МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Транспортні вузли»

В авторській редакції

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І УПРАВЛІННЯ

ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ
ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять

Електронне видання

ДНІПРО
2026

УДК 656.073(076.5)
О 75

Упорядники
А. С. Дорош, І. Я. Сковрон

Електронне видання

Схвалено Групами забезпечення якості освітньої програми
J7.1.08 «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті»
(Протокол №5 від 20.05.2025 р.)
J7.1.07 «Транспортно-експедиторська діяльність та логістика»
(Протокол №10 від 20.05.2025 р.),
J8.1.04 «Організація перевезень і управління на автомобільному транспорті»
(Протокол №9 від 12.05.2025 р.)

О 75 Основи теорії систем і управління. Оптимізація функціонування елементів транспортної системи : навчально-методичні рекомендації до практичних занять / упоряд. А. С. Дорош, І. Я. Сковрон; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2026. – 58 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами денної форми навчання освітнього ступеня «бакалавр» за ОП «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті», «Організація військових перевезень і управління на залізничному транспорті», «Транспортно-експедиторська діяльність та логістика» та «Організація перевезень і управління на автомобільному транспорті» спеціальності 275 «Транспортні технології (за видами)».

Навчально-методичні рекомендації містять приклади рішення задач пошуку найкоротших відстаней і максимального потоку на транспортній мережі, задачі про розподіл транспортних засобів на мережі, оптимізації завозу-вивозу вантажів в розподільчому центрі, розподілу транспортних засобів у вузлі, а також оптимізації заміни обладнання на підприємстві.

Іл. 42. Табл. 20. Бібліогр.: 4 назви.

ЗМІСТ

ВСТУП

До основних завдань, що вирішують фахівці транспортно-логістичної галузі при організації перевезень, слід віднести розробку раціональних схем доставки вантажів і пасажирів, оптимізацію елементів транспортної системи, а також розрахунок показників їх функціонування.

Метою виконання практичних робіт є оволодіння основними сучасними математичними методами оптимізації та пошуку раціональних рішень на прикладі елементів транспортних систем. Отримані теоретичні навички і знання можуть бути використані студентами на практиці для підвищення ефективності функціонування транспортних систем та їх елементів.

Навчально-методичні рекомендації містять приклади рішення задач пошуку найкоротших відстаней і максимального потоку на транспортній мережі, задачі про розподіл транспортних засобів на мережі і оптимізації завозу-вивозу вантажів в розподільчому центрі. Також в методичних вказівках розглянуто приклади вирішення транспортної задачі з обмеженням пропускної здатності її елементів, задачі розподілу транспортних засобів у вузлі, а також заміни обладнання на підприємстві.

Практичні роботи виконуються у відповідності до завдання, що містить вихідні дані до задач №1-7. В додатку А наведені питання для самоконтролю.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1

ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКОРОТШИХ ВІДСТАНЕЙ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

1.1 Теоретичні відомості

Однією з основних задач при організації перевезень вантажів і пасажирів наземним транспортом, є задача визначення найкоротших маршрутів на транспортній мережі [1]. Інформація про такі маршрути необхідна під час планування та керування транспортом, зокрема при регулюванні пасажиро- та вантажопотоків, визначення розмірів руху при календарному плануванні та ін.

Термін «найкоротший маршрут» слід розуміти в узагальненому сенсі, що може означати маршрут з найменшою відстанню, вартістю або тривалістю перевезення. Відповідно кожна ділянка транспортної мережі може характеризуватись довжиною, тривалістю або витратами на здійснення перевезення.

Будь-яка довільна транспортна мережа може бути представлена у вигляді графу, що складається з вершин і дуг (рис. 1.1). Вершинами такої мережі можуть бути об'єкти транспортної інфраструктури – населені пункти, залізничні станції, перевантажувальні комплекси, морські порти та ін., а дугами (ребрами) – транспортні шляхи (автомобільні дороги, залізничні колії), що їх з'єднують. Вага кожної такої дуги C_{ij} характеризує довжину, вартість або тривалість перевезення.

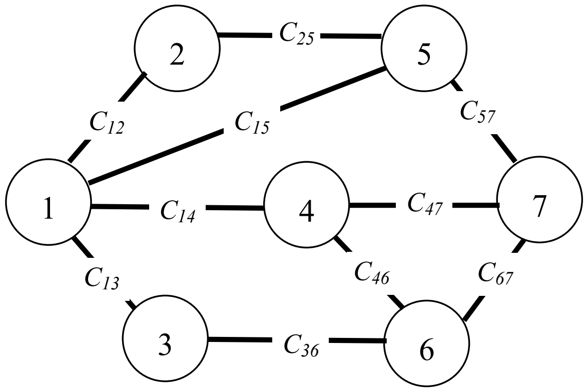


Рис. 1.1. Транспортна мережа

1.2. Алгоритм розв'язання задачі

Задача визначення найкоротших відстаней на транспортній мережі може бути вирішена з використанням алгоритму Форда-Беллмана [2], який передбачає наступні кроки:

Крок 1. Присвоїти всім вершинам транспортної мережі потенціал **∞**. Потенціал – це найкоротша на даному етапі розв'язання відстань від початкової до даної вершини.

Крок 2. Присвоїти вершині, від якої здійснюється пошук, потенціал **0** та помітити її знаком «-».

Крок 3. Перевірити, чи є хоча б одна вершина з міткою «-». Якщо такої вершини немає, то розв'язання закінчено, інакше перейти до кроку 4.

Крок 4. Обрати чергову вершину з міткою «-». Нехай це буде вершина k. Для всіх дуг, що виходять з вершини k перевірити умову:

$$U_k + C_{kj} < U_j, \tag{1.1}$$

де U_k, U_j – потенціали вершин k та j відповідно;

C_{kj} – довжина дуги kj.

Якщо для обраної дуги умова (1.1) виконується, то перейти до кроку 5, інакше – до кроку 6.

Крок 5. Біля вершини j вказати номер вершини k та новий потенціал вершини j, що розраховується як $U_k + C_{kj}$. Формат запису біля вершини j – $(\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{U_k + C_{kj}})$. Помітити вершину j знаком «-» та перейти до кроку 6.

Крок 6. Перевірити, чи всі дуги, що виходять з вершини k, розглянуті. Якщо так, то зняти з неї мітку «-» та перейти до кроку 3, інакше перейти до кроку 4.

1.3 Приклад розв’язання задачі

1.3.1 Умова задачі

Задана довільна транспортна мережа (рис. 1.2), що складається з 7 населених пунктів та певної кількості дуг (транспортних шляхів), що їх з’єднують. Для кожної дуги транспортної мережі задана її довжина C_{kj} (відстань).

Для заданої транспортної мережі знайти найкоротші відстані від вершини 1 до всіх інших. Результати вирішення задачі представити у вигляді «дерева».

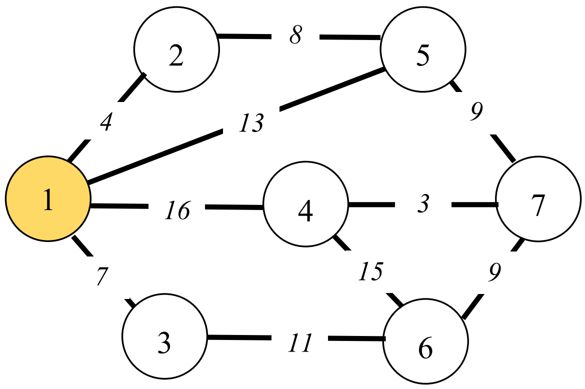


Рис. 1.2. Вихідна транспортна мережа

1.3.2 Розв’язання задачі

Крок 1. Присвоїмо всім вершинам транспортної мережі, окрім вершини 1, потенціал **∞**.

Крок 2. Присвоїмо вершині 1 потенціал **0** та помітимо цю вершину знаком «-» (див. рис. 1.3).

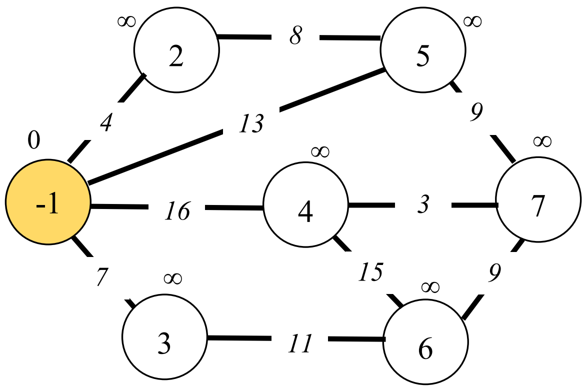


Рис. 1.3. Початковий етап розв’язку задачі

Крок 3. Серед вершин транспортної мережі є одна вершина з міткою **«-»** – це вершина 1.

Крок 4. Розглядаємо вершину 1 як таку, що помічена знаком **«-»**. Перевіримо умову (1.1) для дуг, що виходять з цієї вершини: 1-2, 1-3, 1-4, 1-5.

Наприклад, для дуги 1-2 маємо: $0 + 4 < \infty$ - умова виконується, тому переходимо на крок 5 алгоритму.

Крок 5. Біля вершини 2 вказуємо номер суміжної вершини 1, а значення 4 присвоюємо в якості нового потенціалу вершини 2, тобто біля вершини 2 слід записати – (1;4). Помічаємо вершину 2 знаком «-» та переходимо до іншої дуги, що виходить з вершини 1.

Крок 6. Розглянувши всі дуги, що виходять з вершини 1, знімаємо з неї мітку «-» (рис. 1.4) та переходимо до наступної вершини з міткою «-».

Увага! Для більш швидкого отримання розв’язку наступною слід розглядати вершину з найменшим потенціалом.

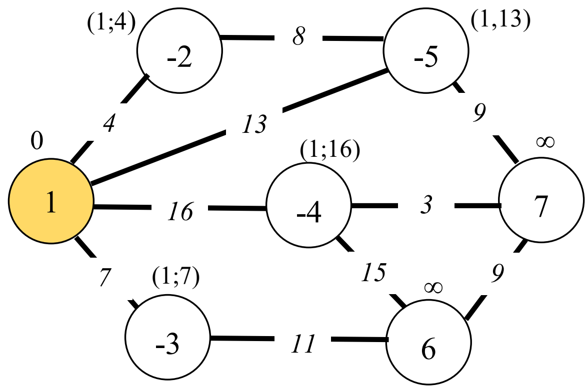


Рис. 1.4. Проміжний етап розв’язку задачі

Серед вершин з міткою «-» найменший потенціал у вершини 2, тому для подальшого розгляду обираємо саме її.

Для дуги 2-1 умова (1.1) не виконується ($4 + 4 > 0$), а для дуги 2-5 ($4 + 8 < 13$) – виконується. Таким чином, вершина 5 отримує новий номер суміжної вершини та нове значення потенціалу – (2;12). Розглянувши всі дуги, що виходять з вершини 2, знімаємо з цієї вершини мітку «-» (рис. 1.5) та розглядаємо наступну вершину з міткою «-».

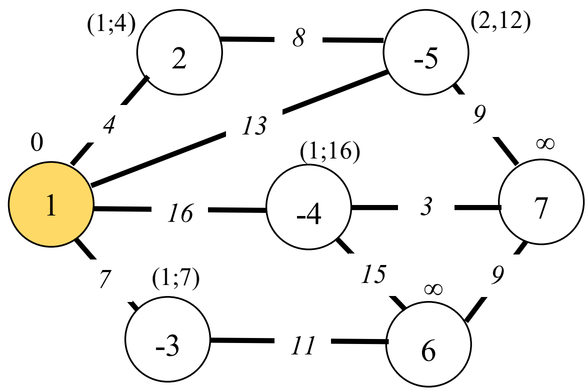


Рис. 1.5. Проміжний етап розв’язку задачі

Описані дії повторюються до тих пір, поки не зникнуть всі вершини з міткою «-». Кінцевий розв’язок задачі матиме наступний вигляд (рис. 1.6). У дужках біля кожної вершини вказано вершину, з якої необхідно до неї рухатися та відстань від початкової вершини.

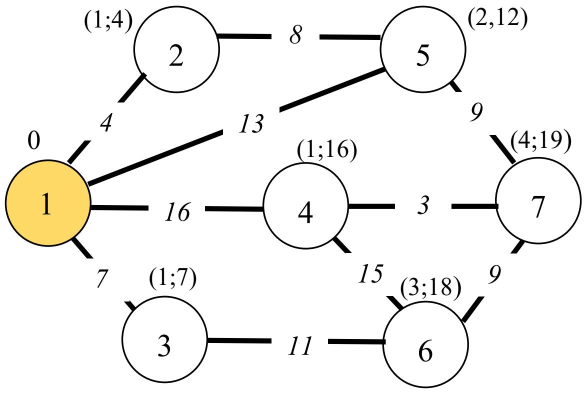


Рис. 1.6. Кінцевий етап розв’язку задачі

Найкоротші відстані на мережі подаються у вигляді «дерева», тобто транспортної мережі без циклів (рис. 1.7).

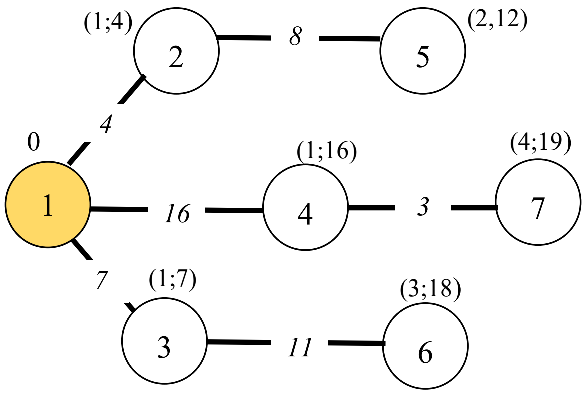


Рис. 1.7. «Дерево» найкоротших відстаней

Таким чином, з використанням алгоритму Форда-Беллмана вдалося визначити найкоротші відстані від початкової вершини 1 до всіх інших вершин транспортної мережі.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2

ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

2.1 Теоретичні відомості

При плануванні перевезень виникають задачі розподілу перевезень таким чином, щоб повністю використати пропускну здатність транспортної мережі. Така задача виникає, наприклад, при різкому зростанні обсягів перевезень, коли від відправника до одержувача необхідно доставити максимальний обсяг транспортної маси, нехтуючи витратами, під час виникнення надзвичайних ситуацій тощо. Під терміном «транспортна маса» можна розуміти як рухомий склад (автомобілі, поїзди, вагони), так і вантаж, що перевозиться. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти максимальний обсяг транспортної маси, який можна перевезти від відправника до одержувача існуючою транспортною мережею.

В якості вихідних даних для задачі про максимальний потік є транспортна мережа з одним початковим пунктом $\boldsymbol{s}$ (*джерелом*) та одним кінцевим пунктом $\boldsymbol{t}$ (*стоком*), а також задані значення пропускних здатностей $\boldsymbol{d_{ij}}$для кожної ділянки (дуги) між пунктами мережі $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ (рис. 2.1). Задача полягає в знаходженні таких потоків по ділянках (дугах) мережі, щоб результуючий потік від джерела до стоку був максимальним.

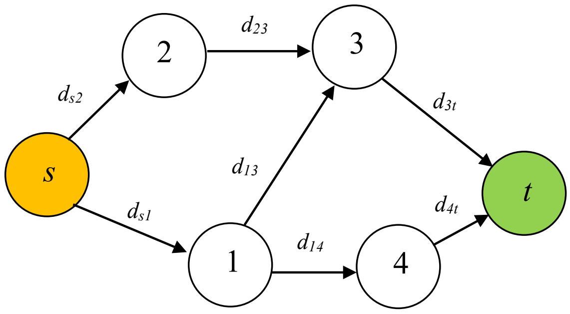


Рис. 2.1. Транспортна мережа

2.2. Алгоритм розв'язання задачі

Задача про максимальний потік на транспортній мережі може бути вирішена з використанням алгоритму Форда-Фалкерсона [3], який передбачає наступні кроки:

Крок 1. Знайти будь-який можливий шлях між вершинами $\boldsymbol{s}$ та $\boldsymbol{t}$, при цьому перехід від вершини $\boldsymbol{i}$ до вершини $\boldsymbol{j}$ можливий тільки, якщо між ними є дуга з ненульовим значенням пропускної здатності в необхідному напрямку $(\boldsymbol{d_{ij}} > \boldsymbol{0})$.

Якщо такого шляху не існує, перейти до кроку 5, інакше – до кроку 2.

Крок 2. На графі виділити дуги, що входять до знайденого шляху.

Крок 3. Для виділених дуг $(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$ серед значень їх пропускної здатності $\boldsymbol{d_{ij}}$ знайти мінімальне $\Delta = min\{\boldsymbol{d_{ij}}\}$.

Крок 4. Перетворити граф шляхом віднімання значення Δ від усіх значень пропускної здатності $\boldsymbol{d_{ij}}$ виділених дуг. Зняти виділення з дуг і перейти до кроку 1.

Крок 5. Пропускні здатності дуг графа, отриманого на кроках 1-4, позначити як $\boldsymbol{d^*_{ij}}$, а пропускні здатності дуг у вихідному (початковому) графі позначити як $\boldsymbol{d_{ij}}$. Величина потоку $\boldsymbol{x_{ij}}$, що пропускається по кожній дузі, визначається як:

$$\boldsymbol{x_{ij}} = \begin{cases} \boldsymbol{d_{ij} - d^*_{ij}}, & \text{якщо } \boldsymbol{d_{ij} > d^*_{ij}} \\ \boldsymbol{0}, & \text{якщо } \boldsymbol{d_{ij} \le d^*_{ij}} \end{cases} \tag{2.1}$$

На основі отриманих значень $\boldsymbol{x_{ij}}$ будується граф, на якому відображається розподіл потоку по дугах.

Крок 6. Максимальний потік з пункту $\boldsymbol{s}$ в пункт $\boldsymbol{t}$ визначається як сума потоків, що пропускається по дугах, які виходять з джерела $\boldsymbol{s}$, або як сума потоків, що пропускаються по дугах, які входять у стік $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{F = \sum_i x_{si} = \sum_i x_{jt}} \tag{2.2}$$

2.3. Приклад розв'язання задачі

2.3.1 Умова задачі

Задана довільна транспортна мережа (рис. 2.2), що складається з 12 населених пунктів та певної кількості направлених дуг (транспортних шляхів), що мають обмежену пропускну здатність.

Визначити максимальний потік з пункту **5** в пункт **6**.

