

УДК 539.3189

© 1993

А.И.Маневич, С.В.Ракша

СВЯЗАННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗАКРЫТОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Одним из важных направлений разработки уточненной теории устойчивости тонкостенных стержней, составленных из пластинчатых элементов, является учет нелинейного взаимодействия общей и местных форм потери устойчивости. Так же, как и в аналогичных задачах связанной потери устойчивости подкрепленных пластин и оболочек, эффективный путь решения нелинейной задачи для тонкостенных стержней основан на использовании общей асимптотической теории устойчивости [6,1,2,3]. Однако в последние годы выявился ряд трудностей при асимптотическом решении, которые обусловлены в конечном счете густотой спектра критических напряжений для коротковолновых форм. Выяснилось, что при построении смешанной формы второго порядка возникают трудно устранимые погрешности, что не позволяет достаточно точно оценить предельную нагрузку.

Нам представляется, что перспективный подход, позволяющий обойти эту трудность, связан с идеей учета, наряду с первой местной формой, «вторичной» местной формы той же длины волны (но с другой симметрией). Смысл введения вторичной местной формы [8] первоначально состоял в том, что благодаря ее учету, даже в случае сечения с двумя осями симметрии, в потенциальной энергии сохранялись члены третьей степени. Позже было показано [10], что вторичная местная форма практически совпадает со смешанной формой 2-го порядка. Учет указанных двух местных форм должен привести к достаточно надежным и относительно простым решениям нелинейных задач связанной потери устойчивости, и поэтому интерес к этому вопросу в последнее время возрастает [9].

В данной работе получено решение задачи о связанной потере устойчивости сжатого тонкостенного стержня трапециевидного (в частности, прямоугольного) сечения в рамках теории первого нелинейного приближения [9]. Изучено влияние вторичной местной формы на расчетную предельную нагрузку в зависимости от конфигурации сечения и начальных несовершенств.

Постановка задачи. Линейный расчет. Рассматривается центрально сжатый стержень трапециевидного сечения (рис.1), шарнирно опертый по краям. Предполагается, что критические напряжения для общей формы выпучивания (как эйлеровой стойки) и местной формы достаточно близки. Тогда нелинейную задачу устойчивости с учетом взаимодействия этих форм можно рассматривать в первом нелинейном приближении, сохраняя в потенциальной энергии лишь члены 2-ой и 3-ей степени относительно перемещений и их производных. Это существенно упрощает решение, так как устраняется наиболее громоздкая часть работы — построение полей перемещений второго порядка. Задача сводится к определению собственных значений в линейной постановке, вычислению по известным формулам коэффициентов нелинейной системы алгебраических уравнений равновесия и решению этой системы, определяющему равновесные ветви с учетом несовершенств.

При решении линейной задачи устойчивости для местных форм стержень рассматривается как сочленение пластин. Принимая для каждой из пластин прогиб в виде

$$w(\xi, \eta) = W(\eta) \sin \lambda \xi, \quad (\xi = x/L, \eta = y/L, \lambda = m\pi),$$

где x, y — продольная и поперечная координаты (для каждой пластины выбирается местная система координат, показанная на рис.1); L — длина стержня; m — число продольных полуволн, из известного дифференциального уравнения устойчивости получаем решение в виде

$$\bar{Q} = [H] \cdot \bar{U}, [H] = \begin{pmatrix} [H_1] & [H_2] \\ [H_2] & [H_1] \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где \bar{Q}, \bar{U} — векторы амплитуды значений безразмерных поперечных усилий, изгибающих моментов, прогибов и их производных на продольных краях 1,2 пластины (рис.2,а)

$$\bar{Q} = \frac{1}{Et} \left(Q^{(1)}, \frac{M^{(1)}}{L}, Q^{(2)}, -\frac{M^{(2)}}{L} \right)^T; \quad (2)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{t} \left(W^{(1)}, W_{\eta}^{(1)}, W^{(2)}, W_{\eta}^{(2)} \right)^T$$

