MANUFACTURING PROCESSES. ACTUAL PROBLEMS – 2017

Volume II: Modeling and optimization of manufacturing processes

Edited by:
Oleksandr Hachkevych
Anida Stanik-Besler
Tomasz Wołczański

University of Technology Opole
2017

Studia i Monografie
z. 473

MANUFACTURING PROCESSES. ACTUAL PROBLEMS – 2017

Том 2: **Моделирование и оптимизация производственных процессов**

Volume 2: **Modelling and optimization of manufacturing processes**

Tom 2: **Modelowanie i optymalizacja procesów wytwórczych**

Научная редакция:
АЛЕКСАНДР ГАЧКЕВИЧ
АНИДА СТАНИК-БЭСЛЕР
ТОМАШ ВОЛЧАНЬСКИ

Edited by:
OLEKSANDR HACHKEVYCH
ANIDA STANIK-BESLER
TOMASZ WOŁCZAŃSKI

OFICYNA WYDAWNICZA

Opole 2017

Politechnika Opolska
ISSN 1429-6063
ISBN 978-83-65235-94-7

Recenzent:
Prof. dr hab. Eugeniusz CZAPLA

Skład:
Maria GINTER

Komitet Redakcyjny Wydawnictw Politechniki Opolskiej
ul. Prószkowska 76

Opracowanie redakcyjne: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej.
Nakład 80 egz. Ark. wyd. 18,5. Ark. druk. 18,5.
Druk i oprawa: Sekcja Poligrafii Politechniki Opolskiej.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ГЛАВА 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ КВАЗИУСТАНОВИВШЕГОСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫЕ ТЕЛА

Исходя из известных выражений факторов воздействия квазиустановившегося электромагнитного поля на электропроводную среду и приведенных для этого случая в Главах 1, 2 представлений для векторов напряженностей электрического и магнитного полей, получены представления для факторов воздействия при квазиустановившемся характере изменения электромагнитного поля. Записано соответствующие условия баланса электромагнитной энергии и выражения для пондеромоторных сил.

Ключевые слова: математическое моделирование, факторы воздействия квазиустановившегося электромагнитного поля, условия сохранения баланса энергии, пондеромоторные силы

3.1 Введение

В работах [1-6 и др.] приведены выражения факторов воздействия электромагнитного поля (ЭМП) на электропроводную намагничиваемую и поляризуемую твердую среду: тепловыделений и пондеромоторных факторов (электрических и магнитных сил и моментов этих сил), в предположении что ЭМП является внешним воздействием, проявляющимся такими факторами [3-5 и др.].

В Главе 2 получены представления квазиустановившихся токов и напряженностей электрических и магнитных полей и определены некоторые математические действия над комплексными векторами (имеющими одновременно свойства и векторов и комплексных чисел, которые не всегда определяются однозначно).

Ниже с учетом результатов, приведенных в Главах 1, 2 получены представления для факторов воздействия на материальную среду при квазиустановившимся характере изменения имеющегося ЭМП. Исходя из теоремы Пойнтинга записаны соответствующие условия баланса электромагнитной энергии для рассматриваемого случая. Рассмотрены силовые факторы воздействия ЭМП.

3.2 Энергетические факторы воздействия

В работах [1, 2, 5 и др.] приведены выражения мгновенных значений обьемной плотности $W_*(\bar{r},t)$ энергии ЭМП, а также условия сохранения этой энергии (теорема Пойнтинга в локальном формулировании), которые для линейных относительно электромагнитных свойств тел имеют вид

$$W_*(\vec{r},t)=\frac{1}{2}[\varepsilon E^2(\vec{r},t)+\mu H^2(\vec{r},t)];\qquad(1)$$

$$-\mathrm{div}\vec{S}_*=\frac{\partial W_*}{\partial t}+Q_*,\qquad(2)$$

где

$$\vec{S}_*(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\qquad(3)$$

– вектор Пойнтинга, а

$$Q_*(\vec{r},t)=\vec{j}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t)\equiv\sigma E^2(\vec{r},t)\qquad(4)$$

– Джоулево тепло (мощность отдаваемая полем в единице объема и проявляющаяся в виде тепла – мощность потерь).

Запишем теперь приведенные зависимости для линейного электропроводного тела в случае воздействия квазиустановившегося электромагнитного поля (КУЭМП), когда векторы тока проводимости, а также напряженностей электрического и магнитного полей имеют вид (4)-(6) Главы 2, т.е.

$$\vec{T}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\vec{T}_*(\vec{r},t)\equiv\mathrm{Re}(\underline{\vec{T}}(\vec{r},\tau)e^{i\omega t}),\qquad(5)$$

где $\vec{T}(\vec{r},t)=\{\vec{j}(\vec{r},t);\vec{E}(\vec{r},t);\vec{H}(\vec{r},t)\}$, а векторные функции $\underline{\vec{T}}(\vec{r},\tau)$ есть малоизеняющиеся в периоде $U=\frac{2\pi}{\omega}$ комплексные амплитуды (принимаемые постоянными относительно времени в каждом рассматриваемом периоде), так что выполняются относительно времени условия (3) Главы 2, а именно

$$\left|\frac{\partial\underline{\vec{T}}(\vec{r},\tau)}{\partial t}\right|<<\omega\left|\underline{\vec{T}}(\vec{r},\tau)\right|,\quad t>0.\qquad(6)$$

где τ – «медленное» время, определяемое зависимостью (2) Главы 2.