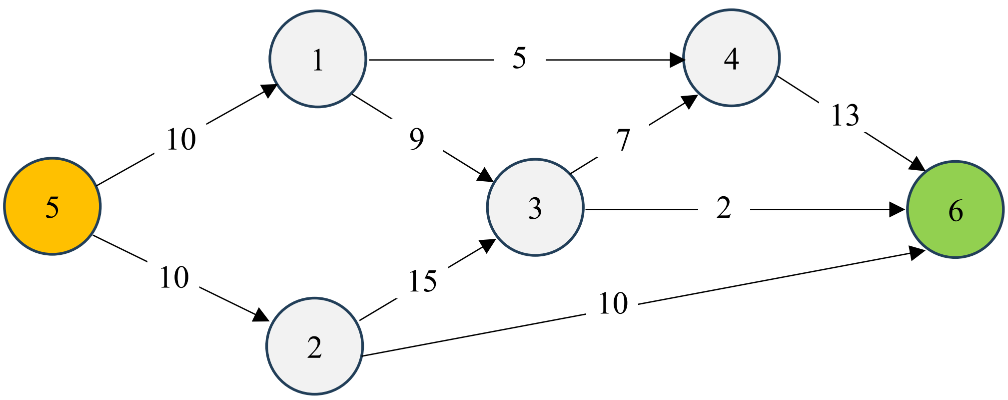


Рис. 2.2. Вихідна транспортна мережа

2.3.2 Розв'язання задачі

Початковою вершиною $\boldsymbol{s}$ (джерелом) потоку транспортної маси є вершина **8**, а кінцевим пунктом $\boldsymbol{t}$ (стоком) – вершина **6**.

Ітерація 1.

Крок 1. Знайдемо будь-який можливий шлях між вершинами **5** та **6**, наприклад, це буде маршрут $\boldsymbol{5 \to 1 \to 4 \to\ 6}$.

Крок 2. Виділимо на графі дуги $\boldsymbol{(5-1), (1-4), (4-6),}$ як показано на рисунку 2.3.

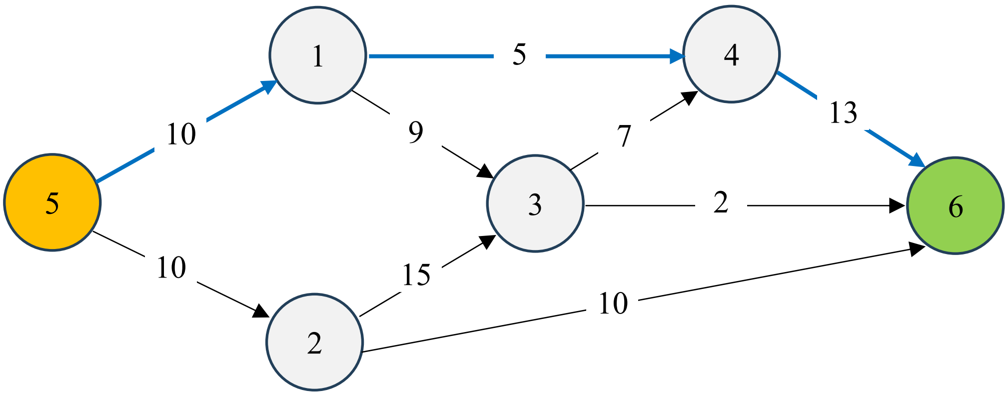


Рис. 2.3. Початковий шлях між джерелом і стоком (ітерація 1)

Крок 3. Серед значень пропускної здатності виділених дуг знайдемо мінімальне значення $\Delta = min\{10; 5; 13\} = 5$.

Крок 4. Перетворимо граф віднявши величину $\Delta = 5$ від значень пропускної здатності виділених дуг і отримаємо нові значення їх пропускної здатності:

$$d_{5-1} = 10 - 5 = 5;$$
$$d_{1-4} = 5 - 5 = 0;$$
$$d_{4-6} = 13 - 5 = 8.$$

Знімаємо виділення з дуг $(\mathbf{5-1}), (\mathbf{1-4}), (\mathbf{4-6})$ і отримаємо новий граф (див. рисунок 2.4).

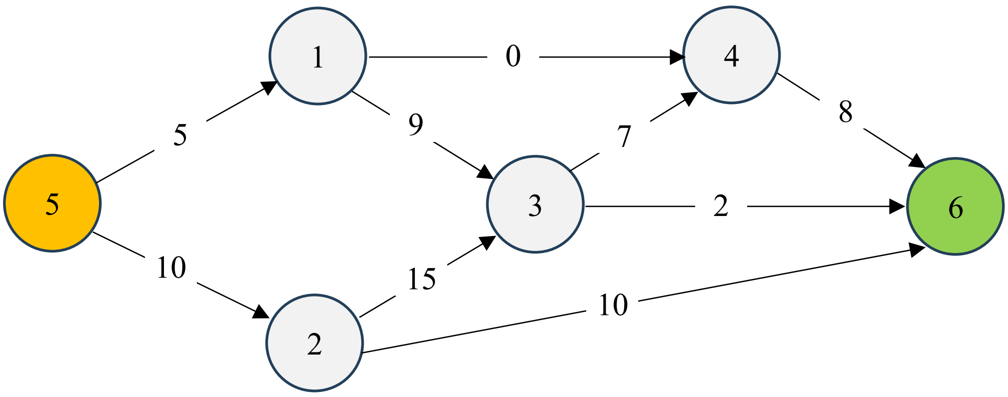


Рис. 2.4. Граф після перетворення (ітерація 1)

Слід відмітити, що кроки 1-4 повторюємо до тих пір, поки на кроці 1 неможливо буде знайти шлях з вершини $\mathbf{5}$ до вершини $\mathbf{6}$. Як видно з рисунку 2.4 такі шляхи ще існують, а отже переходимо до ітерації 2.

Ітерація 2.

Крок 1. Зазначимо, що рух по дузі $(\mathbf{1-4})$ вже неможливий оскільки її пропускна здатність дорівнює 0.

Отже, знайдемо можливий шлях між вершинами $\mathbf{5}$ та $\mathbf{6}$ – маршрут $\mathbf{5} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{6}$.

Крок 2. Виділимо на графі дуги $(\mathbf{5-1}), (\mathbf{1-3}), (\mathbf{3-4}), (\mathbf{4-6})$**,** як показано на рисунку 2.5.

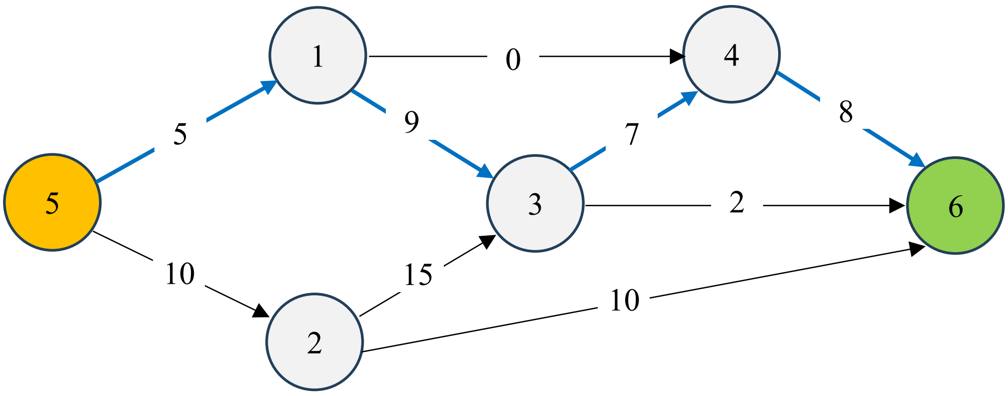


Рис. 2.5. Маршрут руху між джерелом і стоком (ітерація 2)

Крок 3. Серед значень пропускної здатності виділених дуг знайдемо мінімальне значення $\Delta = min\{5; 9; 7; 8\} = 5$.

Крок 4. Перетворимо граф віднявши величину $\Delta = 5$ від значень пропускної здатності виділених дуг і отримаємо їх нові значення:

$$d_{5-1} = 5 - 5 = 0;$$
$$d_{1-3} = 9 - 5 = 4;$$
$$d_{3-4} = 7 - 5 = 2;$$
$$d_{4-6} = 8 - 5 = 3.$$

Знімаємо виділення з дуг $(\mathbf{5-1}), (\mathbf{1-3}), (\mathbf{3-4}), (\mathbf{4-6})$ і отримаємо новий граф (див. рисунок 2.6).

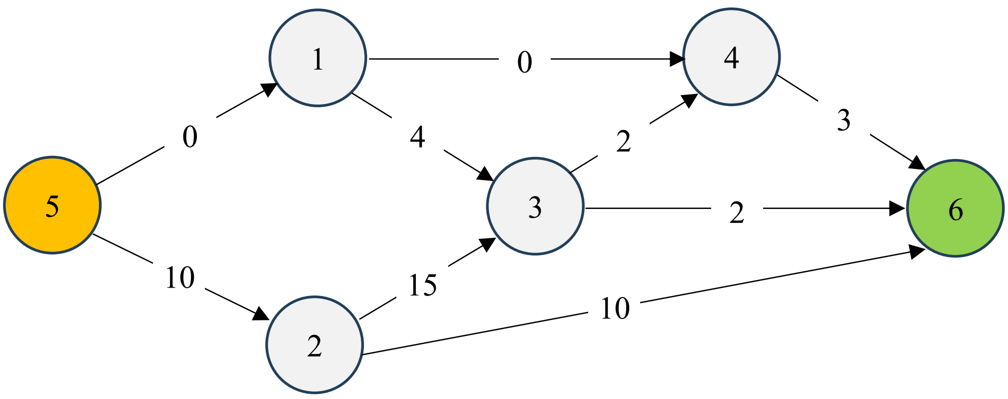


Рис. 2.6. Граф після перетворення (ітерація 2)

Як видно з рисунку $d_{5-1} = 0$ і тому через дану дугу вже неможливо пропустити додатковий потік, але ще існують шляхи з джерела до стоку, тому переходимо до наступної ітерації.

Ітерація 3.

Крок 1. Знайдемо можливий шлях між вершинами **5** та **6** – маршрут **5 → 2 → 3 → 4 → 6**.

Крок 2. Виділимо на графі дуги $(\mathbf{5-2}), (\mathbf{2-3}), (\mathbf{3-4}), (\mathbf{4-6})$**,** як показано на рисунку 2.7.

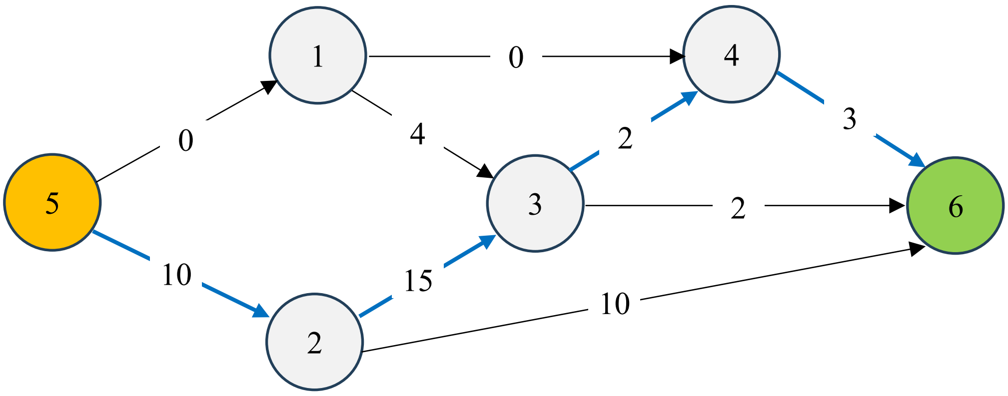


Рис. 2.7. Маршрут руху між джерелом і стоком (ітерація 3)

Крок 3. Серед значень пропускної здатності виділених дуг знайдемо мінімальне значення $\Delta = min\{10; 15; 2; 3\} = 2$.

Крок 4. Перетворимо граф віднявши величину $\Delta = 2$ від значень пропускної здатності виділених дуг і отримаємо нові значення їх пропускної здатності:

$$d_{5-2} = 10 - 2 = 8;$$
$$d_{2-3} = 15 - 2 = 13;$$
$$d_{3-4} = 2 - 2 = 0;$$
$$d_{4-6} = 3 - 2 = 1.$$

Знімаємо виділення з дуг $(\mathbf{5-2}), (\mathbf{2-3}), (\mathbf{3-4}), (\mathbf{4-6})$ і отримаємо новий граф (див. рисунок 2.8).

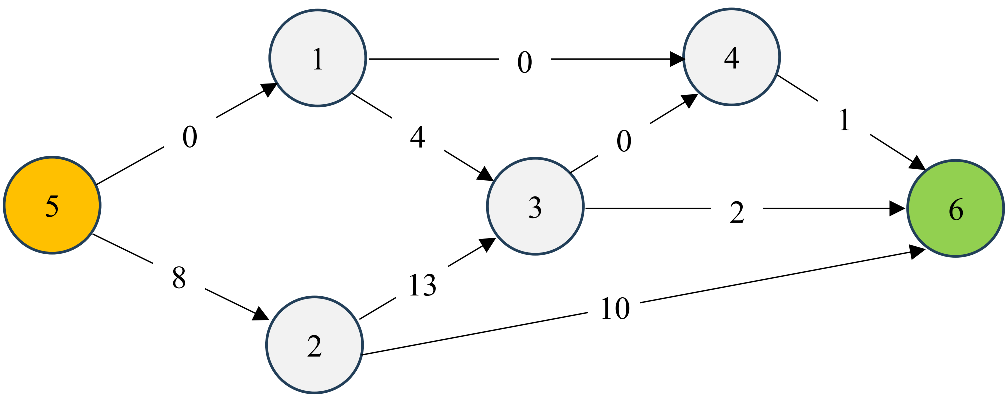


Рис. 2.8. Граф після перетворення (ітерація 3)

Аналогічним чином виконується подальше вирішення задачі шляхом повторення кроків 1-4. На останній ітерації отримаємо граф, що наведено на рисунку 2.9.

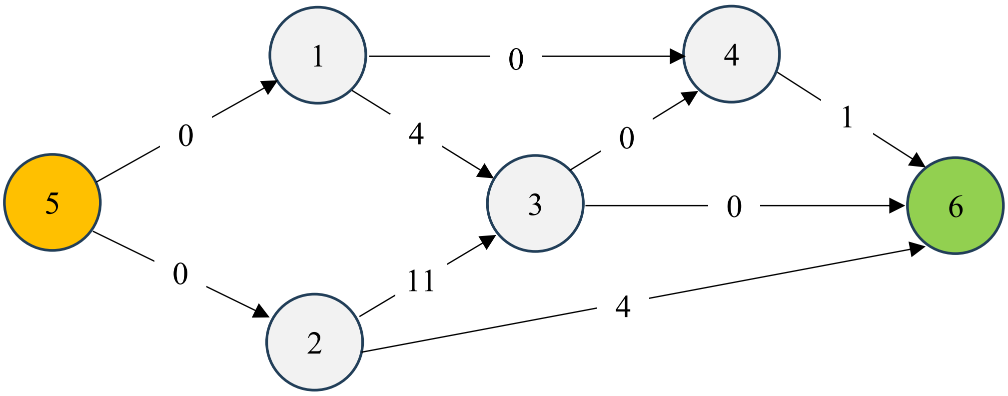


Рис. 2.9. Граф після перетворення на останній ітерації

Як видно з рисунку, після останньої ітерації не існує шляху з джерела **5** в стік **6**, оскільки дуги, що виходять з джерела мають нульову пропускну здатність $d_{5-1} = d_{5-2} = 0$. Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Визначимо згідно з формулою (1) величину потоків x_{ij}, що пропускаються по кожній дузі графу:

$x_{5-1} = 10 - 0 = 10;$ $x_{1-4} = 5 - 0 = 5;$ $x_{3-4} = 7 - 0 = 7;$
$x_{5-2} = 10 - 0 = 10;$ $x_{2-3} = 15 - 11 = 4;$ $x_{3-6} = 2 - 0 = 2;$
$x_{1-3} = 9 - 4 = 5;$ $x_{2-6} = 10 - 4 = 6;$ $x_{4-6} = 13 - 1 = 12.$

Величину отриманих потоків зобразимо на початковому графі (див. рисунок 2.10).

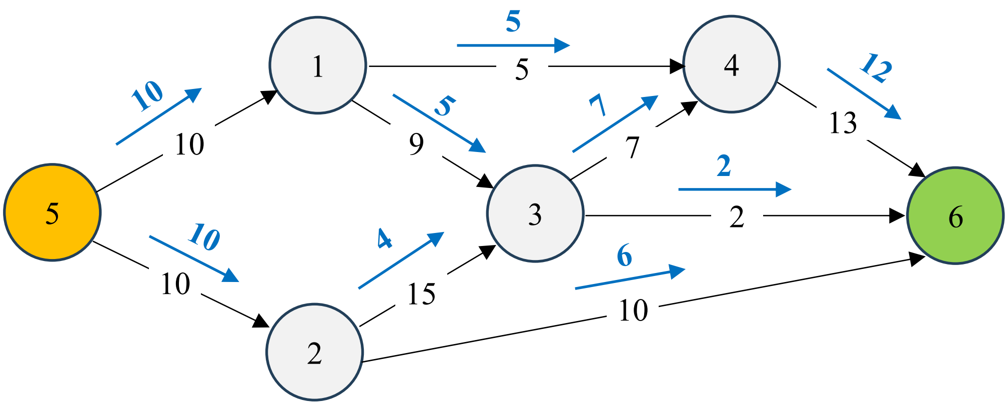


Рис. 2.10. Потоки на дугах транспортної мережі

Крок 6. Максимальний потік з вершини 5 в вершину 6 згідно з формулою (2) визначається як сума потоків на дугах, що виходять з вершини 5 (джерела), або як сума потоків на дугах, що входять до вершини 6 (стоку):

$$F = x_{5-1} + x_{5-2} = x_{4-6} + x_{3-6} + x_{2-6}$$

$$F = 10 + 10 = 12 + 2 + 6 = 20 \text{ од.}$$

В результаті розв'язання задачі за алгоритмом Форда-Фалкерсона визначено, що максимальний обсяг транспортної маси, що можна перевезти з вершини 5 до вершини 6 становить **20 одиниць.**

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

РОЗПОДІЛ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ НА МЕРЕЖІ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕННЯ ЧАСУ

3.1 Теоретичні відомості

Одна із поширених і популярних оптимізаційних задач в логістиці – транспортна задача, що в класичному вигляді передбачає пошук оптимального плану вантажоперевезень [3].