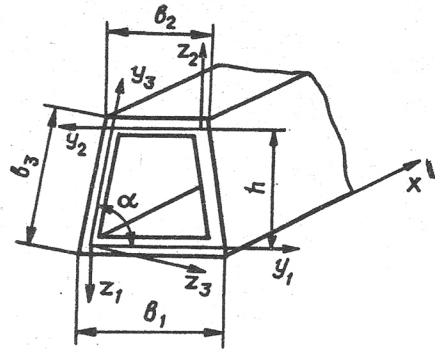


Рис. 1

(t —толщина пластины; симметричные матрицы $[H_1] = \{h_{ij}^*\}, [H_2] = \{h_{ij}^{**}\}$, элементы которых зависят от осевого напряжения σ_x , приведены в работе [5]; верхний индекс в скобках обозначает номер края пластины, индекс T — транспонирование; $(\dots)_{\eta} = \partial(\dots)/(\partial\eta)$).

Форма (1) удобна при сопряжении решений для различных пластин, составляющих сечение. В частном случае симметричной формы прогиба (относительно продольной центральной оси) учитывая, что

$$W^{(1)} = W^{(2)}, W_{\eta}^{(1)} = -W_{\eta}^{(2)}, Q^{(1)} = -Q^{(2)}, M^{(1)} = M^{(2)},$$

можно записать соотношения между амплитудными значениями обобщенных усилий и перемещений каждого края в отдельности

$$\frac{1}{Et} \begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ M^{(1)} \end{pmatrix} = [H_3] \begin{pmatrix} W^{(1)} \\ W_{\eta}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} Q^{(2)} \\ -M^{(2)} \end{pmatrix} = [H_3] \begin{pmatrix} W^{(2)} \\ W_{\eta}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $[H_3] = [H_2^*] + [H_1], [H_3] = \{h_{ij}\}; [H_2^*]$ получается из $[H_2]$ сменой знака 2-го столбца.

Условия сопряжения двух смежных пластин с номерами i, j (например, по краю 1, рис.2,б) имеют вид

$$W_{,i}^{(1)} = 0, W_{,j}^{(1)} = 0, W_{\eta,i}^{(1)} = W_{\eta,j}^{(1)}, M_{,i}^{(1)} = -M_{,j}^{(1)} \quad (4)$$

(считается, что для местной формы линия контакта не испытывает перемещений; индекс после запятой — номер пластины). Из выражения (1) при $W^{(1)} = 0, W^{(2)} = 0$ получаем

$$\frac{1}{Et} \frac{M^{(1)}}{L} = h_{22}^* W_{\eta}^{(1)} + h_{22}^{**} W_{\eta}^{(2)};$$

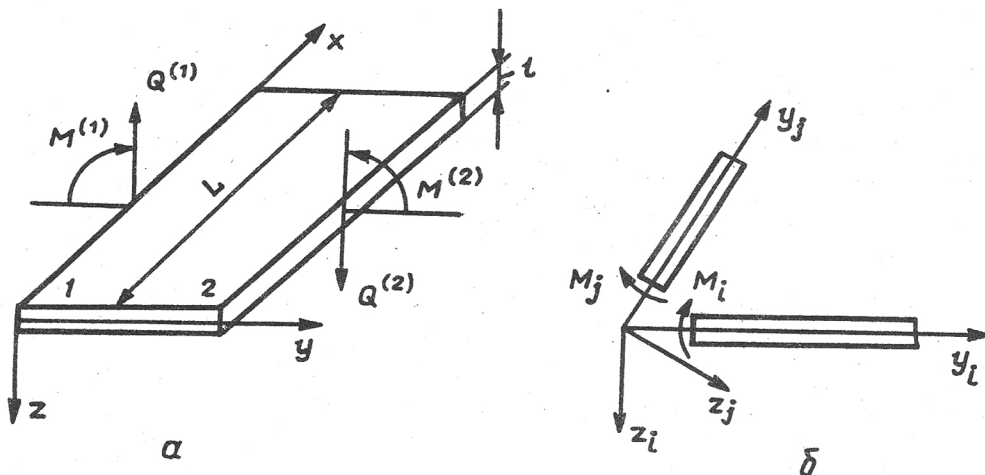


Рис.2

$$-\frac{1}{Et} \frac{M^{(2)}}{L} = h_{22}^{**} W_{\eta}^{(1)} + h_{22}^{*} W_{\eta}^{(2)}, \quad (5)$$

