МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Фізика та прикладна математика»

В авторській редакції

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи

ДНІПРО
2024

УДК 517.9 (076.5)
М 34

Упорядники:
Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова, І. В. Нечай

*Електронний аналог
друкованого видання*

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
121 «Інженерія програмного забезпечення»

Протокол № 3 від 12.01.2024

М 34 Математичний аналіз. Застосування визначеного інтеграла : навчально-методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи / упоряд. Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова, І. В. Нечай ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 36 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами денної та заочної форми навчання спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 121 «Аналіз великих даних», 123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека», 174 «Автоматика та автоматизація на транспорті», 273 «Системи керування рухом поїздів» під час практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Математичний аналіз».

Навчально-методичні рекомендації містять основні теоретичні положення для засвоєння матеріалу, варіанти індивідуальних завдань.

Іл. 13. Табл. 36. Бібліогр.: 5 назв.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета методичних рекомендацій – допомога здобувачам вищої освіти у засвоєнні розділів «Визначений інтеграл» та «Застосування визначеного інтеграла»

Інтеграли використовуються в різних задачах інформатики, числового аналізу для наближення функцій, вирішення задач оптимізації з обмеженнями, що виникають при моделюванні технічних процесів на транспорті, в промисловості та економіці і приводять до чисельного розв'язання диференціальних рівнянь. Досвід, набутий при вивченні цієї теми, буде сприяти успішному застосуванню математичних дисциплін для вивчення дисциплін спеціального циклу та вибіркових дисциплін.

Методичні рекомендації містять необхідний теоретичний матеріал, достатню кількість детально розібраних прикладів, велику кількість варіантів для індивідуальної і самостійної роботи для складання КЗ2 та підготовки до екзамену. Вони сприяють досягненню результатів навчання ОРН1,ОРН2,ОРН5,ОРН7 передбачених відповідними робочими програмами (РП).

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ

Вираження площі фігури інтегралом

Визначимо площу криволінійної трапеції *ABCD* (рис. 1). Ця фігура обмежена зверху кривою *DC*, що має рівняння $y = f(x)$, де $f(x)$ – є додатною та неперервною на проміжку [*a, b*] функцією, знизу вона обмежена відрізком *AB* осі *Ox*, а з боків – двома ординатами *AD* та *BC* (кожна з яких може виродитися в точку). Отже, шукана площа фігури *ABCD* дорівнює

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

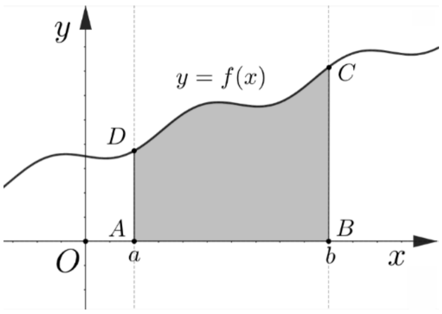

Рис. 1

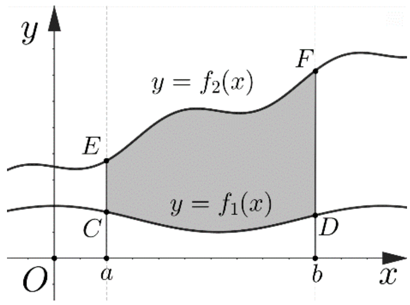

Рис. 2

Якщо криволінійна трапеція *CDFE* обмежена знизу та зверху кривими (рис. 2), рівняння яких

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),\ \left(a \le x \le b,\ f_2(x) \ge f_1(x)\right),$$

то розглядаючи її як різницю двох фігур *ABFE* та *ABCD*, одержимо площу трапеції *CDFE* у вигляді

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx. \qquad (2)$$

Формула (1) може бути використана і в тому випадку, якщо крива, що обмежує криволінійну трапецію, задана параметрично $x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$ Проводячи заміну змінної в інтегралі (1), одержимо (припускаючи, що $x = a$ при $t = t_0$, $x = b$ при $t = t_1$):

$$S = \int_{t_2}^{t_1} y x_t' dt = \int_{t_2}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt. \qquad (3)$$

Приклад 1 $|1|$**.** Визначити площу еліпса, рівняння якого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

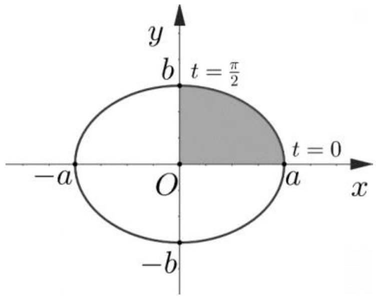

Рис. 3

Еліпс (рис. 3) – симетричний відносно координатних осей, тому шукана площа *S* в чотири рази більша тої площі еліпса, що лежить у першому координатному куті, тобто

$$S=4\int_0^a ydx$$

Замість того, щоб визначити *y* із рівняння еліпса та підставити одержаний вираз у підінтегральну функцію, скористаємося параметричним заданням еліпса

$$x=a\cos t; y=b\sin t \qquad (4)$$

та введемо замість *x* нову змінну *t*; *y* – виразиться тоді із другого рівняння *b* (4), коли *x* змінюється від 0 до *a*, *t* змінюється від *π/*2 до 0, а так як всі умови правила заміни змінної у даному випадку виконані, то

$$S=4\int_{\pi/2}^{0} b\sin td\left(a\cos t\right)=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt=\pi ab.$$

Якщо $a = b$, то $S = \pi a^2$, тому що еліпс перетворюється в коло.

Приклад 2 $|1|$.

Визначити площу фігури, обмежену двома конгруентними параболами $y^2=2px$ та $x^2=2py$ (рис. 4). Скористаємося формулою (2), покладаючи в ній $y_1=\frac{x^2}{2p}$**;** $y_2=\sqrt{2px}$**.**

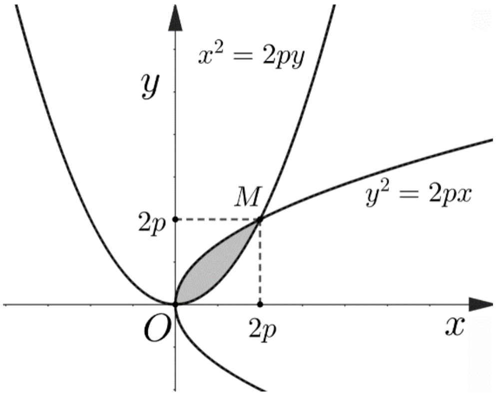

Рис. 4

Для визначення проміжку інтегрування розв'яжемо сумісно дані рівняння та знайдемо абсцису точки M перетину двох парабол, відмінної від початку координат: вона дорівнює $2p$. Маємо

$$S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^3 .$$

Приклад 3 $|1|$

Обчислити площу фігури, обмеженої циклоїдою $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Маємо за формулою (3)

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 .$$

<u>*Площа сектора*</u>

Площа сектора, обмеженого кривою, рівняння якої в полярних координатах

$$r = r(\varphi),$$

та двома радіусами – векторами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, проведеними із полюсу під кутами α та β до полярної осі, виражається формулою (рис. 5).