Наприклад, існує мережа магазинів до яких потрібно доставити певну кількість однорідних товарів зі складів постачальників, де вони зберігаються. Обсяг запасів товарів на кожному складі різний, а вартість їх доставки до кожного магазину встановлюється тарифом. Виникає необхідність розробити такий план перевезень, щоб всі магазини отримали необхідну кількість товарів із найменшими витратами на транспортування. В таких випадках оптимізаційна задача може бути сформульована як транспортна, при цьому під час її вирішення можуть встановлюватись додаткові обмеження щодо термінів доставки, допустимих витрат на перевезення та ін.

На практиці доволі часто виникає задача забезпечення доставки вантажів з пунктів відправлення A_i в пункти призначення B_j на момент часу $T_{\text{пр}}$, при цьому готовність до відправлення вантажів настає в різні моменти часу $T_{\text{від}}$, а швидкість їх перевезення між пунктами постійна і становить $V_{\text{д}}$. Такі умови вимагають встановлення обмеження щодо максимально можливого пробігу від пунктів A_i до B_j, тому така задача може бути сформульована як транспортна з обмеженням часу.

3.2. Алгоритм розв'язання задачі

Етап 1. Перевірка балансу.

На даному етапі необхідно визначити загальну кількість транспортних засобів, що відправляються з m пунктів A_i

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

та прибувають в n пунктів B_j

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

У випадку якщо $\sum a_i \neq \sum b_j$, то маємо відкриту (незбалансовану) транспортну задачу, яку слід перетворити в закриту (збалансовану) шляхом введення фіктивного пункту призначення або відправлення.

Якщо $\sum a_i > \sum b_j$, то задача *з надлишком запасів* і необхідно ввести фіктивний пункт призначення $B_ф$ (додатковий стовпчик $B_ф$) з потребами:

$$b_ф = \sum a_i - \sum b_j$$

Якщо $\sum a_i < \sum b_j$, то задача *з надлишком потреб* і необхідно ввести фіктивний пункт відправлення $A_ф$ (додатковий рядок $A_ф$) із запасами:

$$a_ф = \sum b_j - \sum a_i$$

Слід зауважити, що в обох випадках вартість перевезення від будь-якого пункту транспортної мережі до фіктивного буде дорівнювати $c_ф = 0$.

Етап 2. Розрахунок та введення обмежень в транспортну задачу.

Постановка транспортної задачі передбачає необхідність розрахунку максимально можливої відстані перевезення вантажу $S_{max\,i}$ з моменту відправлення $T_{від\,i}$ з пунктів A_i до моменту часу $T_{пр}$

$$S_{max\,i} = (T_{пр} - T_{від\,i})V_д \tag{3.1}$$

де $T_{пр}$ – граничний термін прибуття вантажу в пункт призначення B_j, год.;

$T_{від\,i}$ – момент відправлення вантажу з пункту A_i, год.;

$V_д$ – швидкість перевезення вантажу, км/год.

Отримані значення $S_{max\,i}$ необхідно порівняти зі значенням відстані S_{ij} у всіх клітинах, що знаходяться на перетині рядку A_i та стовпчиків B_j транспортної таблиці.

Якщо в будь-якій клітині рядку A_i виконується умова $S_{ij} < S_{max\,i}$, то ця клітина є забороненою і не буде використовуватись при складанні початкового плану перевезень, тому її слід виділити в транспортній таблиці.

Етап 3. Складання початкового плану перевезень.

Початковий план перевезень може бути побудовано з використанням одним із відомих методів – найменшої вартості, Фогеля, північно-західного кута, подвійної переваги. Суть усіх методів у тому, щоб розподілити всі запаси вантажу й задовольнити всі потреби в ньому. В рамках практичного заняття розглянемо метод подвійної переваги, основні кроки якого наступні.

Крок 1. В кожному з m рядків транспортної таблиці знаходимо клітину з мінімальною відстанню і позначаємо її міткою «*». Далі такі ж дії потрібно виконати і для всіх n стовпчиків транспортної таблиці.

В результаті цих дій отримаємо клітини, що мають мінімальні значення як по рядку, так і по стовпчику (позначені «**») – мають подвійну перевагу.

Зверніть увагу! Нульові значення відстані ($S_{ij} = 0$) в будь-якому рядку A_i або стовпчикуB_j ігноруються, тому клітини з нульовими відстанями не можуть бути позначені міткою «*».

Крок 2. Розподіляємо в клітини з «**» максимально можливі перевезення x_{ij}, виключаючи при цьому із розгляду після кожного запису x_{ij} відповідно рядок A_i або стовпчик B_j.

Далі в частині таблиці, що залишилася, записуються максимально можливі перевезення x_{ij} в клітини, що відзначені знаком «*». Після цього перевезення призначаються в непомічені клітини.

Таким чином, клітини таблиці в які призначено перевезення ($x_{ij} > 0$) стали базисними, а клітини без перевезень є небазисними.

Рекомендація. З метою більш швидкого отримання оптимального рішення при призначенні перевезень в помічені «**», «*» або непомічені клітини, в першу чергу ***слід обирати клітини з меншою відстанню перевезення***.

Зверніть увагу! Оскільки розглядається транспортна задача з обмеженням часу, то можливі деякі відхилення від описаного вище алгоритму складання початкового плану, обумовлені конкретним розташуванням клітин із забороненими перевезеннями у таблиці. Крім того, в результаті складання початкового плану методом подвійної переваги не всі клітинки, помічені міткою «*», отримають перевезення x_{ij}.

Крок 3. Отриманий на попередньому кроці план перевезень вважається допустимим якщо кількість базисних клітин в таблиці відповідає умові $m + n - 1$ (де m, n – кількість рядків та стовпчиків, відповідно), проте можливі такі випадки:

- кількість базисних клітин *більше* $m + n - 1$ – при складанні початкового плану були допущені помилки. Необхідно перевірити призначення перевезень x_{ij} в клітини таблиці;
- кількість базисних клітин *менше* $m + n - 1$ – маємо випадок виродження початкового плану перевезень.

Виродження може статися, якщо призначення певного перевезення x_{ij} призводить до одночасного виключення рядка і стовпчика транспортної таблиці. Для подальшого розв'язання задачі необхідно збільшити кількість базисних клітин до $m + n - 1$, шляхом введення штучних нульових перевезень ($x_{ij} = 0$). При цьому порядок дій такий:

1) клітина, при заповненні якої в транспортній таблиці одночасно виключаються і рядок, і стовпчик, відмічається буквою «В»;

2) остання клітина, що отримала перевезення при складанні початкового плану, відмічається міткою «П»;

3) штучне нульове перевезення призначається в клітину, що розташована на перетині рядка або стовпчика з міткою «В» та стовпчика або рядка з міткою «П».

Етап 4. Розрахунок цільової функції.

Після отримання плану перевезень необхідно розрахувати цільову функцію, тобто загальній пробіг транспортних засобів з вантажем, за формулою

$$C_i = \sum S_{ij} x_{ij}$$

Етап 5. Пошук оптимального плану перевезень.

Для пошуку оптимального плану перевезень в транспортній задачі доцільно використовувати метод потенціалів.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних клітин ($x_{ij} \geq 0$)

$$U_i + V_j = c_{ij} \tag{3.2}$$

- для небазисних клітин ($x_{ij} = 0$)

$$U_i + V_j \leq c_{ij} \tag{3.3}$$

де U_i, V_j – відповідно потенціали рядка та стовпчика.

Пошук оптимального плану передбачає наступні кроки.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Обираємо деякий рядок A_i чи стовпчик B_j з найбільшою кількістю базисних клітин та присвоюємо йому потенціал 0. Далі, використовуючи базисні клітини і умову оптимальності (3.2), розраховуємо потенціали всіх рядків та стовпчиків транспортної таблиці і переходимо на крок 2.

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Після розрахунку всіх потенціалів транспортної таблиці план перевезень перевіряється на оптимальність за умовами (3.2)-(3.3). Якщо для всіх клітин виконуються умови оптимальності (3.2)-(3.3), то даний план є оптимальним і розв'язання задачі завершено. Якщо для небазисних клітин умова (3.3) не виконується, то в них проставляється величина порушення, що розраховується за формулою

$$q_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} \tag{3.4}$$

Наявність порушень свідчить про те, що план перевезень не є оптимальним і його необхідно покращити (перейти на крок 3).

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

Покращення плану перевезень передбачає перерозподіл вантажопотоків таким чином, щоб клітина з найбільшим порушенням оптимальності ($max\ q_{ij}$) була включена до плану перевезень, тобто стала базисною.

Поява перевезення у обраній клітині з порушенням повинна компенсуватися зміною значень в інших базисних клітинах таблиці. З цією метою будується цикл перерахунку в такому порядку:

1) цикл перерахунку починається і закінчується у вільній клітині з максимальним порушенням. Цикл будується таким чином, щоб всі його вершини, крім початкової, були розташовані в базисних клітинах. При цьому зміна напрямку руху (поворот) циклу в кожній вершині виконується лише під кутом 90 градусів. Цикли можуть набувати різних форм (рис. 3.1);

2) вільна клітина, що вводиться в план перевезень, відмічається знаком «+». Далі по черзі відмічаються всі базисні клітини циклу знаками «–» та «+» і т. д;

3) клітина, що відмічена знаком «–» і має найменше значення перевезення X^*, повинна бути виключена з базису й стати вільною;

4) обсяг перевезень у клітинах, відмічених знаком «+», збільшується на величину X^*, а в клітинах, відмічених знаком «–», зменшується на величину X^*.

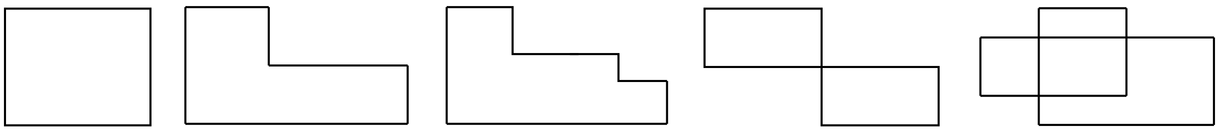


Рис. 3.1. Можливі форми циклу перерахунку

Після перерозподілу перевезень необхідно заповнити нову транспортну таблицю з новими значеннями обсягів перевезень в клітинах, які було включено до циклу перерахунку. Всі інші значення, окрім потенціалів, слід перенести без змін в нову транспортну таблицю з попередньої і перейти на етап 4.

3.3 Приклад розв'язання задачі

3.3.1 Умова задачі

Центр транспортного сервісу «Ліски» має розгалужену мережу терміналів (пункти A_i), де в моменти часу T_i накопичуються порожні контейнери. Вказані контейнери необхідно подати автомобільним транспортом під завантаження клієнтам в пункти B_j, при цьому контейнери мають бути подані не пізніше 17:00. Необхідно розробити такий план подачі контейнерів з пунктів A_i в пункти B_j, щоб загальні пробіги автотранспорту були мінімальними.

Дані про кількість і час готовності T_i контейнерів в пунктах A_i, потреби контейнерів в пунктах B_j та відстані S_{ij} між цими пунктами наведені відповідно в таблицях 3.1-3.3. Середня швидкість руху автотранспорту між пунктами складає $V_д = 53$ км/год.

Таблиця 3.1

Наявність контейнерів

Пункт	A_1		A_2	A_3	A_4	A_5
Момент готовності $T_{\text{від}}$, *год*	8	11	12	6	6	0
Кількість контейнерів a_i, *шт*	37	52	62	37	25	184

Таблиця 3.2

Потреби в контейнерах

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Кількість контейнерів b_j, *шт*	60	100	45	100	70

Таблиця 3.3

Відстані між пунктами в кілометрах

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	180	220	300	340	520
A_2	220	50	540	70	120
A_3	130	170	560	280	120
A_4	380	300	570	240	180
A_5	560	620	400	350	340

3.3.2 Розв'язання задачі

Етап 1. Перевірка балансу.

Визначимо загальну кількість порожніх контейнерів, що відправляються з пунктів A_i. При цьому слід зауважити, що з пункту A_1 контейнери відправляються двічі за добу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 37 + 52 + 62 + 37 + 25 + 184 = 397 \text{ конт.}$$

Визначимо загальну кількість порожніх контейнерів, що прибувають в пункти B_j:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 60 + 100 + 45 + 100 + 70 = 375 \text{ конт.}$$

Оскільки $\sum a_i > \sum b_j$, то дана задача є транспортною задачею з неправильним балансом, а точніше – задачею з надлишком запасів.

Для подальшого розв'язання введемо фіктивний пункт призначення $B_ф$ з потребами

$$b_ф = 397 - 375 = 22 \text{ конт.}$$

Відстані від усіх пунктів відправлення A_i до фіктивного пункту призначення $B_ф$ дорівнюють нулю.

Етап 2. Розрахунок та введення обмежень в транспортну задачу.

Визначимо за формулою (3.1) максимальні відстані $S_{max\,i}$, які може подолати автотранспорт від моменту відправлення порожніх контейнерів з пунктів A_i до моменту їх здачі в 17:00 в пунктах B_j:

- A_1 ($T_{від} - 8{:}00$) $S'_{max\,1} = (17 - 8) \cdot 53 = 477$ км;
- A_1 ($T_{від} - 11{:}00$) $S''_{max\,1} = (17 - 11) \cdot 53 = 318$ км;
- A_2 ($T_{від} - 11{:}00$) $S_{max\,2} = (17 - 12) \cdot 53 = 265$ км;
- A_3 ($T_{від} - 6{:}00$) $S_{max\,3} = (17 - 6) \cdot 53 = 583$ км;
- A_4 ($T_{від} - 6{:}00$) $S_{max\,4} = (17 - 6) \cdot 53 = 583$ км;
- A_5 ($T_{від} - 0{:}00$) $S_{max\,5} = (17 - 0) \cdot 53 = 901$ км.

Будуємо транспортну таблицю і порівняємо отримані значення $S_{max\,i}$ зі значеннями S_{ij} у відповідних рядках таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Вихідна транспортна таблиця

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
A'_1	180	220	300	340	520	0	37
A''_1	180	220	300	340	520	0	52
A_2	220	50	540	70	120	0	62
A_3	130	170	560	280	120	0	37
A_4	380	300	570	240	180	0	25
A_5	560	620	400	350	340	0	184
b_j	60	100	45	100	70	22	

Як видно з таблиці, перша подача порожніх контейнерів, що відправляється з пункту A_1 (рядок A'_1), не зможе досягти пункту призначення B_5 вчасно, оскільки $S'_{max\,1} = 477$ км менше $S_{A_1B_1} = 520$ км, отже клітина A'_1B_1 не може бути використана для перевезення і помічається як заборонена (заштриховується). Аналогічно порожні контейнери, що відправляються з пункту A_1 у складі другої подачі (рядок A''_1), не встигнуть вчасно прибути до пунктів B_4 та B_5.

Проаналізувавши всі рядки таблиці 3.4, виявимо всі заборонені для перевезення клітини транспортної таблиці і переходимо до побудови початкового плану.

Етап 3. Складання початкового плану перевезень.

З використанням методу подвійної переваги побудовано початковий план перевезень, що наведено в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Початковий план перевезень (ітерація 1)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
A_1'	* 180	220	* 300 **37**	340	520	0	37
A_1''	* 180 **52**	220	300	340	520	0	52
A_2	220	** 50 **62**	540	* 70	* 120	0	62
A_3	* 130 **8**	170 **29**	560	280	* 120	0	37
A_4	380	300 **9**	570 **8**	240	* 180	0 **8**	25
A_5	560	620	400	350 **100**	* 340 **70**	0 **14**	184
b_j	60	100	45	100	70	22	

Отриманий план перевезень є допустимим, оскільки кількість базисних клітин в таблиці становить $6 + 6 - 1 = 11$, що відповідає умові $m + n - 1$.

Етап 4. Розрахунок цільової функції.

Сумарний пробіг порожніх контейнерів в отриманому початковому плані становить

$$C_1 = 37 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 9 \cdot 300 + 8 \cdot 570 + 100 \cdot 350 + 70 \cdot 340 = 95\,590 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Етап 5. Пошук оптимального плану перевезень.

З використанням методу потенціалів визначимо, чи є отриманий в таблиці 3.5 план перевезень оптимальним. Для цього попередньо присвоїмо рядку A_5 потенціал $U_5 = 0$, оскільки в ньому найбільша кількість базисних клітин, і, використовуючи ці та інші базисні клітини, розрахуємо за формулою (3.2) потенціали всіх рядків і стовпчиків транспортної таблиці. Наприклад, потенціали 4-го та 5-го стовпчиків становлять:

- стовпчик B_4 $V_4 = S_{54} - U_5 = 350 - 0 = 350;$
- стовпчик B_5 $V_5 = S_{55} - U_5 = 340 - 0 = 340.$

Результати розрахунку потенціалів наведені в таблиці 3.6.

Використовуючи отримані значення потенціалів перевіримо для всіх клітин таблиці виконання умов оптимальності (3.2)-(3.3).

Наприклад, для небазисної клітинки A_2B_4 умова (3.3) не виконується, оскільки сума потенціалів складає $-250 + 350 = 100$, що більше ніж $S_{A_2B_4} = 70$, тому в даній клітині вказується порушення величиною

$$q_{A_2B_4} = -250 + 350 - 70 = 30$$

Результати перевірки наведено в таблиці 3.6. Як видно, в таблиці є 6 клітин з порушеннями, тому даний план перевезень не вважається оптимальним і його необхідно покращити шляхом перерозподілу перевезень.

Для перерозподілу в таблиці 3.6 обираємо клітину з найбільшим порушенням – це клітина $A_1''B_3$ з порушенням $q_{A_1''B_3} = 190$ і будуємо цикл перерахунку, який починається і закінчується в цій клітині (див табл. 3.6)

Таблиця 3.6

Перевірка початкового плану перевезень на оптимальність (ітерація 1)

	V_j	**260**	**300**	**570**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-270	A_1'	* 180	220	* 300 **37**	340	520	0	37
-80	A_1''	* 180 **52**	220	300 **190**	340	520	0	52
-250	A_2	220	** 50 **62**	540	* 70 **30**	* 120	0	62
-130	A_3	* 130 **8**	170 **29**	560	280	* 120 **90**	0	37
0	A_4	380	300 **9**	570 **8**	240 **110**	* 180 **160**	0 **8**	25
0	A_5	560	620	400 **170**	350 **100**	* 340 **70**	0 **14**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Клітину $A_1''B_3$ з найбільшим порушенням помічаємо знаком «+», а далі почергово помічаємо клітини (вершини) по циклу знаками «–» та «+» і т.д. Для клітини $A_1''B_3$ цикл перерахунку зображений на рисунку 3.2.