а в частном случае симметричной местной формы

$$\frac{1}{Et} \frac{M^{(1)}}{L} = h_{22}^{*} W_{\eta}^{(1)}; \quad -\frac{1}{Et} \frac{M^{(2)}}{L} = h_{22} W_{\eta}^{(2)} \quad (6)$$

(h_{22} — соответствующий элемент матрицы $[H_3]$). Для трапециевидного сечения местная форма предполагается симметричной относительно оси симметрии сечения, и тогда условия сопряжения составляются для двух пар пластин (например 1 и 3; 2 и 3), причем для пластин 1 и 2 используются соотношения (6), а для пластины 3 — соотношения (5). Условиям $M_{1,1}^{(1)} + M_{3,3}^{(1)} = 0$, $M_{2,2}^{(2)} + M_{3,3}^{(2)} = 0$ дают систему однородных уравнений относительно $W_{\eta,3}^{(1)}$ и $W_{\eta,3}^{(2)}$

$$\begin{aligned} (h_{22,1} + h_{22,3}^{*}) W_{\eta,3}^{(1)} + h_{22,3}^{**} W_{\eta,3}^{(2)} &= 0; \\ h_{22,3}^{**} W_{\eta,3}^{(1)} + (h_{22,2} + h_{22,3}^{*}) W_{\eta,3}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие равенства нулю определителя системы приводит к характеристическому уравнению, определяющему критические напряжения.

Для прямоугольного сечения условия сопряжения достаточно составить лишь для одной пары пластин (например, 1,3), и характеристическое уравнение принимает вид

$$h_{22,1} + h_{22,3} = 0. \quad (8)$$

Нелинейная задача. В нелинейной задаче поле перемещений для каждой из пластин представляется в виде

$$U = \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3,$$

где $U_i \equiv (u, v, w)_i$ — i -я собственная форма, причем индекс $i=1$ соответствует общей (эйлеровой) форме; $i=2$ — местной форме с минимальным критическим напряжением (первая местная форма); $i=3$ — вторичной местной форме, имеющей ту же длину волны, что и первая (но другой поперечный профиль); ζ_i — амплитуды этих форм, которые считаются нормированными условием равенства максимального прогиба толщине пластины (в случае различных толщин пластин — максимальной толщине).

Поле начальных несовершенств принимается в виде $U^* = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^* U_i$ (ζ_i^* — амплитуда начального прогиба по i -й форме). Как показано в общей асимптотической теории устойчивости [1], потенциальная энергия при отбрасывании членов выше третьей степени относительно ζ_i может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Pi = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) + \frac{1}{3} a_{111} \zeta_1^3 + a_{122} \zeta_1 \zeta_2^2 + a_{133} \zeta_1 \zeta_3^2 + a_{123} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 - \\ - \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i \zeta_i^* \frac{\lambda}{\lambda_i}, \end{aligned} \quad (9)$$

где λ — параметр нагрузки (в качестве которого в данной работе принимается безразмерное среднее продольное напряжение $\sigma^* = (\sigma_x/E) \cdot 10^3$); λ_i — критическое значение λ для i -ой формы; коэффициенты a_i , a_{ijk} вычисляются по найденным собственным формам по известным формулам [3]. (Отметим, что при использовании схемы эйлеровой стойки для общей формы $a_{111} \equiv 0$).

Условие стационарности потенциальной энергии относительно обобщенных перемещений ζ_i приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений равновесия, решения которой определяют равновесные ветви. Для точек бифуркации и предельных точек якобиан i системы обращается в нуль. Для построения равновесных ветвей и определения предельных точек в данной работе применялась процедура определения минимума потенциальной энергии как функции параметров ζ_i ($i = 1 - 3$) при данном λ при помощи эффективного метода безусловной минимизации [4], с последующим решением уравнения $I = 0$ методом секущих.