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi. \qquad (5)$$

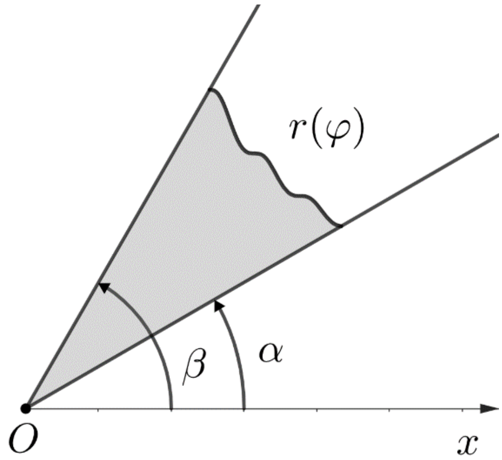

Рис. 5

Приклад 4 $|2|$. Знайти площу, обмежену замкнутою кривою (рис. 6)

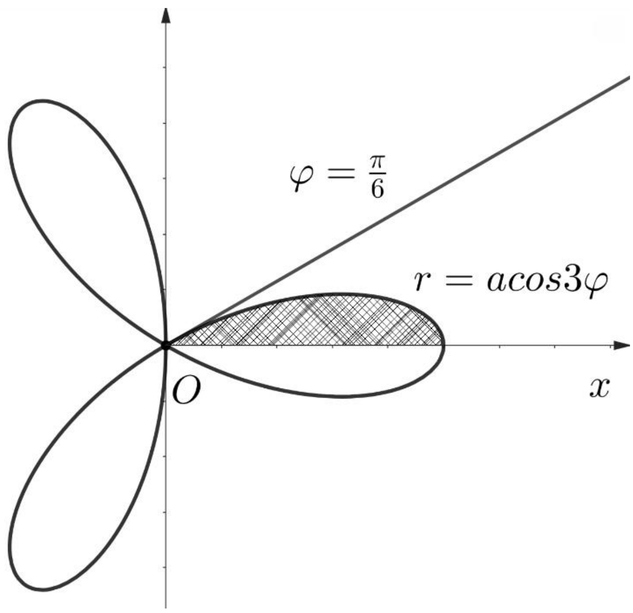

Рис. 6

Повна площа, нею обмежена, дорівнює шестикратній площі заштрихованої частини, що відповідає зміні φ від 0 до $\pi/6$, так, що за формулою (5)

$$S = 6\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 5 $|2|$.

Знайти площу декартового листка $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Перейдемо до полярних координат. Поклавши $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, одержимо полярне рівняння

$$r = (3a\sin\varphi\cos\varphi)\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)^{-1}.$$

Так як виток кривої відповідає зміні кута φ від 0 до $\pi/2$, то за формулою (5)

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)^2}d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{tg^2\varphi ctg\varphi}{\left(1+tg^3\varphi\right)^2}d\varphi=-\frac{3a^2}{2}\frac{1}{1+tg^3\varphi}\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{3a^2}{2}\frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3a^2}{2}.$$

Формулу (5) можна пристосувати до випадку, коли крива задана своїми параметричними рівняннями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$.

$$r^2=x^2+y^2,\ \varphi=arctg\frac{y}{x};\ \varphi'_t=\frac{xy'_t-x'_ty}{x^2+y^2},$$

то

$$\frac{1}{2}r^2d\varphi=\frac{1}{2}\left(xy'_t-x'_ty\right)dt.$$

Якщо зміні кута φ від α до β відповідає зміна параметра t від t_0 до t_1, то

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\varphi(t)\psi(t)-\varphi'(t)\psi(t)]dt. \qquad (6)$$

Завдяки більшій симетрії ця формула часто приводить до більш простих викладок.

Приклад 6 $|2|$.

Обчислити площу астроїди $x=a\cos^3t,\ y=a\sin^3t.$

Маємо

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3t\cdot 3a\sin^2t\cos t+3a\cos^2t\sin ta\sin^3t\right]dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{3}{16}a^2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ КРИВОЇ

Довжина дуги плоскої кривої

Нехай маємо дугу AB деякої кривої (рис. 7) і вона задана явним рівнянням

$y = f(x)$, причому точкам A та B відповідають значення $x = a$ та $x = b$ $(a < b)$. $f(x)$ має неперервну похідну на проміжку $a \le x \le b$, якому відповідає дуга AB. Довжина дуги виражається визначеним інтегралом за формулою

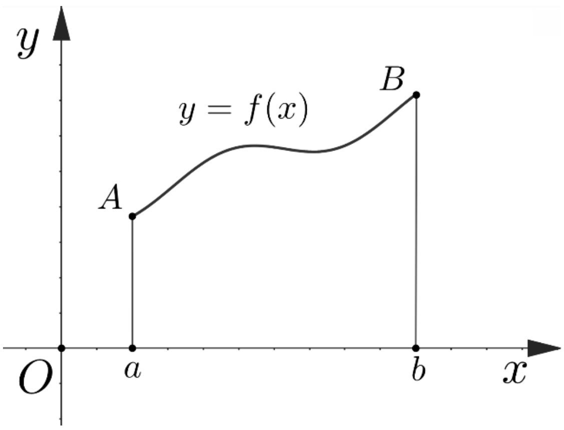

Рис. 7

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (7)$$

Покладемо тепер, що крива задана параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причому точкам A та B відповідають значення $t_1 = \alpha$ та $t_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$. Припустимо, що значенням t із проміжку $\alpha \le t \le \beta$ відповідають точки кривої AB так, що різним t відповідають різні точки цієї кривої, яка сама себе не перетинає і не замкнута (рис. 7). Далі припустимо, що в проміжку $\alpha \le t \le \beta$ існують неперервні похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$. Тоді довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \qquad (8)$$

Ця формула справедлива і у випадку замкнутої кривої. Якщо ж деяка крива L складається із скінченого числа кривих L_K, кожна з яких має параметричне визначення, що задовольняє вказаним вище умовам, то, обчислюючи за формулою (8) довжину кривої L_K та сумуючи ці довжини, одержимо довжину кривої L.

Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $r = f(\varphi)$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r_{\varphi}'^2}\, d\varphi \qquad (9)$$

Приклад 6 $|1|$.

Довжина дуги l параболи $y = \dfrac{x^2}{2p}$, що відрахована від вершини (0, 0) до змінної точки з абсцисою x, за формулою (7), виражається інтегралом

$$l = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{x^2 + p^2}\,dx = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right)\right]\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

Приклад 7 $|1|$.

Обчислити довжину однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ при $0 \le t \le 2\pi$. Скористаємося формулою (8)

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\; dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

Приклад 8 $|2|$.

Довжина еліпса (рис. 8), представленого параметрично рівняннями $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ в силу симетричності відносно осі координат, дорівнює чотирьом довжинам тієї його частини, яка лежить у першому координатному куті. Відзначивши, що точкам *A* та *B* відповідають значення параметра 0 та π/2, одержимо для шуканої довжини *l* наступний вираз за формулою (8)

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Інтеграл цей не може бути обчислений в скінченому вигляді (еліптичний інтеграл 2-го роду), обчислюється тільки наближено.

Приклад 9. Обчислити довжину кардіоїди (рис. 8) $r = a(\cos\varphi + 1)$

Так як кардіоїда є симетричною відносно полярної осі, то її довжина дуги

дорівнює подвоєній довжині дуги *AB*, що знаходиться у верхній напівплощині. При цьому в точці *A* $\varphi = 0$, а в точці *B* – $\varphi = \pi$.

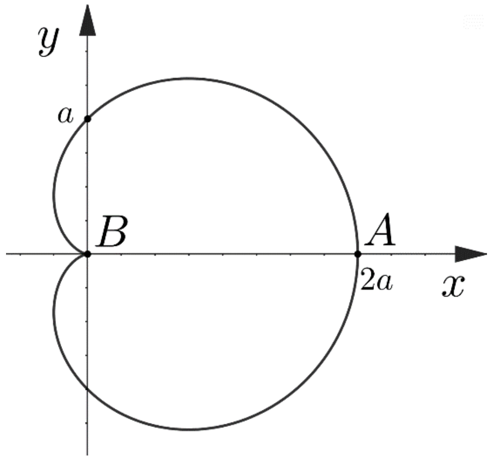

рис. 8

Скористаємося формулою (9)

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(\cos\varphi + 1)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

<u>*Довжина дуги просторової кривої*</u>

По відношенню до простої кривої у просторі

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \mu(t),$$

визначення довжини дуги може бути подано у тому ж вигляді, що й плоскої кривої. Справедлива формула для довжини дуги аналогічна (8)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt .$$

Приклад 10 $|1|$. Знайти довжину гвинтової лінії

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct.$$

Так як тут

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

то довжина дуги лінії від точки *A* ($t = 0$) до точки *B* (t – будь яке) буде

$$l = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\,dt = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

ОБ'ЄМ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Розглянемо на площині *x Oy* криву, задану рівнянням $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, де $f(x)$ неперервна та невід'ємна (рис. 1). Нехай обмежена нею криволінійна трапеція *ABCD* обертається навколо осі *Ox*. Одержане тіло називається тілом обертання, а його об'єм V визначається за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (12)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена знизу та зверху кривими (рис. 2) $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$, то

$$V_x = 2\pi\int_a^b \left[y_1^2 - y_2^2\right]dx = \pi\int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\right)dx \qquad (13)$$

У випадку обертання криволінійної трапеції *ABCD* навколо осі *Oy* об'єм, утворений тілом обертання, обчислюється за формулою

$$V_y = 2\pi\int_a^b xydx = 2\pi\int_a^b xf(x)dx \qquad (14)$$

Приклад 11 $|2|$. При обертанні еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

навколо більшої осі одержуємо тіло, що називається подовженим еліпсом обертання. Крайні значення абсциси x в розглянутому випадку будуть ($-a$) та ($+a$), а тому формула (12) дає

$$V_{\text{подовж}} = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Якщо еліпс обертається навколо рисої осі Oy, то об'єм стисненого еліпсоїда отримуємо перестановкою між собою букв x, y, a та b, що дає

$$V_{\text{стисн.}} = \pi\int_{a}^{b} x^2dy = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4}{3}\pi ba^2$$

У випадку $a = b$ обидва еліпсоїди перетворюються в кулю радіусу a, об'єм якої дорівнює $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Приклад 12 |1|.

Нехай одна арка циклоїди $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$ обертається навколо осі Ox. Тоді об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi\int_{0}^{2\pi a} y^2dx = \pi a^3\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^3dt = \pi a^3\left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 5\pi^2a^3$$

.

Приклад 13 |1|.

Астроїда $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ обертається навколо осі Ox (рис. 9). Знайдемо об'єм тіла обертання за формулою

$$V_x = V_y = \pi\int_{-a}^{a}\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3dx = \pi\left[a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{32}{105}\pi a^3 .$$

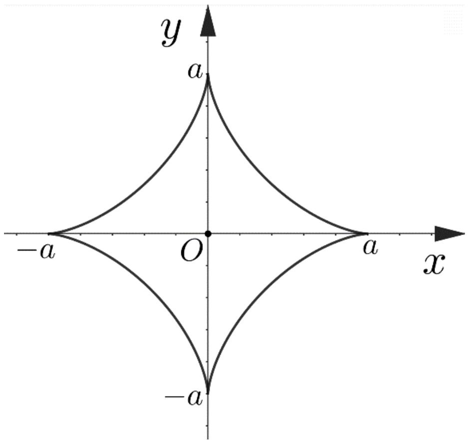

Рис. 9

Приклад 14 |2|.