Для рассматриваемого КУЭМП, соответствующего вещественным частям комплексных векторов $\vec{j}_*(\vec{r},t)$, $\vec{E}_*(\vec{r},t)$, $\vec{H}_*(\vec{r},t)$, которые определены зависимостями (54), (55) Главы 1, из формул (1)-(4) для мгновенных значений рассматриваемых величин получим:

$$W_*(\vec{r},t)=\frac{1}{2}[\varepsilon(\mathrm{Re}\vec{E}_*(\vec{r},t))^2+\mu(\mathrm{Re}\vec{H}_*(\vec{r},t))^2],\qquad(7)$$

$$\vec{S}_*(\vec{r},t)=(\mathrm{Re}\vec{E}_*(\vec{r},t))\times(\mathrm{Re}\vec{H}_*(\vec{r},t))\qquad(8)$$

$$Q_*(\vec{r},t)=\sigma(\mathrm{Re}\vec{E}_*(\vec{r},t))^2,\qquad(9)$$

Здесь $\vec{E}_*(\vec{r},t)$ и $\vec{H}_*(\vec{r},t)$ – комплексные вектора напряженностей электрического и магнитного поля (комплексные напряженности полей – векторные функции, полученные вследствие решения сформулированных в Главе 1 задач математической физики).

Учитывая формулы (7), (31), (41) Главы 2 имеем:

$$\begin{gathered}
(\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t))^2 = \tfrac{1}{4}[\vec{E}_*^{\,2}(\vec{r},t) + \overline{\vec{E}_*}^{\,2}(\vec{r},t) + 2\vec{E}_*(\vec{r},t)\overline{\vec{E}_*}(\vec{r},t)] \equiv \\
\equiv \tfrac{1}{4}[\underline{\vec{E}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t} + \overline{\underline{\vec{E}}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t} + 2\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)], \\
(\mathrm{Re}\,\vec{H}_*(\vec{r},t))^2 = \tfrac{1}{4}[\vec{H}_*^{\,2}(\vec{r},t) + \overline{\vec{H}_*}^{\,2}(\vec{r},t) + 2\vec{H}_*(\vec{r},t)\overline{\vec{H}_*}(\vec{r},t)] \equiv \\
\tfrac{1}{4}[\underline{\vec{H}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t} + \overline{\underline{\vec{H}}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t} + 2\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)], \\
(\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t))\times(\mathrm{Re}\,\vec{H}_*(\vec{r},t)) = \tfrac{1}{4}[\vec{E}_*(\vec{r},t)\times\vec{H}_*(\vec{r},t) + \\
+\overline{\vec{E}_*}(\vec{r},t)\times\overline{\vec{H}_*}(\vec{r},t) + \vec{E}_*(\vec{r},t)\times\overline{\vec{H}_*}(\vec{r},t) + \overline{\vec{E}_*}(\vec{r},t)\times\vec{H}_*(\vec{r},t)] \equiv \\
\equiv \tfrac{1}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t} + \overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t} + \\
\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau) + \overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)],
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $\overline{\underline{\vec{T}}}(\vec{r},\tau)$, как и в предыдущих главах, комплексная векторная функция сопряженная с $\underline{\vec{T}}(\vec{r},\tau) = \{\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau); \underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\}$.

Подставляя (10) в (7)-(9) и учитывая зависимости (6) Главы 2 (или (24), (41)), для мгновенных значений (значений в каждый момент времени) [6, 7 и др.] рассматриваемых функций найдем:

– для объемной плотности $W_*(\vec{r},t)$ энергии ЭМП

$$W_*(\vec{r},t) = W_{(1)}(\vec{r},\tau) + W_{(2)}(\vec{r},t), \tag{11}$$

где

$$W_{(1)}(\vec{r},\tau) = \tfrac{1}{4}[\varepsilon\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau) + \mu\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)];$$

$$\begin{gathered}
W_{(2)}(\vec{r},t) = \tfrac{1}{8}[\varepsilon(\underline{\vec{E}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t} + \overline{\underline{\vec{E}}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t}) + \\
+\mu(\underline{\vec{H}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t} + \overline{\underline{\vec{H}}}^{\,2}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t})] \equiv 2\,\mathrm{Re}\,W^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t},
\end{gathered}$$

$$W^{(2)}(\vec{r},\tau) = \tfrac{1}{8}[\varepsilon\underline{\vec{E}}^{\,2}(\vec{r},\tau) + \mu\underline{\vec{H}}^{\,2}(\vec{r},\tau)];$$

– для вектора Пойнтинга $\vec{S}_*(\vec{r},t)$

$$\vec{S}_*(\vec{r},t)=\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)+\vec{S}_{(2)}(\vec{r},t), \qquad (12)$$

где

$$\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)]\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau));$$
$$\vec{S}_{(2)}(\vec{r},t)=\frac{1}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t}]\equiv$$
$$\equiv 2\,\mathrm{Re}\,\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t},$$
$$\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}(\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau));$$