Отметим, что для прямоугольного сечения коэффициенты a_{122} и a_{133} тождественно обращаются в нуль вследствие погашения соответствующих интегралов, вычисляемых по противоположным полкам (ввиду симметрии местной формы), и весь эффект взаимодействия форм отражается членом $a_{123} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$. Поэтому учет формы U_3 является принципиально важным. В случае трапецевидного сечения все три кубических члена в энергии, вообще говоря, в нуль не обращаются.

Численный анализ. Были рассмотрены несколько вариантов тонкостенных стержней с трапецевидным и прямоугольным сечением. При выборе параметров сечения и длины стержня обеспечивалась достаточная близость критических напряжений для общей и первой местной форм. Рассматривалось семейство стержней трапецевидного сечения с переменным углом α , включая $\alpha = 90^\circ$. Фиксировались относительная высота сечения и ширина нижней полки b_1 ; толщина всех пластин принималась одинаковой. Принималось $b_1/L = 0,04$, $t_i/b_1 = 0,02375$ ($i = 1-3$). Остальные геометрические параметры сечений приведены в табл.1.

Таблица 1.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
b_2/b_1	0,5	0,625	0,75	0,875	0,9375	0,975	1,0
b_3/b_1	1,03	1,018	1,008	1,003	1,001	1,0	1,0
α , град	76	79,4	82,8	86,4	88,2	89,3	90

Типичные профили первой (рис.3,а) и вторичной (рис.3,б) местных форм показаны на примере стержня трапецевидного сечения (вариант 5). Отметим, что для вторичной местной формы прогибы на полках b_1 и b_2 направлены в одну сторону, в отличие от первой местной формы, а прогибы стенок относительно малы.

Таблица 2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma^{*(1)}$	2,45	2,55	2,62	2,68	2,71	2,72	2,73
$\sigma^{*(2)}$	2,15	2,16	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04
$\sigma^{*(3)}$	3,53	3,53	3,47	3,26	3,14	3,01	2,93

Результаты линейного расчета критических напряжений для общей и двух местных форм (табл.2), показывают, что изменение угла α при фиксированных b_1, h оказывает относительно небольшое влияние на критическое напряжение общей формы $\sigma^{(1)}$ и первой местной формы $\sigma^{(2)}$, но

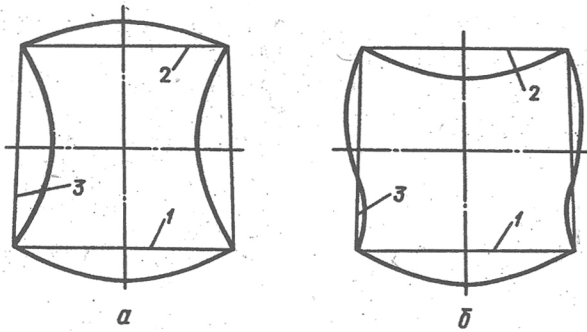


Рис. 3

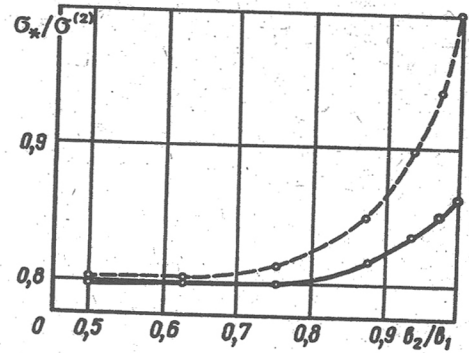


Рис. 4

критическое напряжение вторичной местной формы $\sigma^{(3)}$ более чувствительно к изменению α . Так, при переходе от трапеции к прямоугольнику $\sigma^{(3)}$ может уменьшиться в 1,2—1,4 раза, причем для прямоугольного сечения значение может оказываться достаточно близким к $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$.

