МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Український державний університет науки і технологій

Кафедра «Покриттів, композиційних матеріалів і захисту металів»

В авторській редакції

ОПТИМІЗАЦІЯ КОРОЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчально-методичні рекомендації
до лабораторного практикуму

Електронне видання

ДНІПРО
2024

УДК 669.018.8:621.78 (076.5)
О 62

Упорядники:
І. В. Голуб, О. В. Біла

Електронне видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
«Захист металів від корозії», спеціальності 136 – Металургія
Протокол № 7 від 31 січня 2024 р.

О 62 Оптимізація корозійних процесів : навчально-методичні рекомендації до лабораторного практикуму / упоряд. І. В. Голуб, О. В. Біла ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 46 с.

Викладено загальні навчально-методичні рекомендації щодо виконання, оформлення, змісту і послідовності виконання лабораторного практикуму.

Призначені для студентів спеціальності 136 – Металургія ОПП «Захист металів від корозії» (магістерський рівень).

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний рівень розвитку промисловості передбачає розширення застосування металевих та композиційних матеріалів, але при створенні таких матеріалів потрібно враховувати: технологічні особливості, складності їх виробництва та можливість максимального подовження строку збереження експлуатаційних характеристик в умовах комплексної дії руйнівних факторів, тобто впливів (температури, дії корозійного середовища, ерозії, механічних напружень та інших). На жаль, корозійна стійкість за різних умов багатьох нових матеріалів сьогодні реалізовані не у повній мірі, що обумовлено недостатньою вивченістю фізико-хімічних корозійних процесів при багатофакторному зовнішньому руйнівному впливі. Боротьбу з корозією у сучасному світі неможливо проводити тільки на основі експериментальних досліджень. Наведені факти обумовлюють необхідність застосування методів оптимізації у виробництві продукції, для розробки високоефективних і економічних процесів, створення нових хімічних сполук і продуктів, бо оптимізація є ефективним інструментом для аналізу і керування хіміко-технологічними процесами.

Необхідність вирішення комплексу пов'язаних технологічних, організаційних і економічних задач вимагає застосування комп'ютерних технологій, як ефективного інструменту для виконання розрахунків, моделювання, оптимізації і керування хіміко-технологічними процесами.

Виконання лабораторного практикуму має за мету розробку алгоритму вирішення задач, придбання навичок в роботі з пакетами прикладних комп'ютерних програм, прогнозувати перебіг корозійних процесів в конкретних умовах експлуатації.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

ОПЕРАЦІЯ З МАТРИЦЯМИ. РІШЕННЯ СЛАР. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ. ПОШУК ФУНКЦІЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

1.1 Операція з матрицями

а) транспонування

Транспонованою називається матриця $\grave{A}^T$, у якій стовпці початкової матриці замінюються рядками з відповідними номерами.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 18 & 19 & 39 \\ -5 & 91 & 87 \end{pmatrix}$$

Рішення:

Для виконання операції транспонування матриці А необхідно:

1. У робочому аркуші Excel набрати дану матрицю. Кожний елемент даної матриці розташовується у окремій комірці робочого аркуша.

2. Виділить (покажчиком миші при натиснутій лівій кнопці) блок комірок (3 х 3) під транспоновану матрицю.

3. Натисніть на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функції.*

4. У діалоговому вікні, що з'явилося *Вставлення функції* у робочому полі *Категорія* виберіть *Підстановка та посилання*, а у робочому полі *Виберіть функцію* оберіть – TRANSPOSE і натисніть ОК (рисунок 1.1).

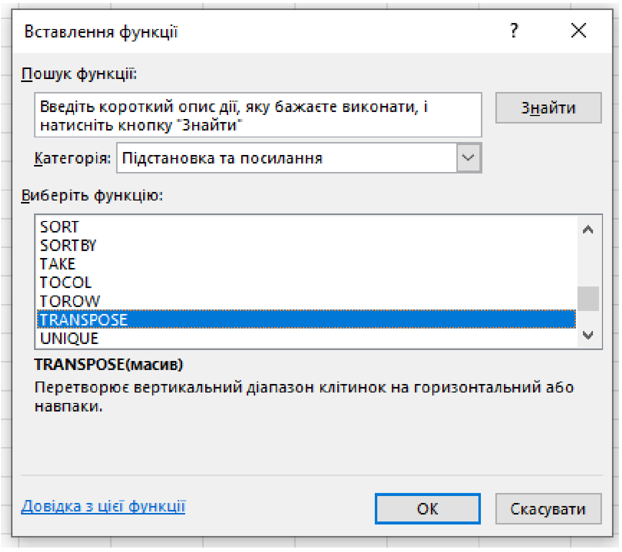


Рисунок 1.1 – Приклад вибору виду функції

5. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* TRANSPOSE введіть діапазон початкової матриці (рисунок 1.2).

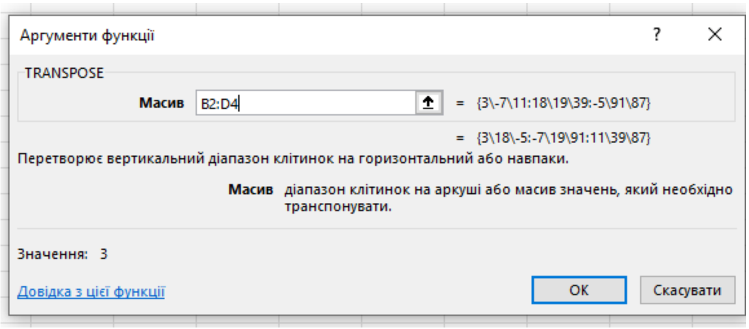
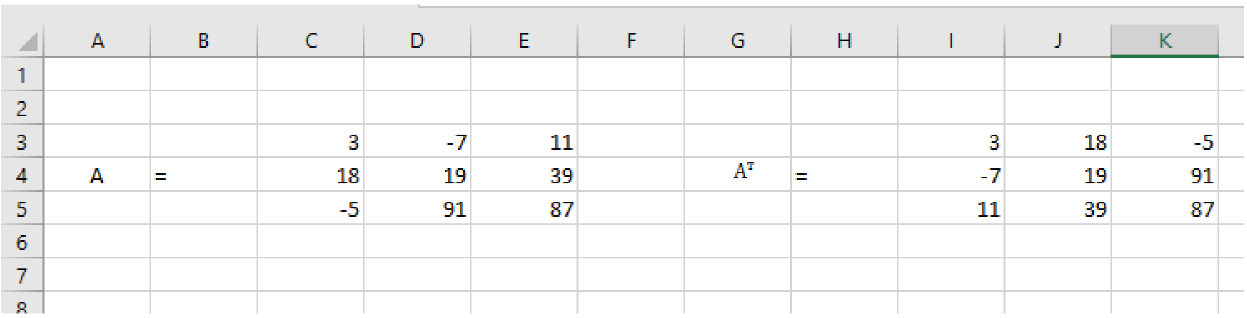


Рисунок 1.2 – Приклад заповнення діалогового вікна TRANSPOSE

6. Необхідно курсор миші поставити в ряд формул і натиснути CTRL+SHIFT+ENTER. У виділеному раніше блоку комірок (3 х 3) з’явиться транспонована матриця (рисунок 1.3).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3			3	-7	11				3	18	-5
4	A	=	18	19	39		A^T	=	-7	19	91
5			-5	91	87				11	39	87
6											
7											
8											

Рисунок 1.3 – Результат транспонована матриця A^T

б) множення матриць

Множення матриць – це бінарна операція, яка використовуючи дві матриці, утворює нову матрицю, яка називається добутком матриць.

Приклад:

Задані матриця A і B знайти їх добуток

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Рішення:

Для виконання операції множення матриць необхідно:

1. У робочому аркуші Excel набрати задані матриці. Кожний елемент матриці розташовується у окремій комірці робочого аркуша.

