МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Український державний університет
науки і технологій

Кафедра «Прикладна математика»

В авторській редакції

ВИЩА МАТЕМАТИКА (МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ).
Методи обчислення невизначених інтегралів

Навчально-методичні рекомендації та завдання до практичних занять і самостійної роботи

ДНІПРО
2023

УДК 517.9(075.8)
В 55

Укладачі:
Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, З. М. Гасанов, І. В. Нечай

Електронний аналог
друкованого видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
«Для всіх освітніх програм »
Протокол № 3 від 26.04.2023

В 55 Вища математика (Математичний аналіз). Методи обчислення невизначених інтегралів : навчально-методичні рекомендації та завдання до практичних занять і самостійної роботи / уклад. Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, З. М. Гасанов, І. В. Нечай ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2023. – 24 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами денної та заочної форм навчання спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» під час практичних занять і самостійної роботи з дисципліни «Вища математика (Математичний аналіз)».

Навчально-методичні рекомендації містять необхідні теоретичні відомості з теми «Невизначений інтеграл» курсу «Математичний аналіз», наведено аналіз типових прикладів та завдання для самостійної роботи.

ЗМІСТ

Вступ..4
Таблиця похідних.. 5
Таблиця первісних..6
Практичне заняття 1.
Безпосереднє інтегрування..7
Задачі для самостійної роботи...12
Практичне заняття 2.
Інтегрування частинами...13
Задачі для самостійної роботи...17
Практичне заняття 3.
Застосування заміни змінної при інтегруванні.....................................19
Задачі для самостійної роботи... 22
Бібліографічний список..23

Вступ

Мета методичних рекомендацій — допомога здобувачам вищої освіти у засвоєнні розділу «Невизначений інтеграл» дисципліни «Математичний аналіз».

Інтеграли використовуються в різних задачах інформатики. Одним із варіантів застосування є апроксимація певних типів функцій. Наприклад, інтеграл Рімана використовується для наближення значення функції в точці. Це корисно в числовому аналізі, коли комп'ютерникам потрібно знайти значення функції в певній точці. Ще один спосіб використання інтегралів в інформатиці – це оптимізація. Багато задач оптимізації можна сформулювати як задачі оптимізації з обмеженнями. Ці обмеження часто можна представити у вигляді інтегралів. Крім того, інтеграли використовуються в інформатиці для розв'язування диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння використовуються для моделювання фізичних систем. Наприклад, рівняння Нав'є-Стокса використовуються для моделювання течії рідини. Ці рівняння можна розв'язати за допомогою чисельних методів, таких як метод скінченних елементів, який наближає розв'язок диференціального рівняння за допомогою інтегралів.

Досвід, набутий при вивченні цієї теми буде сприяти подальшому успішному вивченню математики та суміжних дисциплін. Набути необхідного досвіду можна тільки за умови самостійної роботи, кількість годин на яку залежить від базових знань та навичок конкретного здобувача, але у будь-якому разі, практичних занять з дисципліни буде недостатньо.

Методичні рекомендації містять необхідний теоретичний матеріал, багату кількість детально розібраних прикладів, обширний матеріал для самостійної роботи, систематизований згідно послідовності вивчення, відповіді для самоконтролю. Вони сприяють досягненню результатів навчання (ПРН1 і ПРН5), передбаченого освітньою програмою (ОП). А саме: знання основних властивостей інтегралів, вміння обчислювати інтеграли від функції однієї та багатьох змінних, вміння застосовувати визначені інтеграли від функцій однієї та багатьох змінних до обчислення геометричних та фізичних характеристик об'єктів та процесів.

Таблиця похідних

1. $C' = 0$.

2. $x' = 1$.

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(a^x)' = a^x \ln a$.

10. $(e^x)' = e^x$.

11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

19. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

20. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

3. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

6. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}|.$

15. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

16. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C.$

19. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$

20. $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$

Практичне заняття 1

Безпосереднє інтегрування

Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Означення 1.1. Функцію $F(x)$ називають **первісною** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a;b).$$

Сукупність усіх первісних $f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ функції $f(x)$ на $(a;b)$ називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ і записують так:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Термін «інтеграл» походить від латинського слова *integralis* — цілісний, а символ $\int$ — від курсивного s (початкової літери слова *summa*).