Значения предельных напряжений σ в нелинейном расчете рассчитывались с учетом наряду с общей формой одной местной формы ("двумодальный расчет") или обеих местных форм ("трехмодальный расчет"). Во всех случаях для трапециевидного сечения определяющий коэффициент a_{122} отрицателен, и связанное выпучивание происходит при положительном направлении общего прогиба (более широкая полка b_1 при изгибе получает дополнительное сжатие), когда соответствующий член в энергии (9) $a_{122} \xi_1 \xi_2^2 < 0$.

При обратном направлении общего прогиба выпучивание должно быть несвязанным ($\xi_2 = 0$), так как нулевые значения ξ_2 приведут к положительности указанного члена в энергии. Данные, приводимые ниже, относятся именно к указанному опасному направлению общего прогиба. Графики зависимости относительной предельной нагрузки от параметра b_2/b_1 , приведенные на рис.4 (штриховая линия - двумодальный расчет, сплошная - трехмодальный расчет; $\xi_1^* = 1,0$; $\xi_2^* = 0,2$; $\xi_3^* = -0,1$), показывают, что в широком диапазоне изменения b_2/b_1 (вплоть до $b_2/b_1 = 0,8$, что соответствует углу $\alpha = 84,2^\circ$) учет вторичной местной формы несущественно влияет на расчетное значение предельных напряжений. Лишь для значений b_2/b_1 , близких к единице, двумодальный расчет оказывается некорректным. Такой

Таблица 3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
a_{122}	- 1,0	- 1,13	- 1,11	- 0,93	- 0,59	- 0,30	0
a_{133}	- 0,93	- 0,94	- 0,86	- 0,48	- 0,15	- 0,03	0
a_{123}	- 2,31	- 2,42	- 2,73	- 3,47	- 3,90	- 4,42	- 5,11

характер зависимости обусловлен величинами нелинейных коэффициентов a_{ijk} (табл.3). Вблизи значения $\alpha = 90^\circ$ $|a_{122}|$ и $|a_{133}|$ быстро уменьшаются до нуля и одновременно возрастает $|a_{123}|$. Необходимо отметить достаточно большое снижение предельной нагрузки по сравнению с критической нагрузкой в линейном расчете (в данном примере 20%, а в других рассчитанных

вариантах до 30-40%). Это близко к значениям, полученным при испытаниях сжатых стоек полого квадратного сечения [7].

При рассмотрении вопроса о влиянии начальных несовершенств необходимо выяснить, какие сочетания знаков несовершенств являются наиболее опасными. В случае трапециевидного сечения с не слишком большим углом α , когда достаточен двумодальный расчет, элементарный анализ знаков соответствующих членов в энергии показывает, что знак общего прогиба ζ_1 должен быть противоположным знаку коэффициента a_{122} (т.е. при $a_{122} < 0 - \zeta_1 > 0$), и наименьшая предельная нагрузка будет в случае совпадения знаков ζ_1 и ζ_1^* (знак местного прогиба ζ_2 будет определяться знаком соответствующей погиби ζ_2^*). Для стержня прямоугольного сечения условие отрицательности единственного нелинейного члена в энергии требует, чтобы знак произведения $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ был противоположным знаку a_{123} (в наших расчетах получалось $a_{123} < 0$ и, следовательно, должно быть $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 > 0$). Если это условие согласуется с требованием $\zeta_i \zeta_i^* > 0$ ($i=1-3$), то такое сочетание знаков ζ_i^* будет наиболее опасным (отрицательными будут три последних члена в энергии (9), зависящие от начальных несовершенств). В противном случае один из этих членов, наименее существенный (обычно последний), окажется положительным, что приведет к некоторому возрастанию предельной нагрузки. В нашем случае это означает, что следует различать только две возможные комбинации знаков несовершенств - а) с четным (0 или 2) или б) нечетным числом отрицательных ζ_i^* , причем более опасной будет первая комбинация. Для варианта 7 при несовершенствах $|\zeta_1^*| = 1,0$; $|\zeta_2^*| = 0,2$; $|\zeta_3^*| = 0,1$ в случае (а) было получено $\sigma_*/\sigma^{(2)} = 0,803$, а в случае (б) — $\sigma_*/\sigma^{(2)} = 0,854$.

