

Железнов К.І., Урсуляк Л.В.

Побудова оптимальної траєкторії руху поїзда в координатах Шлях - Час

Zhelieznov K I, Ursulyak L V

Creating the optimal trajectory of train movement in coordinates distance - time.

Мета. Автори мають за мету створити методику побудови оптимальної траєкторії з використанням сітки в координатах Шлях – Час та довести адекватність отриманих результатів за допомогою числових експериментів з вантажними поїздами. **Методика.** Запропонована раціональна функція для апроксимації залежності швидкості поїзда від пройденої відстані, щоб уникнути необхідності рішення системи диференціальних рівнянь руху поїзда. Для побудови оптимальної траєкторії руху поїзда наведені критерії вибору параметрів сітки в координатах Шлях – Час. Обґрунтовані інтервали між вузлами сітки з урахуванням можливих режимів ведення поїзда. Наведені особливості розрахунку значення кінцевої швидкості при проходженні ділянки конкретної довжини за допомогою запропонованої функції. Наведена методика реалізації управління рухом поїзда та розрахунок параметрів переходу між вузлами сітки. **Результати.** Авторами отримані можливі криві швидкості під час прискорення та уповільнення поїзда для різних значень початкової швидкості або під час руху поїзда на ділянці великою довжиною зі зміною режимів управління за допомогою запропонованої раціональної функції, а також доведено їх добре узгодження з результатами числових експериментів за належним вибором параметрів функції. Отримана система рівнянь, з рішення якої можна отримати величину швидкості в кінцевому вузлі переходу. Наведені також залежності сили тяги поїзда від швидкості руху для різних параметрів запропонованої функції. Отримані результати теоретичних досліджень дозволяють збільшити швидкість виконання обчислювань за рахунок застосування спрощених способів розрахунків стану поїзда, як керованої системи, та без використання диференціальних рівнянь руху. Це, у свою чергу, дозволить вирішувати завдання пошуку оптимального управління практично в режимі реального часу з урахуванням мінливих мов під час руху поїзда. **Наукова новизна.** Авторами вперше запропонована методика побудови оптимальної траєкторії руху поїзда в координатах Шлях – Час. **Практична значимість.** На основі отриманих результатів доведено, що запропонована методика дозволяє отримати криві швидкості при будь-яких режимах управління поїздом, а також реалізувати отримане управління поїздом. Запропоновані критерії дозволяють обмежити кількість варіантів рішень (режимів управління), що розглядаються на подальших етапах.

Ключові слова: оптимальна траєкторія; залізничний транспорт; параметри сітки, швидкості руху поїзда; реалізація управління; графічне рішення системи рівнянь;

Purpose. The purpose of the authors is to develop the method for creating the optimal trajectory of train, using the grid in the coordinates of the Distance - Time and to prove the adequacy of the results using numerical experiments with freight trains. **Methodology.** A rational function is proposed for the approximation of the dependence of the train speed on the traveled distance to avoid the solving the system of differential equations of the train motion. The criteria are provided for choosing the parameters of grid in the coordinates Distance - Time. Considering the possible modes of train control, the values of intervals between the grid nodes were met. The peculiarities of determining the value of the final speed when passing the section of a particular length using the proposed rational function are described. The method of implementing train control and calculating the transition parameters between the mesh nodes are given. **Findings.** The authors determined possible speed curves when a train accelerates and slows down, considering various initial speed values, and when the train moves with changing control modes. Also, it has been proved that the curves have a good coincidence with the results of numerical experiments. A system of equations is provided from which it is possible to get the final speed value when transition into the final node from the start node of the grid cell. The dependency of a traction and braking force from the speed for various parameters of the suggested function is calculated. The results of the theoretical research allow to increase the calculations speed by means of applying simplified methods of train state calculation without using of a differential equations, as a controlled system. This, in turn, will solve the task of searching for the optimal train control almost in real time, considering the changing conditions of the train movement. **Originality.** The authors for the first time proposed the method for creating the optimal trajectory of train movement in coordinates Distance - Time. **Practical value.** Based on of the gotten results it is proved that the suggested method allows to calculate actual speed curves for any modes of train control are implemented. The proposed criteria allow you to restrict the number of solution variants (control modes), which are considered in the further stages.

Keywords: optimal trajectory; railway transport; grid parameters, train speed; implementation of train control; graphic solution of the system of equations.

Вступ

У сучасних умовах ринкової економіки для всіх енергоспоживачів, включаючи залізничний транспорт, найбільш вагомим та визначальним фактором використання енергії стає вартість енергоносія. Успішна робота вітчизняних залізниць на ринку електроенергії пов'язана з подальшим

розвитком інформаційних технологій управління на залізничному транспорті, що поєднують системи електричної тяги і організації процесу перевезень з оптимальними режимами руху поїздів.

Загально відомо, що одним із засобів зменшення собівартості перевезень на залізничному транспорті є зниження енерговитрат на ведення

© Железнов К.І. – УДУНТ
Урсуляк Л.В.– УДУНТ

Zhelieznov K – USUST
Ursulyak L – USUST

поїздів. Найменш витратним способом досягнення цієї мети є впровадження тренажерних комплексів для навчання енергооптимальним та безпечним режимам управління поїздом. Існує безліч методів, призначених для розрахунку таких режимів. Побудові оптимальної траєкторії руху різних об'єктів присвячено багато робіт [1-9]. У даній роботі розглянута методика побудови оптимальної траєкторії руху вантажних поїздів.

Оптимальна траєкторія руху може бути побудована або в координатах Швидкість – Шлях або в координатах Шлях – Час. Побудова оптимальної траєкторії з використанням сітки в координатах Швидкість – Шлях не дозволяє відразу отримати траєкторію руху поїзда, яка забезпечує заданий час ходу по ділянці. В результаті, для досягнення прийнятної для часу ходу результату, доводиться вводити додаткові критерії і повторювати розрахунок кілька разів. А в деяких ситуаціях, коли ресурси управління сильно обмежені і параметри сітки за шляхом та/або за швидкістю обрані недостатньо малими, досягти хоча б приблизно необхідного часу ходу взагалі не вдається. Це означає, що при вибраних параметрах рішення, значення часу ходу при невеликій зміні додаткового критерію дуже відрізняються один від одного. У таких випадках не залишається нічого іншого, як зменшувати крок сітки за шляхом та/або за швидкістю та повторювати всі розрахунки спочатку.

Якщо побудувати сітку в координатах Шлях – Час, то кінцева точка побудованої траєкторії руху буде відповідати переміщенню поїзда на задану відстань за заданий час. В результаті рішення задачі зводиться до пошуку безлічі допустимих управлінь, що переводять поїзд з даного вузла сітки в наступний за умови дотримання всіх обмежень.

Мета

Враховуючи вищезгадане, автори мають за мету створити методику побудови оптимальної траєкторії руху з використанням сітки в координатах Шлях – Час та довести адекватність отриманих результатів за допомогою чисельних експериментів з вантажними поїздами.

Методика

1. Побудова сітки Шлях – Час.

При побудові сітки в координатах Шлях – Час, при умові що кінцева точка побудованої траєкторії руху буде відповідати переміщенню поїзда на задану відстань за заданий час, буде виконано ізопериметричне обмеження:

$$T_{fin} = \int_0^{S_{fin}} \frac{dx}{v(x)} \quad (1)$$

В результаті рішення цієї задачі зводиться до пошуку безлічі допустимих управлінь, що переводять поїзд з вузла сітки $A(0,0)$ у вузол

$B(T_{fin}, S_{fin})$ за умови дотримання всіх обмежень (див. рис. 1). Вузлами сітки називатимемо точки перетину її горизонтальних та вертикальних ліній, а перерізами – горизонтальні або вертикальні лінії, що відповідають постійним значенням шляху або часу).