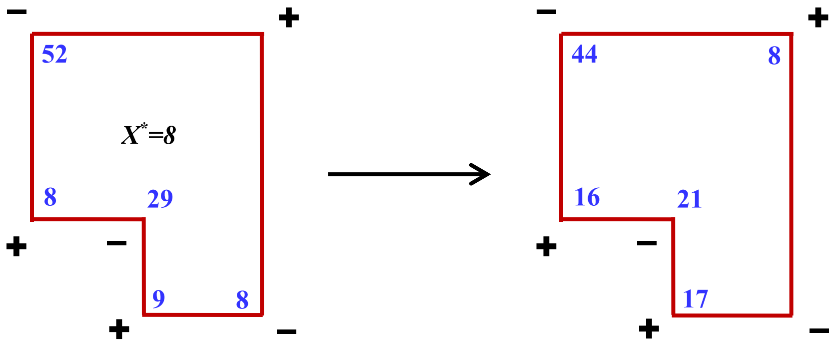


Рис. 3.2. Цикл перерахунку (ітерація 1)

В отриманому циклі знаходимо клітину, що помічена знаком «–» і має найменший обсяг перевезень – це клітина A_4B_3 ($X^* = x_{43} = 8$). Дану клітину виключаємо з базисного плану, а обсяги перевезень в клітинах, помічених знаком «–», зменшуємо на величину $X^* = 8$, а в клітинах, помічених знаком «+», збільшуємо на $X^* = 8$. В результаті цих перетворень отримуємо цикл з новими значеннями перевезень (рисунок 3.2) та новий план перевезень (таблиця 3.7).

Таблиця 3.7

Покращений план перевезень (ітерація 2)

	V_j	**260**	**300**	**380**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-80	A'_1	180	220	300 **37**	340	520	0	37
-80	A''_1	180 **44**	220	300 **8**	340	520	0	52
-250	A_2	220	50 **62**	540	70 **30**	120	0	62
-130	A_3	130 **16**	170 **21**	560	280	120 **90**	0	37
0	A_4	380	300 **17**	570	240 **110**	180 **160**	0 **8**	25
0	A_5	560	620	400	350 **100**	340 **70**	0 **14**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Отримавши в транспортній таблиці новий план перевезень розрахуємо значення цільової функції, тобто сумарний пробіг порожніх вагонів

$$C_2 = 37 \cdot 300 + 44 \cdot 180 + 8 \cdot 300 + 62 \cdot 50 + 16 \cdot 130 + 21 \cdot 170 + 17 \cdot 300 + 100 \cdot 350 + 70 \cdot 340 = 94\,070 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.7 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.7, є 4 клітин з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.3) починаючи з клітини, що має найбільше порушення – клітина A_4B_5 ($q_{A_4B_5} = 160$).

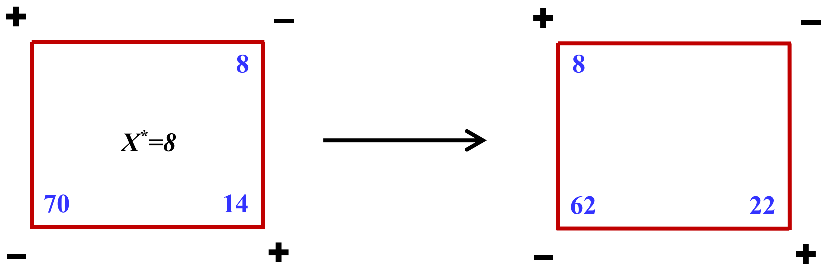


Рис. 3.3 – Цикл перерахунку (ітерація 2)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень, що наведено в таблиці 3.8.

Таблиця 3.8

Покращений план перевезень (ітерація 2)

	V_j	420	460	540	350	340	0	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-240	A_1'	180	220	300 37	340	520	0	37
-240	A_1''	180 44	220	300 8	340	520	0	52
-410	A_2	220	50 62	540	70	120	0	62
-290	A_3	130 16	170 21	560	280	120	0	37
-160	A_4	380	300 17	570	240	180 8	0	25
0	A_5	560	620	400 140	350 100	340 62	0 22	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_3 = 37 \cdot 300 + 44 \cdot 180 + 8 \cdot 300 + 62 \cdot 50 + 16 \cdot 130 + 21 \cdot 170 + 17 \cdot 300 + 8 \cdot 180 + 100 \cdot 350 + 62 \cdot 340 = 92\,790 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Знову повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.8 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.8, залишилась одна клітина з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.4) починаючи з клітини A_5B_3 з порушенням $q_{A_5B_3} = 140$.

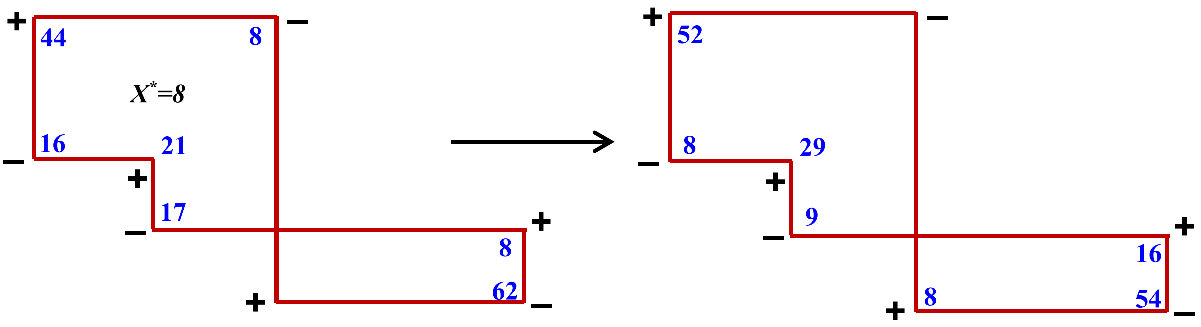


Рис. 3.4. Цикл перерахунку (ітерація 3)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (таблиця 3.9). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_4 = 37 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 9 \cdot 300 + 16 \cdot 180 + 8 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 54 \cdot 340 = 91\,670 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.9

Покращений план перевезень (ітерація 3)

	V_j	**420**	**460**	**400**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-100	A_1'	180 **140**	220 **140**	300 **37**	340	520	0	37
-240	A_1''	180 **52**	220	300	340	520	0	52
-410	A_2	220	50 **62**	540	70	120	0	62
-290	A_3	130 **8**	170 **29**	560	280	120	0	37
-160	A_4	380	300 **9**	570	240	180 **16**	0	25
0	A_5	560	620	400 **8**	350 **100**	340 **54**	0 **22**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.9 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.9, є 2 клітини з однаковими порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.5) починаючи з клітини $A_1''B_2$ з порушенням $q_{A_1''B_2} = 140$.

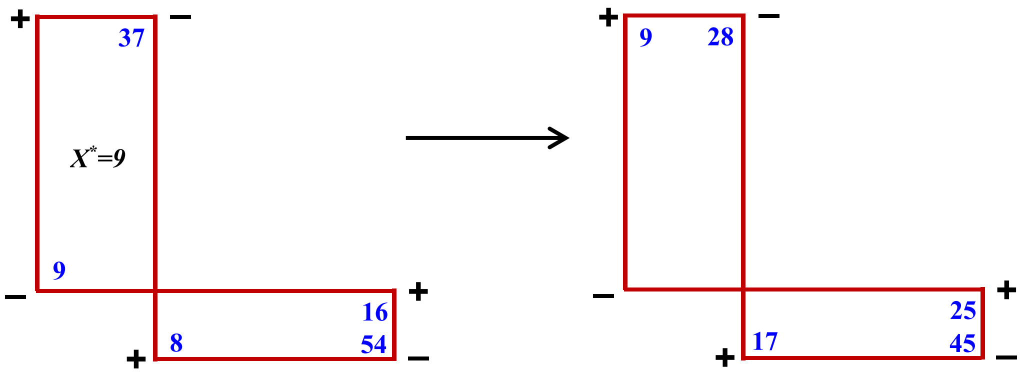


Рис. 3.5. Цикл перерахунку (ітерація 3)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (таблиця 3.10). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_5 = 9 \cdot 220 + 28 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 25 \cdot 180 + 17 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 45 \cdot 340 = 90\,410 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.10

Покращений план перевезень (ітерація 4)

	V_j	280	320	400	350	340	0	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-100	A_1'	180	220 / 9	300 / 28	340	520	0	37
-100	A_1''	180 / 52	220	300	340	520	0	52
-270	A_2	220	50 / 62	540	70 / 10	120	0	62
-150	A_3	130 / 8	170 / 29	560	280	120 / 70	0	37
-160	A_4	380	300	570	240	180 / 25	0	25
0	A_5	560	620	400 / 17	350 / 100	340 / 45	0 / 22	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.10 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.10, є 2 клітини з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.6) починаючи з клітини A_3B_5, що містить максимальне порушенням $q_{A_3B_5} = 70$.

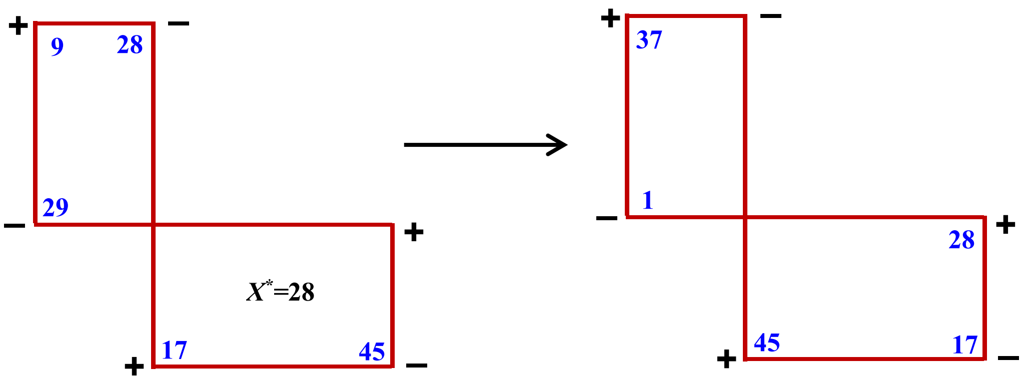


Рис. 3.6. Цикл перерахунку (ітерація 4)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (див. таблицю 3.11). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_6 = 37 \cdot 220 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 1 \cdot 170 + 28 \cdot 120 + 25 \cdot 180 + 45 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 17 \cdot 340 = 88\,450 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.11

Оптимальний план перевезень

	V_j	350	390	400	350	340	0	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-170	A_1'	180	220 37	300	340	520	0	37
-170	A_1''	180 52	220	300	340	520	0	52
-340	A_2	220	50 62	540	70	120	0	62
-220	A_3	130 8	170 1	560	280	120 28	0	37
-160	A_4	380	300	570	240	180 25	0	25
0	A_5	560	620	400 45	350 100	340 17	0 22	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.11 плану на оптимальність.

Перевірка показала, що отриманий в таблиці 3.11 план перевезень є оптимальним і забезпечує мінімальний пробіг автомобілів з контейнерами $C_{\text{опт}} = 88\,450$ авт · км.

Крім того, оптимальний план перевезень краще за початковий на

$$\Delta = \frac{C_1 - C_{\text{опт}}}{C_1} \cdot 100\% = \frac{95\,590 - 88\,450}{95\,590} \cdot 100\% = 7{,}4\%.$$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАВОЗУ-ВИВОЗУ ВАНТАЖУ В ТОРГОВІЙ МЕРЕЖІ

4.1 Теоретичні відомості

Однією з задач при організації транспортного обслуговування підприємств або торгових мереж є забезпечення розподілу транспортних засобів (оборотної тари) між пунктами завантаження-розвантаження за умови мінімальних витрат на їх пробіг. Вказана задача може бути зведена до транспортної задачі на мережі і вирішуватись з використанням методу потенціалів.

4.2 Алгоритм розв'язання задачі

Етап 1. Розрахунок балансу.

На даному етапі розраховується кількість транспортних засобів, які необхідно перерозподілити між пунктами навантаження та вивантаження:

- $N_i^{\text{в}}$ – кількість транспортних засобів, які вивільняються в i-му пункті після вивантаження;

- $N_i^{\text{н}}$ – кількість транспортних засобів, які надходять в i-й пункт під навантаження.

Кожний з пунктів i транспортної мережі може бути постачальником або споживачем транспортних засобів:

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} > \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті є надлишкові порожні транспортні засоби і його слід вважати постачальником. Кількість надлишкових транспортних засобів визначається як $N_i^{\text{над}} = N_i^{\text{в}} - N_i^{\text{н}}$ і зі знаком «+» записується в дужках біля i-ої вершини;

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} < \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті недостатньо порожніх транспортних засобів і його слід вважати споживачем. Кількість недостатніх транспортних засобів визначається як $N_i^{\text{нест}} = N_i^{\text{н}} - N_i^{\text{в}}$ і зі знаком «–» записується в дужках біля i-ої вершини;

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} = \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті збалансовано кількість транспортних засобів і біля i-ої вершини нічого не вказується.

Додатково необхідно визначити баланс транспортних засобів в вершині, що є розподільчим центром (РЦ):

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} > \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то в пунктах транспортної мережі є надлишкові транспортні засоби, які необхідно відправити в РЦ. В такому випадку вершина РЦ є споживачем транспортних засобів, а їх кількість визначається як $N_{\text{рц}} = \sum N_i^{\text{над}} - \sum N_i^{\text{нест}}$ і зі знаком «–» записується в дужках біля вершини;

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} < \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то в пунктах транспортної мережі недостатньо порожніх транспортних засобів, які можна залучити з РЦ. В такому випадку вершина РЦ є постачальником транспортних засобів, а їх кількість визначається як $N_{\text{рц}} = \sum N_i^{\text{нест}} - \sum N_i^{\text{над}}$ і зі знаком «+» записується в дужках біля вершини;

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} = \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то біля вершини РЦ нічого не вказується.

Як правило, розрахунок балансу транспортних засобів доцільно виконувати в табличній формі.

Етап 2. Побудова початкового плану перевезень.

При складанні початкового плану перевезень на транспортній мережі необхідно досягти того, щоб всі транспортні засоби з пунктів відправлення (вершини зі знаком «+») були відправлені та всі потреби пунктів призначення (вершини зі знаком «–») були задоволені (рис. 4.1). Спеціальних способів побудови початкового плану перевезень, наближеного до оптимального, при розв’язанні задач на мережі немає. Однак, при складанні початкового плану не можна допускати зустрічних перевезень.

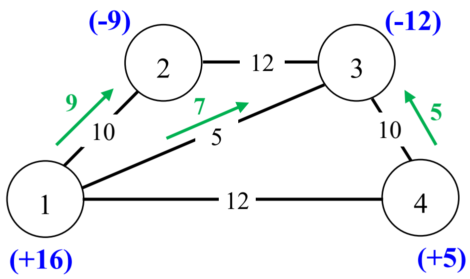


Рис. 4.1. Приклад початкового плану перевезень

Початковий план перевезень утворюють базисні ребра, тобто ребра на яких є перевезення – ребра 1-2, 1-3, 4-3 (рис. 4.1). Базисні ребра повинні утворювати дерево, тобто вершини мають бути з'єднані та не має бути замкнених контурів.

Кількість базисних ребер повинна дорівнювати $n = m - 1$, де m – кількість вершин. У випадках виродження кількість базисних ребер менше $m - 1$, та на схемі утворюються одне або декілька ізольованих дерев, що не з’єднують всі вершини. В цьому випадку їх необхідно з’єднати ребрами з фіктивними перевезеннями $x_{ij} = 0$, при цьому напрямок перевезення на ребрі обирається довільним (рис. 4.2).

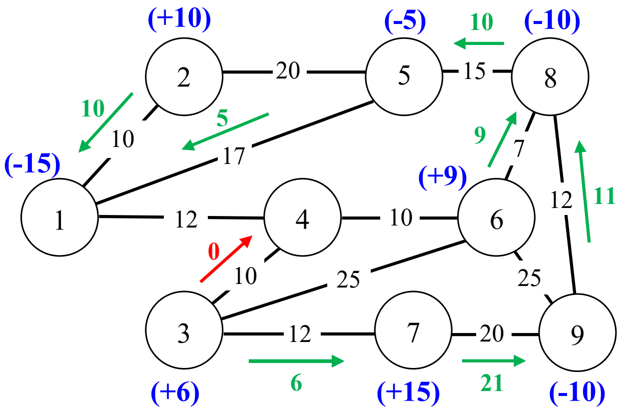


Рис. 4.2. Приклад виродження початкового плану перевезень

У випадку, якщо кількість базисних ребер n більше ніж $m-1$, то необхідно виконати перерозподіл потоків на дугах транспортної мережі таким чином, щоб отримати необхідну кількість базисних ребер.

Після отримання початкового плану перевезень необхідно розрахувати значення цільової функції

$$C_i = \sum c_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

Етап 3. Пошук оптимального плану перевезень методом потенціалів.

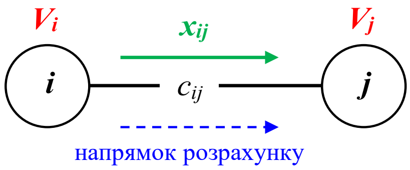
Для пошуку оптимального варіанту розподілу перевезень на транспортній мережі доцільно використовувати метод потенціалів, який передбачає наступні кроки.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Одній з вершин транспортної мережі, з якої виходить хоча б одне базисне ребро, присвоюється потенціал, при цьому бажано обирати велике значення, щоб не оперувати від'ємними потенціалами (наприклад 100).

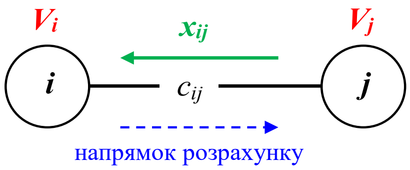
Далі, рухаючись по базисним ребрам, розраховуються потенціали інших вершин транспортної мережі, при цьому можливі такі випадки:

1) якщо напрямок розрахунку **співпадає** з напрямком слідування вантажопотоків, то до потенціалу попередньої вершини v_i додається вартість перевезень c_{ij}



$$V_j = V_i + C_{ij}$$

2) якщо напрямок розрахунку **зустрічний** до напрямку слідування вантажопотоків, то від потенціалу попередньої вершини v_i віднімається вартість перевезень c_{ij}



$$V_j = V_i - c_{ij}$$

Розрахунок триває до тих пір, поки не будуть визначені потенціали всіх вершин транспортної мережі.