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, одержаною при обертанні ліній $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$ навколо осі *Oy*. Скористаємося формулою (14)

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi^2 .$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Нехай маємо на площині *xOy* деяку криву *AB*, задану рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна функція (рис. 10). Якщо обертати криву навколо осі *Ox,* то вона опише деяку поверхню обертання. Тоді площа цієї поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y_x'^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx . \qquad (15)$$

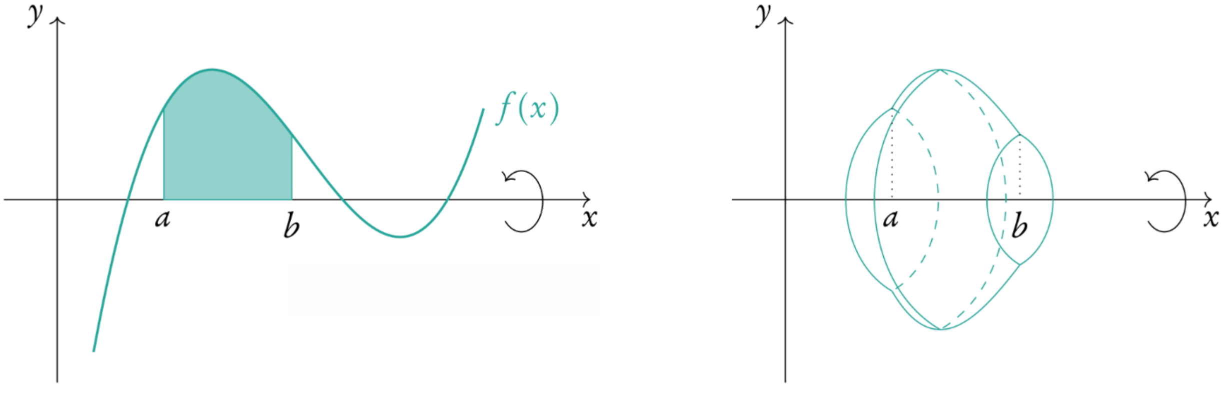

Рис. 10

Якщо повернутися до параметричного завдання кривої $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ та провести в інтегралі (15) заміну змінної, то одержимо

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt . \quad (16)$$

У випадку завдання лінії в полярних координатах площа поверхні обертання визначається наступним інтегралом

$$S = 2\pi \int_0^h ydl = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{t^2 + r'^2} d\varphi . \quad (17)$$

Приклад 15 |1|.

Визначити площу поверхні шарового пояса. Нехай напівколо, описане навколо початку координат радіусом *r*, обертається навколо осі *Ox*. Із рівняння кола маємо $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, далі

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \ \sqrt{1 + y'^2_x} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

У цьому випадку площу поверхні пояса, описаного дугою, кінці якої мають абсциси x_1 та $x_2 > x_1$, обчислюємо за формулою (15)

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2_x} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} rdx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi rh ,$$

де *h* – висота поясу. Таким чином, площа поверхні, шарового поясу дорівнює добутку довжини кола великого кругу на висоту поясу.

Приклад 16 |1|.

Знайти площу поверхні, одержаної обертанням астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ навколо осі *Ox*. Для цього достатньо подвоїти площу поверхні, описаної дугою астроїди, що лежить в 1 квадранті $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

За формулою (16) одержимо

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} 3a\sqrt{\cos^4 \sin^2 t + \sin^4 \cos^2 t} a \sin^3 t dt =$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t dt=12\pi a^2\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

Приклад 17 |2|.

Знайти площу поверхні обертання, створеної обертанням кардіоїди $r=a(1+\cos\varphi)$ навколо полярної осі. Користуючись формулою (17) і тим, що $a=0,\ \beta=\pi$ одержимо (рис. 8)

$$S=2\pi\int_0^{\pi}a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\pi}4\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=-32\pi a^2\left.\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

ОБЧИСЛЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ТА ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Знаходження статичних моментів і центра ваги кривої

Нехай задана деяка плоска однорідна крива (рис. 11), тобто її лінійна густина постійна.

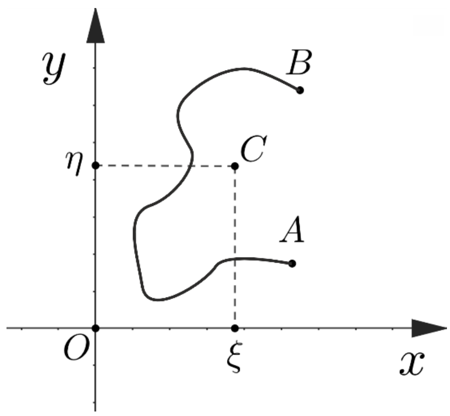

Рис. 11

Для простоти покладемо $\rho=1$ (в противному випадку отриманий результат потрібно лише помножити на ρ). За цих умов маса будь-якої дуги нашої кривої вимірюється просто її довжиною, і поняття статичного моменту набирає чисто геометричного змісту. Нехай ds – елемент кривої (маса якого також виражається числом ds). Тоді статичні моменти кривої відносно осей *Ox*, *Oy* визначаються у вигляді інтегралів

$$M_x = \int_0^L ydl, \; M_y = \int_0^L xdl. \qquad (18)$$

Тут у ролі незалежної змінної взято дугу *l*, яку відраховано від точки A. Практично в цих формулах *l* виражають через ту змінну (t, x, φ), яка виконує роль незалежної в аналітичному зображенні кривої. Статичні моменти M_x та M_y кривої дозволяють легко встановити положення її центра ваги $C(\xi,\eta)$. Точка C має таку властивість, що якщо в ній зосередити всю ”масу” L кривої, то момент цієї маси відносно будь-якої осі співпадає з моментом кривої відносно цієї осі. Координати центра ваги можуть бути визначені за формулами:

$$\xi = \frac{M_y}{L} = \frac{1}{L}\int_0^L xdl; \; \eta = \frac{M_x}{L} = \frac{1}{L}\int_0^L ydl. \qquad (19)$$

Із формули для ординати η центра ваги одержимо такий геометричний наслідок

$$\eta L = \int_0^L yds \text{, або } 2\pi\eta L = 2\pi\int_0^L ydl.$$

Звідси витікає перша теорема Гульдіна.