Для побудови сітки в координатах Шлях – Час необхідно вибрати крок між вузлами сітки за шляхом та часом. Для вибору кроку за часом можна встановити «мінімальний інтервал управління». Справді, будь-яке керування поїздом, будь то режим тяги, електричного чи пневматичного гальмування, вимагає виконання деяких маніпуляцій органами управління локомотива та складу. Будь-яка така маніпуляція може бути виконана за певний інтервал часу. Так, набір або скидання тяги (крім аварійного) для будь-якого локомотива може бути виконано за кінцевий і певний проміжок часу. Наприклад, для дуже поширеного в Україні вантажного локомотиву ВЛ-80 мінімальний час набору або скидання тягових позицій визначається швидкістю обертання головного контролера і становить 33 позиції за 25 с. Для не менш поширеного пасажирського локомотива ЧС-7 час набору або скидання визначається швидкістю обертання головного барабана проміжного контролера та становить приблизно 56 позицій за 18 с. Для локомотивів, що не мають проміжних елементів управління тягою та електричним гальмуванням, час управління може бути значно меншим, однак і в цьому випадку швидкість зміни тягового або гальмівного зусилля не може бути надто високою через можливе виникнення великих поздовжніх сил у поїзді. Для тепловозів швидкість набору тягових позицій обмежена швидкістю розгону дизель-генераторної установки. У загальному випадку ця величина може визначатися для конкретного типу локомотива окремо.

У режимі пневматичного гальмування поїзда «мінімальний інтервал управління» значно більший. Так, у режимі регульовального гальмування вантажного поїзда мінімальний час гальмування згідно з ПТР становить 0,2...0,4 хв (12...24 с) залежно від ступеня гальмування, час відпустки – 1,5...2 хв (90...120 с). Для пасажирського поїзда цей час становлять: 0,2...0,25 хв (12...15 с) і 0,5...1 хв (30...60 с) відповідно. Таким чином, видно, що величина "мінімального інтервалу управління" в режимі пневматичного гальмування може змінюватися від десятків секунд до 2-х хвилин і навіть більше. Для визначення будемо вважати, що для регулювання швидкості руху поїзда застосовується лише друга ступінь гальмування. У цьому випадку «мінімальний інтервал управління» складає 2,1 хв (126 с) для вантажного поїзда та 1 хв (60 с) для пасажирського. Отже, крок сітки за часом (ΔT_{min}) повинен бути не менше 126

с, щоб об'єкт управління (поїзд) встигав реалізувати всі можливі управління.

Що стосується кроку сітки за шляхом, то він повинен бути кратний 100м (пікету), для того, щоб машиністу було простіше орієнтуватися в дорозі

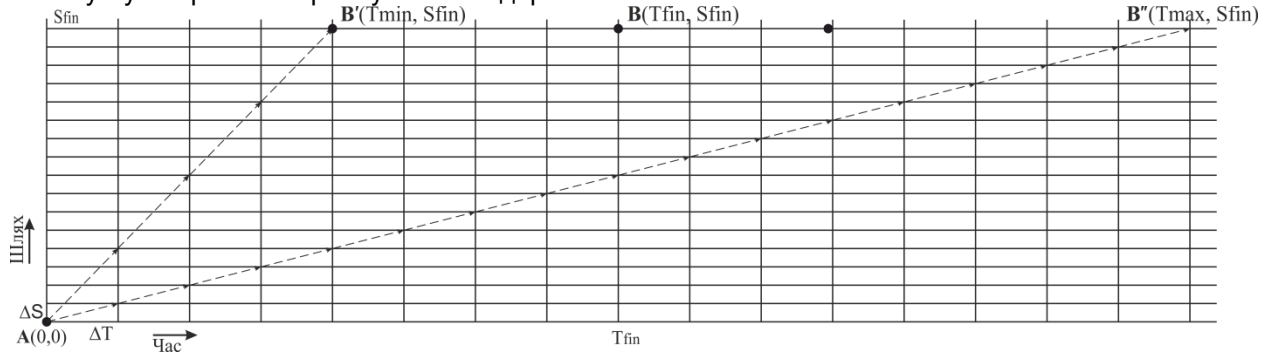


Рис. 1. Загальний вид сітки Шлях – Час

Так як на більшості локомотивів досі застосовуються механічні швидковимірювачі, доцільно задати крок зміни швидкості, що дорівнює $\Delta V=5$ км/год. Тоді крок сітки по шляху слід вибирати із співвідношення:

$$\Delta S / \Delta V \geq \Delta T_{\min} \quad (2)$$

Якщо прийняти $\Delta S=200$ м, то за $\Delta V=5$ км/год крок за часом становитиме $\Delta T=144$ с, що задовольняє умові (2). Таким чином, у першому наближенні можна прийняти крок сітки за шляхом $\Delta S=200$ м, а за часом $\Delta T=144$ с. Взагалі ж, може виникнути ситуація, при якій не знайдеться жодного управління, з-поміж можливих, що дозволяє перевести поїзд з поточного стану в стан, що відповідає наступному вузлу сітки. У цьому випадку пошук управління для такого переходу може бути виконаний з розбиттям кроку за шляхом та часу на частини (побудовою «підсітки»). Але при цьому слід мати на увазі, що при такому варіанті пошуку управління поїздом на режими управління повинні бути накладені обмеження. Наприклад, якщо на перших кроках пошуку по підсітці визначено, що повинен бути реалізований режим тяги, то на всіх інших кроках цей режим повинен бути збережений або змінений на режим вибігу, але ніяк не гальмування, оскільки послідовність режимів тяги та гальмування ніяк не можуть бути реалізовані у встановлений інтервал часу, обраний з умови реалізації якогось одного режиму управління.

2. Визначення швидкості у кінцевому вузлі переходу.

Слід врахувати, що побудова траєкторії руху поїзда в координатах Шлях – Час має ряд особливостей. Однією з них є неможливість використання всіх вузлів сітки під час пошуку переходів. Справді, однією з неявних умов вирішення цієї

при реалізації режимів управління поїздом. Величину кроку сітки за шляхом можна вибрати, задавши кроком зміни швидкості.

задачі є вимога безупинного руху поїзда. Це неможливість «горизонтальних» відрізків траєкторії, тобто максимально можливий час досягнення кінцевої точки шляху визначається вузлом $B'(T_{\max}, S_{fin})$ (див. рис.1). У той же час, через наявні завжди обмеження з управління поїздом, неможливі і «як завгодно круті» відрізки траєкторії, тобто мінімальний час руху по ділянці буде визначатися вузлом $B''(T_{\min}, S_{fin})$ (див. рис.1). На практиці з вузлом B'' більш-менш просто – його становище визначається реалізацією руху поїзда з мінімальною швидкістю. Розмір цієї швидкості можна вибрати з технічних міркувань. Наприклад, для тепловозів існує мінімальна швидкість, при якій дизель-генераторна установка зберігає керуваність. Складніше визначити траєкторію руху від вузла A до B' , а отже, і положення вузла B' . Тут справа в тому, що на величину максимальної швидкості руху поїзда істотно впливає поздовжній профіль колії (звичайно, він впливає і на величину мінімальної швидкості, але все ж таки поїзд повинен бути забезпечений гальмівними засобами настільки, щоб мати можливість знизити швидкість аж до зупинки). Для побудови траєкторії $A - B'$ можна скористатися кривою обмеження швидкості руху поїзда для конкретної ділянки колії. В результаті ця траєкторія буде ламаною лінією, але її наявність дозволить виключити значну кількість вузлів з пошуку допустимих переходів від поточного вузла до наступного. Побудова цієї кривої може бути виконано згідно з наступним алгоритмом.