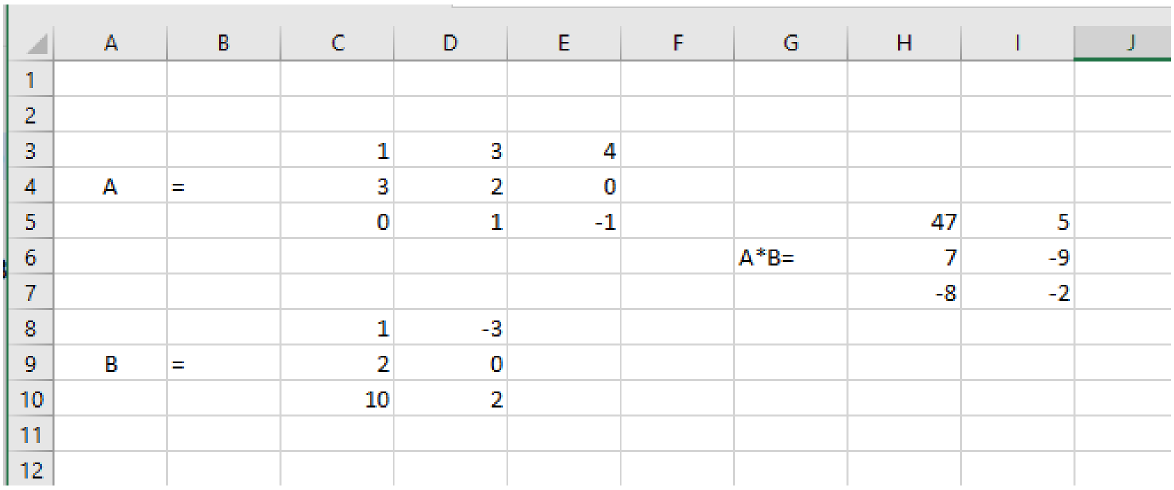
2. Виділить блок комірок під результуючу матрицю (3 х 2).

3. Натисніть на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функції.*

4. У діалоговому вікні *Вставлення функції* у полі *Категорія* виберіть *Математичні*, а у полі *Виберіть функцію* – ім'я функції MMULT і клацнути ОК.

5. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* MMULT у масив 1 введіть діапазон матриці *A,* а в масив 2 введіть діапазон матриці *B.*

6. Необхідно курсор миші поставити в ряд формул і натиснути CTRL+SHIFT+ENTER. У виділеному раніше діапазоні для добутку матриць з’явиться матриця добуток (рисунок 1.4).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3			1	3	4					
4	A	=	3	2	0					
5			0	1	-1			47	5	
6							A*B=	7	-9	
7								-8	-2	
8			1	-3						
9	B	=	2	0						
10			10	2						
11										
12										

Рисунок 1.4 – Результат добуток матриць А і В

в) обчислення визначника матриці

Визначник або детермінант – це функція від квадратної матриці, яка набуває скалярних значень (число).

<u>*Приклад*</u>:

Обчислити визначника заданої матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>*Рішення:*</u>

1. У робочому аркуші Excel набрати дану матрицю. Кожний елемент даної матриці розташовується у окремій комірці робочого аркуша.

2. Виділити комірку, в якій буде записано значення визначника.

3. Натисніть на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функції.*

4. У діалоговому вікні *Вставлення функції* у полі *Категорія* виберіть *Математичні*, а у полі *Виберіть функцію* – ім'я функції MDETERM і клацнути ОК.

5. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* MDETERM введіть діапазон даної матриці і клацнути ОК.

Визначник матриці дорівнює 19.

г) знаходження оберненої матриці

Обернена матриця – матриця, яка існує для кожної невиродженої квадратної матриці, n x n розмірності.

<u>Приклад:</u>

Обчислити обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Рішення:</u>

1. У робочому аркуші Excel набрати дану матрицю. Кожний елемент даної матриці розташовується у окремій комірці робочого аркуша.

2. Виділить блок комірок (3 х 3) під обернену матрицю.

3. Натискуйте на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функції.*

4. У діалоговому вікні *Вставлення функції* у полі *Категорія* виберіть *Математичні*, а у полі *Вставлення функції* – ім'я функції MINVERSE і клацнути ОК.

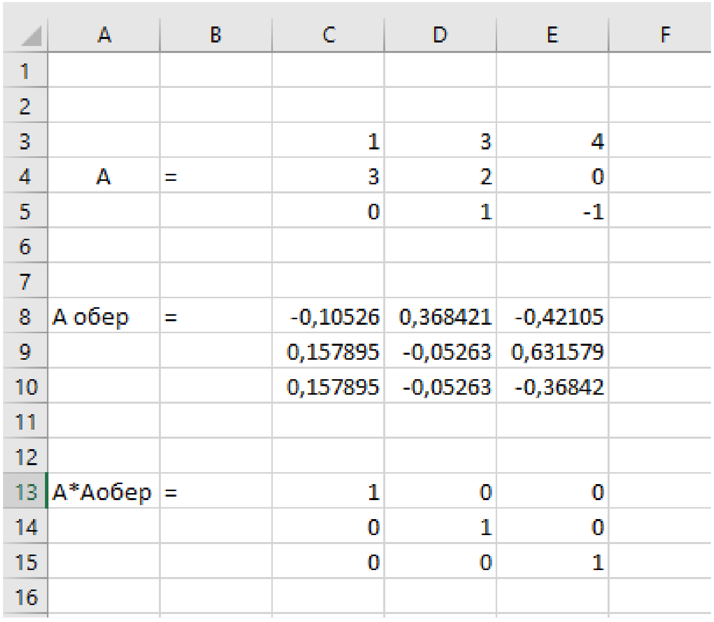
5. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* MINVERSE введіть діапазон початкової матриці.

6. Необхідно курсор миші поставити в ряд формул і натиснути CTRL+SHIFT+ENTER. У виділеному раніше діапазоні (3 х 3) з'явиться обернена матриця (рисунок 1.5).

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3			1	3	4	
4	A	=	3	2	0	
5			0	1	-1	
6						
7						
8	A обер	=	-0,10526	0,368421	-0,42105	
9			0,157895	-0,05263	0,631579	
10			0,157895	-0,05263	-0,36842	
11						

Рисунок 1.5 – Обернена матриця

Після отримання оберненої матриці обов'язково зробити перевірку на виконання умови $A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (рисунок 1.6).



	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3			1	3	4	
4	A	=	3	2	0	
5			0	1	-1	
6						
7						
8	A обер	=	-0,10526	0,368421	-0,42105	
9			0,157895	-0,05263	0,631579	
10			0,157895	-0,05263	-0,36842	
11						
12						
13	A*Aобер	=	1	0	0	
14			0	1	0	
15			0	0	1	
16						

Рисунок 1.6 – Результат перевірки виконання умов оберненої матриці

1.2 Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом

Якщо задана система в матричній формі $A \cdot X = B$, тоді розв'язок матричного рівняння шукаємо в вигляді: $X = A^{-1} \cdot B$.

Тобто, щоб розв'язати систему матричним способом, необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до головної матриці системи A і помножити її на стовпець вільних членів B, в результаті отримаємо матрицю-стовпець невідомих X.

Приклад:

Дано три ємності з розчинами кислот різної концентрації. Якщо змішати розчини у певних співвідношеннях, то вийде кислота заданої концентрації (дані представлені в таблиці 1.1). Визначити яка концентрація кислоти у кожній посудині.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Співвідношення концентрацій	Кінцева концентрація кислоти, %
1:1:1	13
1:3:2	34
4:1:4	25

Рішення:

Система лінійних рівнянь має вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 34 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 25 \end{cases}$$

де - $x_1; x_2; x_3$ – вихідна концентрація кислоти у кожній посудині відповідно.

Якщо вихідна концентрація кислоти у кожній посудині це вектор X то у матричному виді система лінійних рівнянь приймає вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 34 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Перед початком пошуку рішення системи матричним методом необхідно перевірити, щоб отримана матриця була невироджена. Обчислив визначник матриці, який дорівнює 3, тобто матриця невироджена.

Рішення системи представлено на рисунку 1.7

G	H	I	J	K	L	M
	визнач =	3				
		1	1	1		13
A	=	1	3	2	B=	34
		4	1	4		25
		3,333333	-1	-0,33333		1
A обер	=	1,333333	0	-0,33333	X=	9
		-3,66667	1	0,666667		3

Рисунок 1.7 – Рішення задачі матричним методом в Excel

<u>*Відповідь:*</u>$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ адже щоб отримати задані кінцеві концентрації кислот при заданому співвідношенні концентрацій у першій ємності повинна бути 1 % кислота у другій 9 % та у третій 3 %.