Величина поверхні, одержаної від обертання кривої навколо деякої не перетинаючої її осі, дорівнює довжині цієї кривої, помноженої на довжину кола, описаного центром ваги кривої (рис. 11)

$$S = 2\pi\eta L.$$

Приклад 18 |3|. Визначити центр ваги циклоїди $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

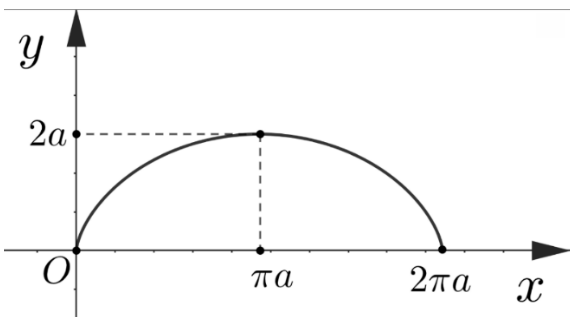

Рис. 12

Якщо взяти до уваги симетрію, то відразу ясно, що $\xi = \pi a$. Обчислимо другу координату η за формулою (19)

$$\eta = \frac{M_x}{L} = \frac{\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt}{\int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt} =$$

$$= \frac{a^2\int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}dt}{a\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}dt} = a\frac{\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 \frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt}{4} = \frac{a}{4}\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a}{4}\left(4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}a.$$

Знаходження статичних моментів та центра ваги плоскої фігури

Розглянемо плоску фігуру A_1ABB_1 (рис. 13), обмежену зверху кривою AB, яка задана явним рівнянням $y = f(x)$. Припустимо, що вздовж цієї фігури рівномірно розподілені маси, так що поверхнева їх густина ρ постійна. Не зменшуючи узагальнення можна припустити, що $\rho = 1$, тобто, що маса будь-якої частини нашої фігури вимірюється її площею. Це завжди розуміється, якщо мова йде про статичні моменти (або центр ваги) плоскої фігури. Статичні моменти відносно осей координат M_x та M_y плоскої фігури визначаються за формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xydx. \qquad (20)$$

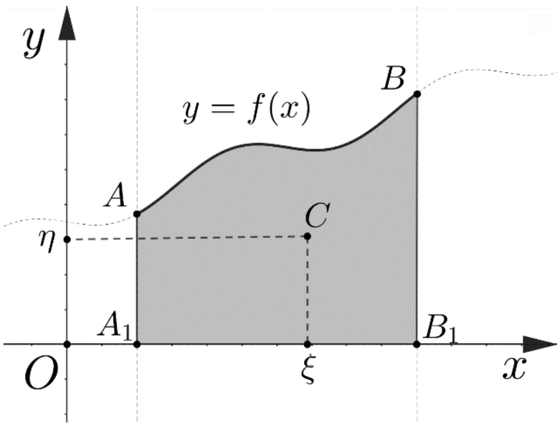

Рис. 13

За цими статичними моментами фігури відносно осей координат легко визначити координати ξ та η центра ваги фігури.

Якщо через S позначити площу (тобто масу) фігури, то для визначення ξ та η одержимо формули

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}; \quad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}. \qquad (21)$$

Одержимо важливий геометричний наслідок із формули для ординати центра ваги:

$$2\pi\eta S = \pi\int_a^b y^2dx.$$

Друга теорема Гульдіна: об’єм тіла обертання плоскої фігури навколо не перетинаючої осі дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного центром ваги фігури:

$$V = S \cdot 2\pi\eta.$$

Приклад 19 |4|

Знайти статичні моменти M_x, M_y та координати центра ваги фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$, віссю Ox та ординатою, відповідною абсцисі x. Так як $y = \sqrt{2px}$, то за формулами (20)

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^x xdx = \frac{1}{2}px^2,$$

$$M_y = \sqrt{2p}\int_0^x x^{3/2}dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{5/2}.$$

З другого боку площа

$$S = \sqrt{2p}\int_0^x x^{1/2}dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x^{3/2}.$$

В такому випадку за формулами (21)

$$\xi = \frac{3}{5}x; \quad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8}y.$$

Якщо фігура має вісь симетрії, то центр ваги її обов'язково лежить на цій осі.

Приклад 20 |1|.

Знайти центр ваги фігури, обмеженої віткою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, та віссю *Ox* ($0 \le t \le 2\pi$). Визначимо M_x, M_y за формулами (20):

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[\left(t - 3\sin t + 3\frac{t + 2\sin\frac{t}{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos^3 t dt\right] =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[5\pi - \left(\sin t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{5a^3\pi}{2}.$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\left[t - 2\sin t + \frac{t + 2\sin\frac{t}{2}}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2;$$

$$\eta = \frac{M_x}{S} = \frac{5}{6}a;$$

$$M_y = a^3\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt = a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t+\cos^2 t\right)(t-\sin t)dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t - \sin 2t - \cos^2 t\sin t\right)dt =$$

$$= a^2\left[\frac{t^2}{2} - 2(t\sin t + \cos t) + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right) + \cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^3\left[2\pi^2 + \pi^2\right] = 3\pi a^3;$$

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \pi a.$$

Знайдена координата центра ваги $\xi = \pi a$ відповідає симетрії фігури (рис. 12) відносно лінії $x = \pi a$.

ОБЧИСЛЕННЯ РОБОТИ

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a, b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (22)$$

Приклад 21 |5|

Яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 5 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 4 Н? Стиск гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі.

Розв'язок.

Сила $F = kx$, де k – стала. При $x = 0{,}01$м, $F = 4$Н, тому з рівності $4 = k \cdot 0{,}01$ знаходимо $k = 400$, отже $F(x) = 400x$, $0 \le x \le 0{,}05$. Тому за формулою (1) маємо

$$A = 400\int_0^{0{,}05} xdx = 0{,}5\,\text{Дж}.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ТИСКУ РІДИНИ НА ВЕРТИКАЛЬНУ ПЛАСТИНКУ

Як відомо, тиск рідини на горизонтальну площадку, занурену в рідину, визначається за законом Паскаля: тиск рідини на площадку дорівнює її площі S помноженій на глибину занурення h, густину рідини γ і на прискорення вільного падіння g

$$P = \gamma g h S.$$

Якщо в рідину занурити негоризонтальну площадку, то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і цією формулою користуватись не можна. Проте, якщо площадка дуже мала, то всі її точки лежать на майже одній глибині, яку і вважають за глибину занурення. Це дає змогу знайти dP на елементарну площадку, а потім і тиск на всю поверхню.

Приклад |4|

Знайти тиск рідини на вертикально занурений в рідину півкруг, діаметр якого дорівнює $2R$ і знаходиться на поверхні рідини.

Розв'язок.