Припустимо, що обмеження швидкості змінюються у вузлових точках, зображених на рис. 2.

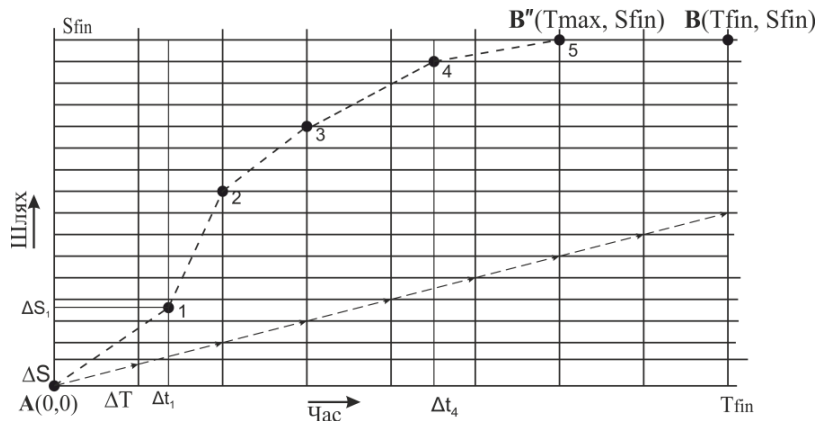


Рис. 2 Побудова кривих обмежень

Припустимо для вузла «1» координата за шляхом визначається довжиною обмеження швидкості $L_1 = 3\Delta S + \Delta s_1$, а координата за часом обчислюється виходячи з виразу:

$$T_1 = \Delta T + \Delta t_1 = \frac{L_1}{V_1^{lim}} \quad (3)$$

Інші вузлові точки обмежень отримують таким же чином. При цьому, як видно з рис. 2, на сітці можуть з'явитися нові перерізи за шляхом та/або за часом, якщо величини $\Delta s_1, \Delta t_1$ не достатньо малі та ними не можна знехтувати. З величинами Δs_i справа простіше - довжини практично всіх обмежень швидкості кратні 100 метрів, які будуть не кратні, завжди можна округлити у більшу сторону для кінців обмежень при переході від меншої швидкості до більшої і в меншу – для початку обмежень при переході від більшої швидкості до меншої, таким чином зони обмежень швидкості не будуть звужені. Для величин Δt_i – можна здійснити перенесення перетину за часом ліворуч, якщо величина Δt_i мала і праворуч, якщо $\Delta t_i \cong \Delta T$. Якщо ж величина Δt_i не близька ні до нуля, ні до ΔT , доведеться ввести додатковий переріз за часом і розглянути питання про побудову підсітки, як описано вище. Після побудови кривих **A-B'** і **A-B''** всі вузли, що лежать вище і нижче цих кривих, виключаються з пошуку переходів. Тим самим час вирішення задачі буде суттєво скорочено.

Іншою особливістю побудови кривої швидкості у координатах Шлях – Час, є невизначеність величини кінцевої швидкості, тобто швидкості у кінцевому вузлі переходу (у точці $[L_{i+1}, \Delta T_{i+1}]$). Справді, початкова швидкість (швидкість у початковій точці переходу $[L_i, \Delta T_i]$) завжди відома. На початку сітки (при зрушенні з місця) ця швидкість дорівнюватиме нулю, або якомусь заданому значенню. Для довільного вузла сітки ця швидкість

дорівнюватиме швидкості в кінцевому вузлі при попередньому переході по вузлах сітки. Визначити кінцеву швидкість можна з виразу:

$$\Delta T_{i+1} = \int_0^{\Delta L} \frac{ds}{v(s)}, \quad (4)$$

$$\Delta L = L_{i+1} - L_i. \quad (5)$$

Тут величини $\Delta T_{i+1}, L_i, L_{i+1}$ відомі і, для відомої функції $v(s)$, може бути визначена швидкість у кінцевій точці інтервалу шляху L_{i+1} . Проте, щоб визначити залежність швидкості від шляху, необхідно вирішити диференціальне рівняння руху поїзда при відомому управлінні. Але на цьому етапі управління тільки шукається, тобто у такій постановці задача визначення кінцевої швидкості руху на відрізку шляху не може бути вирішена.

Але якщо вибрати деяку функцію зміни швидкості поїзду від шляху, яка могла б досить точно описувати реальну зміну швидкості, то залишиться визначити тільки параметри такої функції. В якості такої функції можна обрати наступний вираз:

$$v(s) = V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s + b}. \quad (6)$$

Параметр ΔV у цьому виразі дозволить задати збільшення/зменшення швидкості, а параметр **b** – регулювати кривизну. Така функція дозволить побудувати монотонні криві швидкості з різною кривизною як для розгону, так і для уповільнення поїзда. Вираз (6) дозволяє побудувати криву швидкості, значення якої в кінцевій точці ($s = \Delta L$) відрізка шляху відповідатиме значенню кінцевої швидкості V_f ($V_f = V_b + \Delta V$), де V_b - значення швидкості на спочатку відрізка ΔL .

3. Реалізація управління поїзду та розрахунок параметрів переходу між вузлами сітки.

Отже, якщо зупинитися на припущенні, що крива швидкості поїзда при переході між вузлами перетину сітки Час – Шлях змінюється відповідно

до виразу (6), то зміну швидкості можна визначити

$$\frac{d(V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b})}{ds}$$

за формулою: , тобто

$$\frac{dv}{ds} = \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{b}{(s+b)^2} \quad (7)$$

Це в свою чергу дає можливість визначити прискорення поїзду:

$$a = V \cdot \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{b}{(s+b)^2} \quad (8)$$

та величину сили тяги або гальмування без урахування інших сил, які діють на поїзд:

$$F_a = m \cdot a = m \cdot V \cdot \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{b}{(s+b)^2} \quad (9)$$

де m - маса поїзду.

Якщо врахувати, що на поїзд діє не тільки сила інерції, але і сили від поздовжнього профілю колії W_i та сили основного опору руху поїзда W_o , то для реалізації кривої швидкості, яка задана виразом (6), сила тяги або гальмування локомотива повинна змінюватися відповідно до виразу:

$$F_{total} = W_i + W_o + m \cdot V \cdot \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{b}{(s+b)^2} \quad (10)$$

Оскільки зміну кривої швидкості від шляху можна визначити за формулою (6), то, якщо потрібно, можемо отримати залежність сил тяги або гальмування від швидкості руху $F(V)$.

Результати

Приклади графіків швидкості для випадку розгону та уповільнення поїзда, які отримані за формулою (6) наведено на рис. 3 та 4. Як приклад, на зазначених графіках величина ΔL приймалася рівною 500 метрів, а ΔV дорівнювала 20 км/год під час прискорення (рис. 3) та 30 км/год під час уповільнення (рис. 4) поїзду. Значення параметру b змінювалось у діапазоні -1000 ...+100000. Тут при прискоренні руху додатним значенням параметра b відповідають опуклі криві, а від'ємним – увігнуті, а при уповільненні - навпаки. При великих величинах цього параметра (додатних чи від'ємних) крива швидкості стає близькою до лінійної. Слід зазначити, що параметр b не повинен набувати значення з інтервалу $[-L_i, 0]$, щоб крива швидкості не мала розривів.