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Після розрахунку потенціалів всіх вершин транспортної мережі необхідно перевірити план перевезень на оптимальність.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних ребер ($x_{ij} \geq 0$)

$$V_j - V_i = c_{ij} \tag{4.2}$$

- для небазисних ребер ($x_{ij} = 0$)

$$V_j - V_i \leq c_{ij} \tag{4.3}$$

де V_j, V_i – відповідно більший та менший потенціали вершин, що обмежують ребро, тобто $V_j > V_i$

Якщо для небазисних ребер умова (4.3) не виконується, то біля них проставляється величина порушення, що розраховується як

$$q_{ij} = V_j - V_i - c_{ij} \tag{4.4}$$

Отримане значення порушення q_{ij} зі знаком «+» записується на відповідному ребрі ij.

Якщо на ребрах транспортної мережі **відсутні порушення**, тобто виконується умови (4.2)-(4.3), то такий план перевезень є оптимальним і розв'язання задачі завершено.

Якщо на ребрах транспортної мережі **є порушення**, то такий план перевезень не є оптимальним і необхідно перейти на крок 3.

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

3.1 Обираємо ребро з найбільшим значенням порушення $\boldsymbol{q_{ij}}$ та знаходимо замкнений контур, що складається з базисних ребер та обраного ребра з порушенням.

3.2 Визначаємо напрямок руху в контурі рухаючись від меншого потенціалу до більшого по ребру з порушенням.

3.3 Рухаючись по контуру за обраним напрямком знаходимо ребро з мінімальним зустрічним потоком $\boldsymbol{g_{min}} = \boldsymbol{x_{ij}}$. Якщо в контурі є кілька ребер з однаковою величиною зустрічного потоку, то можна обрати будь-яке.

3.4 На цьому ребрі прибираємо потік x_{ij}, а ребро з порушенням додаємо в базис, пропустивши по ньому потік g_{min} у відповідності з напрямком руху в контурі. Рухаючись по ребрам контуру додаємо до всіх попутних потоків величину g_{min} і віднімаємо її від усіх зустрічних потоків.

3.5 Отримавши новий план перевезень визначаємо значення цільової функції за формулою (4.1) і переходимо на крок 1.

4.3 Приклад розв'язання задачі

4.3.1 Умова задачі

Розподільчий центр (РЦ) здійснює обслуговування магазинів торгової мережі міста з використанням автомобільного транспорту. В кожному магазині торгової мережі виконується вивантаження продукції з автотранспорту, і навантаження порожньої тари (палет) у вже вільні автомобілі.

Кількість автомобілів, що необхідна для доставки продукції і забирання тари в кожній точці торгової мережі наведена в таблиці 4.1. В рамках виконання індивідуальних практичних робіт схема торгової мережі міста **обирається за вихідними даними задачі №1.** Схема торгової мережі для заданого прикладу наведена на рисунку 4.3. РЦ відповідає пункт (вершина), що відсутній у таблиці 4.1, тобто пункт 1.

Якщо в пунктах торгової мережі не вистачає автомобілів, то вони туди направляються з РЦ, а надлишкові автомобілі направляються до РЦ.

Слід розробити план роботи автомобілів по пунктам торгової мережі таким чином, щоб їх порожні пробіги були мінімальними.

Таблиця 4.1

Обсяги вивантаження-навантаження в пунктах торгової мережі

Пункт	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вивантаження, авт	6	8	12	7	11	2	4	18	6	11	7
Навантаження, авт	12	4	11	7	15	6	7	8	4	12	5

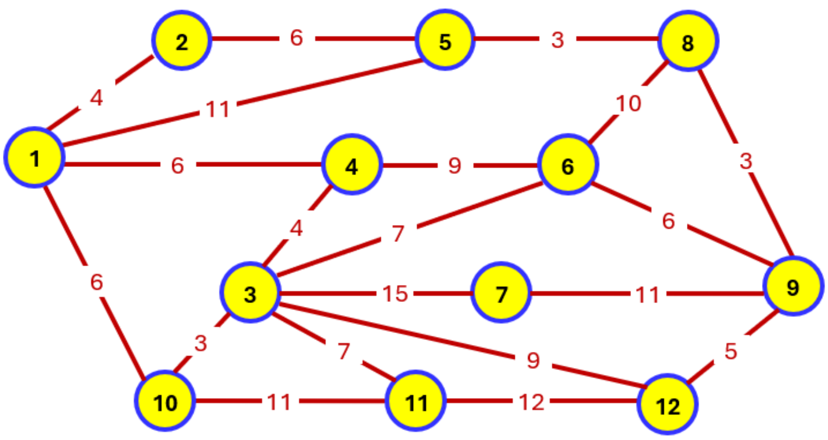


Рис. 4.3. Схема доріг міста та відстані між магазинами торгової мережі

4.3.2 Розв'язання задачі

Етап 1. Розрахунок балансу автомобілів.

На даному етапі виконаємо розрахунок кількості надлишкових $N_i^{\text{над}}$ і недостатніх $N_i^{\text{нест}}$ автомобілів в кожній точці торгової мережі (див. табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Розрахунок балансу автомобілів

Пункт	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Σ**
Вивантаження $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}}$, авт	6	8	12	7	11	2	4	18	6	11	7	92
Навантаження $\boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, авт	12	4	11	7	15	6	7	8	4	12	5	91
Надлишок $\boldsymbol{N}_{\text{над}}$, авт	–	4	1	–	–	–	–	10	2	–	2	19
Нестача $\boldsymbol{N}_{\text{нест}}$, авт	6	–	–	–	4	4	3	–	–	1	–	18

Як видно з таблиці 4.2 після вивантаження в усіх точках торгової мережі вивільняються $\sum \boldsymbol{N}_{\text{над}} = 92$ авт., а для навантаження у всіх точках необхідно лише $\sum \boldsymbol{N}_{\text{нест}} = 91$ авт. Оскільки $\sum \boldsymbol{N}_{\text{над}} > \sum \boldsymbol{N}_{\text{нест}}$, то надлишкові порожні автомобілі у кількості $N_{\text{рц}} = 92 - 91 = 1$ авт. направляються до РЦ (РЦ є споживачем порожніх автомобілів).

Етап 2. Побудова початкового плану перевезень.

На першому кроці даного етапу вказуємо баланс автомобілів в кожному пункті торгової мережі, після чого виконуємо розподіл автомобілів від пунктів з додатнім балансом до найближчих з від'ємним балансом (див. рис. 4.4).

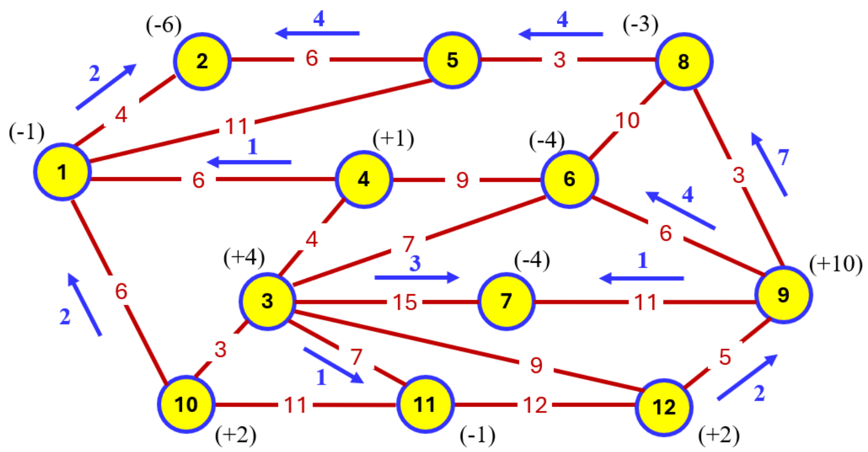


Рис. 4.4. Початковий план перевезень

Для торгової мережі з 12-ти пунктів ($m = 12$) кількість базисних ребер n має становити $12 - 1 = 11$, що відповідає їх кількості на рисунку 4.4. Отже, отриманий план слід вважати опорним, а загальний порожній пробіг автомобілів становить $C_1 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 180$ авт · км

Етап 3. Пошук оптимального плану перевезень.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Присвоїмо вершині 1, що відповідає розподільчому центру, потенціал 100 ($V_1 = 100$), а далі, використовуючи базисні ребра, виконаємо розрахунок потенціалів інших вершин торгової мережі.

Так, з вершини 1 виходять три базисні ребра 1-2, 1-4 та 1-10. Визначимо потенціал вершини 2 рухаючись по ребру 1-2 від вершини 1, що вже має потенціал $V_1 = 100$. Оскільки на ребрі 1-2 є попутній по відношенню до напрямку розрахунку потік, то до потенціалу вершини 1 слід додати величину вартості перевезення по ребру c_{12}

$$V_2 = V_1 + c_{1-2} = 100 + 4 = 104$$

При розрахунку потенціалу вершини 4 від потенціалу вершини 1 слід відняти величину вартості перевезення c_{14} по ребру 1-4, оскільки потік по ребру є зустрічним по відношенню до напрямку розрахунку

$$V_4 = V_1 - c_{1-4} = 100 - 6 = 94$$

Розраховані потенціали записуємо біля кожної вершини торгової мережі (рис. 4.5) і переходимо до кроку 2.

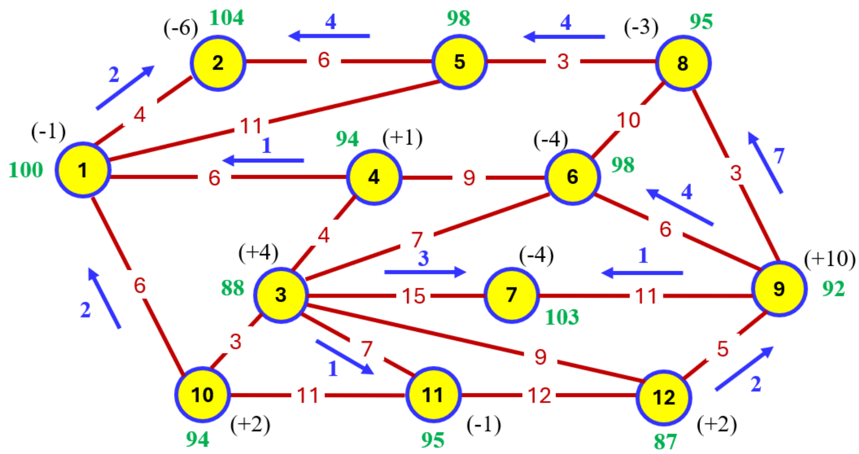


Рис. 4.5. Розрахунок потенціалів вершин торгової мережі

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Перевіримо отриманий на етапі 2 план перевезень на оптимальність. Для базисних ребер перевірка виконується за формулою (4.2), а для небазисних – за формулою (4.3).

Наприклад. Базисне ребро 1-2 → $V_2 - V_1 = 104 - 100 = 4$, що дорівнює $c_{1-2} = 4$, тобто умова (4.2) виконується. Небазисне ребро 3-10 → $V_{10} - V_3 = 94 - 88 = 6$, що більше $c_{3-10} = 3$, і, відповідно, умова (4.3) не виконується.

Для ребра 3-10 за формулою (4.4) розраховується величина порушення $q_{3-10} = 94 - 88 - 3 = 3$ і зі знаком «+» записується на ребрі 3-10 (див. рис. 4.6). Всі наявні порушення для небазисних ребер записуються на відповідних ребрах.

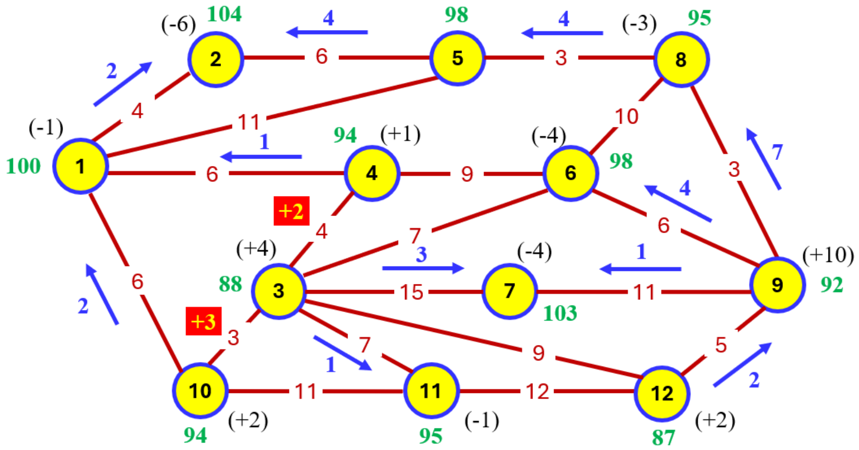


Рис. 4.6. Перевірка оптимальності плану перевезень

Як видно з рисунку 4.6 на ребрах 3-10 і 3-4 транспортної мережі є порушення «+3» і «+2», відповідно, тому план перевезень не є оптимальним і необхідно перейти на крок 3.

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

3.1 Оскільки на транспортній мережі є два ребра з порушенням, то для подальшого розв’язання необхідно обрати ребро з максимальним значенням порушення – ребро 3-10 (порушення «+3»). Небазисне ребро 3-10 разом з базисними ребрами 3-7, 7-9, 9-8, 8-5, 5-2, 2-1 та 1-10 утворюють замкнений контур 10-3-7-9-8-5-2-1-10 (рис. 4.7).

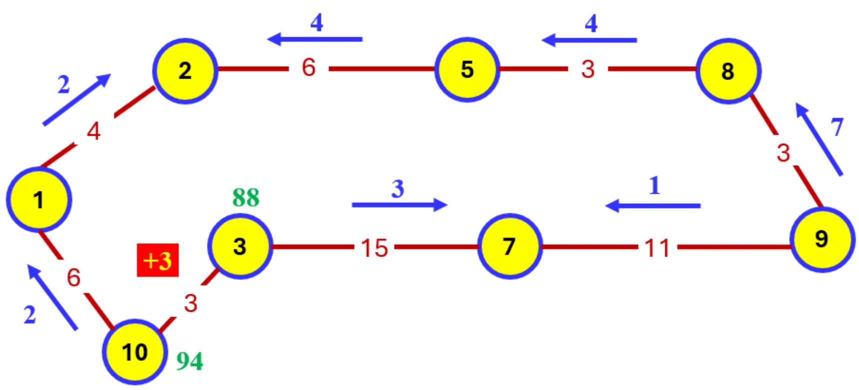


Рис. 4.7. Замкнений контур з порушенням

3.2 Напрямок руху в контурі обираємо по ребру 3-10 з порушенням, за умови руху від вершини 3 з меншим потенціалом $V_3 = 88$ до вершини 10 з більшим потенціалом $V_{10} = 94$ (рисунок 4.8).

3.3 Рухаючись по контуру 3-10-1-2-5-8-9-7-3 знаходимо ребро з мінімальним зустрічним потоком – це ребро 7-3 з потоком $x_{7-3} = 3$, тоді $g_{min} = 3$.

3.4 Прибираємо з ребра 7-3 перевезення $x_{7-3} = 3$, а на ребро 3-10 з порушенням додаємо нове перевезення $x_{3-10} = g_{min} = 3$ з напрямком руху від вершини 3 до вершини 10 (напрямок руху в контурі).

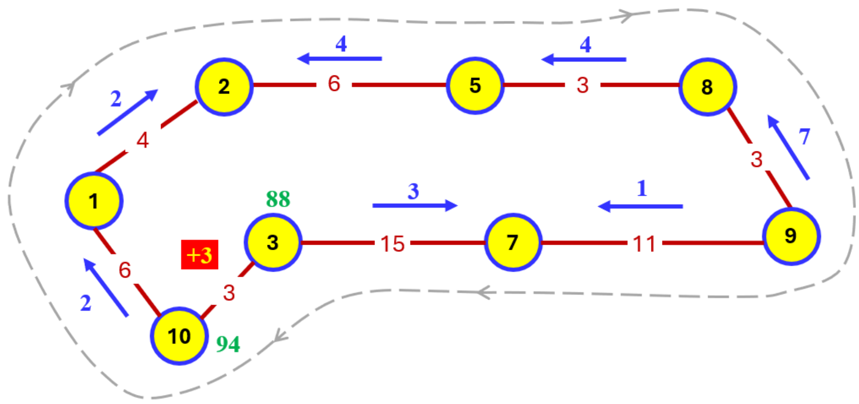


Рис. 4.8. Визначення напрямку руху в контурі

Рухаючись далі по контуру додаємо $g_{min} = 3$ до значення потоків на ребрах 10-1, 1-2, 9-7 оскільки вони є попутними, і віднімаємо $g_{min} = 3$ від значень потоків на ребрах 2-5, 5-8, 8-9 оскільки вони є зустрічними:

$$x_{10-1}^{\text{нов}} = x_{10-1} + g_{min} = 2 + 3 = 5 \qquad x_{2-5}^{\text{нов}} = x_{2-5} - g_{min} = 4 - 3 = 1$$
$$x_{1-2}^{\text{нов}} = x_{1-2} + g_{min} = 2 + 3 = 5 \qquad x_{5-8}^{\text{нов}} = x_{5-8} - g_{min} = 4 - 3 = 1$$
$$x_{9-7}^{\text{нов}} = x_{9-7} + g_{min} = 1 + 3 = 4 \qquad x_{8-9}^{\text{нов}} = x_{8-9} - g_{min} = 7 - 3 = 4$$

Нові значення потоків на вказаних ребрах наведені на рисунку 4.9.

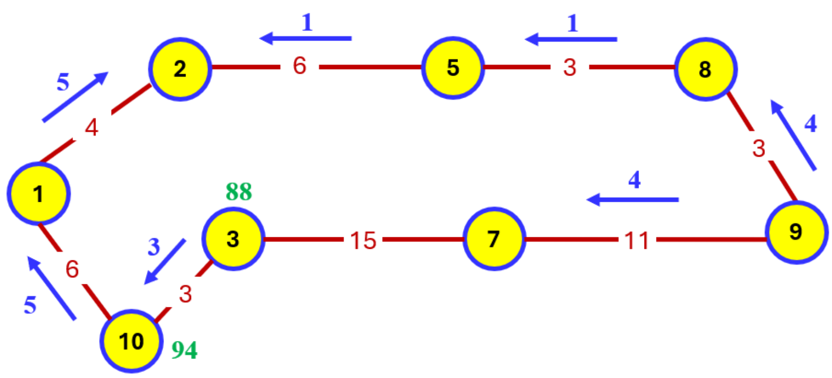


Рис. 4.9. Перерозподіл потоків в контурі

В результаті перерозподілу потоків по ребрам контуру 3-10-1-2-5-8-9-7-3 отримано новий план перевезень по торговій мережі, який наведено на рисунку 4.10.

