qquad (5)$$

Поэтому, если изменяется состояние КП одного из зависимых граничных параметров, то точно также изменяется состояние связанного с ним НП смежного участка. Очевидно, это правило не относится к независимым и краевым граничным параметрам.

В целом, методика построения форм колебания для изгибных колебаний неразрезных балок, изложенная в работах [6–9] будет аналогичной и для других простых типов колебаний или их взаимных комбинаций.

Граф стержневой системы для определения форм собственных колебаний принимается таким же, как и для построения частотных уравнений. Преобразования касаются только состояний выбранных ранее произвольной компоненты НП x_1, которая принимает противоположное фиксированное значение 0, и фиксированного параметра x_j, состояние которого становится равным 1. Соответствующие изменения состояний отображаются в исходном автомате A и его топологическом коде $C(G)$ и служат основой для получения автомата A_D и матричного выражения определителя D (2).

Автомат A_{D_k}, выходами которого будут составляющие определителя D_k, также образуется из автомата A приданием k-му неизвестному НП фиксированного значения 0, что равнозначно замене столбца коэффициентов при x_k столбцом коэффициентов при нормирующем параметре x_1. При этом состояние параметра x_j $\{1\}$ остается таким же как и в автомате A_D.

Следует заметить, что единственным отличием в трансформирующихся из A автоматах A_D и A_{D_k} будут состояния лишь двух параметров (x_1, x_j или x_k, x_j), поэтому все независимые от них функции f_z, входящие в матричное частотное уравнение [1], сохраняют свои прежние выражения. Это дает значительную экономию времени по нахождению неизвестных начальных параметров системы.

Для рассмотренного в [1] простого примера изгибных колебаний балки с граничными условиями 0011 (заделка) и 0101 (шарнирное опирание) автоматы A_D и A_{D_k} представлены на рис. 1.

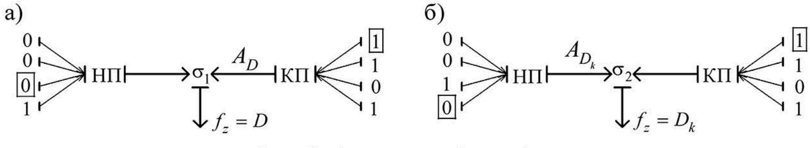

Рис. 1. Автоматы A_D и A_{D_k}

В символах булевой алгебры и конечных автоматов алгоритм расчета может быть следующим. Для неизвестного НП $m_y(0)$, который выбран в качестве нормирующего, выполнен переход из состояния 1 в состояние 0. В то же время, одному из нулевых КП, в данном случае $u_z(l)$ присвоено состояние 1. Топологический код графа $C(G_z) = \sigma_1 = [0001/1101]$. Функция выхода f_z автомата A_D: $f_z = D = \dfrac{l}{\lambda_z} T_z$.

Аналогично, для нахождения НП $q_z(0)$ ему задано состояние 0 (рис. 1, б); состояние $u_z(l)$, принятое за единицу, остается без изменений.

Соответственно, автомат A_{D_k} ($C(G_z)=\sigma_2=[0010/1101]$) имеет значение $f_z=D_k=S_z$.

Из формулы (2) находим

$$q_z(0)=-\frac{S_z\lambda_z}{lT_z}. \quad (6)$$

Учитывая соотношения для начальных параметров [2], получим известное выражение [10, 11] для формы собственных колебаний стержня

$$u_z(x)=u_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right)-\frac{S_z}{T_z}V_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right). \quad (7)$$

Так как построение алгебраических дополнений включает процедуры преобразования определителей из миноров различного порядка, то значения функций f_z, входящих в состав ассоциированных матриц и выражения D и D_k, необходимо выбирать с определенным знаком в зависимости от расположения произвольных и фиксированных параметров в кодах НП и КП стержня [6]. Известные правила определения знаков миноров [3–5] несложно применить к принятой методике построения булевых функций входных переменных.