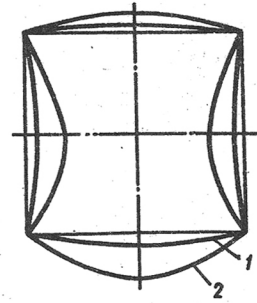


Рис. 5

Представляет интерес форма прогиба при конечных перемещениях, определяемая амплитудами ζ_i . Соотношение между амплитудами меняется с ростом нагрузки (табл.4). Суммарная местная форма $w_m = \zeta_2 w^{(2)} + \zeta_3 w^{(3)}$, которая для квадратного сечения (вариант 7) при двух уровнях нагружения приведена на рис. 5 ($1 - \lambda/\lambda_2 = 0,535$; $2 - \lambda/\lambda_2 = \lambda_*/\lambda_2 = 0,803$; $\zeta_1^* = 1,0$; $\zeta_2^* = 0,2$; $\zeta_3^* = 0,1$), оказывается, существенно асимметричной, так как вторичная местная

Таблица 4

Относительная нагрузка λ/λ_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ_1	0,08	0,25	0,44	0,71	1,29	3,11
ζ_2	0,03	0,07	0,13	0,23	0,41	0,94
ζ_3	0,01	0,02	0,04	0,07	0,13	0,40

форма в значительной мере погашает первую местную форму на полке и увеличивает на полке b_2 . Для трапециевидного профиля асимметрия проявляется уже при первой местной форме, и поэтому учет вторичной местной формы не требуется.

Р Е З Ю М Е. Одержано розв'язок задачі про зв'язану втрату стійкості стиснутого тонкостінного стержня трапецієвидного (прямокутного) профілю в рамках теорії першого нелінійного наближення. Вивчено вплив вторинної локальної форми на розрахункове граничне навантаження в залежності від конфігурації профілю та початкових недосконалоостей.

S U M M A R Y. A solution of coupling buckling problem for a compressed thin-walled trapezoidal column in the first asymptotic approximation is presented. An effect of a secondary local mode on the limit load under various cross-section configurations and initial imperfections is studied. It is shown that the mode interaction results in a decrease of limit stresses for trapezoidal and rectangular cross-sections by 25-30%.

1. *Koiter W.T.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Период. сб. перевод. иностр. статей. — 1960. — N 5. — С. 99 — 110.
2. *Маневич А.И.* Взаимодействие форм потери устойчивости сжатой подкрепленной панели // Строит. механика и расчет сооружений. — 1981. — N 5. — С. 24 — 29.
3. *Маневич А.И.* К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикл. математика и механика. — 1982. — 46, N 2. — С. 337 — 345.
4. *Маневич А.И., Полянчиков П.И.* Одношаговый метод сопряженных направлений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1984. — N 6. — С. 41 — 47.
5. *Маневич А.И.* Устойчивость оболочек и пластин с ребрами таврового профиля // Строит. механика и расчет сооружений. — 1985. — N 2. — С. 34 — 38.
6. *Твергард В.* Поведение пластинок и оболочек при выпучивании // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV международ. конгр. IUTAM. — М.: Мир, 1979. — С. 494 — 527.
7. *Benito R., Sridharan S.* Mode interaction in thin-walled structural members // J. Struct. Mech. — 1985. — 12, N 4. — P. 517 — 542.
8. *Koiter W.T., Neut A. van der.* Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels // Thin-walled structures. — 1980, pt 1. — P. 51 — 66; pt. 2. — P. 66 — 86.
9. *Kolakowski Z.* Some thoughts on mode interaction in thin-walled columns under uniform compression // Ibid. — 1989. — N 7. — P. 23 — 35.
10. *Sridharan S., Ali M.A.* An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections // Int. J. Solids and Structures. — 1986. — N 4. — P. 429 — 443.

Днепропетр. инж-строит. ин-т (Украина)

Поступила 02.08.91