1.3 Побудова графіків

Програма Microsoft Excel має можливість побудови різних типів графіків. Для побудови будь-якого графіку в Excel необхідно скласти таблицю з діапазонам даних та обрати тип графіку. Після того, як графік створений, його можна змінювати і коригувати, відповідно до цільового призначення.

Приклад:

Побудувати відрізок прямої $y = 2x + 1$, де $x \in [0;3]$ з кроком $\Delta = 0{,}25$

Рішення:

1. **Введення даних.** Необхідно скласти таблицю даних (*x* і *y*) на робочому аркуші Excel (рисунок 1.8).

2. **Вибір діаграми**. У вкладці *Вставлення* обрати *Діаграми*. Виділяємо табличні дані функції, і натискаємо на кнопку *Точкова чи бульбашкова діаграма* на стрічці. У вікні, що з'явилося обраємо *Точкова* та її *тип*. На робочому полі з'являється побудований графік функції.

3. **Редагування зображення**. Після того, як графік побудований, можна зробити деякі візуальні правки, за допомогою вкладки *Конструктор*.

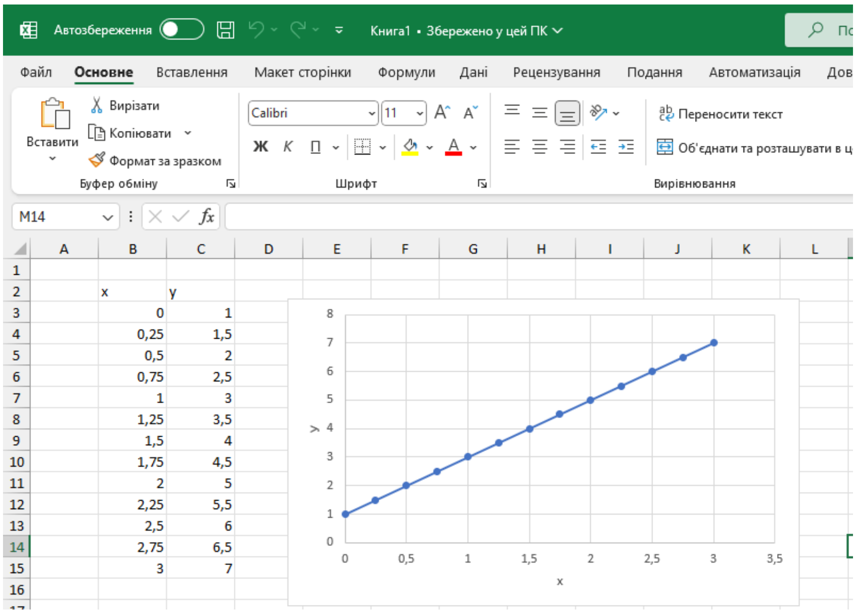


Рисунок 1.8 – Побудова відрізка

Приклад:

За наведеними даними побудуйте гістограму

Найменування покриття	SF/LF-2	XRC	CN 100iso	CN 200	NK C5-1	FZ SL	HS GRIGIO	FZ GRIGIO
Адгезія, MPa	34	38	27	28	42	35	35	35

Рішення:

1. **Введення даних.** Необхідно створити таблицю даних на робочому аркуші Excel (рисунок 1.9). Виділити її.

2. **Вибір діаграми**. У вкладці *Вставлення* обрати *Діаграми*. Натискаємо на кнопку *Вставити гістограму чи діаграма розмаху* на стрічці. У вікні, що з'явилося обраємо *Гістограма* та її *тип*. На робочому полі з’являється побудована гістограма.

3. **Редагування зображення**. Після того, як графік побудований, можна зробити деякі візуальні правки, за допомогою вкладки *Конструктор.*

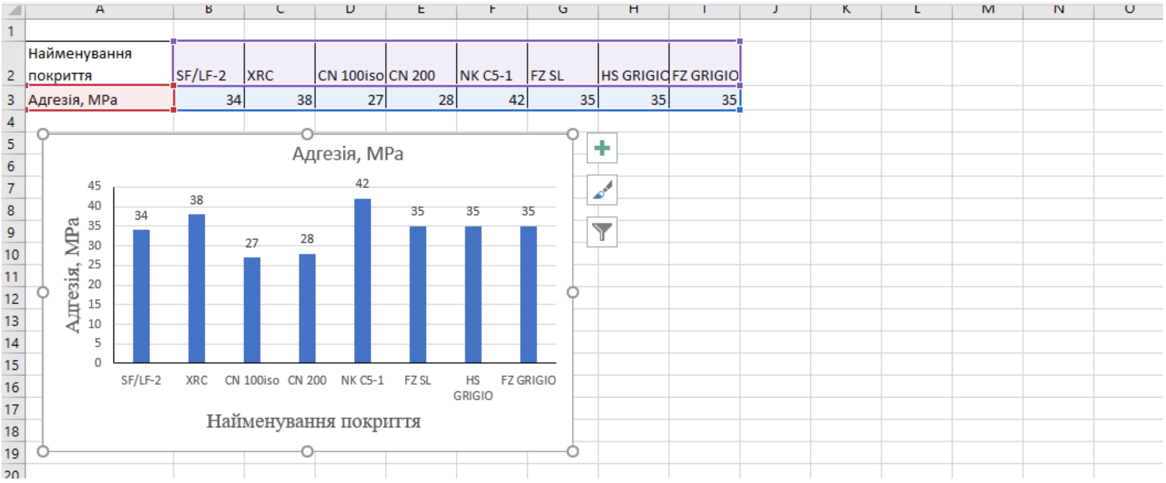


Рисунок 1.9 – Побудова гістограми

1.4 Пошук функції залежності

Для отримання функціональної залежності експериментальних даних можна скористатися функцією *Лінія тренда*.

Можливі наступні варіанти функцій:

1. Експоненціальна - $y = be^{x}$. Застосовується для опису експериментальних даних, які швидко зростають або спадають, а потім поступово стабілізуються. Часто її використання витікає з теоретичних міркувань.

2. Лінійна - $y = ax + b$. Функція застосовується для знаходження лінійної залежності експериментальних даних.

3. Логарифмічна - $y = a\ln(x) + b$. Функція застосовується для опису експериментальних даних, які швидко зростають або спадають, а потім поступово стабілізуються.

4. Поліноміальна - $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, де $n \in [2;6]$, a_n – константи. Використовується для опису експериментальних даних, що поперемінно зростають і спадають.

5. Статечна - $y = bx^n$. Використовується для опису експериментальних даних з швидкістю росту, що постійно збільшується (або якщо спадає). Експериментальні дані не повинні мати нульових або негативних значень.

Приклад:

Знайдіть функцію залежності теплоємності від температур, якщо відомі значення теплоємності при певних температурах (таблиця 1.2). Запишіть рівняння залежність у виді $Cp = a + bT + cT^2 + dT^3$ та обчисліть теплоємність при 300 °C та 500 °C.

Таблиця 1.2 - Дані для розрахунку

T, K	400	600	700	900
C_P, Дж/(моль·K)	40,74	52,5	58,05	67,27

Рішення:

1. Необхідно створити таблицю даних на робочому аркуші Excel. Виділити таблицю. Побудувати графік залежності Cp = *f* (T) (рисунок 1.10).

2. Для здійснення пошуку функції отриманої графічної залежності необхідно встановити покажчик миші на одну з точок і клацнути правою кнопкою миші. У контекстному меню, що з'явилося, вибрати пункт *Добавити лінію тренда*. У допоміжному вікні *Формат лінії тренда* – обрати лінію - поліноміальна (*степінь* 3) яка апроксимує табличні дані та встановити «*прапорець*» у полі *показувати рівняння на діаграме* і *показати величину вірогідності апроксимації*. Готово.

3. Отримане рівняння $y = -4E\text{-}08x^3 + 6E\text{-}05x^2 + 0{,}0316x + 21{,}412$ має вид: $Cp = 21{,}412 + 0{,}0316T + 6\cdot10^{-5} - 4\cdot10^{-8}T$

4. Для обчислення значень теплоємності при 300 °C та 500 °C необхідно у таблиці даних в рядку значення температури доповнити числами 573 та 773 у рядку значень теплоємності в комірці нижче значення 573 ввести отримане рівняння залежності. Таку ж операцію виконати і для другої температури.