Наведемо основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

3. Якщо $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$, зокрема

$$\int f(kx+b) = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C.$$

Використання елементарних перетворень та правил інтегрування

▶ **Задача 1.1.** $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx.$

Розв'язання. Записавши другий та третій доданок під знаком інтегралу у вигляді константи помноженої на степінь змінної x, виконаємо інтегрування:

$$\int \left(\frac{1}{x}+2x^{-2}+3x^{-3}\right) dx = \ln x + 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C = \ln x - \frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+C.$$

▶ **Задача 1.2.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx.$

Розв'язання. Вилучимо цілу частину інтегранта:

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx = -\int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) dx,$$

далі маємо

$$-\int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) dx = -x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

▶ **Задача 1.3.** $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-7}.$

Розв'язання. Інтегрант можна розглядати як складену функцію виду $f(kx+b)$, де $\int f(x)\,dx$ є табличним:

$$\int \frac{dx}{3x^2-7} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2-7}.$$

Отже маємо

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2-7} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right|+C.$$

▶ **Задача 1.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$

Розв'язання. Використовуючи ту саму властивість первісної, що й в попередньому прикладі, виконуємо обчислення інтеграла.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+5}\right|.$$

▶ **Задача 1.5.** $\displaystyle\int (5^x - 2^x)^2\, dx.$

Розв'язання. Інтегрант є складеною функцією $f(g(x))$, де $g(x) = 5^x - 2^x$. Оскільки немає загального правилу знаходження первісної від складеної функції, більш зручно подати квадрат різниці у вигляді суми, після чого, проінтегрувати кожний доданок окремо.

$$\int (5^x-2^x)^2\, dx = \int (5^{2x}-2\cdot 10^x+2^{2x})\, dx = \frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{2x} - \frac{2}{\ln 10}\cdot 10^x + \frac{1}{2\ln 2}\cdot 2^{2x} + C.$$

▶ **Задача 1.6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Розв'язання. Взявши до уваги тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, виконаємо перетворення та обчислення інтеграла.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

▶ **Задача 1.7.** $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$

Розв'язання. В цьому разі доречно застосувати тотожність

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

для перетворення інтегранта, оскільки в результаті будемо мати суму табличних інтегралів.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

▶ **Задача 1.8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+3x)^4}}.$

Розв'язання. Інтегрант можна розглядати як складену функцію виду $f(kx+b)$, де

$$f(x) = x^{-\frac{4}{5}}, \quad kx+b \equiv 1+3x.$$

Використовуючи відповідне правило знаходження первісної виконаємо обчислення інтеграла.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+3x)^4}} = \int (1+3x)^{-\frac{4}{5}}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = \frac{5}{3}\sqrt[5]{1+3x} + C.$$

Внесення функції під знак диференціала

У випадку, коли підінтегральний вираз можна подати у вигляді

$$f(x)\, dx = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)\, dx,$$

маємо

$$\int f(x)\, dx = \int g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)\, dx = \int g(\omega(x)) \cdot d\omega(x) = \int g(t)\, dt,$$

де $t = \omega(x)$. Тобто функція $\omega'(x)$ вводиться під знак диференціала.

▶ **Задача 1.9.** $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x\, dx}{1+x^4} = \int \frac{1}{1+x^4} \cdot x\, dx = \int \frac{1}{1+x^4}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(x^2)^2}\, d(x^2) =$$

$$= \{x^2 = t\} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

▶ **Задача 1.10.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\, d(\ln x) = \{\ln x = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

▶ **Задача 1.11.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)} = \int \frac{1}{(2+\ln^2 x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{(2+\ln^2 x)}\, d(\ln x) =$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