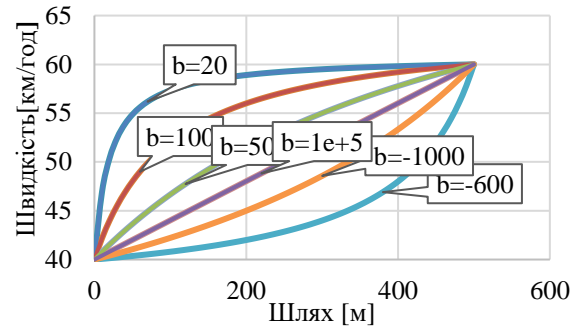


Рис. 3 Можливі криві швидкості під час прискорення поїзда

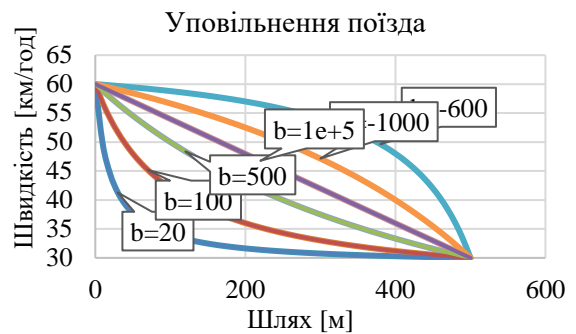


Рис. 4. Можливі криві швидкості під час уповільнення поїзда

Як видно з цих рисунків варіації параметра b у виразі (6) дає можливість отримати різні опуклі та увігнуті криві швидкості руху.

Звичайно, реальна крива швидкості може відрізнитись від наведеної залежності, більш того, вона може бути не монотонною. Але:

варіюючи величину кроку сітки за шляхом, завжди можна розділити не монотонну криву швидкості на ділянки з монотонними кривими;

велика інерційність поїзда дозволяє припускати, що його швидкість не може змінюватися швидко;

у разі отримання незадовільних результатів (наприклад, через суттєве розбіжність реальної кривої швидкості з кривою, отриманою за формулою (6), можливі відхилення від заданого часу ходу ΔT_i на відрізку шляху $[0, \Delta L]$) завжди є можливість замінити вираз (6) більш відповідним.

Але в даний момент метою є все ж таки не побудова бажаної кривої швидкості руху поїзда, а визначення кінцевої швидкості на ділянці руху довжиною ΔL .

Для цього подивимося, як точно за допомогою виразу (6) можна апроксимувати реальні криві зміни швидкості. Для цього проведено кілька чисельних експериментів з розгону вантажного поїзда вагою 3500 т та довжиною 50 піввагонів (700 м) на прямій горизонтальній ділянці колії довжиною 700 метрів при різних початкових швидкостях та різних управліннях. В якості локомотиву

обрано досить поширений локомотив змінного струму ВЛ-80т. Розрахунки виконувались для початкових швидкостей 10, 30 та 40 км/год. Тягові позиції вибиралися так, щоб при всіх початкових швидкостях величина сили тяги була б в одному випадку невеликою (близько 250кН, що відповідає режиму підтримки швидкості на підйомі), а в іншому великою (порядку 450кН, що відповідає розгону поїзда). При оцінці ступеня збігу розрахункової кривої швидкості та кривої, отриманої за формулою (6), порівнювалися величини середньої швидкості руху на заданому відрізку шляху, кінцевої швидкості та часу ходу. Останній критерій особливо важливий, так як час ходу повинен максимально відповідати значенню в кінцевому вузлі сітки, оскільки відхилення можуть накопичуватися і призвести до істотних розбіжностей у кінцевій точці. Параметр ΔV у формулі (6) задавався як різниця початкової швидкості та швидкості в кінці відрізка шляху, отриманої в ході чисельного експерименту. Величина параметра b підбиралася так, щоб забезпечити прийнятну точність насамперед у кінцевому вузлі.

Результати розрахунків наведено на рис. 5 та у таблиці 1. Суцільні лінії – результати чисельних експериментів, точки – розрахунки за формулою (6) з додатними значеннями параметру b , числами вказані номери тягових позицій. Як видно з рисунку і таблиці криві швидкості, розраховані за формулою (6) досить близькі до результатів чисельних експериментів, а значення показників, наведені в табл.1, дають достатньо підстав для того, щоб використовувати формулу (6) для отримання наближеної кривої швидкості при переході між вузлами сітки. Невеликі відхилення кінцевих швидкостей пояснюються тим, що закінчення чисельних експериментів відбувалося за пройденим шляхом, а інтегрування виконувалося за часом, таким чином, кінцева точка за шляхом була близька, але не дорівнювала заданому значенню.

Аналогічні розрахунки виконані для режиму гальмування поїзда. При цьому застосовувалася 2-а ступінь регульовального гальмування для різних початкових швидкостях і швидкостях відпустки. Результати наведено на рис. 6 і в таблиці 2. Тут завжди величини параметра b були від’ємні.

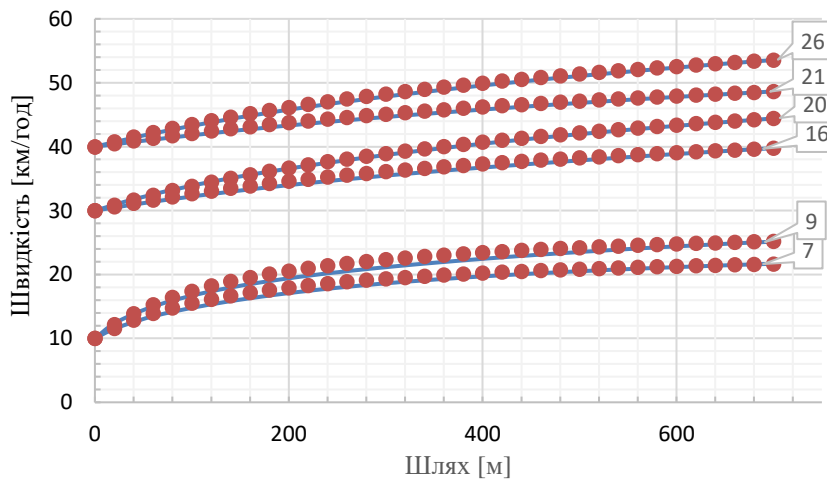


Рис. 5. Криві швидкості під час прискорення поїзда

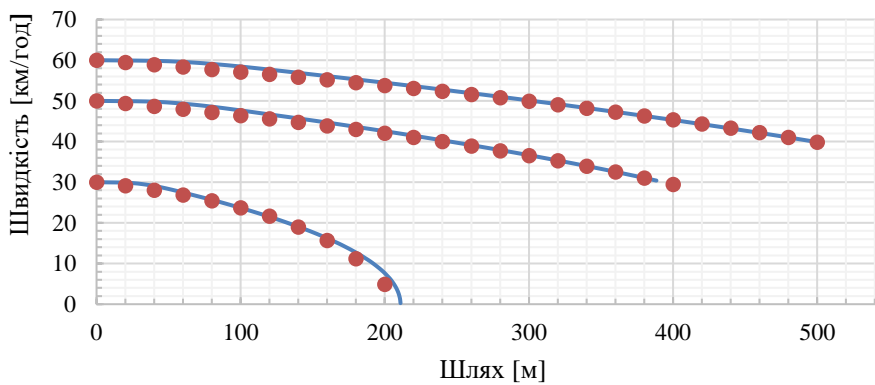


Рис. 6. Криві швидкості при гальмуванні з різних початкових швидкостей

Таблиця 1
Значення швидкостей та часу ходу під час прискорення поїзду

Номер тягової позиції	7		9		16		20		21		26	
	Моделювання	формула (6)	Моделювання	формула (6)	Моделювання	формула (6)	Моделювання	формула (6)	Моделювання	формула (6)	Моделювання	формула (6)
Середня швидкість, км/год	18,35	19,27	20,92	22,11	35,80	37,15	39,06	40,09	45,00	46,52	48,28	49,74
Кінцева швидкість, км/год	21,65	21,66	25,13	25,22	39,76	39,76	44,48	44,42	48,61	48,63	53,61	53,57
Час ходу, с	142,0	143,17	125,00	126,38	71,00	72,22	66,00	67,31	57,00	57,50	53,00	53,97