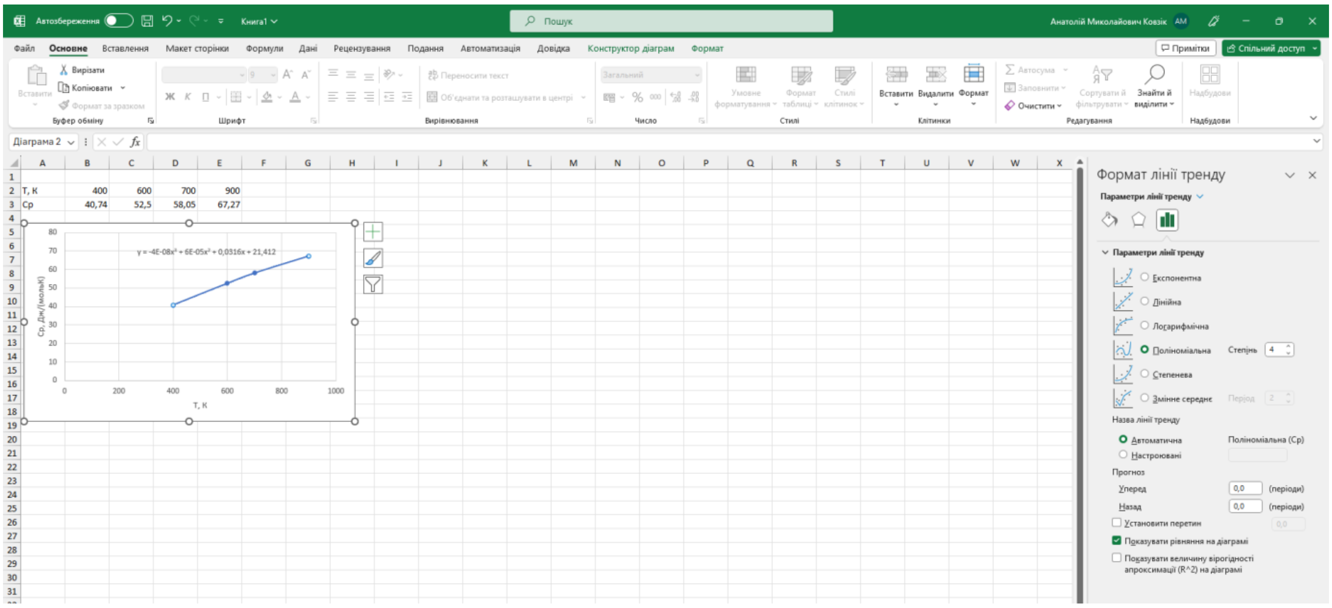


Рисунок 1.10 – Побудова лінійної залежності (апроксимація) експериментальних даних

Відповідь: Рівняння залежності має вид:

Ср = 21,412 + 0,0316Т + $6 \cdot 10^{-5}$ - $4 \cdot 10^{-8}$Т.

Значення теплоємності при 300 ºС (573 К) дорівнює 51,69 а при 500 ºС (773 К) дорівнює 63,21.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

ЧИСЛЕННІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Як правило задачі оптимізації зводяться до пошуку найбільшого (або найменшого) значення деякої функції.

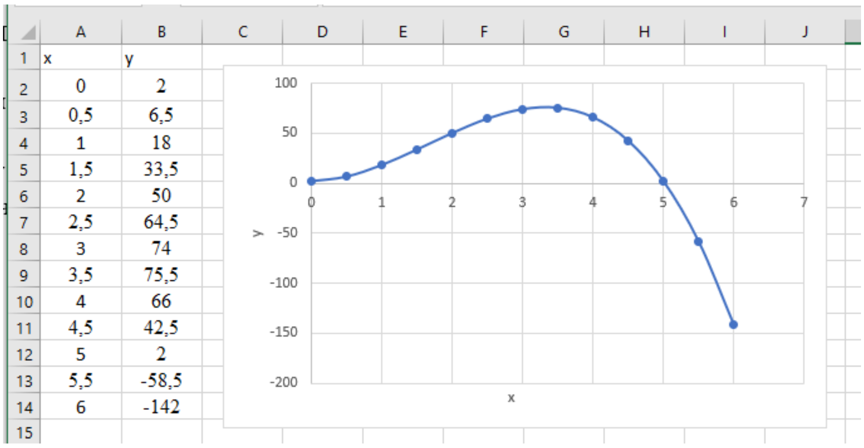
Функція однієї змінної y = *f* (x) має назву унімодальна на відрізку [a, b], якщо на цьому відрізку знаходиться єдина точка x*∈[a, b], в якій функція набуває мінімального значення.

2.1 Методи одновимірної оптимізації

Приклад:

Дослідити функцію $y = 2 - 4\cdot(x-5)\cdot x^2$ на відрізку [0, 6] з точністю ε = 0,01 методами одновимірної оптимізації.

На рисунку 2.1 представлена графічна залежність дослідної функції.



	A	B
1	x	y
2	0	2
3	0,5	6,5
4	1	18
5	1,5	33,5
6	2	50
7	2,5	64,5
8	3	74
9	3,5	75,5
10	4	66
11	4,5	42,5
12	5	2
13	5,5	-58,5
14	6	-142
15		

Рисунок 2.1 – Побудова графіку функції $y = 2 - 4\cdot(x-5)\cdot x^2$ на відрізку [0,6]

а) Метод золотого перетину

<u>*Рішення:*</u>

1. Створити таблицю, як показано на рисунку 2.1. Задаємося a, b, ε і $\lambda = 1.618...$ та записати формули $x_1 = b - \dfrac{b-a}{\lambda}, x_2 = a + \dfrac{b-a}{\lambda}, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

2. Змінюємо за правилом інтервал пошуку, використовуючи логічну функцію *IF,* тобто для пошуку максимального значення функції у комірці С4 потрібно використовувати =IF(H3>G3;E3;B3) а в комірці D4 записати =IF(B3=B4;F3;C3) і обчислюємо значення функції.

3. Перевіряємо умову $|b - a| < \varepsilon$. Якщо ця нерівність виконується, то знайдена точка максимуму, якщо ні, то протягуємо значення до точності $\varepsilon \le$ 0,01 (рисунок 2.2).

<u>*Відповідь:*</u> Функція приймає максимальне значення 76,07 при значенні x=3,33 з точністю ε = 0,01.

б) Метод чисел Фібоначі

<u>*Рішення:*</u>

1. Створити таблицю, як показано на рисунку 2.2. Задаємося N - кількість експериментів яке дорівнює 8.

   Заповнити значення a і b ряд чисел Фібоначчі та ввести формули

2. $$x_1 = a + (b-a)F_{N-2} / F_N,$$
$$x_2 = a + (b-a)F_{N-1} / F_N, .$$
$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2).$$

n	a	b	λ	x1	x2	f(x1)	f(x2)	b-a
1	0	6	1,618	2,291718	3,708282	58,89528	73,0515	6
2	2,291718	6	1,618	3,708108	4,583611	73,0544	36,99251	3,708282
3	2,291718	4,583611	1,618	3,167113	3,708215	75,53986	73,05261	2,291892
4	2,291718	3,708215	1,618	2,832754	3,16718	71,56421	75,54028	1,416497
5	2,832754	3,708215	1,618	3,167139	3,37383	75,54002	76,04101	0,875462
6	3,167139	3,708215	1,618	3,373805	3,501549	76,04105	75,4891	0,541076
7	3,167139	3,501549	1,618	3,294868	3,37382	76,04471	76,04102	0,334411
8	3,167139	3,37382	1,618	3,246081	3,294878	75,92447	76,04472	0,206682
9	3,246081	3,37382	1,618	3,294872	3,32503	76,04472	76,0727	0,127739
10	3,294872	3,37382	1,618	3,325026	3,343666	76,0727	76,07193	0,078949
11	3,294872	3,343666	1,618	3,313509	3,325029	76,06624	76,0727	0,048794
12	3,313509	3,343666	1,618	3,325027	3,332147	76,0727	76,07405	0,030157
13	3,325027	3,343666	1,618	3,332146	3,336547	76,07405	76,07387	0,018638
14	3,325027	3,336547	1,618	3,329427	3,332147	76,07377	76,07405	0,011519
15	3,329427	3,336547	2,618	3,333827	3,332147	76,07407	76,07405	0,00712

Рисунок 2.2 – Розрахункові значення

2. Змінюємо за правилом інтервал пошуку використовуючи логічну функцію *IF* і протягуємо значення до заданої кількості обчислень (рисунок 2.3).