– для Джоулева тепла $Q_*(\vec{r},t)$

$$Q_*(\vec{r},t)=Q_{(1)}(\vec{r},\tau)+Q_{(2)}(\vec{r},t), \qquad (13)$$

где

$$Q_{(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{\sigma}{2}\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau);$$

$$Q_{(2)}(\vec{r},t)=\frac{\sigma}{4}(\underline{\vec{E}}^2(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}+\overline{\underline{\vec{E}}}^2(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t})\equiv 2\,\mathrm{Re}(Q^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}),$$

$$Q^{(2)}(\vec{r},\tau)=\frac{\sigma}{4}\underline{\vec{E}}^2(\vec{r},\tau).$$

Таким образом, в КУЭМП объемная плотность электромагнитной энергии и Джоулево тепло, а также вектор Пойнтинга имеют вид суммы двух составляющих: медленноизменяющихся во времени $W_{(1)}(\vec{r},\tau)$, $Q_{(1)}(\vec{r},\tau)$, $\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)$ (принимаемых постоянными в каждом конкретном периоде $U=\frac{2\pi}{\omega}$) и квазиустановившихся $W_{(2)}(\vec{r},t)$, $Q_{(2)}(\vec{r},t)$, $\vec{S}_{(2)}(\vec{r},\tau)$ (почти периодических о пульсации 2ω). Амплитуды $W^{(2)}(\vec{r},\tau)$, $Q^{(2)}(\vec{r},\tau)$, $\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)$ квазиустановившихся составляющих являются малоизменяющимися относительно времени функциями на периоде U (принимаемыми постоянными в каждом периоде), удовлетворяющими следующему из (6) условию

$$\left|\frac{\partial R^{(2)}(\vec{r},\tau)}{\partial t}\right|<<2\omega\left|R^{(2)}(\vec{r},\tau)\right|,\quad t>0. \qquad (14)$$

Здесь $R^{(2)}(\vec{r},\tau)=\{W^{(2)}(\vec{r},\tau);Q^{(2)}(\vec{r},\tau);\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)\}$. Поэтому функции $R^{(2)}(\vec{r},\tau)$ в соответствии с зависимостью (2) Главы 2 будут функциями «медленного» времени

$$\tau=\varepsilon\omega t=\frac{\varepsilon_* t}{U}=\frac{t}{U_*}, \quad U_*=\frac{1}{\varepsilon\omega}=\frac{U}{\varepsilon_*} \tag{15}$$

($\varepsilon_* <<1$, $\varepsilon_*=2\pi\varepsilon<<1$ – вследствие принятых предпосылок, U_* – характеристическое значение «медленного» времени τ).

Запишем также выражения описанных формулами (42) Главы 2 средних на периоде $U=\frac{2\pi}{\omega}$ значений (важных в применениях характеристик [4, 6, 8-11 и др.]) рассматриваемых выше величин $R_*(\vec{r},t)=\{W_*(\vec{r},t);\vec{S}_*(\vec{r},t);$ $Q_*(\vec{r},t)\}$, а именно

$$[R_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=\frac{1}{U}\int\limits_{t}^{t+U}R_*(\vec{r},t)dt. \tag{16}$$

Тогда учитывая зависимости (7)-(9), а также (43)-(45) Главы 2 имеем

$$\begin{aligned}
&[W_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\equiv W(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}[\varepsilon\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)+\mu\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)],\\
&[\vec{S}_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\equiv\vec{S}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)],\\
&[Q_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\equiv Q(\vec{r},\tau)=\frac{\sigma}{2}\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau).
\end{aligned} \tag{17}$$

Сравнивая формулы (17) и (11)-(13) получаем, что средние в периоде составляющие $[R_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}$ совпадают соответственно с составляющими $R_{(1)}(\vec{r},\tau)$. Суммарные мощности почти периодических составляющих $R_{(2)}(\vec{r},t)$ на периоде $U=\frac{2\pi}{\omega}$ в применяемом квазиустановившемся приближении равны нулю, т.е.

$$[W_{(2)}(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\approx 0,\ [\vec{S}_{(2)}(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\approx\vec{0},\ [Q_{(2)}(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}\approx 0. \tag{18}$$

Сформулируем теперь теорему Пойнтинга (2) для КУЭМП. Учитывая (11)-(13) из соотношения (2) найдем

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}[\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)+\vec{S}_{(2)}(\vec{r},t)]=\frac{\partial}{\partial t}(W_{(1)}(\vec{r},\tau)+W_{(2)}(\vec{r},t))+\\
&+Q_{(1)}(\vec{r},\tau)+Q_{(2)}(\vec{r},t).
\end{aligned}$$

Отсюда принимая во внимание (14), запишем

$$-\mathrm{div}\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)-[e^{2i\omega t}\mathrm{div}\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)+e^{-2i\omega t}\mathrm{div}\bar{\vec{S}}^{(2)}(\vec{r},\tau)]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}W_{(1)}(\vec{r},\tau)+2\omega[e^{i(2\omega t+\frac{\pi}{2})}W^{(2)}(\vec{r},\tau)+e^{-i(2\omega t+\frac{\pi}{2})}\overline{W}^{(2)}(\vec{r},\tau)]+$$

$$+Q_{(1)}(\vec{r},\tau)+e^{2i\omega t}Q^{(2)}(\vec{r},\tau)+e^{-2i\omega t}\overline{Q}^{(2)}(\vec{r},\tau). \qquad (19)$$

Проинтегрируем соответственно (16), выступающие в зависимости (19) величины $\mathrm{div}\vec{S}_*(\vec{r},\tau)$ и $\frac{\partial}{\partial t}W_*(\vec{r},\tau)$ (при постоянных комплексных амплитудах в каждом периоде, согласно с зависимостью (6)). Тогда имеем:

– для плотности энергии

$$[\frac{\partial}{\partial t}W_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=\frac{\partial}{\partial t}W_{(1)}(\vec{r},\tau),\ [\frac{\partial}{\partial t}W_{(2)}(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=0; \qquad (20)$$

– для вектора Пойнтинга

$$[\mathrm{div}\vec{S}_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=\mathrm{div}\vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau),\ [\mathrm{div}\vec{S}_{(2)}(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=0. \qquad (21)$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих гармониках синуса и косинуса из равенства (19), учитывая (20), (21), имеем

$$\begin{aligned}[\frac{\partial}{\partial t}W_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}&=\frac{\partial}{\partial t}W_{(1)}(\vec{r},\tau)+Q_{(1)}(\vec{r},\tau)\equiv\\ &\equiv\frac{1}{U_*}\frac{\partial}{\partial\tau}W_{(1)}(\vec{r},\tau)+Q_{(1)}(\vec{r},\tau).\end{aligned} \qquad (22)$$