Таблиця 2
Значення швидкостей та часу ходу при гальмуванні поїзду

Діапазон швидкостей [км/год]	60 - 40		50 - 30		30 - 0	
	Моделювання	Вираз (.6)	Моделювання	Вираз (.6)	Моделювання	Вираз (.6)
Середня швидкість [км/год]	51,57	53,76	41,90	44,54	21,26	21,90
Кінцева швидкість [км/год]	40,12	39,85	30,39	29,48	0,26	4,87
Час ходу, с	36,00	37,08	35,00	37,60	46,00	33,13

Наведені результати підтверджують висновки, зроблені вище, про задовільний збіг кривої швидкості, отриманої в результаті числових експериментів і за формулою (6). Значні відхилення кінцевої швидкості і часу в останньому стовпці таблиці 2 немає істотного значення, так як це зупинкове гальмування (тобто. перехід в останній вузол), і воно практично ніяк не впливає на результати розрахунків оптимальної траєкторії руху поїзда.

Але в даний момент метою є все ж таки не побудова кривої швидкості руху поїзда без інтегрування рівняння руху поїзда, а визначення кінцевої швидкості при переході між вузлами сітки. Вираз (6), який використовувався для отримання кривої

швидкості, має два невідомі параметри: ΔV і \mathbf{b} . При отриманні вищенаведених результатів ми спростили собі завдання тим, що задавали величину ΔV як різницю кінцевої і початкової швидкості з чисельного експерименту. Насправді, при розрахунку значення швидкості в кінцевому вузлу переходу величина ΔV буде не відома. Будуть відомі лише час переходу ΔT між вузлами сітки та відстань між вузлами ΔL .

Рівняння, що пов'язує невідомі параметри виразу (6) з часом ходу виглядатиме так:

$$\Delta T = \int_0^{\Delta L} \frac{ds}{(V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b})} \quad (11)$$

Проте, для однозначного визначення кривої швидкості потрібно знати два параметри ΔV і \mathbf{b} , тобто потрібно ще одне рівняння, що пов'яже ці параметри з певним відомим значенням. Таким відомим значенням є параметр ΔL . Для того, щоб використовувати його, виразимо пройдений шлях через середню швидкість V_a та час ходу ΔT :

$$V_a = \frac{1}{\Delta L} \int_0^{\Delta L} (V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b}) ds \quad (12)$$

де $\Delta L = V_a \cdot \Delta T$.

Таким чином:

$$\Delta L = \frac{\Delta T}{\Delta L} \int_0^{\Delta L} (V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b}) ds \quad (13)$$

Остаточно для визначення кінцевої швидкості маємо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta T = \int_0^{\Delta L} \frac{ds}{(V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b})} \\ \Delta L = \frac{\Delta T}{\Delta L} \int_0^{\Delta L} (V_b + \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L} \cdot \frac{s}{s+b}) ds \end{cases} \quad (14)$$

Для перетворення її на більш прийнятний вигляд введемо позначення:

$$C = \Delta V \frac{\Delta L + b}{\Delta L}, \quad D = 1 + \frac{C}{V_b} \quad (15)$$

Тоді вираз (6) можна представити у вигляді:

$$v(s) = V_b \frac{D \cdot s + b}{s + b} \quad (16)$$

Після інтегрування отримаємо систему рівнянь (17) з двома невідомими вихідними параметрами D (або ΔV) та \mathbf{b} , з рішення якої можна отримати величину швидкості в кінцевому вузлу переходу:

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{1}{V_b \cdot D^2} \left[b \cdot (D-1) \ln \left(\frac{D \cdot \Delta L + b}{b} \right) + D \cdot \Delta L \right] \\ \Delta L = \frac{\Delta T}{\Delta L} V_b \left[b \cdot (D-1) \ln \left(\frac{\Delta L + b}{b} \right) + D \cdot \Delta L \right] \end{cases} \quad (17)$$

Рішення цієї системи – задача не тривіальна, можливо існує спосіб точного рішення такої системи рівнянь. Але навіть якщо такого способу не існує завжди можна скористатися чисельними методами. Поки що покажемо, які результати можуть бути отримані в ході розв'язання такої системи рівнянь, не заглиблюючись у теорію

розв'язання таких систем рівнянь. Для цього просто будуватимемо криві, що відповідають кожному, трохи зміненому рівнянню:

$$\begin{cases} \Delta T - \Delta T^* = 0, \Delta T^* = \frac{1}{V_b \cdot D^2} \left[b \cdot (D-1) \ln \left(\frac{D \cdot \Delta L + b}{b} \right) + D \cdot \Delta L \right] \\ \Delta L - \Delta L^* = 0, \Delta L^* = \frac{\Delta T}{\Delta L} V_b \left[b \cdot (D-1) \ln \left(\frac{\Delta L + b}{b} \right) + D \cdot \Delta L \right] \end{cases} \quad (18)$$

Перетин кривих, що відповідають рівнянням цієї системи, не обов'язково відбудеться в точці $\Delta T - \Delta T^* = 0$ та $\Delta L - \Delta L^* = 0$. Цілком можливо це

станеться в якійсь точці $\Delta T - \Delta T^* = \delta T$,

$\Delta L - \Delta L^* = \delta L$. У цьому випадку необхідно буде оцінювати допустимість відхилення величин δT та δL від нуля. Щоб це було зручно робити, введемо узагальнений безрозмірний критерій:

$$Q = 100 \sqrt{\frac{(\Delta T - T^*)^2}{\Delta T^2} + \frac{(\Delta L - L^*)^2}{\Delta L^2}} \quad (19)$$

Коефіцієнт перед коренем обраний довільно для того, щоб результати були більшими за нульові.

Результати наведено в таблиці 3. Параметри $\Delta L, V_b, \Delta T$ прийняті за вихідні дані, V_a - середня швидкість, (її необхідність буде пояснена пізніше), $\Delta V, \mathbf{b}$ - параметри кривої швидкості, що шукаються. Тут V_b значення швидкості у попередньому вузлу сітки, $\Delta L, \Delta T$ - відомі інтервали сітки. Значення з найкращими, для заданих вихідних величин, результатами виділені в таблиці 3 жирним шрифтом. На рис.7 наведено графіки рівнянь системи (18).

З наведених результатів видно, що при вибраному значенні ΔV значення параметру \mathbf{b} , для якого отримані результати з мінімальними відхиленнями від заданих параметрів $\Delta L, \Delta T$ знаходиться в діапазоні 800. Крім того, криві на рис. 7 перетинаються близько до нуля. Це означає, що з заданих вихідних даних система рівнянь (18) має розв'язання.