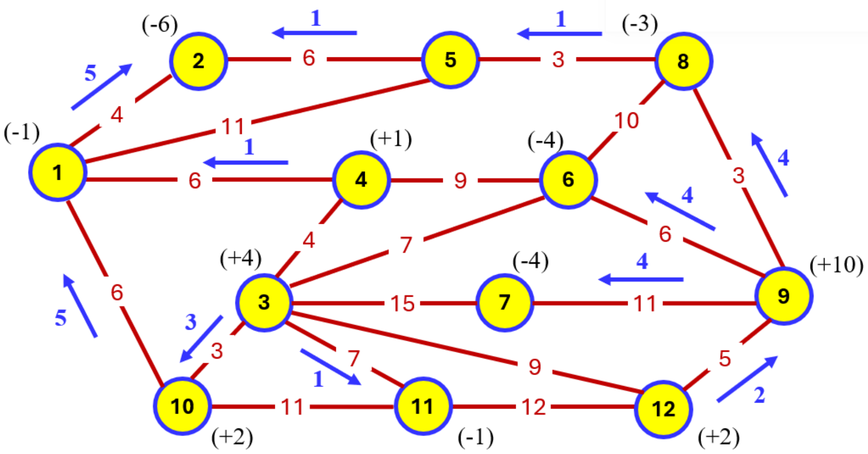


Рис. 4.10. Покращений план перевезень

3.5 Розраховуємо значення цільової функції для нового плану перевезень і знову переходимо на кроки 1-2

$$C_2 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 174 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Кроки 1-2. Виконаємо розрахунок потенціалів і перевірку оптимальності для покращеного плану перевезень, який наведено на рис. 4.10. Результати розрахунку наведені на рис. 4.11.

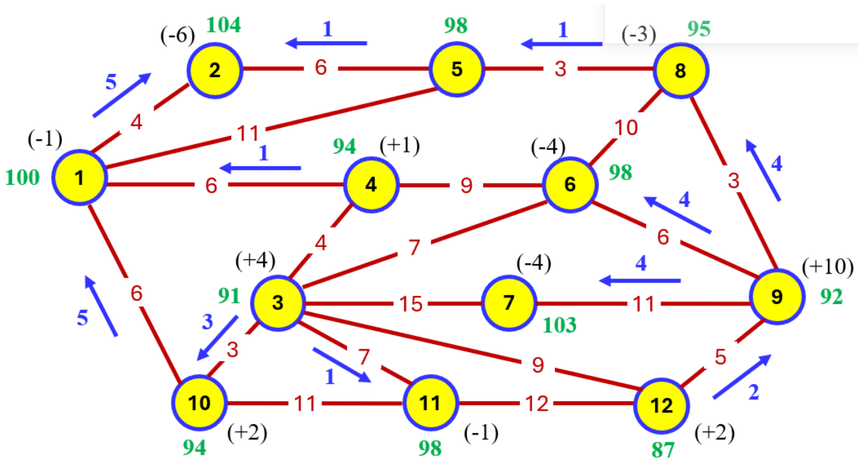


Рис. 4.11. Перевірка оптимальності плану перевезень

Як видно, з рисунку 4.11 для всіх базисних і небазисних ребер торгової мережі виконуються умови (4.2)-(4.3), тому отриманий план перевезень є оптимальним.

Загальний пробіг автомобілів оптимального плану перевезень складає $C_{\text{опт}} = 174 \text{ авт} \cdot \text{км}$.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАКРІПЛЕННЯ УЧАСНИКІВ ВИРОБНИЧОГО ЛАНЦЮГА

5.1 Теоретичні відомості

Відомо, що ланки будь-якої транспортної мережі мають обмежену пропускну спроможність. Наприклад, для залізниць вона вимірюється в добовій кількості поїздів, що можуть прямувати по дільниці, на автомобільному транспорті – пропускна спроможність вулично-дорожньої мережі міста або штучних споруд (мости, тунелі, шляхопроводи). У промисловості мають місце обмеження виробничої потужності обладнання.

5.2 Приклад розв'язання задачі

5.2.1 Умова задачі

Підприємство «Метінвест Холдинг» укладає договори з металургійними заводами на постачання обкотишів для виготовлення металопрокату. При цьому три залізорудні кар'єри А, Б та В продуктивністю P_i (тис. т/рік) постачають залізорудну сировину двом гірничо-збагачувальним комбінатам Г та Д (ГЗК), що працюють з продуктивністю Q_s (тис. т/рік).

Обкотиші з цих ГЗК направляються на три металургійні заводи (К, Л та М), потреби яких складають відповідно T_j (тис. т/рік). Умовна схема транспортної мережі між учасниками виробничого ланцюга наведена на рисунку 5.1.

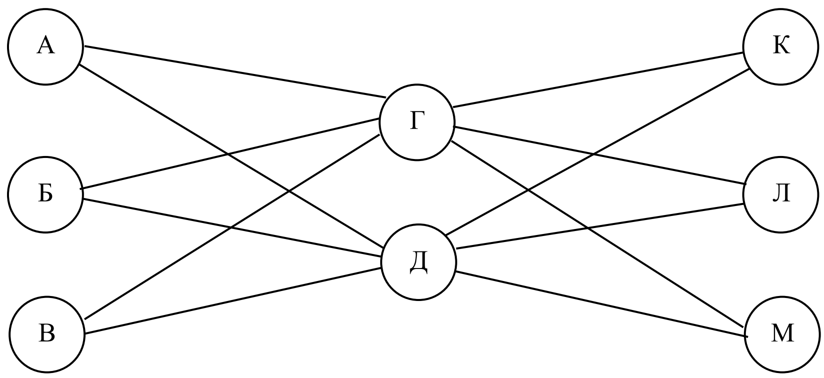


Рис. 5.1. Схема транспортної мережі

Обсяги відправлення сировини, потреби в обкотишах кожного заводу, обмеження виробничої потужності (пропускної здатності) ГЗК, а також вартості перевезень між всіма учасниками ланцюга наведені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

Вихідні дані

		Г	Д	К	Л	М
		-	-	35	35	55
А	50	30	40	-	-	-
Б	45	50	35	-	-	-
В	30	45	30	-	-	-
Г	65	-	-	110	120	150
Д	65	-	-	110	130	120

Необхідно розробити такий план закріплення учасників виробничого ланцюга між собою, при якому загальні витрати на транспортування будуть мінімальними.

5.2.2 Розв'язання задачі

Загальний обсяг видобутку сировини в кар'єрах становить $\sum P_i = 50 + 45 + 30 = 125$ тис. т/рік, а потреби металургійних заводів в обкотишах складають $\sum T_j = 35 + 35 + 55 = 125$ тис. т/рік.

Отже, приведена задача є збалансованою і може бути зведена до транспортної задачі з обмеженням пропускної здатності. Для врахування переробної спроможності гірничо-збагачувальних комбінатів необхідно:

1) Розбити відповідні їм вершини на дві:

– вхід сировини на комбінат - вершини $Г_1, Д_1$;

– вихід продукту з комбінату - вершини $Г_2, Д_2$

2) з'єднати вершини $Г_1 - Г_2$ та $Д_1 - Д_2$ дугою з нульовою вартістю перевезень c_{ij} та обмеженням пропускної здатності d_{ij}, що відповідає максимальній виробничій потужності комбінату (див. табл. 5.1).

На рисунку 5.2 наведена транспортна мережа, отримана в результаті формалізації задачі. Так, на дугах з обмеженням пропускної здатності ($Г_1 - Г_2$ та $Д_1 - Д_2$) в чисельнику вказана вартість перевезення по дузі $c_{ij} = 0$, а в знаменнику – обмеження пропускної здатності $d_{ij} = 65$.

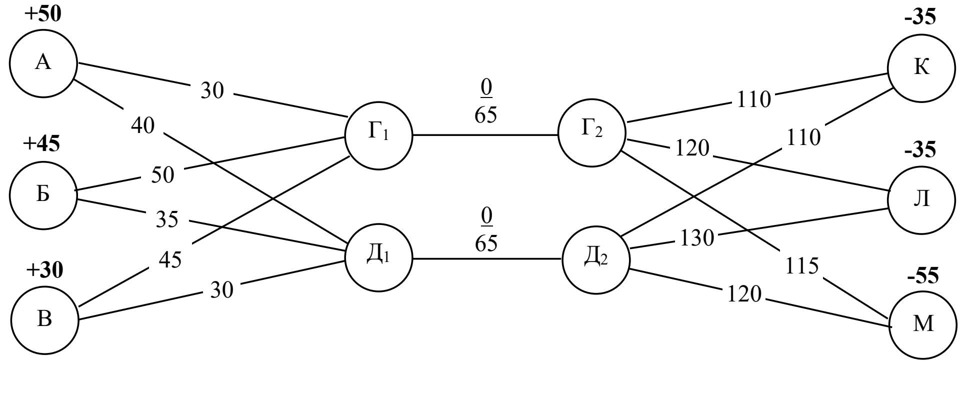


Рис. 5.2. Схема транспортної мережі після формалізації задачі

Крок 1. Побудова початкового плану перевезень.

Підхід до побудови початкового плану в даній роботі подібний задачі без обмежень пропускної спроможності (див. практичне заняття №4, етап 2).

Відмінністю є те, що спочатку плануються перевезення сировини з вершин А, Б, В (вершини зі знаком «+») до ГЗК (вершини Γ_1 та $Д_1$). Далі виконується пропуск потоків на ребрах $\Gamma_1 - \Gamma_2$ та $Д_1 - Д_2$, при цьому розмір перевезень на них не повинен перевищувати їх пропускної здатності $d_{\Gamma_1 - \Gamma_2} = d_{Д_1 - Д_2} = 65$. Після цього готова продукція (обкотиші) з вершин Γ_2 та $Д_2$ розподіляється між споживачами (заводами) – вершини К, Л, М (вершини зі знаком «–»).

Кількість базисних ребер n початкового плану перевезень повинна дорівнювати $n = m - 1$ (де m – кількість вершин). Якщо кількість базисних ребер $n < m - 1$, то необхідно додати перевезення $x_{ij} = 0$ на одне із небазисних ребер. У випадку якщо $n > m - 1$, то необхідно виконати перерозподіл потоків.

Слід зауважити, що на відміну від задач без обмеження пропускної здатності (практичне заняття №4), **ребра з повністю заповненою пропускною здатністю ($x_{ij} = d_{ij}$) не вважаються базисними** (дуга $\Gamma_1 - \Gamma_2$) та можуть вводитись в базис лише у випадку виродження.

Початковий план перевезень наведено на рисунку 5.3 і він містить 9 базисних ребер, що відповідає умові побудові початкового плану перевезень.

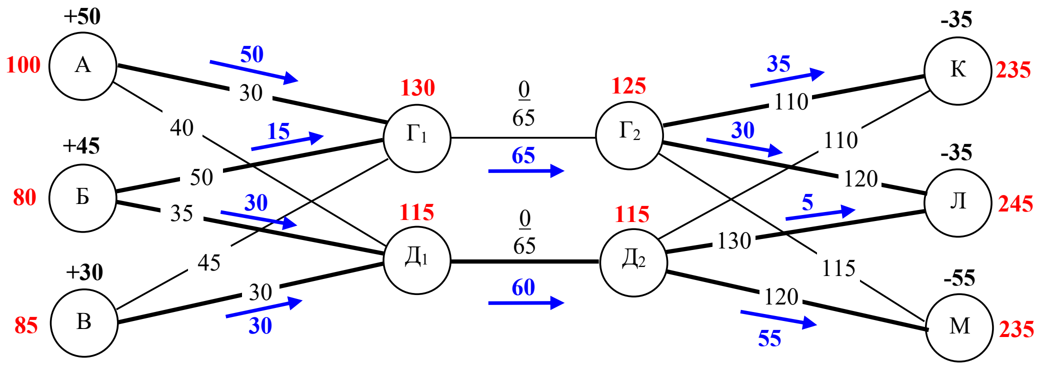


Рис. 5.3. Початковий план перевезень

Розрахуємо транспортні витрати, що відповідають початковому плану перевезень:

$$C_1 = 50 \cdot 30 + 15 \cdot 50 + 30 \cdot 35 + 30 \cdot 30 + 60 \cdot 0 + 55 \cdot 120 + 5 \cdot 130 + 30 \cdot 120 + 35 \cdot 110 = 18\,900 \text{ у.о.}$$

Крок 2. Побудова системи потенціалів.

Розрахунок потенціалів вершин транспортної мережі здійснюється аналогічно практичному заняттю № 4.

Слід відмітити, що вершини $Д_1$та $Д_2$ базисного ребра з обмеженням пропускної здатності $Д_1 - Д_2$ матимуть однакові потенціали ($V_{Д_1} = V_{Д_2} = 115$), оскільки вартість перевезень на цьому ребрі $c_{Д_1 - Д_2} = 0$. Значення потенціалів всіх вершин транспортної мережі наведено на рисунку 5.4.

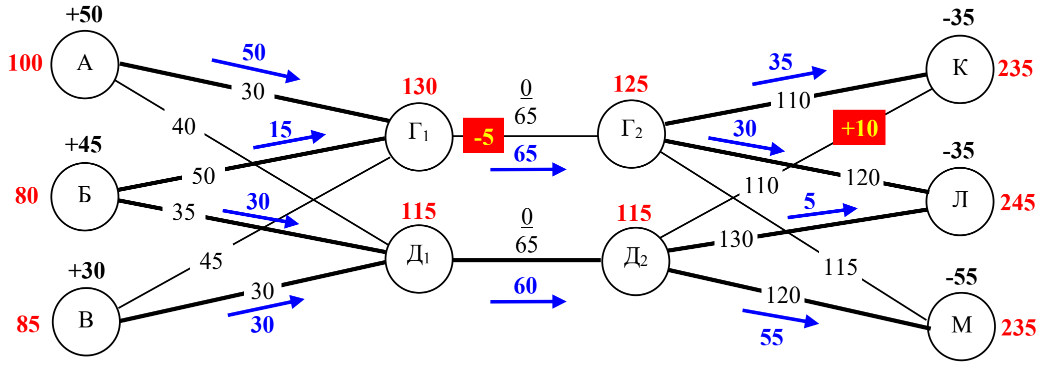


Рис. 5.4. Розрахунок потенціалів початкового плану перевезень

Крок 3. Перевірка оптимальності плану перевезень.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних ребер ($x_{ij} \geq 0$)

$$V_j - V_i = c_{ij} \tag{5.1}$$

- для небазисних ребер без обмежень пропускної здатності ($x_{ij} = 0$)

$$V_j - V_i \leq c_{ij} \tag{5.2}$$

- для небазисних ребер з обмеженням пропускної здатності ($x_{ij} = d_{ij}$)

$$V_{\text{л}} \leq V_{\text{п}} \tag{5.3}$$

де V_j, V_i – відповідно більший та менший потенціали вершин, що обмежують ребро, тобто $V_j > V_i$;

$V_{\text{л}}, V_{\text{п}}$ – відповідно потенціал лівої (вхід сировини) та правої (вихід продукту) вершин.

Якщо для небазисних ребер умови (5.2)-(5.3) не виконуються, то біля них проставляється величина порушення, що розраховується як

$$q_{ij} = V_{j(\text{п})} - V_{i(\text{л})} - c_{ij} \tag{5.4}$$

Отримане порушення q_{ij} може бути двох типів:

- *зі знаком «+»* – характерно для небазисних ребер **без обмеження пропускної здатності**, тобто ребер які не мають перевезень;
- *зі знаком «–»* – характерно для небазисних ребер **з обмеженням пропускної здатності**, тобто ребер з повністю заповненою пропускною здатністю.

Як видно з рисунку 5.4 для небазисного ребра $\text{Д}_2 - \text{К}$ не виконується умова (5.2), оскільки $V_{\text{К}} - V_{\text{Д}_2} > c_{\text{К}-\text{Д}_2} (235 - 115 > 110)$, а величина порушення становить

$$q_{\text{Д}_2-\text{К}} = V_{\text{К}} - V_{\text{Д}_2} - c_{\text{Д}_2-\text{К}} = 235 - 115 - 110 = 10$$

Отримане значення порушення запишемо на ребрі $Д_2 - К$ у форматі «$+10$» (див. рис. 5.4).

Крім того для ребра $Г_1 - Г_2$ не виконується умова (5.3), оскільки $V_{Г_1} > V_{Г_2}$ (130 > 125), тому розрахуємо порушення на цьому ребрі:

$$q_{Г_1-Г_2} = V_{Г_1} - V_{Г_2} - c_{Г_1-Г_2} = 125 - 130 - 0 = -5$$

Отримане значення порушення запишемо на ребрі $Г_1 - Г_2$ у форматі «-5» (див. рис. 5.4).

Оскільки на ребрах транспортної мережі наявні порушення, то отриманий план перевезень вважається неоптимальним і необхідно виконати перерозподіл вантажопотоків.

Крок 4. Перерозподіл вантажопотоків.

4.1 Для виконання перерозподілу вантажопотоків необхідно **обрати ребро** з максимальним порушенням за абсолютним значенням

$$q_{max} = \max\{|q_{ij}|\} \tag{5.5}$$

Як видно з рисунку 5.4 на ребрах транспортної мережі є порушення $q_{Д_2-К} = +10$ та $q_{Г_1-Г_2} = -5$, серед яких обираємо максимальне за абсолютним значенням

$$q_{max} = \max\{|+10|, |-5|\} = 10$$

Отже, максимальна величина порушення $q_{max} = 10$ знаходиться на ребрі $Д_2 - К$, тому це ребро обрано для подальшого перерозподілу вантажопотоків. При цьому порушення на вказаному ребрі зі знаком «+» ($q_{Д_2-К} = +10$).

4.2 Знайдемо **замкнений контур**, що складається з ребра $Д_2 - К$ з порушенням та базисних ребер – це контур $Д_2 - К - Г_2 - Л - Д_2$.

4.3 Обираємо **напрямок руху** в контурі в залежності від типу порушення на ребрі:

- *зі знаком «+»* – рух в контурі виконується від меншого до більшого потенціалу на ребрі з порушенням;
- *зі знаком «–»* – рух в контурі виконується від початкової до кінцевої вершини ребра з порушенням (напрямок руху співпадає з напрямком потоку на ребрі з порушенням).

Оскільки на ребрі $Д_2 - К$ порушення зі знаком «+», то рух в контурі здійснюється від вершини $Д_2$ ($V_{Д_2} = 115$) до вершини К ($V_К = 235$).