При этом получаем дополнительные зависимости связывающие амплитуды рассматриваемых векторов:

$$-\mathrm{div}\vec{S}^{(2)}(\vec{r},\tau)=2i\omega W^{(2)}(\vec{r},\tau)+Q^{(2)}(\vec{r},\tau), \qquad (23)$$

$$-\mathrm{div}\bar{\vec{S}}^{(2)}(\vec{r},\tau)=-2i\omega\overline{W}^{(2)}(\vec{r},\tau)+\overline{Q}^{(2)}(\vec{r},\tau),$$

т.е. находим три балансовые зависимости соответствующие исходному виду теоремы Пойнтинга.

Отметим, что зависимость (22) получаем также путем интегрирования (согласно с (16)) выражения (19) при постоянных в периодах амплитудах. В зависимостях (23) выступают только значения квадратов и произведений постоянных в периодах комплексных амплитуд (эти зависимости являются верными в каждом периоде). Второе уравнение (23) вытекает из первого и есть сопряженное с ним.

Интегрируя сторонами уравнение (22) для области Ω тела и применяя теорему Гаусса-Остроградского, получаем в рассматриваемом случае аналитическое выражение соответствующее теореме Пойнтинга в интегральном виде (баланс мощности КУЭМП [4, 6, 8-11 и др.]), а именно

$$-\oiint_S \vec{S}_{(1)}(\vec{r},\tau)d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}W^*(\vec{r},\tau) + q(\vec{r},\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{U_*}\frac{\partial}{\partial\tau}W^*(\vec{r},\tau) + q(\vec{r},\tau), \qquad (24)$$

где $W^*(\vec{r},\tau) = \iiint_\Omega W_{(1)}(\vec{r},\tau)dV$ – суммарная малоизменяющаяся в периоде часть плотности энергии ЭМП (принимаемая постоянной в каждом конкретном периоде), $q(\vec{r},\tau) = \iiint_\Omega Q_{(1)}(\vec{r},\tau)dV$ – суммарная мощность малоизменяющейся в периоде части Джоулева тепла (принимаемая также постоянной в каждом конкретном периоде).

В установившемся монохроматическом процессе среднее значение энергии ЭМП в периоде не изменяется (напряженности электрического и магнитного полей через период U возвращаются к исходным значениям). Электромагнитная энергия согласно (1) однозначно определяется через напряженности полей, т.е. по истечении периода принимает начальные значения [7, 10, 12, 13 и др.]. В силу этого выполняется условие $[\frac{\partial}{\partial t}W_*(\vec{r},t)]_{\bar{s}r} = 0$. Этот результат получаем с выражения (20) учитывая, что $W_{(1)}$ является в этом случае функцией зависимой только от $\vec{r}$, т.е. $W_{(1)} = W_{(1)}(\vec{r})$ $(\frac{\partial}{\partial t}W_{(1)}(\vec{r}) = 0)$.

Таким образом, при КУЭМП среднее значение электромагнитной энергии в объеме Ω не изменяется в конкретном рассматриваемом периоде (принимается постоянным) и может изменятся согласно (24) по истечении значительного количества периодов, т.е. является функцией «медленного» времени τ. Баланс этой энергии определяет зависимость (24). Средняя мощность почти периодической составляющей $W_{(2)}(\vec{r},t)$ электромагнитной энергии на периоде $U = \frac{2\pi}{\omega}$ в используемом квазиустановившемся приближении, соответственно с (21) равна нулю. Отметим также, что при рассмотрении вопросов связанных с теоремой Пойнтинга для комплексных амплитуд (при монохроматическом рассмотрении) часто вводят комплексные мощности [6, 7, 12, 13 и др.]. Этот формализм может быть обобщен и на модулируемые амплитуды. Все из приведенных выше зависимостей могут быть записаны также, когда исходные модулируемые амплитуды $\vec{T}^*(\vec{r},t)$ имеют вид

$$\vec{T}^*(\vec{r},t)=\varphi(\tau)\vec{T}_0(\vec{r}). \qquad (25)$$

Выражения для удельных плотностей величин $R_*(\vec{r},t)=\{W_*(\vec{r},t);$ $\vec{S}_*(\vec{r},t);$ $Q_*(\vec{r},t)\}$, соответствующим заданным мнимым составляющим векторов $\vec{j}_*^{(0)}(\vec{r},t)$, $\vec{E}_{*0}(\vec{r}_0,t)$ или $\vec{H}_{*0}(\vec{r}_0,t)$ можно получить аналогично аналогично учитывая известную зависимость [6-8 и др.]

$$\mathrm{Im}\vec{T}_*(\vec{r},t)=\frac{1}{2i}(\vec{T}_*(\vec{r},t)-\overline{\vec{T}}_*(\vec{r},t)) \qquad (26)$$

где $\vec{T}_*(\vec{r},t)=\{\vec{E}_*(\vec{r},t);\ \vec{H}_*(\vec{r},t)\}$. Отметим, что выражения для усредненных в периоде U удельных значений электромагнитной энергии, вектора Пойнтинга, а также Джоулева тепла при задании как вещественных, так и мнимых частей этих векторов совпадают.