▶ **Задача 1.12.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\, dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\, dx = \int \cos\sqrt{x}\, d(2\sqrt{x}) = 2\int \cos\sqrt{x}\, d(\sqrt{x}) = \{\sqrt{x} = t\} =$$

$$= 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} + C.$$

▶ **Задача 1.13.** $\displaystyle\int \frac{x + \arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{x + \arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx + \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) + \int \arcsin^3 2x\, d\left(\frac{1}{2}\arcsin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{1}{2}\int \arcsin^3 2x\, d\left(\arcsin 2x\right) = \{x^2 = t,\ \arcsin 2x = y\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t}} + \frac{1}{2}\int y^3\, dy = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{1-4t} + \frac{1}{8}y^4 + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} +$$

$$+ \frac{1}{8}\arcsin^4 2x + C.$$

Задачі для самостійної роботи

1.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}.$

1.15. $\displaystyle\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}\,dx.$

1.16. $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx.$

1.17. $\displaystyle\int \frac{2+x}{1+x}\,dx.$

1.18. $\displaystyle\int (2x+5)^{17}\,dx.$

1.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$

1.20. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

1.21. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6-5}.$

1.22. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^5 x}\,dx.$

1.23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x+3)}.$

1.24. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$

1.25. $\displaystyle\int \sin 5x\,dx.$

1.26. $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx.$

1.27. $\displaystyle\int (\sin x+2\cos x)^2\,dx.$

1.28. $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx.$

1.29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 3x}.$

1.30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcctg} 3x}{1+9x^2}\,dx.$

1.31. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Відповіді

1.14. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-7}\right|$. **1.15.** $\frac{27}{2\ln 2}\cdot 2^{-2x}-\frac{1}{4\ln 3}\cdot 3^{-2x}$. **1.16.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}$. **1.17.** $x+\ln|1+x|$. **1.18.** $\frac{1}{36}(2x+5)^{18}$. **1.19.** $-\sqrt{1-2x}$. **1.20.** $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. **1.21.** $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3-\sqrt{5}}{x^3+\sqrt{5}}\right|$. **1.22.** $-\frac{1}{4\ln^4 x}$. **1.23.** $\ln|\ln x+3|$. **1.24.** $\ln(1+e^x)$. **1.25.** $-\frac{1}{5}\cos 5x$. **1.26.** $-\frac{1}{2}\cos x^2$. **1.27.** $\frac{5}{2}x-\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x$. **1.28.** $\sin e^x$. **1.29.** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|$. **1.30.** $-\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}^2 3x$. **1.31.** $\frac{1}{2}(\arcsin^2 x+\arccos^2 x)$.

Практичне заняття 2

Інтегрування частинами

Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Метод підстановки базується на наступному твердженні. Якщо функція $t = \varphi(x)$ визначена та диференційована на множині X, яка є інтервалом або відкритою півпрямою, або нескінченною прямою, а множина T є множиною значень цієї функції, при цьому функція $g(t)$ має на множині T первісну $G(t)$, тобто $\int g(t)\,dt = G(t) + C$, то функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має на множині X первісну, яка дорівнює $G(\varphi(x))$, тобто на множині X

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$. В деяких випадках вдається вибрати функцію $t = \varphi(x)$ таку, що справедлива рівність $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, до того ж інтеграл від функції $g(t)$ обчислити нескладно. Тоді

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C.$$

▶ **Задача 2.1.** $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int x(2x+5)^{10}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} 2x+5=t & dx = \frac{1}{2}\,dt \\ x = \frac{t-5}{2} & \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int (t-5)t^{10}\frac{1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int (t^{11} - 5t^{10})\,dt = \frac{1}{48}t^{12} - \frac{5}{44}t^{11} + C = \frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + C.$$

▶ **Задача 2.2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{e^x-1}=t & x=\ln(t^2+1) \\ e^x-1=t^2 & dx=\frac{2t\,dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2t\,dt}{1+t^2}}{t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$$

▶ **Задача 2.3.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \left\{ \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = .$$
$$= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Якщо підінтегральний вираз містить один з двочленів

$$a^2-x^2, \quad x^2+a^2, \quad x^2-a^2$$

може бути доцільним використання так званої тригонометричної підстановки. Рекомендовані підстановки в залежності від типу двочлена:

$$\begin{array}{ll} a^2-x^2 & x=a\sin t \\ x^2+a^2 & x=a\operatorname{tg} t \\ x^2-a^2 & x=\frac{a}{\sin t} \end{array}$$