4.4 Визначимо **величину покращення $\boldsymbol{g_{min}}$** потоків на ребрах замкненого контуру в залежності від типу порушення:

- *зі знаком «+»* – величина $\boldsymbol{g_{min}}$ визначається як мінімум серед мінімального зустрічного потоку $\boldsymbol{x_{ij}^з}$ та резерву пропускної здатності попутного ребра $\boldsymbol{d_{ij}^п - x_{ij}^п}$ в контурі (у випадку якщо контур проходить через ребро з обмеженням пропускної здатності)

$$g_{min} = min\{x_{ij}^з, d_{ij}^п - x_{ij}^п\} \tag{5.6}$$

- *зі знаком «–»* – величина $\boldsymbol{g_{min}}$ визначається як мінімум серед мінімального попутного потоку $\boldsymbol{x_{ij}^{п}}$ та резерву пропускної здатності зустрічного ребра $\boldsymbol{d_{ij}^{з} - x_{ij}^{з}}$ в контурі

$$g_{min} = min\{x_{ij}^{п}, d_{ij}^{з} - x_{ij}^{з}\} \tag{5.7}$$

Оскільки на ребрі $Д_2 - К$ порушення зі знаком «+» і замкнений контур $Д_2 - К - Г_2 - Л - Д_2$ не проходить через ребра з обмеженням пропускної здатності, то величина g_{min} визначається за формулою (5.6) і становить

$$g_{min} = min\{x_{Л-Д_2}\} = min\{5\} = 5.$$

4.5 Виконаємо **перерозподіл потоків** в контурі за правилами, що залежать від типу порушення:

- *зі знаком «+»* – величина $\boldsymbol{g_{min}}$ пропускається по ребру з порушенням, а також додається до всіх попутних потоків і віднімається від усіх зустрічних потоків;
- *зі знаком «–»* – величина $\boldsymbol{g_{min}}$ додається до всіх зустрічних потоків і віднімається від усіх попутних потоків в контурі.

Отже, ребро $Д_2 - К$ з порушенням додаємо до базису і пропускаємо по ньому потік $g_{min} = 5$, додаємо g_{min} до потоку на ребрі $Г_2 - Л$ і віднімаємо g_{min} від потоків на дугах $К - Г_2$ та $Л - Д_2$.

Після виконання цієї операції потік на ребрі $Л - Д_2$ став дорівнювати нулю, тому це ребро стає вільним і виключається з базису. Новий покращений план перевезень наведено на рисунку 5.5.

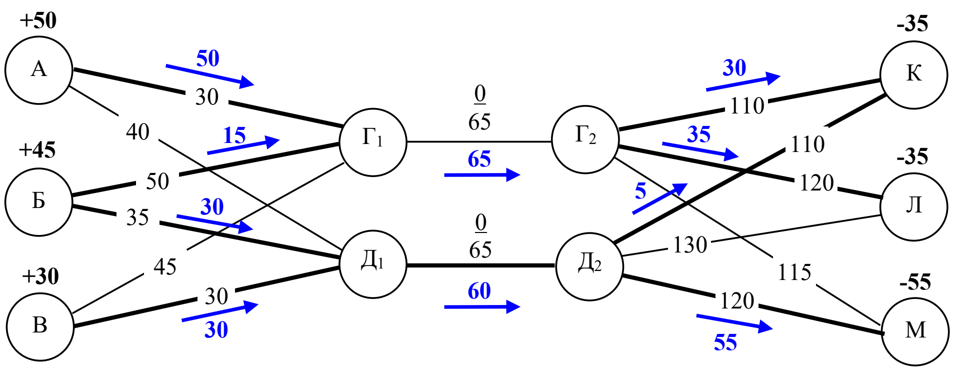


Рис. 5.5. Покращений план перевезень

Розрахуємо транспортні витрати для отриманого плану перевезень:

$$C_2 = 50 \cdot 30 + 15 \cdot 50 + 30 \cdot 35 + 30 \cdot 30 + 60 \cdot 0 + 55 \cdot 120 + 5 \cdot 110 + 35 \cdot 120 + 30 \cdot 110 = 18\,850 \text{ у. о.}$$

Кроки 2-4 повторюються до тих пір поки не буде отримано оптимальний план перевезень. Отриманий план перевезень перевіримо на оптимальність за формулами (5.1)-(5.3) кроку 3 для чого попередньо виконаємо розрахунок потенціалів (див. крок 2). Результати розрахунків наведено на рисунку 5.6.

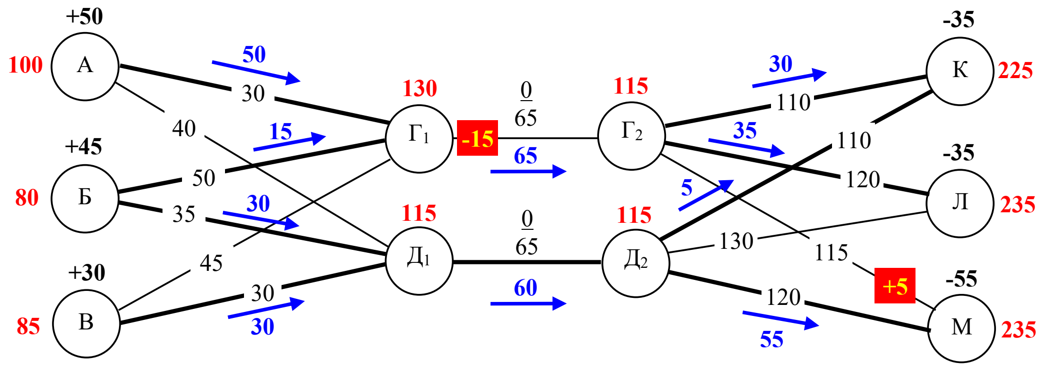


Рис. 5.6. Розрахунок потенціалів покращеного плану перевезень

Як видно з рисунку план перевезень неоптимальний, оскільки на ребрах наявні порушення $q_{Г_2-М} = +5$ та $q_{Г_1-Г_2} = -15$, серед яких обираємо максимальне за абсолютним значенням $q_{max} = \max\{|+5|, |-15|\} = 15$.

Отже, для подальшого перерозподілу вантажопотоків обрано ребро $Г_1 - Г_2$ з максимальним порушенням $q_{max} = 15$; при цьому порушення на вказаному ребрі зі знаком «–».

Ребро $Г_1 - Г_2$ з порушенням входить до замкненого контуру $Г_1 - Г_2 - К - Д_2 - Д_1 - Б - Г_1$, а напрямок руху в контурі співпадає з напрямком потоку $x_{Г_1-Г_2} = 65$ на ребрі з порушенням.

Оскільки порушення зі знаком «–», то величина покращення потоків g_{min} визначається за формулою (5.7) серед мінімального попутного потоку ($x_{Б-Г_1}$) та резерву пропускної здатності зустрічного ребра ($d_{Д_1-Д_2} - x_{Д_1-Д_2}$)

$$g_{min} = min\{x_{Б-Г_1}, d_{Д_1-Д_2} - x_{Д_1-Д_2}\} = min\{15, 65 - 60\} = 5.$$

Отримана величина $g_{min} = 5$ додається до зустрічних потоків на ребрах $К - Д_2$, $Д_2 - Д_1$, $Д_1 - Б$ та віднімається від попутних на ребрах $Г_1 - Г_2$, $Г_2 - К$, $Б - Г_1$. Після перерозподілу ребро з порушенням $Г_1 - Г_2$ стає базисним, а ребро $Д_1 - Д_2$ виключається із базису (див. рис. 5.7).

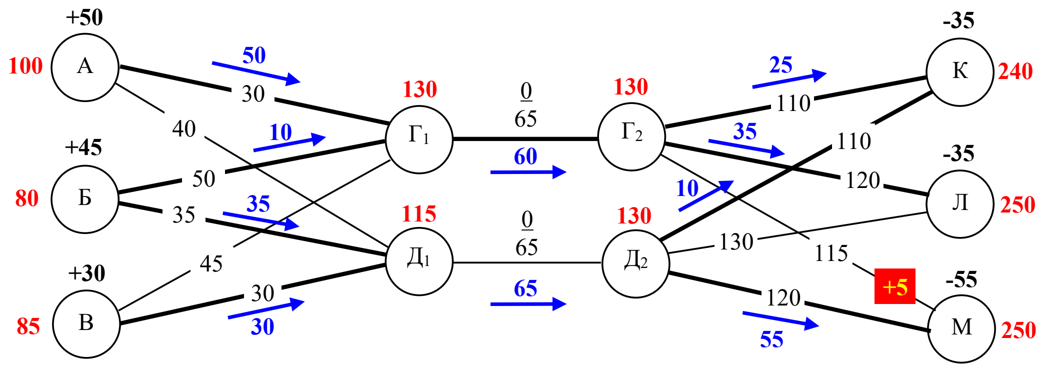


Рис. 5.7. Покращений план перевезень

Розрахуємо транспортні витрати для отриманого плану перевезень

$$C_3 = 50 \cdot 30 + 10 \cdot 50 + 35 \cdot 35 + 30 \cdot 30 + 60 \cdot 0 + 55 \cdot 120 + 10 \cdot 110 + 35 \cdot 120 + 25 \cdot 110 = 18\,775 \text{ у. о.}$$

Визначимо потенціали вершин транспортної мережі (рис. 5.7) та перевіримо отриманий план перевезень на оптимальність. Як видно з рисунку 5.7 на ребрі $\Gamma_2 - \text{М}$ є порушення $q_{\Gamma_2-\text{М}} = +5$, тому план перевезень неоптимальний.

Для подальшого перерозподілу вантажопотоків обрано ребро $\Gamma_2 - \text{М}$ оскільки воно єдине з порушенням

$$q_{max} = \max\{|+5|\} = 5.$$

Ребро $\Gamma_2 - \text{М}$ входить до замкненого контуру $\Gamma_2 - \text{М} - \text{Д}_2 - \text{К} - \Gamma_2$, а рух в контурі здійснюється від вершини Γ_2 з меншим потенціалом ($V_{\Gamma_2} = 130$) до вершини М з більшим потенціалом ($V_\text{М} = 250$).

Для порушенням зі знаком «+» величина покращення потоків g_{min} визначається за формулою (5.6) і становить

$$g_{min} = min\{x_{\text{К}-\Gamma_2}\} = min\{25\} = 25.$$

Пропускаємо потік $g_{min} = 25$ по ребру $\Gamma_2 - \text{М}$ і включаємо його в базис, а далі додаємо g_{min} до попутного потоку на ребрі $\text{Д}_2 - \text{К}$ і віднімаємо від зустрічних на ребрах $\text{М} - \text{Д}_2$ і $\text{К} - \Gamma_2$.

Після перерозподілу потік на ребрі $\text{К} - \Gamma_2$ став дорівнювати нулю, тому це ребро стає вільним і виключається з базису. Новий покращений план перевезень наведено на рисунку 5.8.

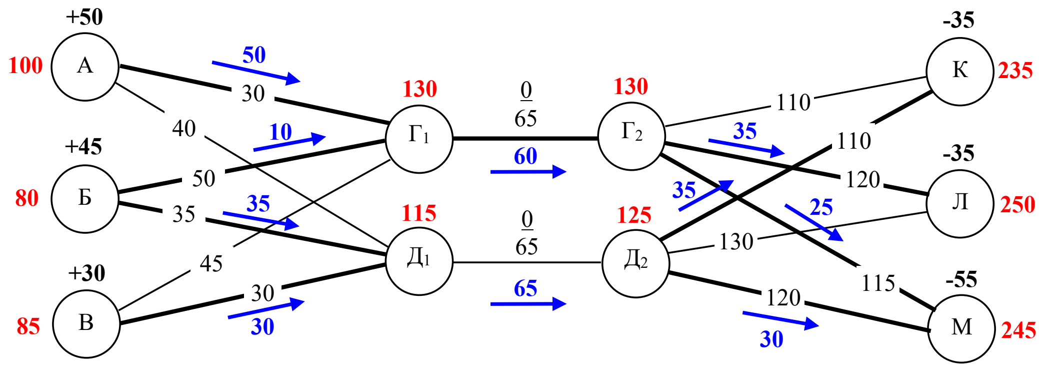


Рис. 5.8. Покращений план перевезень

Розрахуємо транспортні витрати для отриманого плану перевезень:

$$C_4 = 50 \cdot 30 + 10 \cdot 50 + 35 \cdot 35 + 30 \cdot 30 + 60 \cdot 0 + 30 \cdot 120 + 35 \cdot 110 + 35 \cdot 120 + 25 \cdot 115 = 18\,650 \text{ у. о.}$$

В результаті розрахунку потенціалів вершин (рис. 5.8) та перевірки умов (5.1)-(5.3) встановлено, що будь-які порушення на ребрах транспортної мережі відсутні, тому отриманий план перевезень є оптимальним.

Таким чином, отримано оптимальний план закріплення учасників виробничого ланцюга (кар'єри, гірничо-збагачувальні комбінати, металургійні заводи) між собою, який забезпечує мінімальні витрати на транспортування сировини і готової продукції – $C_{\text{опт}} = 18\,650$ у. о.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ У ТРАНСПОРТНОМУ ВУЗЛІ

6.1. Теоретичні відомості

При розв'язанні оптимізаційних задач, що передбачають перебір значної кількості варіантів доцільно використовувати метод динамічного програмування [4]. Даний метод передбачає покрокове розв'язання задачі з пошуком умовно-оптимальних рішень (оптимальних на даному кроці) відносно виділеної цільової функції та наступний пошук безумовно-оптимального розв'язку задачі. Такий підхід дозволяє розв'язати кожну підзадачу лише одного разу, скоротивши цим кількість розрахунків, що особливо корисно у випадках, коли кількість підзадач, що повторюються, є досить значною.

6.2. Приклад розв'язання задачі

6.2.1 Умова задачі

На контейнерному терміналі морського порту, що включає в себе чотири контейнерні майданчики (КМ), роботу по завантаженню контейнерів на автомобільний та залізничний транспорт виконують 12 річстакерів. Витрати, пов'язані з їх експлуатацією, а також зберіганням контейнерів на терміналі, наведені в таблиці 6.1.

Необхідно розподілити річстакери між майданчиками контейнерного терміналу таким чином, щоб загальні витрати були мінімальними.

Таблиця 6.1

Витрати, пов'язані зі зберіганням контейнерів та експлуатацією річстакерів

Річстакер	Витрати $g_N(x_N)$, *грн/добу*			
	КМ 1	КМ 2	КМ 3	КМ 4
1	830	∞	670	∞
2	620	1100	530	860
3	460	720	420	720
4	550	620	500	500
5	670	550	600	420
6	800	510	730	550
7	∞	570	∞	700
8	∞	700	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞

6.2.2 Розв'язання задачі

Вирішення задач методом динамічного програмування передбачає такі етапи – пошук умовно- та безумовно-оптимального рішення.

Знаходження оптимального рішення розбивається на 4 кроки, що відповідає кількості майданчиків на контейнерному терміналі (транспортному вузлі). При цьому на кожному кроці (для кожного майданчика) знаходяться умовно-оптимальні рішення $f_N(y)$ за рекурентною формулою:

$$f_N(y) = min[g_N(x_N) + f_{N-1}(y - x_N)] \quad (6.1)$$

де N – загальна кількість контейнерних майданчиків, що розглядається на відповідному кроці розв'язання задачі ($N = 1, 2, 3, 4$);

y – загальна кількість річстакерів, що загалом виділяється для N майданчиків на цьому кроці;

$x_N(y)$ – кількість річстакерів, яка виділяється КМ з номером N;

$g_N(x_N)$ – витрати, пов'язані зі зберіганням контейнерів та експлуатацією $x_N(y)$ річстакерів на КМ з номером N;

$f_N(x_N)$ – умовно-оптимальні витрати, пов'язані зі зберіганням контейнерів та експлуатацією $x_N(y)$ річстакерів на КМ з номером N з урахуванням витрат на всіх попередніх кроках (майданчиках).

При розв'язанні задачі слід дотримуватись обмеження $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y$, тобто для кожного умовно-оптимального рішення загальна кількість річстакерів, розподілених по КМ, повинна дорівнювати їх залишковій кількості для цього рішення.

І етап. Пошук умовно-оптимального рішення.

Розв'язання задачі доцільно виконувати в табличному вигляді (див. таблиця 6.2).

На *першому кроці* для контейнерного майданчика №1 $f_{N-1} = 0$, тому $f_1(x_1) = g_1(x_1)$, тобто на першому кроці (один КМ у вузлі) умовно-оптимальні витрати $f_1(x_1)$ для різної кількості річстакерів y збігаються з відповідними значеннями витрат $g_1(x_1)$.

Таким чином, у таблиці 6.2 стовпчик $f_1(y)$ заповнюється відповідними значеннями $g_1(x_1)$ з таблиці 6.1, а стовпчик $x_1(y)$ – відповідними значеннями кількості річстакерів y з тієї ж таблиці.

На *другому кроці* розглядається транспортний вузол (контейнерний термінал) з двох майданчиків. При пошуку умовно-оптимальних рішень на цьому кроці слід врахувати, що на першому майданчику може експлуатуватись мінімум один річстакер, а на другому – мінімум два річстакери (див. табл. 6.1). Отже, пошук умовно-оптимальних рішень необхідно починати для умови $y_2 = 3$, тобто на майданчиках 1 і 2 можуть експлуатуватися мінімум 3 річстакери.