В частном случае токов плотностью (3) или заданной напряженности электрического (9) (магнитного (10)) полей Главы 1 функция $\vec{E}_*(\vec{r},t)$ согласно с (50) Главы 1 запишется как

$$\vec{E}_*(\vec{r},t)=\varphi(\tau)\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})e^{i\omega t}, \qquad (27)$$

где функция $\varphi(\tau)$ принимает соответственно значения $j(\tau)$ или $E(\tau)$ или $H(\tau)$. При $\varphi(\tau)\equiv 1$ получаем выражение для установившегося (гармоничного) ЭМП. Учитывая в формуле (9) зависимость (27) имеем

$$Q_{*j}\equiv Q_*=\sigma\psi(\tau)\left\{\mathrm{Re}\left[\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})e^{i\omega t}\right]\right\}^2. \qquad (28)$$

Здесь $\psi(\tau)=\varphi^2(\tau)=\left\{j^2(\tau)\text{ или }E^2(\tau)\text{ или }H^2(\tau)\right\}$. Принимая во внимание (1), (50) Главы 1 получим

$$Q_*(\vec{r},t)=Q_{(1)}(\vec{r},\tau)+Q_{(2)}(\vec{r},t). \qquad (29)$$

В зависимости:

$$Q_{(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{\sigma}{2}\psi(\tau)\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\cdot\overline{\underline{\underline{\vec{E}}}}(\vec{r})=\psi(\tau)Q^{(1)}(\vec{r}),$$

$$Q_{(2)}(\vec{r},t)=\frac{\sigma}{4}\psi(\tau)[\underline{\underline{\vec{E}}}^2(\vec{r})e^{2i\omega t}+\overline{\underline{\underline{\vec{E}}}}^2(\vec{r})e^{-2i\omega t}]=2\psi(\tau)\mathrm{Re}[Q^{(2)}(\vec{r})e^{2i\omega t}];$$

$$Q^{(1)}(\vec{r})=\frac{\sigma}{2}\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\cdot\overline{\underline{\underline{\vec{E}}}}(\vec{r}), \qquad (30)$$

$$Q^{(2)}(\vec{r})=\frac{\sigma}{4}\underline{\underline{\vec{E}}}^2(\vec{r}).$$

Учитывая что в периоде усреднения функции $j^2(\tau)$, $E^2(\tau)$ или $H^2(\tau)$ принимаем постоянными, находим

$$Q(\vec{r},\tau) \equiv [Q_*(\vec{r},t)]_{\delta r} = Q_{(1)}(\vec{r},\tau) = \frac{\sigma}{2}\psi(\tau)\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\cdot\overline{\underline{\underline{\vec{E}}}}(\vec{r}). \qquad (31)$$

В случае установившегося (монохроматического) ЭМП имеем

$$Q(\vec{r}) \equiv Q^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2}\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\cdot\overline{\underline{\underline{\vec{E}}}}(\vec{r}). \qquad (32)$$

Отметим, что выражения (30) согласно (37) Главы 1 могут быть также записаны через функции $\vec{H}_*(\vec{r},t)$.

3.3 Силовые факторы воздействия

Вторым фактором воздействия ЭМП на материальную среду является силовое действие.

Для линейных, однородных и изотропных поляризуемых и магнетизуемых тел силы действия (пондеромоторные силы) описаны формулами, приведенными в [3, 4, 6, 9, 10, 12 и др.], а именно

$$\vec{F}_* = \vec{F}_{*A} + \vec{F}_{*E} + \vec{F}_{*M}, \qquad (33)$$

где соответствующие выражения для силы Ампера $\vec{F}_{*A}$, а также сил Кельвина электрической $\vec{F}_{*E}$ и магнитной $\vec{F}_{*M}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_{*A} = \mu_0\mu_*\sigma\vec{E}\times\vec{H},\\
&\vec{F}_{*E} = \varepsilon_0(\varepsilon_* - 1)[\tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\vec{E}^2 - \vec{E}\times\mathrm{rot}\vec{E}] = \\
&= \varepsilon_0(\varepsilon_* - 1)[\tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\vec{E}^2 + \mu\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}],\\
&\vec{F}_{*\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\mu_0\mu_*(\mu_* - 1)\mathrm{grad}\vec{H}^2.
\end{aligned} \qquad (34)$$

Отметим, что последнее представление составляющей $\vec{F}_{*E}$ записано с учетом второго уравнения Максвелла (37) Главы 1.

Для КУЭМП, соответствующего заданию вещественных частей векторов $\vec{j}_*^{(0)}(\vec{r},t)$, $\vec{E}_{*0}(\vec{r}_0,t)$ или $\vec{H}_{*0}(\vec{r}_0,t)$, описаных зависимостями (1), (5) Главы 1, из формул (33), (34), учитывая (39), (40) Главы 1 получим:

$$\vec{F}_{*A}(\vec{r},t) = \mu\sigma[\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)]\times[\mathrm{Re}\,\vec{H}_*(\vec{r},t)],$$

$$\vec{F}_{*E}(\vec{r},t)=\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{grad}[\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)]^2-\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)\times$$
$$\times\mathrm{rot}\Big[\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)\Big]\Big\}=\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{grad}[\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)]^2+ \qquad (35)$$
$$+\mu\,\mathrm{Re}\,\vec{E}_*(\vec{r},t)\times\frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{Re}\,\vec{H}_*(\vec{r},t)]\Big\},$$
$$\vec{F}_{*\mathrm{M}}=\frac{1}{2}\mu(\mu_*-1)\mathrm{grad}[\mathrm{Re}\,\vec{H}_*(\vec{r},t)]^2$$