Нехай елементарна площадка знаходиться на глибині x. Вважаючи її прямокутником з основою $2y$ і висотою dx, знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \gamma gx \cdot 2ydx = 2\gamma gx\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

$$P = 2\gamma g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\frac{2}{3}\gamma g\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}R^3\gamma g \,.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$.
2. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = 4ch\dfrac{x}{4}\ \left(x_1 = 0,\ x_2 = 4\right)$.
3. Лемніската $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ обертається навколо полярної осі. Визначити площу поверхні обертання.
4. Визначити статичні моменти M_x та M_y прямокутника довжиною a та висотою $в$.
5. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

Варіант 2

1. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $y = -x^2 + 4x - 3$ та дотичними до неї в точках (0; -3) та (3; 0).
2. Знайти довжину дуги параболи $y^2 = 2px$, обмеженої точками A(0, 0); B(2, 4p).
3. Лінія $y = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ обертається навколо осі Oy між точками з ординатами. $y_1 = 1, y_2 = e$. Знайти площу поверхні обертання.
4. Визначити координати центра ваги прямокутника довжиною $2м$ та висотою $4м$.

5. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем знаходиться деяка кількість газу. Газ розширився з об'єму V_1 до V_2 і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ? Процес розширення газу ізотермічний.

Варіант 3

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \arcsin x,\ y = \arccos x$.
2. Обчислити довжину дуги від $y_1 = a$ до $y_2 = b$ $(0 < b < a)$ кривої $x = \sqrt{a^2 - y^2} + a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right|$.
3. Парабола $y^2 = 4x$ обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм одержаного тіла обертання $(x_1 = 0,\ x_2 = 3)$.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x,\ y = x,$ $x = 0$.
5. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз. Радіус і висота конуса дорівнюють відповідно R і H.

Варіант 4

1. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t; \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$
2. Знайти довжину кривої $y = x^2(2p)^{-1}$ від $x_1 = 0,$ до $x_2 = a$.
3. Лінія $(x-4)y^2 = x(x-3)$ обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Знайти декартові координати центра ваги дуги астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$.
5. Визначити тиск води на вертикальний прямокутний шлюз з основою 18м та висотою 6м.

Варіант 5

1. Знайти площу, обмежену лінією $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$.
2. Знайти довжину дуги кривої $9ay^2 = x(x-3a)^2$.
3. Площа, обмежена лініями $y = \arcsin x$ та $x = 1$ обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Знайти координати центра ваги дуги кола радіуса a, стягуючого кут 2α.
5. За умовою задачі варіанта № 4 знайти, на якій глибині $x = c$ треба розділити шлюз горизонтальною прямою, щоб тиск води на верхню та нижню частини шлюзу був однаковий.

Варіант 6

1. Знайти площу, обмежену кривою $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.
2. Знайти довжину дуги кривої $\varphi = 0{,}5\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$.
3. Крива $y = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ обертається навколо осі *Ox*. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Знайти координати центра ваги лінії $y = ach\frac{x}{a}$ від $x = -a$ до $x = a$.
5. Визначити тиск води на вертикальну плотину, що має форму рівнобокої трапеції з основами a та b і висотою h.

Варіант 7

1. Знайти площу, обмежену кривими $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\cos x$ $\left(0 \le x \le a < \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури $y = b\left(xa^{-1}\right)^2$, $y = b\left|xa^{-1}\right|$ навколо осі *Ox*.
4. Визначити координати центра ваги області, обмеженої кривою $r = a(1 + \cos\varphi)$.
5. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла із вертикального циліндричного резервуара висотою $H = 6$ м і радіусом основи $R = 2$ м. Питома вага масла $\gamma g = 0{,}9$.

Варіант 8

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\rho = a\cos 5\varphi$.
2. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y_1 = 1$ до $y_2 = e$.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо прямої $x = a$ частини параболи $y^2 = 4ax$, яка цією прямою відсікається.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і дугою астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (в першому квадранті).
5. Швидкість тіла дається формулою $V = \sqrt{1 + t}$ м\сек. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 10 сек після початку руху.

Варіант 9

1. У якому відношенні парабола $y^2 = 2x$ ділить площу круга $x^2 + y^2 = 8$?
2. Знайти довжину кривої $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.
3. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$ навколо осі *Oy*.
4. Знайти площу поверхні обертання лінії $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ навколо осі *Oy*, $(0 \le t \le 2\pi)$.
5. При гармонійному коливальному русі по осі абсцис біля початку координат швидкість $V = \dfrac{dx}{dt}$ дається формулою $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{2\pi T}{T} + \varphi_0\right)$, де t – час, T – період коливань, φ_0 – початкова фаза. Знайти положення точки в момент часу t_2, якщо відомо, що в момент t_1 вона знаходилась в точці $x = x_1$.

Варіант 10

1. Знайти площу, обмежену кривою $r = 3 + 2\cos\varphi$.
2. Знайти довжину дуги лінії $y^2 = \dfrac{x^2}{2a - x}$ $\left(0 \le x \le \dfrac{5}{3}a\right)$.
3. Знайти площу поверхні обертання лінії $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$ навколо осі *Ox*.
4. Визначити координати центра ваги кругової дуги $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ $(|t| \le \alpha \le \pi)$.
5. Знайти тиск води на вертикальну пластинку у формі трикутника з основою a та висотою h, якщо її основа лежить на поверхні води.

Варіант 11

1. Знайти площу, обмежену кривою $r = a\sin 3\varphi$.
2. Визначити довжину дуги кривої $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, одержаними при обертанні ліній: $y = e^{-x};\ y = 0$ $(0 \le x < \infty)$ навколо осі *Ox*.
4. Знайти статичний момент дуги напівкола радіуса a відносно діаметра, що проходить через кінці цієї дуги.
5. Сила F, з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2, який знаходиться на відстані r, дорівнює $F = k\dfrac{e_1 e_2}{r^2}$, де k – стала. Знайти роботу електричної сили F, якщо заряд e_2 перемістився від a до b.