Таблиця 6.2

Витрати, пов'язані зі зберіганням контейнерів та експлуатацією річстакерів

y	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$	
	$f_1(y)$	$x_1(y)$	$f_2(y)$	$x_2(y)$	$f_3(y)$	$x_3(y)$	$f_4(y)$	$x_4(y)$
1	830	1	∞	–	∞	–	∞	–
2	620	2	∞	–	∞	–	∞	–
3	460	3	1930	2	∞	–	∞	–
4	550	4	1550	3	2600	1	∞	–
5	670	5	1340	3	2220	1	∞	–
6	800	6	1110	3	2010	1	3460	2
7	∞	–	1080	4	1850	1	3080	2
8	∞	–	1010	5	1710	2	2870	2
9	∞	–	970	6	1600	3	2710	2
10	∞	–	1030	7	1500	3	2510	4
11	∞	–	1120	7	1430	3	2350	4
12	∞	–	1240	7	1390	3	2210	4

Розглянемо порядок розрахунку умовно-оптимальних витрат на другому кроці при експлуатації різної кількості річстакерів на контейнерному терміналі, що складається з двох майданчиків ($N = 2$):

- *три річстакери на терміналі* ($y_2 = 3$)

$$f_2(3) = min[x_2 = 2, y_1 = 1 \rightarrow 1100 + 830 = 1930] = 1930.$$

Отже мінімальні витрати 1930 забезпечуються при роботі на майданчику №1 – одного річстакера $y_1 = 1$, а на майданчику №2 – двох річстакерів $x_2(y) = 2$;

- *чотири річстакери на терміналі* ($y_2 = 4$)

$$f_2(4) = min\begin{bmatrix} x_2 = 2, y_1 = 2 \rightarrow 1100 + 620 = 1730 \\ x_2 = 3, y_1 = 1 \rightarrow 720 + 830 = 1550 \end{bmatrix} = 1550.$$

Отже мінімальні витрати 1550 забезпечуються при роботі на майданчику №1 – одного річстакера $y_1 = 1$, а на майданчику №2 – трьох річстакерів $x_2(y) = 3$;

- *п'ять річстакерів на терміналі* ($y_2 = 5$)

$$f_2(5) = min\begin{bmatrix} x_2 = 2, y_1 = 3 \rightarrow 1100 + 460 = 1560 \\ x_2 = 3, y_1 = 2 \rightarrow 720 + 620 = 1340 \\ x_2 = 4, y_1 = 1 \rightarrow 620 + 830 = 1450 \end{bmatrix} = 1340.$$

Отже мінімальні витрати 1340 забезпечуються при роботі на КМ №1 – двох річстакерів $y_1 = 2$, а на КМ №2 – трьох річстакерів $x_2(y) = 3$.

Аналогічно виконуються розрахунки умовно-оптимальних витрат для інших значень y_2. Таким же чином здійснюється пошук умовно-оптимальних рішень на третьому кроці (три майданчики на терміналі); при цьому розрахунки починаються для умови $y_3 = 4$, оскільки, на першому і третьому майданчиках не може працювати менше одного річстакера, а на другому майданчику – менше двох річстакерів (див. табл. 6.1).

Для пояснення порядку заповнення таблиці 6.2 розглянемо приклад визначення умовно-оптимального рішення на кроці 3 (три майданчики на терміналі), коли кількість нерозподілених річстакерів для трьох майданчиків становить $y_3 = 8$, тобто на четвертий майданчик буде спрямовано $12 - 8 = 4$ річстакери; при цьому вважаємо, що умовно-оптимальні рішення на попередніх кроках вже знайдено. Розрахунки зручно виконати у допоміжній таблиці 6.3.

Таблиця 6.3

Приклад пошуку умовно-оптимального рішення

$x_3(y_3 = 8)$	$y_2 = y_3 - x_3$	$g_3(x_3)$, грн	$f_2(y_2)$, грн	$g_3(x_3) + f_2(y_2)$, грн
8	0	∞	∞	∞
7	1	∞	∞	∞
6	2	730	∞	∞
5	3	600	1930	2530
4	4	500	1550	2050
3	5	420	1340	1760
2	6	530	1180	**1710**
1	7	670	1080	1750
0	8	∞	1010	∞

У першому стовпчику таблиці 6.3 перераховані можливі значення кількості річстакерів x_3, що спрямовуються на майданчик №3 за умови виділення для трьох майданчиків терміналу восьми річстакерів ($y_3 = 8$). У другому стовпчику вказується залишок річстакерів для першого та другого майданчиків терміналу у випадку, якщо для майданчика №3 буде виділено x_3 річстакерів. У третьому стовпчику – витрати $g_3(x_3)$, пов'язані зі зберіганням контейнерів та експлуатацією x_3 річстакерів на майданчику №3 (див. табл. 6.1). У четвертий стовпчик записуються відповідні значення умовно-оптимальних витрат $f_2(y_2)$, отримані на попередньому (другому) кроці (див. табл. 6.2), а у останній стовпчик – сума витрат на третьому майданчику $g_3(x_3)$ та умовно-оптимальних витрат $f_2(y_2)$, отриманих на другому кроці. У останньому стовпчику обирається мінімальне – це значення умовно-оптимальних витрат $f_3(y_3 = 8) = 1710$ грн. Отримане значення та відповідна йому кількість річстакерів $x_3 = 2$ заносяться в таблицю 6.2.

На останньому кроці (чотири майданчики терміналу) пошук умовно-оптимального рішення виконується тільки для умови $y_4 = 12$, оскільки усі виділені річстакери повинні бути розподілені на всі чотири майданчики.

II етап. Пошук безумовно-оптимального рішення.

Пошук безумовно-оптимального розподілення річстакерів починається з останнього (четвертого) майданчика. Мінімальні витрати складають 2210 грн та відповідають 12 річстакерам у вузлі, 4 з яких працюють на майданчику №4, а на інші майданчики залишається відповідно $12 - 4 = 8$ річстакерів.

Для 8 річстакерів умовно-оптимальні витрати складають 1710 грн при роботі 2 річстакерів на майданчику №3 (див. табл. 6.2), відповідно для майданчиків №1 та №2 залишається $8 - 2 = 6$ річстакерів.

Оптимальний розподіл 6 річстакерів для двох майданчиків досягається в тому випадку, якщо на майданчику №2 працюють 3 річстакери, а на майданчику №1 – $6 - 3 = 3$ річстакери (див. табл. 6.2).

Таким чином, на майданчик №1 необхідно направити 3 річстакери, на майданчик №2 – 3 річстакери, на майданчик №3 – 2 річстакери, а на майданчик №4 – 4 річстакери. Загальні добові витрати при такому розподілі річстакерів на контейнерному терміналі є мінімальними та складають 2210 грн.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 7

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАМІНИ НАВАНТАЖУВАЛЬНО-РОЗВАНТАЖУВАЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

7.1. Теоретичні відомості

Одним із ключових завдань управління підприємством є розробка оптимальної стратегії реновації обладнання, тобто своєчасної заміни агрегатів, транспортних засобів, навантажувально-розвантажувальної техніки на нову. Старіння обладнання охоплює як його фізичне, так і моральне зношування, що призводить до зростання витрат на виробництво продукції, обслуговування й ремонт, а також до зниження продуктивності та ліквідності активів. На певному етапі експлуатації старе обладнання стає економічно невигідним, і його заміна на нові, більш ефективні зразки є доцільнішою з фінансової точки зору.

Оптимальна стратегія реновації передбачає визначення раціональних строків заміни обладнання. Критерієм оптимальності може виступати максимізація прибутку від його експлуатації або мінімізація сукупних витрат на експлуатацію протягом певного періоду [4].

7.2. Приклад розв'язання задачі

7.2.1 Умова задачі

Для забезпечення технологічних операцій на розподільчому центрі ТОВ «Епіцентр» використовуються електронавантажувачі, максимальний період експлуатації яких становить 4 роки. По завершенню цього терміну відбувається їх ліквідація (продаж) і придбання нових навантажувачів. Вартості придбання, експлуатації та ліквідаційна вартість навантажувачів наведена в таблиці 7.1.

Необхідно розробити такий восьмирічний план заміни електронавантажувачів на розподільчому центрі ТОВ «Епіцентр», що забезпечить мінімальні загальні витрати на їх придбання та експлуатацію.

Таблиця 7.1

Вихідні дані до розв'язання задачі

Рік	Витрати, грн					Ліквідаційна вартість, грн			
	На придбання	Експлуатаційні							
	P_i	M_1	M_2	M_3	M_4	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1064	202	243	255	296	374	362	320	270
2	1209	192	255	342	360	321	289	234	85
3	1209	192	194	232	257	343	298	288	260
4	1214	165	224	293	346	312	270	191	61
5	1215	147	190	260	277	306	299	290	246
6	1392	118	144	163	258	359	322	287	193
7	1465	114	140	215	215	315	315	284	184
8	1680	106	196	268	285	348	347	256	180

7.2.2 Розв'язання задачі

Для розробки плану заміни електронавантажувачів, попередньо необхідно визначити загальні витрати з їх придбання та експлуатацію:

$$C_{ij} = P_i + \sum_{k=i}^{j-1} M_{ik} - S_{i,j-1}$$

де P_i – вартість навантажувача на початку i-го року;

M_{ik} – вартість експлуатації навантажувача протягом k-го року;

$S_{i,j-1}$ – ліквідаційна вартість навантажувача.

Використовуючи наведену формулу і дані таблиці 7.1 розрахуємо для першого року плану ($i = 1$) загальні витрати:

- експлуатація протягом одного року, ліквідація на початку другого року ($j = 2$)

$$C_{1-2} = 1064 + 202 - 374 = 892 \text{ грн.}$$

- експлуатація протягом двох років, ліквідація на початку третього року ($j = 3$)

$$C_{1-3} = 1064 + 202 + 243 - 362 = 1147 \text{ грн.}$$

- експлуатація протягом трьох років, ліквідація на початку четвертого року ($j = 4$)

$$C_{1-4} = 1064 + 202 + 243 + 255 - 320 = 1444 \text{ грн.}$$

- експлуатація протягом чотирьох років, ліквідація на початку п'ятого року ($j = 5$)

$$C_{1-5} = 1064 + 202 + 243 + 255 + 296 - 270 = 1790 \text{ грн.}$$

Аналогічним чином виконуються розрахунки для всіх років плану, а результати доцільно представити в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Загальні витрати з придбання та експлуатації навантажувачів

	2	3	4	5	6	7	8	9
1	892	1147	1444	1790	–	–	–	–
2	–	1080	1367	1764	2273	–	–	–
3	–	–	1058	1297	1539	1824	–	–
4	–	–	–	1067	1333	1705	2181	–
5	–	–	–	–	1056	1253	1522	1843
6	–	–	–	–	–	1151	1332	1530
7	–	–	–	–	–	–	1264	1404
8	–	–	–	–	–	–	–	1438

Пошук оптимального плану заміни електронавантажувачів виконується в розрахунковій таблиці 7.3, де кожен i-й рік плану придбання обладнання розділено на два рядки (парний і непарний). Заповнення таблиці 7.3 виконується наступним чином:

Крок 1. Заповнити парний рядок першого року ($i = 1$) плану придбання електронавантажувачів, при цьому в парний рядок клітини (1;1) записати 0, а в клітини тих років, які можливі для 1-го року плану ($j = 2, 3, 4, 5$), переписати значення витрат C_{ij} з 1-го рядка таблиці 7.2. В інші клітини цього рядка записати ∞. Значення в клітині (1;2) обирається як стала мітка δ_i, помічається квадратними дужками [ ] і записується в останній рядок таблиці 7.3 (тобто $\delta_i = \delta_2 = 892$).

Крок 2. Починаючи з рядка 2 подальше заповнення таблиці 7.3 слід виконувати по стовпчиках, при цьому в рядку i заповнення слід починати зі стовпчика $j = i + 1$. Заповнення j-го стовпчика i-го рядка виконується таким чином:

- для непарних рядків – $\delta_i + C_{ij}$;
- для парних рядків – $min\{\delta_j; \delta_i + C_{ij}\}$, де δ_j – тимчасова мітка, що знаходиться в парному рядку попереднього року $(i - 1)$ плану покупки цього ж j-го стовпчика.

Отримане значення в парному рядку стовпчика $j = i + 1$ обирається як стала мітка δ_i, помічається квадратними дужками [ ] і записується в j-й стовпчик останнього рядка таблиці 7.3.

Заповнення стовпчиків i-го рядка завершується після розгляду чотирьох років експлуатації навантажувачів або в разі досягнення граничного терміну плану їх заміни.

Наприклад, для 2-го року плану покупки навантажувачів $(i = 2)$ та одному році їх експлуатації (третій рік плану, $j = 3$) маємо сталу мітку $\delta_i = \delta_2 = 892$, тимчасову мітку $\delta_j = \delta_3 = 1147$, а згідно з табл. 7.2 $C_{ij} = C_{23} = 1080$. Таким чином, у рядки клітини (2;3) слід записати:

- непарний рядок – $892 + 1080 = 1972$;
- парний рядок – $min\{1147; 1972\} = 1147$.

Отже, стала мітка в 3-му стовпчику $(j = 3)$ дорівнює $\delta_i = \delta_3 = 1147$.

Наприклад, для цього ж 2-го року плану покупки навантажувачів $(i = 2)$ та чотирьох роках їх експлуатації (шостий рік плану, $j = 6$) маємо сталу мітку $\delta_i = \delta_2 = 892$, тимчасову мітку $\delta_j = \delta_6 = \infty$, а згідно з табл. 7.2 $C_{ij} = C_{26} = 2273$. Таким чином, у рядки клітини (2;6) слід записати:

- непарний рядок – $892 + 2273 = 3165$;
- парний рядок – $min\{\infty; 3165\} = 3165$.

Стала мітка в стовпчику $j = 6$ поки що відсутня і буде отримана при розгляді цього стовпчика у 5-му рядку таблиці $(i = 5)$.

Крок 3. Для визначення оптимального плану закупівлі навантажувачів слід виділити значення в останньому рядку останнього стовпця таблиці 7.3 (3633) і почергово віднімати від нього числа з останнього стовпця таблиці 7.2 (починаючи зверху вниз – 1843, 1530, 1404, 1438). Віднімання виконуємо до тих пір, поки не буде отримане одне із значень останнього рядка таблиці 7.3, а отримане значення слід виділити в останньому рядку цієї таблиці.

План розрахунків виглядає наступним чином:

1) $3633 - 1843 = 1790$, 3) $3633 - 1404 = 2229$,
2) $3633 - 1530 = 2103$, 4) $3633 - 1438 = 2195$.

Як видно, при першому ж розрахунку отримано значення 1790, що знаходиться в 5-му стовпці таблиці 7.3, тому для подальших розрахунків виконуємо перехід на відповідний 5-й стовпець таблиці 7.2 і повторюємо вказані вище дії:

1) $1790 - 1790 = 0$, 3) $1790 - 1297 = 493$,
2) $1790 - 1764 = 26$, 4) $1790 - 1067 = 723$.

Розрахунки виконуються до тих пір, поки не отримаємо 0, що відповідає значенню в першому стовпчику останнього рядка таблиці 7.3. В свою чергу, номери стовпчиків, що відповідають значенням, виділеним в останньому рядку таблиці 7.3 є роками плану оптимальної закупівлі електронавантажувачів.

Таблиця 7.3

Розрахунок оптимального плану заміни навантажувачів

Рік	№	Прим	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	δ_i+C_{ij}	∞	-	-	-	-	∞	∞	∞	∞
	2	min	0	[892]	1147	1444	1790	∞	∞	∞	∞
2	3	δ_i+C_{ij}	∞	∞	1972	2259	2656	3165	∞	∞	∞
	4	min	∞	∞	[1147]	1444	1790	3165	∞	∞	∞
3	5	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	2205	2444	2686	2971	∞	∞
	6	min	∞	∞	∞	[1444]	1790	2686	2971	∞	∞
4	7	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	∞	2511	2777	3149	3625	∞
	8	min	∞	∞	∞	∞	[1790]	2686	2971	3625	∞
5	9	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	∞	∞	2846	3043	3312	3633
	10	min	∞	∞	∞	∞	∞	[2686]	2971	3312	3633
6	11	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3837	4018	4216
	12	min	∞	∞	∞	∞	∞	∞	[2971]	3312	3633
7	13	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4235	4375
	14	min	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	[3312]	3633
8	15	δ_i+C_{ij}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4750
	16	min	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	[3633]
			0	892	1147	1444	1790	2686	2971	3312	3633

Таким чином, в результаті вирішення задачі, встановлено, що оптимальним планом закупівлі електронавантажувачів для розподільчого центру ТОВ «Епіцентр» є їх закупівля на початку 1-го, 5-го та 9-го років.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Методи оптимізації параметрів транспортних систем. Базові методи : приклади та задачі : навчальний посібник / І. Я. Сковрон, А. С. Дорош, Є. Б. Демченко, О. О. Мазуренко, В. В. Малашкін, Т. В. Болвановська // Український державний університет науки і технологій – Дніпро, 2026. – 211 с.
2. Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф. Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник. –Львів: “Магнолія 2006”, 2025. – 211 с.
3. Основи дослідження операцій у транспортних системах: приклади та задачі [Текст] навчальний посібник для ВНЗ / Д. М. Козаченко, Р. В. Вернигора, В. В. Малашкін; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна – Дніпропетровськ, 2015. – 277 с.
4. Грицюк П. М. Основи теорії систем і управління : навч. посіб. / П. М. Грицюк, О. І. Джоші, О. М. Гладка. - Рівне: НУВГП, 2021. – 272 с

Додаток А

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює потенціал початкової вершини при вирішенні задачі про пошук найкоротших відстаней?
2. Що може бути критерієм при вирішенні задачі про пошук найкоротших відстаней на мережі?
3. Яким чином зображують розв'язок задачі про пошук найкоротших відстаней на мережі?
4. Яку вершину на транспортній мережі слід вважати стоком, а яку джерелом?
5. Як визначається максимальний потік, що вдалося перевезти від джерела до стоку мережі за алгоритмом Форда-Фалкерсона?
6. Що повинно бути у вихідних даних при вирішенні задачі про максимальний потік?
7. Чи необхідно складати план перевезень на початковому етапі вирішення задачі про максимальний потік?
8. Якої форми може бути транспортна задача за умови збалансованості запасів і потреб?
9. Скільки клітин матриці має бути заповнено при побудові початкового плану перевезень транспортної задачі?
10. В якому випадку у транспортну таблицю вводять фіктивний пункт відправлення?
11. В якому випадку у транспортну таблицю вводять фіктивний пункт призначення?
12. Що використовується для розрахунку потенціалів вершин в транспортній задачі на мережі?
13. Яким чином визначається напрямок руху в контурі з порушенням в транспортній задачі на мережі?
14. Яким чином виконується перерозподіл перевезень в контурі з порушенням в транспортній задачі на мережі?
15. Що є критерієм закінчення вирішення транспортної задачі на мережі?
16. Які особливості вирішення транспортної задачі на мережі з обмеженням пропускної здатності?
17. Назвіть основні етапи вирішення задачі динамічного програмування (задача розподілу транспортних засобів).
18. В чому полягає суть задачі заміни (реновації) обладнання?
19. Основні критерії прийняття рішення щодо заміни обладнання.
20. Що таке ліквідаційна вартість обладнання?

Навчально-методичне видання

Дорош Андрій Сергійович,
Сковрон Ігор Ярославович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І УПРАВЛІННЯ

ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять

Електронне видання

В авторській редакції
Комп’ютерна верстка А. С. Дорош

Експертний висновок склав канд. техн. наук, доц. Євген Демченко

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.870 від 06.05.2026)

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 3,29.
Зам. № 47

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010