Якщо розглянути діапазон значень параметра \mathbf{b} у цьому районі докладніше, можна визначити більш точно його значення, а змінюючи величину ΔV – ще наблизити точку перетину кривих до нуля, тобто. отримати ще точніше значення рішення системи (18). Але і при таких значеннях параметрів ΔV і \mathbf{b} відхилення від точного рішення $[\delta L = -1\text{м}; \delta T = -1,1\text{с}]$ від нуля при заданих вихідних даних [700 м, 60 с] цілком прийнятні.

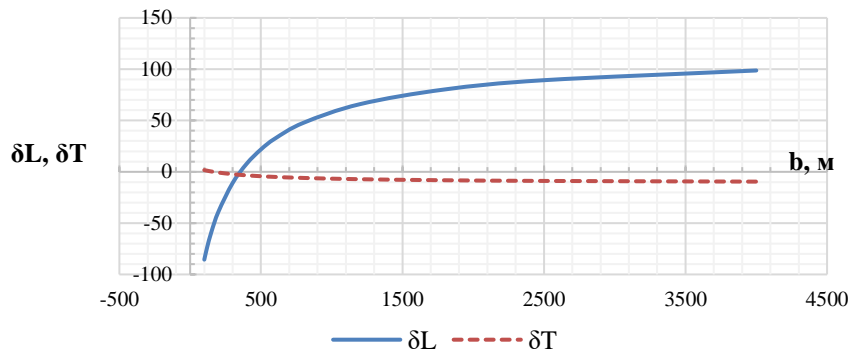


Рис.7. Графічне рішення системи рівнянь (18) при $\Delta T = 60$ с та $\Delta V = 20$ км/год

Таблиця 3

Результати рішення системи рівнянь (18) при $\Delta T = 60$ с та $\Delta V = 20$ км/год

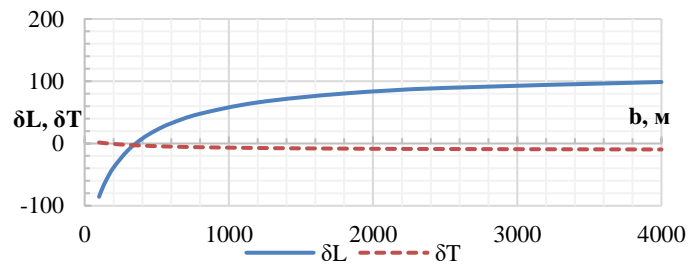
ΔL , м	700	Вихідні данні											
V_b , км/год	30												
ΔT , с	60												
ΔV , км/год	20	$V_b = \frac{\Delta L}{\Delta T}$, км/год		42									
b	100	120	150	200	300	400	500	600	800	1200	1800	2500	4000
C	22,9	23,4	24,3	25,7	28,6	31,4	34,3	37,1	42,9	54,3	71,4	91,4	134,3
L^*	768	762	754	744	730	721	714	709	701	692	685	680	676
T^*	55	56	56	57	58	59	60	60	61	62	63	63	63
$\delta L = L - L^*$	-68	-62	-54	-44	-30	-21	-14	-9	-1	8	15	20	24
$\delta T = T - T^*$	4,7	4,2	3,6	2,8	1,6	0,7	0,1	-0,4	-1,1	-1,9	-2,6	-3,0	-3,5
Q	124,5	112,8	97,9	78,3	50,6	32,3	20,2	14,1	18,1	34,1	48,5	57,9	67,8

Розглянемо інші вихідні дані, прийнявши $\Delta T = 30$ с та $\Delta V = 80$ км/год. Поки не аналізуватимемо

можливість переміщення поїзда за такий час на таку відстань, а просто подивимося на результати рішення системи (18).

Таблиця 4

ΔL , м	700	Вихідні данні											
V_b , км/год	30												
ΔT , с	30												
ΔV , км/год	80	$V_b = \frac{\Delta L}{\Delta T}$, км/год		84									
b, м	100	120	150	200	300	400	500	600	800	1200	1800	2500	4000
C	91,4	93,7	97,1	102,9	114,3	125,7	137,1	148,6	171,4	217,1	285,7	365,7	537,1
L^*	786	774	759	739	711	692	678	668	652	634	620	611	601
T^*	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\delta L = L - L^*$	-86	-74	-59	-39	-11	8	22	32	48	66	80	89	99
$\delta T = T - T^*$	1,7	1,1	0,3	-0,7	-2,3	-3,4	-4,3	-5,0	-6,0	-7,2	-8,2	-8,9	-9,6
Q	134,8	111,6	84,5	60,5	78,5	115,1	146,5	172,0	210,4	258,1	297,0	321,9	348,7

Результати рішення системи рівнянь (18) при $\Delta T = 30$ с та $\Delta V = 80$ км/годРис.8. Графічне рішення системи рівнянь (18) при $\Delta T = 30$ с та $\Delta V = 80$ км/год

Для таких вихідних даних узагальнений критерій показує, що найбільш прийнятне значення параметра \mathbf{b} при вибраному значенні ΔV буде лежати в діапазоні 200 - 300. Але найменші відхилення за шляхом і за часом лежать в іншому діапазоні значень параметра \mathbf{b} . Для відхилення за шляхом це буде 300 - 400, а для відхилення за часом - 150 - 200. При цьому відхилення за часом невелике (від 0,3 до -0,7 с), а відхилення за шляхом значно більше (від -11 м до 8 м). Розглянувши докладніше діапазони найбільш прийнятних значень відхилень за часом та шляхом, можна знайти найменші їх відхилення, але у будь-якому випадку ці значення лежатимуть у різних діапазонах значень параметра \mathbf{b} . Тобто, для таких вихідних даних система рівнянь (18) немає рішення з прийнятною похибкою. У таких випадках слід знайти значення параметра \mathbf{b} , для якого відхилення за шляхом буде найменшим (у наведеному випадку цей діапазон буде 300 - 400), а значення параметра ΔT^* (знову ж таки, для наведеного випадку відхилення від вихідного значення $\Delta T = 30$ с буде від -2,3 с до -3,4 с) використовувати як ще одну вузлову точку [700 м, 30 с -2,3 с ... -3,4 с] і при переході в наступний вузол розглянути її, як початкову вузлову точку. Інакше, якщо знехтувати цим відхиленням з часом, воно може накопичуватися і призвести до значних відхилень за часом у кінцевій точці. Необхідно зауважити, що обидві криві систем рівнянь (17 або 18) є монотонними, а це значить що рішення системи (18) буде одне або жодного.

Тепер розглянемо складніший випадок руху поїзда зі зміною режимів управління: зрушення – розгін – вибіг – гальмування. Для цього виконано моделювання руху вантажного поїзда вагою 3500т з локомотивом ВЛ-80т. Управління поїздом здійснювалося зміною тягових позицій, потім рухом на вибігу та зупинка поїзду другим ступенем гальмування. Графік кривої швидкості наведено на рис 9, суцільна лінія - результат моделювання, точки - значення швидкості, отримані за виразом (17), при цьому значення ΔV , як і в попередніх

випадках, визначалось з результатів моделювання, а параметру \mathbf{b} - підбиралися для більш точної відповідності часу ходу за відрізками шляху та довжинами цих відрізків.