▶ **Задача 2.4.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\,dt}{a^3\cos^3 t} = \int \operatorname{tg}^2 t\,dt = .$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = \operatorname{tg} t - t + C = \operatorname{tg}(\arcsin \tfrac{x}{a}) - \arcsin \tfrac{x}{a} + C.$$

Ефективним методом інтегрування є **метод інтегрування частинами**. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані на множині X, яка є інтервалом або відкритою півпрямою, або нескінченною прямою, і якщо функція $v(x) \cdot u'(x)$ має на множині X первісну, то функція $u(x) \cdot v'(x)$ має на цій множині первісну, і до того ж $\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Цей метод інтегрування доцільно використовувати насамперед у тих випадках, коли функцію у підінтегральному виразі можна подати у вигляді двох множників так, що добуток похідної першого множника і первісної другого множника є функцією більш простою з точки зору інтегрування ніж функція в вихідному підінтегральному виразі.

▶ **Задача 2.5.** $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}.$

Розв'язання.

Функцію $\frac{x}{\cos^2 x}$ можна подати як добуток функції x і $\frac{1}{\cos^2 x}$. Добутком похідної першої функції і первісної другої є функція $\operatorname{tg} x$, яка є більш простою з точки зору інтегрування, ніж вихідна функція $\frac{x}{\cos^2 x}$. Отже доцільно використовувати метод інтегрування частинами.

$$\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right\} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

Якщо для деякого інтегралу, підінтегральний вираз якого містить одну з функцій

$$\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$$

застосовують формулу інтегрування частинами, то, як правило, через u позначають саме цю функцію.

▶ **Задача 2.6.** $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx.$

Розв'язання.

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2} = .$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

▶ **Задача 2.7.** $\displaystyle\int 5^{\sqrt{x}}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int 5^{\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = 2\int t\cdot 5^t\,dt = 2\left\{ \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = 5^t\,dt & v = \frac{5^t}{\ln 5} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\left(\frac{t\cdot 5^t}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5}\cdot 5^t\right) + C = 2\left(\frac{\sqrt{x}\cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5}\cdot 5^{\sqrt{x}}\right) + C.$$

▶ **Задача 2.8.** $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$

Розв'язання.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \sin 3x\,dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x +$$

$$+\frac{2}{3}\left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \cos 3x\,dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x -$$

$$-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx. \quad \int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x + C.$$

Задачі для самостійної роботи

2.9. $\displaystyle\int \frac{(1+x)}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

2.10. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

2.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}.$

2.12. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}.$

2.13. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}.$

2.14. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}\,dx}{\sqrt{2x-1}}.$

2.15. $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx.$

2.16. $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx.$

2.17. $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx.$

2.18. $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx.$

2.19. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

2.20. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx.$

2.21. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

2.22. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$

2.23. $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx.$

2.24. $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2\,x\,dx.$

2.25. $\displaystyle\int x\cdot 3^x\,dx.$

2.26. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

2.27. $\displaystyle\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx.$

2.28. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2.29. $\displaystyle\int x^2\cos 3x\,dx.$