Числа Фібоначі		1	1	2	3	5	8
	n	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
	1	0	6	2,292135	3,707865	58,90722	73,05844
	2	2,292135	6	3,708623	4,583512	73,04581	36,99928
	3	2,292135	4,583512	3,167492	3,708155	75,54225	73,05362
	4	2,292135	3,708155	2,833086	3,167203	71,56987	75,54043
	5	2,833086	3,708155	3,167382	3,373859	75,54156	76,04096
	6	3,167382	3,708155	3,373969	3,501567	76,04078	75,48898
	7	3,167382	3,501567	3,295048	3,373901	76,04498	76,04089
	8	3,167382	3,373901	3,246277	3,295006	75,92514	76,04492

Рисунок 2.3 – Розрахункові значення

Відповідь: Функція приймає максимальне значення 76,04 при значенні x=3,29 після восьми обчислень.

Аналогічно будується і обчислюється екстремум функції в інших методах пошуку, заснованих на апроксимації цільової функції.

Для пошуку мінімальних значень функції рекомендовано використовувати наступні методи.

в) Метод дотичних

Рішення:

1. Створити таблицю. Задаємося x_0- початкове значення крапки, яке належить відрізку і дорівнює 1. Записують вираз похідної першого і другого порядку $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$, $\frac{\partial f'(x)}{\partial x} = f''(x)$.

2. Розраховують значення x за формулою $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$.

Протягуємо значення до необхідного інтервалу.

г) Метод хорд

1. Створити таблицю. Записують вираз похідної першого порядку $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$.. Заповнити значення a і b та ввести формули. $x = b - \frac{f'(b)\cdot(b-a)}{f'(b) - f'(a)}$

2. Змінюємо за правилом інтервал пошуку і протягуємо значення до необхідного інтервалу.

2.2 Методи багатовимірної оптимізації

а) Градієнтний метод із роздрібненням кроку

Етапи розв'язання даного методу надані у вигляді блок – схеми (рисунок 2.4) .

$||g(x_k)||$ знаходимо за формулою: $\|\vec{g}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}$.

Розрахунок припиняється при досягненні точності обох параметрів ε_1 і ε_2.

Приклад:

Відшукати мінімум функції $f(x_1, x_2) = 2{,}4\, x_1 + 0{,}6\, x_2\, exp(0{,}1x_1^2 + 0{,}3x_2^2)$, якщо крок h =0,5, точність $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$.

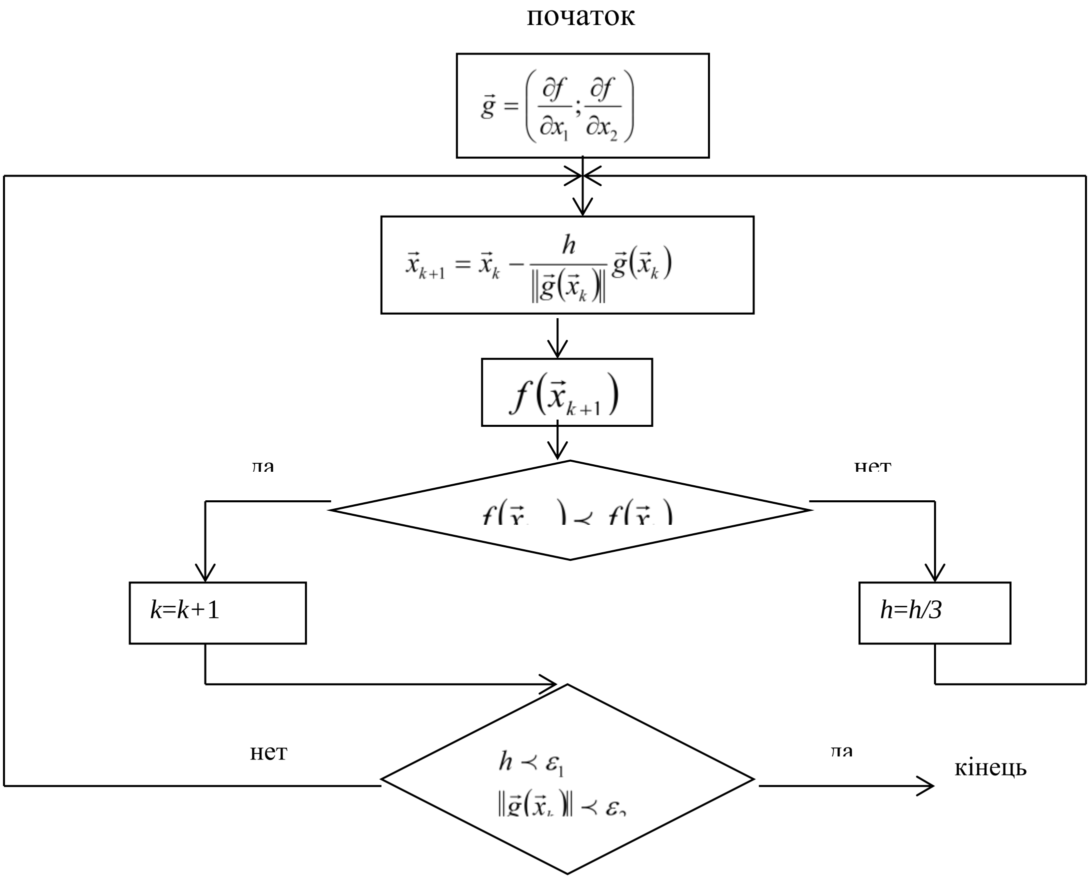
Рішення:

1. Створити таблицю, як показано на рисунку 2.4. Заповнити значення кроку, точності та значення коефіцієнтів цільової функції

2. У комірку занести формули для $\vec{g}$, $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \frac{h}{\|\vec{g}(\vec{x}_k)\|}\vec{g}(\vec{x}_k)$, $\|\vec{g}\|$.

3. Протягнути значення до необхідного діапазону (рисунок 2.5).

<u>Відповідь:</u> Функція приймає мінімальне значення -5,08 при значенні *x1*=-3,48 та *x2*=-0,29 при точності обчислень за значенням градієнта.



ε_1 - точність обчислень по кроку; ε_2 - точність обчислень за значенням градієнта; *h* - крок.

Рисунок 2.4 – Блок-схема градієнтного методу з роздрібненням кроку

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
13													
14	№пп	шаг	точность	a	b	c	d	df/dx1	df/dx2	x1	x2	функция	дост.точн
15	1	0,5		2,4	0,6	0,1	0,3	2,4000	0,6000	0,0000	0,0000	1,0000	2,4739
16	2	0,5	0,1	2,4	0,6	0,1	0,3	2,1152	0,3864	-1,2000	-0,3000	-1,8735	2,1503
17	3	0,5	0,1	2,4	0,6	0,1	0,3	1,5914	0,0700	-2,2576	-0,4932	-3,9234	1,5930
18	4	0,5	0,1	2,4	0,6	0,1	0,3	0,7133	-0,2754	-3,0533	-0,5282	-4,8828	0,7646
19	5	0,5	0,1	2,4	0,6	0,1	0,3	0,1163	-0,1846	-3,4100	-0,3905	-5,0696	0,2182
20	6	0,5	0,1	2,4	0,6	0,1	0,3	0,0283	-0,0118	-3,4681	-0,2982	-5,0830	0,0306

Рисунок 2.5 – Розрахункові значення

б) Метод сканування для двох перемінних

Нехай дана функція двох перемінних $f(x_1, x_2) \rightarrow min$. Для неї визначені верхній і нижній інтервали її зміни. Тобто, областю визначення буде прямокутник. Розіб'ємо кожну з його сторін на *n*1 рівних частин, як показано на рисунку 2.6. Перебираючи послідовно точку за точкою отриманої сітки, визначимо значення цільової функції в усіх вузлах. Серед усіх точок відшукується та, в якій функція мінімальна.