Основываясь на формулах (32), (35) Главы 2 и выражения (6) для мгновенного значения плотности $\vec{F}_*(\vec{r},t)$ пондеромоторной силы (т.е. значения силы в каждый момент времени), аналогично как в представлениях (11)-(13) для энергии КУЭМП, вектора Пойнтинга и Джоулева тепла, получаем

$$\vec{F}_*(\vec{r},t)=\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau)+\vec{F}_{(2)}(\vec{r},t), \qquad (36)$$

где:

– для составляющей $\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau)$:

$$\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau)=\vec{F}_{A(1)}(\vec{r},\tau)+\vec{F}_{E(1)}(\vec{r},\tau)+\vec{F}_{M(1)}(\vec{r},\tau);$$

$$\vec{F}_{A(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{\mu\sigma}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)]\equiv$$
$$\equiv\frac{\mu\sigma}{2}\mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)],$$

$$\vec{F}_{E(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\{\mathrm{grad}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)]- \qquad (37)$$
$$-\mu\omega[i\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)-i\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)]\},$$

$$\vec{F}_{M(1)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}\mu(\mu_*-1)\mathrm{grad}[\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)];$$

– для составляющей $\vec{F}_{(2)}(\vec{r},t)$:

$$\vec{F}_{(2)}(\vec{r},t)=\vec{F}_{A(2)}(\vec{r},t)+\vec{F}_{E(2)}(\vec{r},t)+\vec{F}_{M(2)}(\vec{r},t),$$

$$\vec{F}_{A(2)}(\vec{r},t)=\frac{\mu\sigma}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)e^{-2i\omega t}]=$$
$$=2\,\mathrm{Re}[\vec{F}_A^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}],$$

$$\vec{F}_{E(2)}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\mathrm{Re}\Big\{\Big[\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,\underline{\vec{E}}^2(\vec{r},\tau)+ \qquad (38)$$

$$+i\mu\omega\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)\Big]e^{2i\omega t}\Big\}\equiv 2\,\mathrm{Re}[\vec{F}_E^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}],$$

$$\vec{F}_{M(2)}(\vec{r},t)=\frac{1}{4}\mu(\mu_*-1)\mathrm{Re}\Big[\Big(\mathrm{grad}\underline{\vec{H}}^2(\vec{r},\tau)\Big)e^{2i\omega t}\Big]\equiv$$
$$\equiv 2\,\mathrm{Re}[\vec{F}_M^{(2)}(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}];$$

В зависимости (38):

$$\vec{F}_A^{(2)}(\vec{r},\tau)=\frac{\mu\sigma}{4}\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau), \tag{39}$$
$$\vec{F}_E^{(2)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)[\frac{1}{2}\mathrm{grad}\underline{\vec{E}}^2(\vec{r},\tau)+i\mu\omega\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)],$$
$$\vec{F}_M^{(2)}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{8}\mu(\mu_*-1)\mathrm{grad}\underline{\vec{H}}^2(\vec{r},\tau).$$

Аналогично как энергия КУЭМП, вектор Пойнтинга и Джоулево тепло, удельная плотность пондеромоторной силы равна сумме двух составляющих: малоизменяющейся во времени $\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau)$ (почти постоянной на периоде U) и квазиустановившейся $\vec{F}_{(2)}(\vec{r},\tau)$ (почти периодической на периоде $\underline{U}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{U}{2}$).

Найдем также важное в применениях среднее в периоде U значение $\vec{F}(\vec{r},\tau)$ пондеромоторной силы (определяемое зависимостью (16)), а именно

$$\vec{F}(\vec{r},\tau)=[\vec{F}_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r}=\frac{1}{U}\int_t^{t+U}\vec{F}_*(\vec{r},t)dt. \tag{40}$$

Принимая согласно (2), (4), (7), (8), (11), (12) Главы 1 комплексные амплитуды $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)$ и $\underline{\vec{H}}(\vec{r},t)$ в каждый момент времени на периоде постоянными, имеем:

$$\vec{F}(\vec{r},\tau)=\vec{F}_A(\vec{r},\tau)+\vec{F}_E(\vec{r},\tau)+\vec{F}_M(\vec{r},\tau);$$
$$\vec{F}_A(\vec{r},\tau)=\frac{\mu\sigma}{4}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)+\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)]\equiv$$
$$\equiv\frac{\mu\sigma}{2}\mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)], \tag{41}$$
$$\vec{F}_E(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\{\mathrm{grad}[\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)]-$$
$$-\mu\omega[i\underline{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)-i\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r},\tau)\times\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)]\},$$
$$\vec{F}_M(\vec{r},\tau)=\frac{1}{4}\mu(\mu_*-1)\mathrm{grad}[\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)],$$

т.е. среднее значение функции $\vec{F}_*(\vec{r},t)$ на периоде U как и для иных характеристических величин совпадает со слагаемым $\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau) = = \vec{F}_{A(1)}(\vec{r},\tau) + \vec{F}_{E(1)}(\vec{r},\tau) + \vec{F}_{M(1)}(\vec{r},\tau)$, а именно

$$\vec{F}(\vec{r},\tau) \equiv [\vec{F}_*(\vec{r},t)]_{\acute{s}r} = \vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau). \tag{42}$$

Выражение пондеромоторной силы $\vec{F}_*(\vec{r},t)$ соответствующее заданию мнимых составляющих векторов $\vec{j}_*^{(0)}(\vec{r},t)$, $\vec{E}_{*0}(\vec{r}_0,t)$ или $\vec{H}_{*0}(\vec{r}_0,t)$ можем получить аналогично, учитывая зависимость (26). Подобно как и для электромагнитной энергии и Джоулева тепла, выражения для средних на периоде U значений силы $\vec{F}_*(\vec{r},t)$ при задании как вещественных, так и мнимых частей этих векторов совпадают.