Варіант 12

1. Знайти площу, обмежену лінією $r = \dfrac{\rho}{1-\cos\varphi}$ $\left(\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, одержаною при обертанні лінії $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ навколо осі Oy.
4. Визначити координати центра ваги області, обмеженої параболами $ax = y^2$; $ay = x^2$ $(a > 0)$.
5. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

Варіант 13

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = tgx,\ y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Знайти довжину частини напівкубічної параболи $5y^3 = x^2$, що міститься в середині кола $x^2 + y^2 = 6$.
3. Фігура, обмежена гіперболою $x^2 - y^2 = a^2$ та прямою $x = a + h$ $(h > 0)$, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Знайти координати центра ваги області, обмеженої кривою $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.
5. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем знаходиться деяка кількість газу. Газ розширився з об'єму V_1 до V_2 і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ? Процес розширення газу ізотермічний.

Варіант 14

1. Знайти площу, обмежену лінією $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
2. Знайти довжину дуги розгортки кола $x = a(t\sin t + \cos t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$ при $0 \le t \le 2\pi$.
3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = a\cos\left(\pi x (2b)^{-1}\right)$ навколо осі Ox $(|x| \le b)$.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.
5. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз. Радіус і висота конуса дорівнюють відповідно R і H.

Варіант 15

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 2,\ x = 0$.
2. Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.
3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ навколо осі Ox.
4. Знайти статичний момент дуги параболи $y^2 = 2px \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ відносно прямої $x = 0{,}5p$.
5. Визначити тиск води на вертикальний прямокутний шлюз з основою 18м та висотою 6м.

Варіант 16

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $(y - x - 2)^2 = 9x;\ x = 0,\ y = 0$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y = e^{-x}$ від точки (0, 1) до точки (1, *e*).
3. Знайти об’єм, утворений обертанням навколо прямої $y = -p$ фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$ та прямою $x = 0{,}5p$.
4. Знайти координати центра ваги дуги астроїди $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$, що знаходиться в першому квадранті.
5. За умовою задачі варіанта № 4 знайти, на якій глибині $x = c$ треба розділити шлюз горизонтальною прямою, щоб тиск води на верхню та нижню частини шлюзу був однаковий.

Варіант 17

1. Знайти площу, обмежену лініями $y = x^2;\ y = 0{,}5x^2;\ y = 2x$.
2. Знайти довжину дуги кривої , $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.
3. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy фігури $x = 2(t - \sin t)\ y = 2(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої координатними осями та дугою еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить в першому квадратнті.
5. Визначити тиск води на вертикальну плотину, що має форму рівнобокої трапеції з основами a та b і висотою h.

Варіант 18

1. Знайти площу, обмежену лініями $y^2 = x^2 + 9;\ y = 0;\ y = 2x$.
2. Обчислити довжину дуги кривої $x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t$; $y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t$; $\left(t_1 = 0;\ t_2 = \pi\right)$.
3. Лінія $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу поверхні обертання.
4. Знайти координати центра ваги напівкола $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
5. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла із вертикального циліндричного резервуара висотою $H = 6$ м і радіусом основи $R = 2$ м. Питома вага масла $\gamma g = 0{,}9$.

Варіант 19

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 3\left(t^2 - 1\right),\ y = 3\left(t^3 - t\right)$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = 9x$ від точки (0, 0) до (9, 9).
3. Фігура, обмежена лініями $y^2 = x,\ x = 2$, обертається навколо осі Oy. Знайти об'єм тіла обертання.
4. Знайти координати центра ваги дуги $x = 2(t - \sin t);\ y = 2(1 - \cos t)$, $\left(t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi\right)$.
5. Швидкість тіла дається формулою $V = \sqrt{1 + t}$ м\сек. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 10 сек після початку руху.

Варіант 20

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 6t^2;\ y = 6t - 2t^3$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ $\left(x_1 = \dfrac{\pi}{4},\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Крива $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ обертається навколо полярної осі. Визначити площу поверхні обертання.
4. Визначити координати центра ваги фігури, обмеженої прямими $y = 3,\ y = 2x,\ x = 0$.
5. При гармонійному коливальному русі по осі абсцис біля початку координат швидкість $V = \dfrac{dx}{dt}$ дається формулою $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{2\pi T}{T} + \varphi_0\right)$, де t – час, T – період коливань, φ_0 – початкова фаза. Знайти положення точки в момент часу t_2, якщо відомо, що в момент t_1, вона знаходилась в точці $x = x_1$.

Варіант 21

1. Знайти площу, обмежену лініями $y = x,\ y = 2x,\ xy = 4$.
2. Знайти довжину кривої $y = 1 - \ln\cos x \ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right)$.
3. Лінія $ay = a^2 - x^2$ обертається навколо осі Ox. Знайти площу поверхні обертання.
4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням площі петлі кривої $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^2$ навколо осі Oy.
5. Знайти тиск води на вертикальну пластинку у формі трикутника з основою a та висотою h, якщо її основа лежить на поверхні води.

Варіант 22

1. Знайти площу кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.
2. Знайти поверхню тіла обертання утворену обертанням лінії $y = e^{-4x}$ навколо осі Ox $(0 \le x \le \infty)$.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінії $x = 4\cos t$, $y = 5\sin t$ навколо осі Ox.
4. Знайти статичний момент трикутної пластинки з основою b та висотою h відносно основи.
5. Сила F, з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2, який знаходиться на відстані r, дорівнює $F = k\dfrac{e_1 e_2}{r^2}$, де k – стала. Знайти роботу електричної сили F, якщо заряд e_2 перемістився від a до b.

Варіант 23

1. Знайти площу фігури, обмеженої гіперболою $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ та прямою $x = 2a$.
2. Знайти довжину гіпоциклоїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
3. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі Ox лінії $y = \left(1 + x^2\right)^{-1}$, $(-\infty < x < \infty)$.
4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням площі, обмеженої лінією $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, навколо полярної осі.
5. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

Варіант 24

1. Знайти площу кардіоїди $\rho = a(1 - \sin\varphi)$.
2. Знайти довжину кривої $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \le b)$ навколо осі *Ox*.
4. Лінія $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ обертається навколо осі *Ox*. Знайти площу поверхні обертання.
5. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем знаходиться деяка кількість газу. Газ розширився з об'єму V_1 до V_2 і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ? Процес розширення газу ізотермічний.

Варіант 25

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{5}{x^2+4};\ y = x^2$.
2. Знайти довжину дуги лінії $\varphi = \sqrt{r}\ \ (0 \le r \le 5)$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, одержаною при обертанні лінії $x = 2t - t^2,\ y = 4t - t^2$ навколо осі *Oy*.
4. Знайти координати центра ваги параболічного сегмента, обмеженого кривими $y = 2x - x^2;\ y = 0$.
5. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз. Радіус і висота конуса дорівнюють відповідно R і *H*.