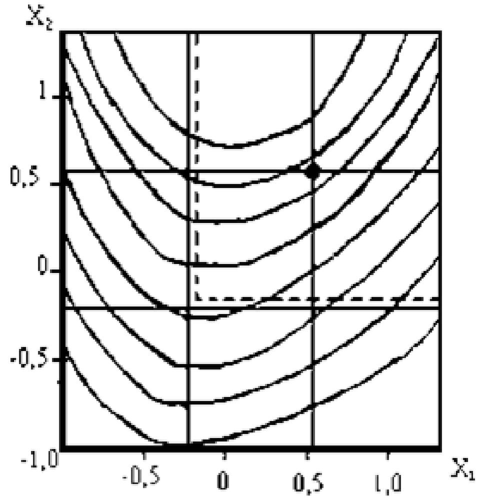


Рисунок 2.6 – Перша ітерація методу сканування для двох перемінних

Приклад:

Відшукати мінімум функції Розенброка $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1^2)$, якщо нижній інтервал зміних x_1, x_2 дорівнюють $a_1=a_2= -1$, а верхній інтервал відповідно рівний $b_1=b_2 =1{,}5$. Число розбивок інтервалу $n1 = 4$, точність $\varepsilon = 0{,}01$.

Рішення:

1. Створити таблицю. Заповнити значення верхнього і нижнього інтервалів (рисунок 2.7) по числу розбивок інтервалу та значення цільової функції. Протягнути значення до необхідного діапазону.

2. Знайти мінімальне значення функції, натиснувши на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функциї.* У діалоговому вікні, що з'явилося *Мастер функції* у робочому полі *Категорія* виберіть *Статистичні*, а в робочому полі *Функція* – MIN і натисніть ОК.

3. Змінити за правилом інтервал пошуку ($a_1=a_2= -0{,}166$: $b_1=b_2 =1{,}49$) і створити другу таблицю. Побудову таблиць продовжуємо ідентично до досягнення заданої точності $h_1< \varepsilon$ і $h_2 < \varepsilon$

	A	B	C	D	E	F	G
80							
81							
82	1 сетка	x_2		x_1			
83			-1	-0,16666	0,6666	1,49999	
84		-1	404	106,993	208,753	1056,499	
85		-0,16666	140,111	5,141	37,456	584,277	
86		0,6666	15,111	42,179	5,094	250,944	
87		1,49999	28,999	218,104	111,53	56,499	
88							
89			min	5,094			
90							
91	2 сетка	x_2		x_1			
92			-0,16666	0,38889	0,94444	1,49999	
93		-0,16666	5,141	10,479	112,072	584,277	
94		0,38889	14,401	29,546	25,311	346,611	
95		0,94444	85,388	63,29	0,2784	170,69	
96		1,49999	218,104	182,287	36,972	56,499	
97							
98			min	0,2784			
99							

Рисунок 2.7 – Розрахункові значення

в) Метод Рунге–Кутти

Звичайні диференційні рівняння (ЗДР) широко застосовуються для оптимізації процесів та явищ у різних галузях науки та техніки.

Дано диференційне рівняння $y' = f(x, y)$, початкові умови $y(x_0) = y_0$. Знайти $y = y(x)$ у вигляді таблиці на відрізку [*a, b*].

1. Розіб'ємо відрізок інтегрування [*a, b*] на *n* рівних частин системою точок $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

2. Знайдемо для кожного значення

$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$; $k_2^{(i)} = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2})$; $k_3^{(i)} = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2^{(i)}}{2})$; $k_3^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$.

3. Обчислимо $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$, ($\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$).

4. Обчислимо послідовно y_i, ($i = 1, 2, \ldots, n$), або

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}).$$

Схема покрокових обчислень методу Рунге–Кутти

i	*x*	*y*	*f(x,y)*	*k=hf(x,y)*	*Δy*
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
			$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$		
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + h$	$y_1 + k_3^{(1)}$	$f(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
			$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)})$		
2	x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$f(x_2, y_2)$	$k_1^{(2)}$	$k_1^{(2)}$
	$x_2 + \frac{h}{2}$	$y_2 + \frac{k_1^{(2)}}{2}$	$f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1^{(2)}}{2})$	$k_2^{(2)}$	$2k_2^{(2)}$
	$x_2 + \frac{h}{2}$	$y_2 + \frac{k_2^{(2)}}{2}$	$f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2^{(2)}}{2})$	$k_3^{(2)}$	$2k_3^{(2)}$
	$x_2 + h$	$y_2 + k_3^{(2)}$	$f(x_2 + h, y_2 + k_3^{(2)})$	$k_4^{(2)}$	$k_4^{(2)}$
			$\Delta y_2 = \frac{1}{6}(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)})$		
n	x_n	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	$f(x_n, y_n)$	$k_1^{(n)}$	$k_1^{(n)}$
	$x_n + \frac{h}{2}$	$y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}$	$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2})$	$k_2^{(n)}$	$2k_2^{(n)}$
	$x_n + \frac{h}{2}$	$y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}$	$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2})$	$k_3^{(n)}$	$2k_3^{(n)}$
	$x_n + h$	$y_n + k_3^{(n)}$	$f(x_n + h, y_n + k_3^{(n)})$	$k_4^{(n)}$	$k_4^{(n)}$

i	***x***	***y***	***f(x,y)***	***k=hf(x,y)***	***Δy***
			$\Delta y_n = \frac{1}{6}(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)})$		

Приклад:

Дано диференційне рівняння $y' = 0{,}25y^2 + x^2$, початкові умови $y(0)$=-1. Знайти y=$y(x)$ у вигляді таблиці на відрізку [0; 0,4], h=0,1.

Рішення:

$f(x,y) = 0{,}25y^2 + x^2$, $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = -1$.

Розрахунки зручно проводити за допомогою Excel.

Схема обчислення і результати обчислення (рисунок 2.8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**i**	*x*	*y*	*f(x,y)*	*k=hf(x,y)*	*del(y)*	
2		0	-1	=0,25*C2^2+B2^2	=0,1*D2	=E2	
3		=$B$2+0,1/2	=$C$2+E2/2	=0,25*C3^2+B3^2	=0,1*D3	=2*E3	
4	**0**	=$B$2+0,1/2	=$C$2+E3/2	=0,25*C4^2+B4^2	=0,1*D4	=2*E4	
5		=$B$2+0,1	=$C$2+E4	=0,25*C5^2+B5^2	=0,1*D5	=E5	=(F2+F3+F4+F5)/6
6		=$B$5	=$C$2+$G$5	=0,25*C6^2+B6^2	=0,1*D6	=E6	
7		=$B$6+0,1/2	=$C$6+E6/2	=0,25*C7^2+B7^2	=0,1*D7	=2*E7	
8	**1**	=$B$6+0,1/2	=$C$6+E7/2	=0,25*C8^2+B8^2	=0,1*D8	=2*E8	
9		=$B$6+0,1	=$C$6+E8	=0,25*C9^2+B9^2	=0,1*D9	=E9	=(F6+F7+F8+F9)/6

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x	y	f(x,y)	k	del y	
2		0	-1	0,25	0,025	0,025	
3	0	0,05	-0,9875	0,246289	0,024629	0,049257813	
4		0,05	-0,98769	0,246381	0,024638	0,049276137	
5		0,15	-0,97536	0,260333	0,026033	0,026033272	0,02492787
6		0,15	-0,97507	0,260191	0,026019	0,026019141	
7	1	0,2	-0,96206	0,271391	0,027139	0,054278218	
8		0,2	-0,9615	0,271122	0,027112	0,05422436	
9		0,3	-0,94796	0,314657	0,031466	0,031465702	0,02766457
10		0,3	-0,94741	0,314395	0,03144	0,031439527	
11	2	0,35	-0,93169	0,339511	0,033951	0,067902107	
12		0,35	-0,93043	0,338926	0,033893	0,067785188	
13		0,45	-0,91351	0,411127	0,041113	0,04111274	0,034706594
14							

Рисунок 2.8 – Розрахункові значення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

У пакеті EXCEL є потужний інструмент для роботи з декількома вибірками і поглибленого аналізу даних, званий *Пакет аналізу,* який може бути використаний для вирішення завдань статистичної обробки вибіркових даних.