2.30. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{4}\,dx.$

2.31. $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

2.32. $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx.$

2.33. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx.$

2.34. $\displaystyle\int x^2\cdot 4^{-x}\,dx.$

2.35. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 2x}\,dx.$

2.36. $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx.$

2.37. $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx.$

2.38. $\displaystyle\int x^2\ln(x+1)\,dx.$

2.39. $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2\,2x\,dx.$

2.40. $\displaystyle\int e^{4x}\sin 4x\,dx.$

2.41. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

2.42. $\displaystyle\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx.$

2.43. $\displaystyle\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

2.44. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx.$

2.45. $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}(2\sqrt{x})\,dx.$

2.46. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx.$

2.47. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx.$

Відповіді

2.9. $2(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x}))$. **2.10.** $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **2.11.** $-\ln(1+e^{-x})$. **2.12.** $\ln x-\ln 2\cdot|\ln x+2\ln 2|$. **2.13.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|$. **2.14.** $e^{\sqrt{2x-1}}$. **2.15.** $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})$. **2.16.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. **2.17.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$. **2.18.** $x((\ln|x|-1)^2+1)$. **2.19.** $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|$. **2.20.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$. **2.21.** $-\frac{1}{x}(\ln|x|+1)$. **2.22.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **2.23.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x$. **2.24.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x+x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **2.25.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)$. **2.26.** $(\ln(\ln x)-1)\ln x$. **2.27.** $(x-1)^2\sin x+2(x-1)\cos x$. **2.28.** $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln(x+1)$. **2.29.** $\frac{1}{3}x^2\sin 3x-\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x$. **2.30.** $x\arccos\frac{x}{4}-\sqrt{16-x^2}$. **2.31.** $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$. **2.32.** $-(x^2+2x+2)e^{-x}$. **2.33.** $-\frac{1}{16x^4}(4\ln x+1)$. **2.34.** $-\frac{4^{-x}}{\ln 4x}(x^2+\frac{2x}{ln4}+\frac{2}{\ln^2 4})$. **2.35.** $x\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{4}\ln|\cos x|$. **2.36.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. **2.37.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. **2.38.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2(1+x^2)}$. **2.39.** $\frac{1}{2}x\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{1}{2}x^2$. **2.40.** $\frac{1}{4}e^{4x}(\sin 4x-\cos 4x)$. **2.41.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. **2.42.** $3((2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x})$. **2.43.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. **2.44.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\ln|x|-\frac{2}{3})$. **2.45.** $x\operatorname{arcctg}(2\sqrt{x})+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})$. **2.46.** $x\operatorname{arctg} 2x-1-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}$. **2.47.** $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}$.

Практичне заняття 3

Застосування заміни змінної при інтегруванні

Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Такі інтеграли можна знаходити за однією схемою, суть якої полягає в тому, що даний інтеграл (в загальному випадку) можна подати у вигляді суми інтегралів, перший з яких має вигляд вихідного, проте вираз у чисельнику доцільно внести під знак диференціалу, а другий має один з видів

$$\int \frac{M\,dx}{Cx^2+Dx+E} \quad \text{або} \quad \int \frac{M\,dx}{\sqrt{Cx^2+Dx+E}}.$$

Розглянемо спочатку найпростіші випадки (**задачі 3.1. – 3.4.**), до яких можна звести будь-який інтеграл означеного типу.

▶ **Задача 3.1.** $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-3}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-3}\,dx = \int \frac{d(x^2-x-3)}{x^2-x-3} = \ln|x^2-x-3| + C.$$

▶ **Задача 3.2.** $\displaystyle\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x}}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x}}\,dx = \int \frac{d(4x^2+3x)}{\sqrt{4x^2+3x}} = 2\sqrt{4x^2+3x} + C.$$

▶ **Задача 3.3.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+1}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+1} = \int \frac{dx}{(x-4)^2-15} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{x-4-\sqrt{15}}{x-4+\sqrt{15}}\right| + C.$$

▶ **Задача 3.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+7}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{4})^2+\frac{31}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x-\tfrac{5}{4}+\sqrt{x^2-\tfrac{5}{2}x+\tfrac{7}{2}}\right|+C.$$

У більш складних випадках можна дотримуватися такої послідовності.

Схема розв'язання для загального випадку

1. Знайти похідну від квадратного тричлена:

$$(Cx^2+Dx+E)' = 2Cx+D.$$

2. Подати вираз, записаний в чисельнику у вигляді

$$Ax+B = \alpha(2Cx+D)+\beta.$$

3. Подати вихідний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{Cx^2+Dx+E} = \alpha \int \frac{2Cx+D}{Cx^2+Dx+E}\,dx + \beta \int \frac{dx}{Cx^2+Dx+E}.$$

4. Перший з одержаних інтегралів обчислити, використовуючи метод внесення під знак диференціалу, а другий — звести до табличного, виділивши повний квадрат у квадратного тричлена.