Варіант 26

1. Визначити площу фігури, обмеженої лініями $y = 8x;\quad y = x^2 - 9$.
2. Знайти довжину дуги кривої $r = ath\dfrac{\varphi}{2}\ \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$.
3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = ach\dfrac{x}{2}$ навколо осі *Oy*, $(|x| \le b)$.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ та прямою $y = 0$.
5. Визначити тиск води на вертикальний прямокутний шлюз з основою 18м та висотою 6м.

Варіант 27

1. Обчислити площу, обмежену гіпоциклоїдою $x = 3\cos^3 t;\quad y = 3\sin^3 t$.

2. Знайти довжину дуги кривої $r = a\varphi \ \left(0 \le \varphi \le 2\pi\right)$.
3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y^2 = 2x \ \left(0 \le x \le x_0\right)$ навколо осі Oy.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею отриманою при обертанні ліній $y = 3x - x^2; \quad y = 0$ навколо осі Oy.
5. За умовою задачі варіанта № 4 знайти, на якій глибині $x = c$ треба розділити шлюз горизонтальною прямою, щоб тиск води на верхню та нижню частини шлюзу був однаковий.

Варіант 28

1. Знайти площу фігури, заданої в параметричному вигляді $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.
2. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $\left(x_1 = a, x_2 = b\right)$.
3. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \arcsin x; \ x = 1$ навколо осі Ox.
4. Знайти центр ваги дуги напівкола радіуса a, що стягує кут 2α.
5. Визначити тиск води на вертикальну плотину, що має форму рівнобокої трапеції з основами a та b і висотою h.

Варіант 29

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 6x; \ x^2 + y^2 = 16$.
2. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$.
3. Крива $y = tgx$ від (0, 0) до $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ обертається навколо осі Ox. Знайти площу поверхні обертання.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат та параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.
5. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла із вертикального циліндричного резервуара висотою $H = 6$ м і радіусом основи $R = 2$ м. Питома вага масла $\gamma g = 0{,}9$.

Варіант 30

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{1}{x^2}; y = 0; \ x = 1; \ x > 1$.
2. Знайти довжину дуги $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

3. Знайти об’єм поверхні обертання навколо осі Ox, утвореної лінією $y = e^{-x}$ від $x_1 = 0$; до $x_2 = \infty$.
4. Знайти координати центра ваги, симетричного параболічного сегмента з основою a та висотою h.
5. Швидкість тіла дається формулою $V = \sqrt{1+t}$ м\сек. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 10 сек після початку руху.

Варіант 31

1. Знайти площу фігури, обмеженою однією аркою циклоїди $y = 2(1-\cos t)$, $x = 2(t - \sin t)$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y = ach\dfrac{x}{2}$ від А(0, a) до В(b, h).
3. Площа, обмежена кривими $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ $(h > 0)$, обертається навколо осі Ox. Знайти об’єм тіла обертання.
4. Знайти декартові координати центра ваги дуги кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(\varphi_1 = 0;\ \varphi_2 = \pi)$.
5. При гармонійному коливальному русі по осі абсцис біля початку координат швидкість $V = \dfrac{dx}{dt}$ дається формулою $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{2\pi T}{T} + \varphi_0\right)$, де t – час, T – період коливань, φ_0 – початкова фаза. Знайти положення точки в момент часу t_2, якщо відомо, що в момент t_1 вона знаходилась в точці $x = x_1$.

Варіант 32

1. Знайти площу, обмежену лініями $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$, $y = 0$.
2. Знайти довжину дуги кривої $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)$ від $\rho_1 = 1$ до $\rho_2 = 3$.
3. Фігура, обмежена лініями $x = a$, $y^2 = 4ax$, обертається навколо осі Ox. Знайти об’єм тіла обертання.
4. Визначити статичні моменти лінії $\rho = 2a\sin\varphi$.
5. Знайти тиск води на вертикальну пластинку у формі трикутника з основою a та висотою h, якщо її основа лежить на поверхні води.

Варіант 33

1. Визначити площу обмежену лініями $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

2. Визначити довжину напівкубічної параболи $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$, що знаходиться всередині $y^2 = \frac{x}{3}$.
3. Фігура, обмежена лініями $y^2 = 4ax,\ x = 3a$, обертається навколо осі Ox. Визначити площу поверхні обертання.
4. Знайти координати центра ваги сегмента, обмеженого лініями $y = \sin x,\ y = 0{,}5$.
5. Сила F, з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2, який знаходиться на відстані r, дорівнює $F = k\frac{e_1 e_2}{r^2}$, де k – стала. Знайти роботу електричної сили F, якщо заряд e_2 перемістився від a до b.

Варіант 34

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 - 2y^2 = 1$.
2. Знайти довжину дуги кривої $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$, $(t_1 = 0,\ t_2 = \pi)$.
3. Лінія $y = 2ch\frac{x}{2}$ обертається навколо осі Ox від $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$. Знайти площу поверхні обертання.
4. Визначити статичні моменти відносно координатних осей фігури, обмеженої лініями $y = \frac{2}{1+x^2}, \quad y = x^2$.
5. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

Варіант 35

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = 2x,\ y = 0{,}5x^2,\ x = 2$.
2. Знайти довжину дуги кривої $x = 3\cos^5 t, \quad y = 3\sin^5 t$.
3. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ обертається навколо осі Ox. Знайти площу поверхні обертання.
4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0,\ y = 0$.
5. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем знаходиться деяка кількість газу. Газ розширився з об’єму V_1 до V_2 і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ? Процес розширення газу ізотермічний.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2001. 648 с.
2. Овчинников П. П. Вища математика : підручник : у 2 ч. Київ : Техніка, 2000. Ч. 2 : Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. 792 с.
3. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П Дубовик та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
4. Легеза В. П. Математичний аналіз : підручник : у 4 т. / відп. ред. Є. С. Сулема. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Політехніка, 2019. Т. 1. 334 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 2. 510 с.

Навчально-методичне видання

Максименкова Юлія Анатоліївна,
Михайлова Тетяна Федорівна,
Нечай Ігор Вікторович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи

В авторській редакції
Комп’ютерна верстка І. В. Нечай

Експертний висновок склав канд. фіз.-мат. наук, проф. Дмитро Волнянський

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 716 від 19.04.2024)

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,81.
Зам. № 42

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010