Для частного случая токов плотностью (1), (3) или заданной напряженности электрического (5), (9) или магнитного (6), (10) поля, приведенных в Главе 1, учитывая (50) Главы 1 и (28) ,(29) придем к выражению идентичному (36), т.е.

$$\vec{F}_*(\vec{r},t) = \vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau) + \vec{F}_{(2)}(\vec{r},t), \tag{43}$$

где:

– для составляющей $\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau)$:

$$\begin{gathered}
\vec{F}_{(1)}(\vec{r},\tau) = \vec{F}_{A(1)}(\vec{r},\tau) + \vec{F}_{E(1)}(\vec{r},\tau) + \vec{F}_{M(1)}(\vec{r},\tau),\\
\vec{F}_{A(1)}(\vec{r},\tau) = \frac{\mu\sigma}{2}\psi(\tau)\mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})] \equiv \psi(\tau)\vec{F}_A^{(1)}(\vec{r}),\\
\vec{F}_{E(1)}(\vec{r},\tau) = \frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\psi(\tau)\{\mathrm{grad}[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\circ\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})] -\\
-2\mu\omega\mathrm{Re}[i\underline{\vec{E}}(\vec{r})\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})]\} \equiv \psi(\tau)\vec{F}_E^{(1)}(\vec{r}),\\
\vec{F}_{M(1)}(\vec{r},\tau) = \frac{1}{4}\mu(\mu_*-1)\psi(\tau)\mathrm{grad}[\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)] \equiv \psi(\tau)\vec{F}_M^{(1)}(\vec{r});
\end{gathered} \tag{44}$$

причем $\vec{F}_A^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu\sigma}{2}\mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})]$,

$$\vec{F}_E^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_*-1)\{\mathrm{grad}[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\circ\overline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})] - 2\mu\omega\mathrm{Re}[i\underline{\vec{E}}(\vec{r})\times\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})]\},$$

$$\vec{F}_M^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4}\mu(\mu_*-1)\mathrm{grad}[\underline{\vec{H}}(\vec{r},\tau)\circ\overline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r},\tau)];$$

– для составляющей $\vec{F}_{(2)}(\vec{r},t)$:

$$
\begin{aligned}
&\vec{F}_{(2)}(\vec{r},t) = \vec{F}_{A(2)}(\vec{r},t) + \vec{F}_{E(2)}(\vec{r},t) + \vec{F}_{M(2)}(\vec{r},t),\\
&\vec{F}_{A(2)}(\vec{r},t) = \frac{\mu\sigma}{2}\psi(\tau)\mathrm{Re}[\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\times\underline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})e^{2i\omega t}] \equiv 2\psi(\tau)\mathrm{Re}[\vec{F}_A^{(2)}(\vec{r})e^{2i\omega t}],\\
&\vec{F}_{E(2)}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_* - 1)\psi(\tau)\mathrm{Re}\{[\tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\underline{\underline{\vec{E}}}^2(\vec{r}) +\\
&+ i\mu\omega\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\times\underline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})]e^{2i\omega t}\} \equiv 2\psi(\tau)\mathrm{Re}[\vec{F}_E^{(2)}(\vec{r})e^{2i\omega t}];\\
&\vec{F}_{M(2)}(\vec{r},t) = \frac{1}{4}\mu(\mu_* - 1)\psi(\tau)\mathrm{Re}[\mathrm{grad}\underline{\vec{H}}^2(\vec{r},\tau)e^{2i\omega t}] \equiv\\
&\equiv 2\psi(\tau)\mathrm{Re}[\vec{F}_M^{(2)}(\vec{r})e^{2i\omega t}],
\end{aligned} \tag{45}
$$

причем

$$
\begin{aligned}
&\vec{F}_A^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu\sigma}{2}\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\times\underline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r}),\\
&\vec{F}_E^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon_* - 1)[\tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\underline{\underline{\vec{E}}}^2(\vec{r}) + i\mu\omega\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})\times\underline{\underline{\vec{H}}}(\vec{r})],\\
&\vec{F}_M^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{8}\mu(\mu_* - 1)\mathrm{grad}\underline{\vec{H}}^2(\vec{r},\tau),
\end{aligned}
$$

а $\psi(\tau)$ принимает соответственно значения $j^2(\tau)$, $E^2(\tau)$ или $H^2(\tau)$. Полагая $\psi(\tau)\equiv 1$ получаем выражения пондеромоторной силы при воздействии установившегося (гармонического) ЭМП.

Принимая функции $j^2(\tau)$, $E^2(\tau)$ или $H^2(\tau)$ постоянными на периоде усреднения, из (40) приходим к (42).

Приведенные выше формулы определяют факторы воздействия КУЭМП на электропроводное тело. Они используются при решении ряда задач об определении электромагнитных и термомеханических свойств электропроводных тел при технологическом воздействии различных типов ЭМП [4, 6, 7, 12, 14-16 и др.].

3.4 Выводы

Получены представления для факторов воздействия на материальную среду при квазиустановившемся характере изменения имеющегося ЭМП: энергетических и силовых.

Основываясь на теореме Пойнтинга записаны соответствующие условия баланса электромагнитной энергии для исследуемого случая. Рассмотрены силовые факторы воздействия. При этом исходными являются мгновенные значения объемной плотности энергии ЭМП, а также условия сохранения этой энергии (теорема Пойнтинга в локальном формулировании) для линейных относительно электрических и магнитных свойств тел, а также известные выражения плотности пондеромоторной силы через параметры, описывающие ЭМП.