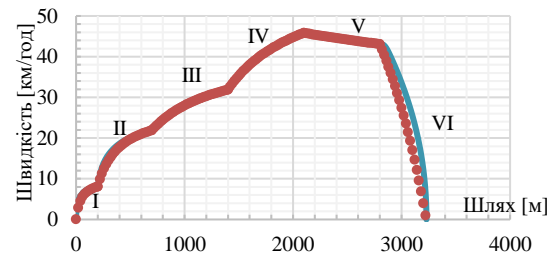


Рис. 9. Крива швидкості поїзду для розглянутих режимів управління (зрушення – розгін – вибіг – гальмування)

У таблиці 5 наведено порівняння результатів моделювання та розрахунків за формулою (17).

Як видно з результатів на всіх ділянках руху, крім першого та останнього, отримано хорошу відповідність результатів розрахунку за формулою (17) з результатами моделювання. У другому та останньому стовбцях - у знаменнику наведені результати добору параметра \mathbf{b} для найкращої відповідності за довжиною ділянки, у чисельнику – за часом ходу. Для цих двох режимів результати дуже відрізняються, але якщо врахувати, що:

при зрушенні поїзду розрахунок кривої швидкості набагато більш наближений, ніж для будь-якої іншої ділянки, хоча б через більшу наближеність розрахунку основного опору руху в діапазоні швидкостей 0 – 10 км/год, ніж для швидкостей більших 10 км/год;

при зупинному гальмуванні відхилення за часом ходу вже не може суттєво вплинути на загальний час ходу, тому стає зрозумілим, що ці ділянки можна виключити з процесу пошуку оптимальної траєкторії руху поїзда, і починати розрахунок, скажімо, при початковій швидкості 10 км/год і деякому зміщенні на шляху від початкової точки, а закінчувати в точці, де має бути застосоване зупинкове гальмування. А процес зрушення та зупинного гальмування слід розглянути окремо.

Таблиця 5
Значення довжини ділянки, часу руху та параметру **b**

Номер ділянки	I		II		III		IV		V		VI	
Керування тягова позиція /гальмування	3		9		17		21		вибіг		СТ-II	
	Моделювання	Формула (17)	Моделювання	Формула (17)	Моделювання	Формула (17)	Моделювання	Формула (17)	Моделювання	Формула (17)	Моделювання	Формула (17)
Довжина ділянки, м	200	242/200	500	503	700	710	700	706	700	703	424	457/425
Час руху, с	119	120/219	102	102	91	91	63	63	57	57	66	66/110
b , м	-	8/50	-	120	-	650	-	750	-	5000	-	-530/-1200

Як було зазначено раніше, при визначенні кінцевої швидкості під час переходу між вузлами сітки доведеться вирішувати систему рівнянь (17), при цьому не завжди вдасться знайти точне рішення чи рішення з прийнятною похибкою. У останньому випадку можливо буде отримано цілу низку рішень, не точних, але задовільних з погляду відхилень за часом та шляхом. Кількість таких рішень може бути досить великою. Деякі з них можуть бути розглянуті як нові вузлові точки, але необхідно знайти спосіб відразу відсіювати ті рішення, які свідомо не можуть бути реалізовані з позиції управління поїздом.

Використання формул (9) і (10) дозволить відсіяти управління, що не реалізуються, якщо розрахована за цими формулами величина сили тяги або гальмування виявиться поза діапазоном допустимих значень.

Таблиця 6
Значення сили тяги F_a при початковій швидкості руху 30 км/год

	s, м	0	100	200	300	400	500	600	700
Формула (6)	V(s), км/год	30	55	72	84	93	100	105	110
Формула (9)	F_a (s), кН	2910	3423	3100	2657	2252	1913	1636	1411

З цих результатів видно, що реалізація таких величин сили тяги неможлива. А це означає, що навіть наближена оцінка необхідної сили тяги згідно з виразом (9) дозволить відкинути варіанти рішень системи (17), які не можуть бути реалізовані.

Проілюструємо процес пошуку переходів між вузлами сітки з прикладу, розглянутому раніше

Повернемося до випадку, розглянутого раніше (табл. 4, рис.8) - з вихідними параметрами: $\Delta L = 700\text{м}$, $V_b = 30\text{км/год}$, $\Delta T = 80\text{с}$,

$V_a = 84\text{км/год}$ - середня швидкість та визначимо значення сили тяги за методикою, яка наведена вище. Інтуїтивно зрозуміло, що розігнати поїзд за 700 м та 30 сек до 80 км/год неможливо. Але іноді виникають ситуації, у яких покладатися на інтуїцію не можна. Визначимо для розглянутого випадку величину сили тяги згідно виразу (9) (силою опору руху від профілю шляху і основним опором руху в даному випадку можна знехтувати).

Згідно з вихідними даними, якщо величина **b** = 350 (це середнє значення діапазону більш придатних розв'язків системи рівнянь - див. рис. 8 - графік δL) з формули (9) отримуємо значення сили тяги, якщо прийняти вага поїзду 4000 тон:

(див. рис. 9). За описаними раніше причинами, пропустимо першу та останню ділянки (зрушення з місця та зупинкове гальмування) та розглянемо другу ділянку. Вихідні дані цієї ділянки наведено у табл. 5 у колонках «розрахунок». Початкова швидкість для другої ділянки обрана з припущення, що процес зрушення з місця вже завершений і

поїзд досяг швидкості $V_b = 8,09$ км/год (див. рис.9). Система рівнянь (17) вирішувалася підбором невідомих величин ΔV та \mathbf{b} . Звернемо увагу, що у цих розрахунках величина ΔV також вважається

невідомою, на відміну вже розглянутого випадку (див. рис. 9).

Внаслідок підбору значень означених вище величин для розглянутої ділянки, довжиною $L = 500$ м та часу руху $T = 102$ с, отримано 4 наближених рішення, які наведені в таблиці 7.

Таблиця 7

Значення сили тяги F_a та відхилення за відстанню ΔL та часом руху ΔT .

Номер рішення	Початкова швидкість V_b , км/год	ΔV , км/год	Кінцева швидкість V_f , км/год	\mathbf{b} , м	ΔL , м	ΔT , с	F_a , кН
1	8,09	10	18,09	3	-5	0,9	7326
				5	-2	0,1	4413
				6,5	0	-0,5	3405
				8	2	-1,0	2775
2	8,09	12	20,09	70	-3	-2,6	427
				77	0	-3,4	393
				80	1	-3,7	380
				90	5	-4,8	344
3	8,09	14	22,09	205	-5	-4,8	210
				220	-2	-5,5	200
				235	0	-6,2	191
				260	4	-7,2	179
4	8,09	16	24,09	550	-4	-7,7	133
				600	-1	-8,4	128
				630	0	-8,9	125
				700	4	-9,7	120

У крайньому правому стовпці наведено значення сили тяги, яке розраховано за формулою (9), яку необхідно реалізувати у початковій точці ділянки. Тут одночасно видно, що реалізувати управління, отримані у разі рішення 1, неможливо через занадто велике значення сили тяги. Інші варіанти за цим критерієм відбору проходять, отже, необхідні додаткові критерії, за якими буде остаточно обрано рішення. Наприклад, можна вибрати єдиним варіантом для кожного рішення варіант найбільш прийнятний для відхилення пройденого шляху (виділені жирним шрифтом). При цьому відхилення за часом, якщо вони суттєві або ці відхилення отримані на початку побудови траєкторії можуть бути враховані як зміни часів ходу на наступних ділянках. Питання остаточного вибору критерію чи критеріїв слід розглядати у кожній ситуації окремо.