Для установки розділу *Аналіз даних* необхідно виконати наступне:

1. У вкладці *«Файл»*. У лівому вертикальному меню вікна, натиснути *«Параметри»*.
2. В розділ *«Надбудова»*. Перейти до поля *«Керування»*, клацнути кнопку *«Перейти».;*
3. У списку, що з'явився, встановити прапорець *Пакет аналіза* та натиснути ОК.
4. Перейти у вкладку *«Дані»*. На стрічці клацнути кнопку *«Аналіз даних»*. Відкриється віконце *«Data Analysis»*.

а) Знаходження основних характеристик вибірки

Для визначення характеристик вибірки використовується процедура *Описательная статистика*, яка дозволяє отримати статистичний звіт, що містить інформацію про центральну тенденцію і мінливість вхідних даних. Серед критеріїв, які вираховує даний інструмент наступні показники:

- Медіана;
- Мода;
- Дисперсія;
- Середнє;
- Стандартне відхилення;
- Стандартна помилка;
- Асиметричність і ін.

Приклад:

На підприємстві був проведений пасивний промисловий експеримент, в результаті якого були отримані дані, приведені в таблиці 3.1.

Як чинники були вибрані:

X_1 – об’єм водню, який виділився, г;

X_2 – площа зразку, м^2;

X_3 – час корозії, год;

Параметр оптимизації: У – швидкість корозії, г/(м^2·год).

Таблиця 3.1 – Початкові дані

	X_1	X_2	X_3	У
1	33,1	83,5	24,0	3,0
2	33,4	83,6	24,2	3,2
3	33,4	83,7	24,3	3,5
4	33,7	83,8	24,5	3,6
5	33,7	83,8	24,5	3,7
6	33,8	83,9	24,6	3,8
7	33,9	84,0	24,7	3,9
8	34,0	84,0	24,8	4,0
9	34,0	84,1	24,8	4,0
10	34,1	84,1	24,9	4,1
11	34,1	84,2	24,9	4,1
12	34,1	84,2	24,9	4,3
13	34,2	84,3	25,0	4,3
14	34,3	84,4	25,1	4,5
15	34,3	84,4	25,2	4,6
16	34,5	84,6	25,3	4,9
17	34,7	84,8	25,5	5,0
18	34,8	85,0	25,5	5,5

Визначити основні статистичні характеристики в групах даних.

Рішення:

1. Скласти таблицю даних на робочому аркуші вікна EXCEL

2. У вікні *Data Analysis* вибрати рядок *Descriptive Statistics* (рисунок 3.1).

3. У діалоговому вікні *Descriptive Statistics* заповнити поля «Input range» (посилання на діапазон комірок із значеннями X_1,X_2,X_3 з шапкою таблиці) та встановити прапорець в полі «Labels in first row» і «Output range» (посилання на вільну комірку). Встановить «прапорець» у полі «Summary Statistics» і натискувати ОК (рисунок 3.2).

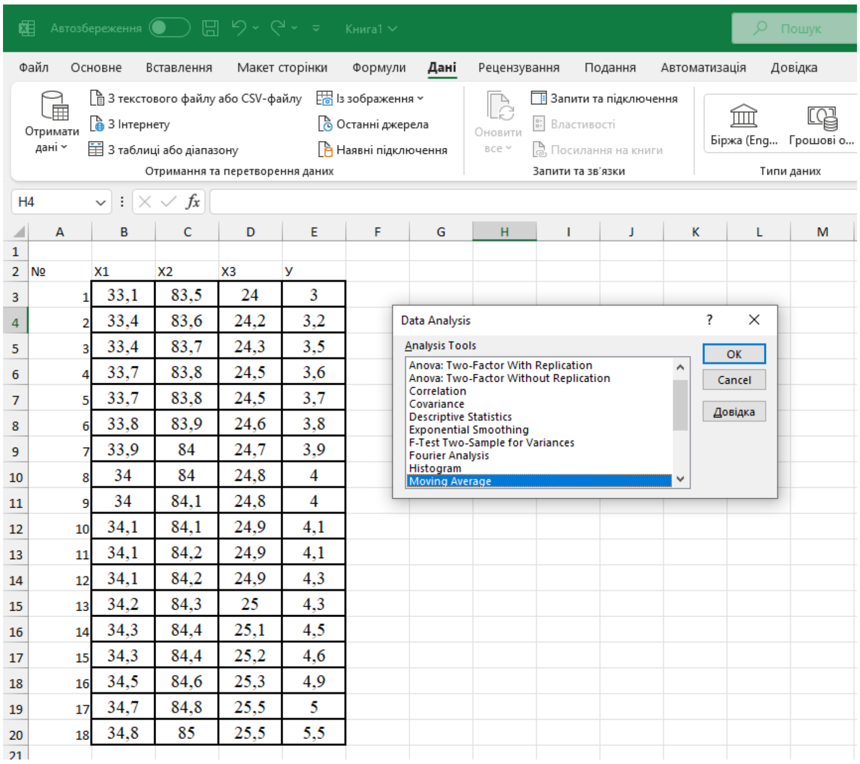


Рисунок 3.1 – Вікно *Data Analysis*

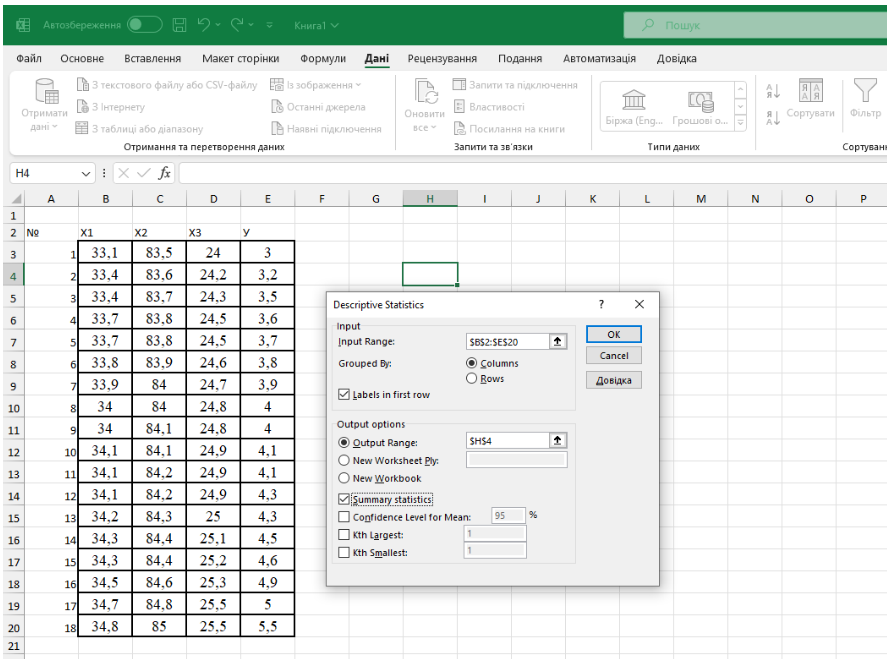
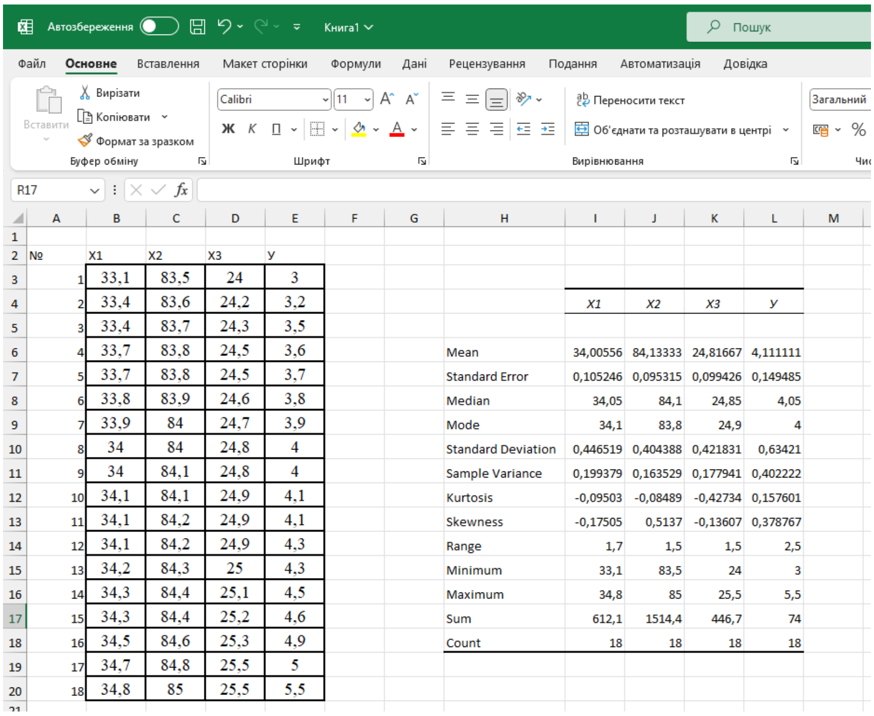


Рисунок 3.2 – Приклад заповнення вікна *Descriptive Statistics*

В результаті аналізу (рисунок 3.3) у вказаному вихідному діапазоні для кожного стовпця даних отримаємо відповідні результати.