В общем случае, знак минора определяется коэффициентом e, равным

$$e=(-1)^{\sum_{m=1}^{r}(i_m+k_m)}, \quad (8)$$

где i_m, k_m ($m=1$, 2, …, r) – соответственно, порядковые номера позиций фиксированных параметров в коде НП стержня и произвольных – в коде КП, r – общее число фиксированных параметров в коде НП и произвольных – в коде КП стержня.

Применение выражения (8) имеет свои особенности для зависимых, независимых и нулевых (краевых) граничных параметров. Так, для краевых граничных условий первого участка системы [1] все значения $i_m=0$, для последнего – $k_m=0$. Для независимых постоянно фиксированных НП $i_m=0$, независимых произвольных КП – $k_m=0$, т. е. эти параметры исключаются из рассмотрения при определении знака функции f_z. Остальные зависимые параметры образуют упорядоченную последовательность, для которой применима формула (8).

Помимо знаков миноров, учитываемых при определении алгебраических дополнений A_{ik}, необходимо также принять во внимание взаимное расположение в стержневой системе нормирующего (индекс i) и искомого (индекс k) начальных параметров [4–6]. Для определяемого неизвестного x_k это положение учитывается в формуле (2) определителем системы D_k, взятым со знаком $(-1)^{i+k}$.

Для комбинированных колебаний знаки функций f_z определяются произведениями функций, которые входят со своими знаками как составляющие элементы в состав ассоциированных матриц, описывающих сложный колебательный процесс.

Таким образом, топологическая модель стержневой системы для определения форм собственных колебаний по сравнению с моделью, принятой для построения частотных уравнений, остается без изменений. Решение включает обращение матриц, в которых исключены одна строка и один столбец при условии, что одна из искомых компонент вектора НП принимается равной единице. Это дает значительную экономию времени по нахождению остальных $n-1$ неизвестных начальных параметров и позволяет выполнять решение задачи о формах собственных колебаний по принципу алгоритма на основе представлений системы в виде графов и автоматов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций / А. С. Распопов // Вісн. Дніпр. нац. ун-та залізн. тр-та ім. акад. В. Лазаряна. - 2007. - Вип. 19. - С. 125-133.
2. Вибрации в технике : Справочник в 6 т. Т.1. : Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. - М.: Машиностроение, 1978.-352 с.
3. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 552 с.
4. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. -720 с.
5. Филин, А. П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ / А. П. Филин. - Л.: Стройиздат, 1966. - 438 с.
6. Эйхе, Г. Н. Метод прогонки и логические модели для построения форм свободных колебаний балок / Г. Н. Эйхе // Теория колебаний, динамика и статика мостов : Межвуз. сб. науч. тр. - 1991. - С. 21-29.
7. Распопов, А. С. Алгоритм построения форм колебаний стержневых систем с использованием логических моделей / А. С. Распопов, Г. Н. Эйхе // Всеукр. науч.-метод. конф. «Перспективы развития машинной графики в преподавании графических дисциплин» : Тез. (Одесса. 15-18 сент., 1992). Одесс. политехн. ин-т. - 1992. - С. 27.
8. Распопов, А. С. Логические модели в задачах о собственных формах изгибных колебаний стержневых систем / А. С. Распопов, Г. Н. Эйхе // Всеукр. наук.-метод. конф. «Геометричне моделювання. інженерна та комп'ютерна графіка» : Тез. доп. (Харків. 21-23 вер., 1993). Харків. політехн. ін-т. - 1993. - С. 183.
9. Эйхе, Г. Н. Построение форм колебаний балок на упругих опорах / Г. Н. Эйхе, А. С. Распопов // Вопросы статической и динамической работы мостов : Межвуз. сб. науч. тр. ДИИТа. - 1990. - С. 69-72.
10. Справочник по строительной механике корабля: в 3 т. / под ред. Г. В. Бойцова. - Л. : Судостроение, 1982. - 320 с.
11. Строительная механика. Применение метода граничных элементов : [специальный курс] / под ред. В. А. Баженова. - Одесса : Астропринт, 2001. - 288 с.