Нічого немає дивного в тому, що для досягнення більшої кінцевої швидкості необхідно менше значення сили тяги (див. рис. 10). Як видно з цього малюнка більшій початковій величині сили тяги відповідає менша кінцева, а середнє значення сили тяги тим більше, чим менше початкове значення.

Наукова новизна та практична значимість

Авторами вперше запропонована методика побудови оптимальної траєкторії руху поїзду в

координатах Шлях - Час. На основі отриманих результатів доведено, що запропонована методика дозволяє отримати криві швидкості при будь-яких режимах управління поїздом, а також реалізувати отримане управління поїздом. Запропоновані критерії дозволяють обмежити кількість варіантів рішень (режимів управління), що розглядаються на подальших етапах.

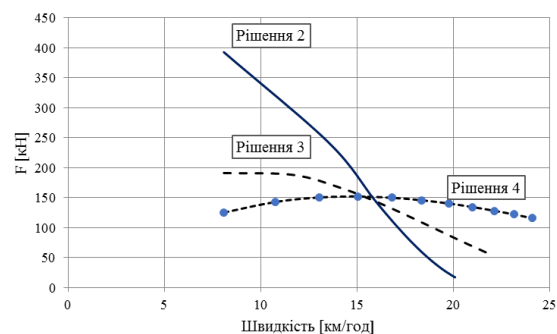


Рис. 10. Залежність сили тяги від швидкості руху для різних значень параметрів ΔV та \mathbf{b} .

Висновки

1. Запропонована методика дозволяє побудувати криву руху поїзда під час переходу між вузлами сітки Шлях - Час.
2. Побудована крива швидкості за допомогою запропонованою функції добре узгоджується з

результатами числових експериментів при належному виборі величин \mathbf{b} і ΔV . Винятки становлять режими зрушення з місця та зупинного гальмування, де зміни швидкості проходять швидше.

4. Кінцеву швидкість руху при кожному переході з вузла у вузол визначати із рішення системи рівнянь (18).

5. Можливі відхилення від заданих у вузлах сітки величин відстані та часу можна врахувати у початкових умовах наступного переходу.

6. Запропонована методика дозволяє оцінити реалізованість отриманого управління.

7. Отримані результати теоретичних досліджень дозволяють збільшити швидкість виконання обчислювань за рахунок застосування спрощених способів розрахунків стану поїзда, як керованої системи, та без використання диференціальних рівнянь руху. Це, у свою чергу, дозволить вирішувати завдання пошуку оптимального управління практично в режимі реального часу з урахуванням мінливих мов під час руху поїзда.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. D. Verscheure et al. "Time-Optimal Path Tracking for Robots: a Convex Optimization Approach". In: IEEE Transactions on Automatic Control (2008).
2. H. Liu, X. Lai, and W. Wu, "Time-optimal and jerk-continuous trajectory planning for robot manipulators with kinematic constraints," Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, vol. 29, no. 2, pp.309–317, 2013
3. J. Lin, N. Somani, B. Hu, M. Rickert and A. Knoll, "An Efficient and Time-Optimal Trajectory Generation Approach for Waypoints Under Kinematic Constraints and Error Bounds," 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2018, pp. 5869-5876, doi: 10.1109/IROS.2018.8593577.
4. K. Zheliezov, A. Akulov, O. Zabolotniy, L. Ursulyak, Y. Chabanuk, A. Shvets, V. Kuznetsov, A. Radkevych The Revised Method For Calculating Of The Optimal Train Control Mode. Archives of Transport Volume 51, Issue 3, 2019/ DOI: 10.5604/01.3001.0013.6160, P.21-34
5. M. Werling, J. Ziegler, S. Kammel, S. Thrun. Optimal Trajectory Generation for Dynamic Street Scenarios in a Frenet Frame. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation Anchorage Convention District May 3-8, 2010, Anchorage, Alaska, USA.
6. Pedro Reynoso-Mora, Wenjie Chen, and Masayoshi Tomizuka. "On the Time-optimal Trajectory Planning and Control of Robotic Manipulators Along Predefined Paths". In: American Control Conference. 2013
7. T. Kunz, M. Stilman Time-Optimal Trajectory Generation for Path Following with Bounded Acceleration and Velocity Presented at the 2012 Robotics: Science and Systems Conference VIII (RSS), 09-13 July 2012, Sydney, Australia. DOI:10.15607/RSS.2012.VIII.027.Corporus ID: 15630193
8. Z. Ugray, L. Lasdon, J. Plummer, F. Glover, J. Kelly, and R. Mart' i, "Scatter search and local NLP solvers: A multistart framework for global optimization," INFORMS Journal on Computing, vol. 19, no. 3, pp. 328–340, 2007.
9. Zhang, X.; Huang, Y.; Rong, Y.; Li, G.; Wang, H.; Liu, C. Optimal Trajectory Planning for Wheeled Mobile Robots under Localization Uncertainty and Energy Efficiency Constraints. Sensors 2021, 21, 335. <https://doi.org/10.3390/s21020335>

REFERENCES

1. D. Verscheure et al. "Time-Optimal Path Tracking for Robots: a Convex Optimization Approach". In: IEEE Transactions on Automatic Control (2008).
2. H. Liu, X. Lai, and W. Wu, "Time-optimal and jerk-continuous trajectory planning for robot manipulators with kinematic constraints," Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, vol. 29, no. 2, pp.309–317, 2013
3. J. Lin, N. Somani, B. Hu, M. Rickert and A. Knoll, "An Efficient and Time-Optimal Trajectory Generation Approach for Waypoints Under Kinematic Constraints and Error Bounds," 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2018, pp. 5869-5876, doi: 10.1109/IROS.2018.8593577.
4. K. Zheliezov, A. Akulov, O. Zabolotniy, L. Ursulyak, Y. Chabanuk, A. Shvets, V. Kuznetsov, A. Radkevych The Revised Method For Calculating Of The Optimal Train Control Mode. Archives of Transport Volume 51, Issue 3, 2019/ DOI: 10.5604/01.3001.0013.6160, P.21-34
5. M. Werling, J. Ziegler, S. Kammel, S. Thrun. Optimal Trajectory Generation for Dynamic Street Scenarios in a Frenet Frame. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation Anchorage Convention District May 3-8, 2010, Anchorage, Alaska, USA.
6. Pedro Reynoso-Mora, Wenjie Chen, and Masayoshi Tomizuka. "On the Time-optimal Trajectory Planning and Control of Robotic Manipulators Along Predefined Paths". In: American Control Conference. 2013
7. T. Kunz, M. Stilman Time-Optimal Trajectory Generation for Path Following with Bounded Acceleration and Velocity Presented at the 2012 Robotics: Science and Systems Conference VIII (RSS), 09-13 July 2012, Sydney, Australia. DOI:10.15607/RSS.2012.VIII.027.Corporus ID: 15630193
8. Z. Ugray, L. Lasdon, J. Plummer, F. Glover, J. Kelly, and R. Mart' i, "Scatter search and local NLP solvers: A multistart framework for global optimization," INFORMS Journal on Computing, vol. 19, no. 3, pp. 328–340, 2007.
9. Zhang, X.; Huang, Y.; Rong, Y.; Li, G.; Wang, H.; Liu, C. Optimal Trajectory Planning for Wheeled Mobile Robots under Localization Uncertainty and Energy Efficiency Constraints. Sensors 2021, 21, 335. <https://doi.org/10.3390/s21020335>

Надійшла до редколегії / Received by the editorial board: 01.09.2023
Прийнята до друку / Accepted for publication: 20.09.2023