▶ **Задача 3.5.** $\displaystyle\int \frac{(7-8x)dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$.

Розв'язання.

1) $(2x^2-3x+1)' = 4x-3;$

2) $7-8x = -2(4x-3)+1;$

3) $$\int \frac{(7-8x)dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} = -2\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} =$$

$$= -2\int \frac{d(2x^2-3x+1)}{\sqrt{2x^2-3x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{16}}} =$$

$$= -4\sqrt{2x^2-3x+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}\right|.$$

▶ **Задача 3.6.** $\displaystyle\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

Розв'язання.

1) $(9+6x-3x^2)' = -6x+6;$

2) $3x-5 = -\frac{1}{2}(-6x+6)-2;$

3) $$\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(9+6x-3x^2)}{\sqrt{9+6x-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} =$$

$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}.$$

Задачі для самостійної роботи

3.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}.$

3.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}.$

3.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$

3.10. $\displaystyle\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$

3.11. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}.$

3.12. $\displaystyle\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

3.13. $\displaystyle\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}.$

3.14. $\displaystyle\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

3.15. $\displaystyle\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}.$

3.16. $\displaystyle\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$

3.17. $\displaystyle\int \frac{(3-4x)\,dx}{2x^2-3x+1}.$

3.18. $\displaystyle\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}.$

3.19. $\displaystyle\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

3.20. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}.$

3.21. $\displaystyle\int \frac{(4x-3)\,dx}{x^2-2x+6}.$

3.22. $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2-4x+5}.$

3.23. $\displaystyle\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$

3.24. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

Відповіді

3.7. $-\ln|1-x+\sqrt{5-2x+x^2}|+C$. **3.8.** $\frac{1}{3}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}|+C$. **3.9.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$. **3.10.** $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$. **3.11.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **3.12.** $-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}+C$. **3.13.** $\frac{3}{8}\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C$. **3.14.** $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$. **3.15.** $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$. **3.16.** $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$. **3.17.** $-\ln|2x^2-3x+1|+C$. **3.18.** $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$. **3.19.** $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$. **3.20.** $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}|+C$. **3.21.** $2\ln(x^2-2x+2)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$. **3.22.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C$. **3.23.** $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$. **3.24.** $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Легеза В. П. Математичний аналіз : підручник : у 4 т. / відп. ред. Є. С. Сулема. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського ; Політехніка, 2019. Т. 1. 334 с.

2. Математичний аналіз : підручник / П. І. Каленюк та ін.; Нац. ун-т «Львів. політехніка». Львів : Растр-7, 2021. Ч. 1. 326 с.

3. Збірник задач з математичного аналізу : навч. посіб. / уклад. П. В. Філевич та ін.; Нац. ун-т «Львів. політехніка». Львів : Растр-7, 2022. Ч. 2 : Математичний аналіз. 331 с.

4. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 2. 510 с.

5. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз : підручник. Київ : Знання, 2008. 421 с.

6. Дзядик В. К. Математичний аналіз : підручник : у 2 т. Київ : Вища школа, 1995. Т. 1. 495 с.

7. Ковальчук Б. В., Шіпка Й. Г. Основи математичного аналізу : підручник : у 2 ч. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2010. Ч. 2. 418 с.

8. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Київ : Вища школа, 1992. Ч. 1. 494 с.

Навчально-методичне видання

Михайлова Тетяна Федорівна,
Максименкова Юлія Анатоліївна,
Гасанов Закарія Муса огли
Нечай Ігор Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА (МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ).
Методи обчислення невизначених інтегралів

Навчально-методичні рекомендації до
практичних занять і самостійної роботи

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка І. В. Нечай

Експертний висновок склав канд. фізю-мат. наук, доц. Тетяна Михайлова
канд. техн. наук, доц.. Олена Куроп'ятник

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 631 від 23.06.2023)

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 1,39. Обл.-вид. арк. 1,41.
Тираж 2 пр. Зам. № 82

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010