Получено, что в КУЭМП объемная плотность электромагнитной энергии, Джоулево тепло и вектор Пойнтинга, а также плотность пондеромоторной силы имеют вид суммы двух составляющих: медленноизменяющихся во времени (принимаемых постоянными в каждом конкретном периоде) и квазиустановившихся (периодических во времени о пульсации 2ω).

Записаны выражения для средних на периоде значений рассматриваемых величин (важные в применениях их характеристики).

ЛИТЕРАТУРА

[1] ГАЧКЕВИЧ А., ИВАСЬКО Р., КУШНИР Р., СТАНИК-БЭСЛЕР А., ТЕРЛЕЦКИЙ Р. Моделирование тепловых и механических процессов при низкотемпературных обработках электропроводных элементов с использованием квазиустановившихся электромагнитных полей // Manufacturing processes. Actual Problems – 2016. Vol 2: Modelling and optimization of manufacturing processes (Моделирование и оптимизация производственных процессов). Studia i monografie z. 454 (ISBN 978-83-65235-67-1, pod red. nauk.: M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wołczański). OWPO, Opole, 2016. Глава 1. – С. 23–38.

[2] HACHKEVYCH O., SZYMCZAK J. Wyznaczanie quasi-ustalonych pól elektromagnetycznych w termomechanice powłok przewodzących. Studia i monografie, z. 304 // OWPO, Opole, 2011.

[3] GACHKIEVICH A.R.: Thermomechanics of Electrically Conducting Bodies under the Action of Quasisteady Electromagnetic Fields [in Russian], Naukova Dumka, Kiev 1992.

[4] LANDAU L.D., LIFSZIC E.M.: Elektrodynamika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1960.

[5] GACZKIEWICZ A., KASPERSKI Z.:. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. Studia i Monografie, z.110 // OWPO. Opole, 1999.

[6] RAWA H.: Elektrycznosć i magnetyzm w technice, PWN, Warszawa, 1994.

[7] ФАЛЬКОВСКИЙ О.И.: Техническая электродинамика, Связь, Москва 1978.

[8] KORN G. and KORN T.: Mathematical Handbook for Scientist and Engineers, 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1968.

[9] MAUGIN G.A., ERINGEN A.C.: On the equations of the electromagnetics of deformable bodies of finite extent, J. Mecanique, 16, 1977, pp. 101–147.

[10] MOON F.C.: Problems in magneto-solid-mechanics, Mechanics Today, 1978, p. 307–390.

[11] NOWACKI W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych, PWN, Warszawa 1983.
[12] ТАММ И.Е. Основы теории электричества, Наука, Москва 1989.
[13] TUROWSKI J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych, WNT, Warszawa 1982.
[14] БАТЫГИН Ю. В., ЛАВИНСКИЙ В. И., ХИМЕНКО Л. Т.: Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003.
[15] МУСИЙ Р., ИВАСЬКО Р., СТАНИК–БЭСЛЕР А., СТАСЮК Г., ШИМУРА С.: Общее решение задачи термомеханики в модели количественного описания тепловых и механических свойств электропроводного слоя при технологическом воздействии периодического по продольной координате импульсного электромагнитного поля с модуляцией амплитуды / Manufacturing processes. Actual problems – 2015. Vol. 2: Modelling of manufacturing processes. Studia i monografie z. 427 (ISBN 978-83-65235-25-1, pod red. nauk. M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler) Opole: OWPO. – Глава 11. – С. 155–165.
[16] ГАЕВСКАЯ Л., МЕЛЬНИК Н., МУСИЙ Р., СТАСЮК Г., ШИМЧАК И.: К прогнозированию с использованием модели электропроводного слоя тепловых и механических свойств изделий при импульсной электромагнитной обработке / Manufacturing processes. Actual problems – 2016. Vol. 2: Modelling and optimization of manufacturing processes. Studia i monografie z. 454 (ISBN 978-83-65235-67-1, pod red. nauk. M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wołczański) Opole: OWPO. – Глава 5. – С. 79–92.

MODELING OF FACTORS OF ACTION OF QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD ON ELECTROCONDUCTING BODIES

Proceeding from the known expressions for factors of action of quasi-stationary electromagnetic field on electroconducting medium and presentations for strength vectors of electric and magnetic fields, given for this case in Chapters 1, 2, the presentations for factors of action for quasi-stationary nature of change of electromagnetic field are obtained. The corresponding conditions of balanse of electromagnetic energy and expressions for ponderomotor forces are written down.

Keywords: mathematical modeling, factors of action of quasi-stationary electromagnetic field, conditions of energy balance conservation ponderomotor forces.

MODELOWANIE CZYNNIKÓW ODDZIAŁYWANIA QUASI-USTALONEGO POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA CIAŁA PRZEWODZĄCE ELEKTRYCZNOŚĆ

W oparciu o znane wyrażenia dla czynników oddziaływania guasi-ustałonego pola elektromagnetycznego na środowisko przewodzące elektryczność oraz przedstawień dla wektorów natężeń pól elektrycznego i magnetycznego otrzymane są podania dla czynników oddziaływania przy quasi-ustalonym charakterze zmiany pola elektromagnetycznego. Zapisane pozostały również odpowiednie warunki bilansu energii elektromagnetycznej oraz wyrażenia dla sił ponderomotorycznych.

Słowa kluczowe: modelowanie matematyczne, czynniki oddziaływania guasi-ustalonego pola elektromagnetycznego, warunki zachowania bilansu energii, siły ponderomotoryczne.

ISSN 1429-6063
ISBN 978-83-65235-94-7