№	X1	X2	X3	y
1	33,1	83,5	24	3
2	33,4	83,6	24,2	3,2
3	33,4	83,7	24,3	3,5
4	33,7	83,8	24,5	3,6
5	33,7	83,8	24,5	3,7
6	33,8	83,9	24,6	3,8
7	33,9	84	24,7	3,9
8	34	84	24,8	4
9	34	84,1	24,8	4
10	34,1	84,1	24,9	4,1
11	34,1	84,2	24,9	4,1
12	34,1	84,2	24,9	4,3
13	34,2	84,3	25	4,3
14	34,3	84,4	25,1	4,5
15	34,3	84,4	25,2	4,6
16	34,5	84,6	25,3	4,9
17	34,7	84,8	25,5	5
18	34,8	85	25,5	5,5

	X1	X2	X3	y
Mean	34,00556	84,13333	24,81667	4,111111
Standard Error	0,105246	0,095315	0,099426	0,149485
Median	34,05	84,1	24,85	4,05
Mode	34,1	83,8	24,9	4
Standard Deviation	0,446519	0,404388	0,421831	0,63421
Sample Variance	0,199379	0,163529	0,177941	0,402222
Kurtosis	-0,09503	-0,08489	-0,42734	0,157601
Skewness	-0,17505	0,5137	-0,13607	0,378767
Range	1,7	1,5	1,5	2,5
Minimum	33,1	83,5	24	3
Maximum	34,8	85	25,5	5,5
Sum	612,1	1514,4	446,7	74
Count	18	18	18	18

Рисунок 3.3 – Результати *Descriptive Statistics*

б) Кореляційний аналіз

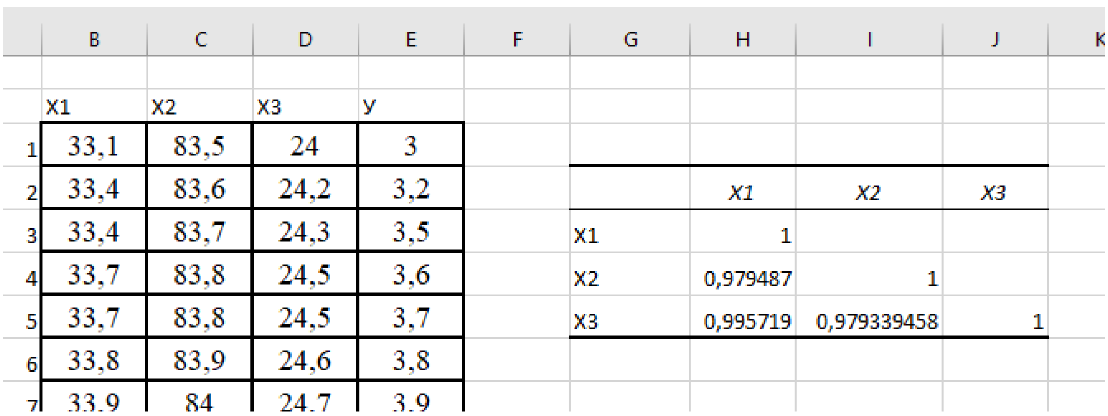
Для обчислення кореляційних матриць використовується процедура *Кореляція,* яка дозволяє отримати квадратну матрицю коефіцієнтів кореляції між різними параметрами.

Початкові дані взяті з таблиці 3.1. Визначити кореляційні залежності між трьома факторами (об’єм водню, площа зразка та часом корозії).

Рішення:

1. У вкладці *«Дані»* на стрічці клацнути *«Аналіз даних».* У вікні *Data Analysis* вибрати рядок *Correlation* та натиснути ОК.

2. У діалоговому вікні вказати «Input range» (посилання на діапазон комірок із значеннями X_1,X_2,X_3) і «Output range» (посилання на вільну комірку) і натиснуть ОК (рисунок 3.4)



	X1	X2	X3
X1	1		
X2	0,979487	1	
X3	0,995719	0,979339458	1

Рисунок 3.4 – Результати обчислення кореляційної матриці

Прийнято наступне розмежування, яке визначає рівень взаємозв'язку між різними показниками, в залежності від коефіцієнта кореляції:

0 - 0,3 – зв'язок відсутній;

0,3 - 0,5 – зв'язок слабкий;

0,5 - 0,7 – середній зв'язок;

0,7 - 0,9 – високий;

0,9 - 1 – найсильніший.

Якщо кореляційний коефіцієнт негативний, то це означає, що зв'язок параметрів зворотній.

Відповідь: Коефіцієнт кореляції площі зразка *(X2)* і об’єм водню *(X1)* становить 0,98, що відповідає найсильнішому взаємозв'язку. Між часом корозії *(X3)* і об’єм водню *(X1)* даний показник дорівнює 0,99, що відповідає найсильнішому взаємозв'язку. Коефіцієнт кореляції між часом корозії *(X3)* і площею зразку *(X2)* дорівнює 0,98, що теж відповідає високому ступєню залежності. Таким чином, можна сказати, що залежність між усіма досліджуваними факторами простежується досить сильна.

в) Регресійний аналіз

Регресія використовується для аналізу дії на окрему залежну змінну значень одній або більш незалежних змінних. У EXCEL експериментальні дані апроксимуються лінійним рівнянням до 16-того ладу:

$$\text{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_{16} x_{16} \tag{7.1}$$

де y - залежна змінна,

$x_1,\ldots,x_{16}$ - незалежні змінні,

a_0, a_1, … a_{16} –коефіцієнти регресії, які отримуються при обчислені.

Початкові дані узяті з таблиці 3.1. Отримати регресійну модель і визначити значущість параметрів.

Рішення:

1. У вкладці *«Дані»* на стрічці клацнути «*Аналіз даних».* У вікні *Data Analysis* вибрати рядок *Regression* та натиснути ОК.

2. У діалоговому вікні вказати «Input range» *Y* і «Input range» X (посилання на діапазон комірок незалежних даних). Далі вказати «Output range» (посилання на вільну комірку) (рисунок 3.5) і натиснуть ОК (рисунок 3.6).

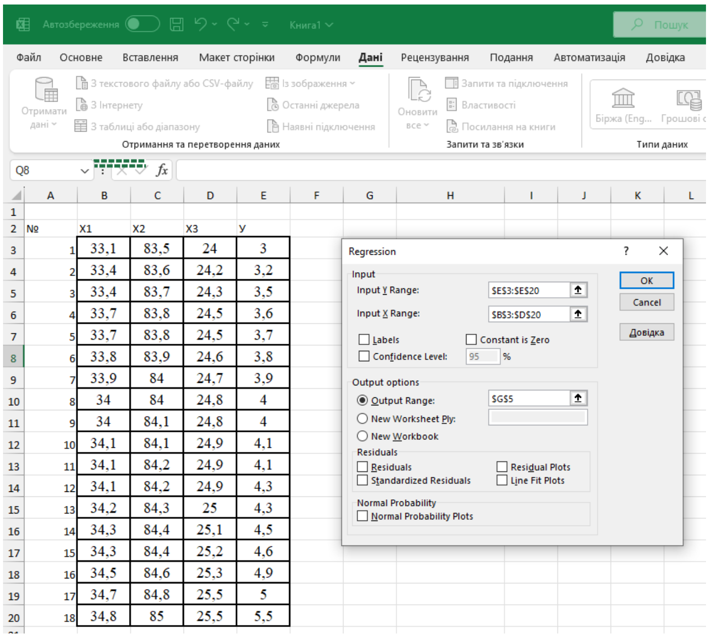
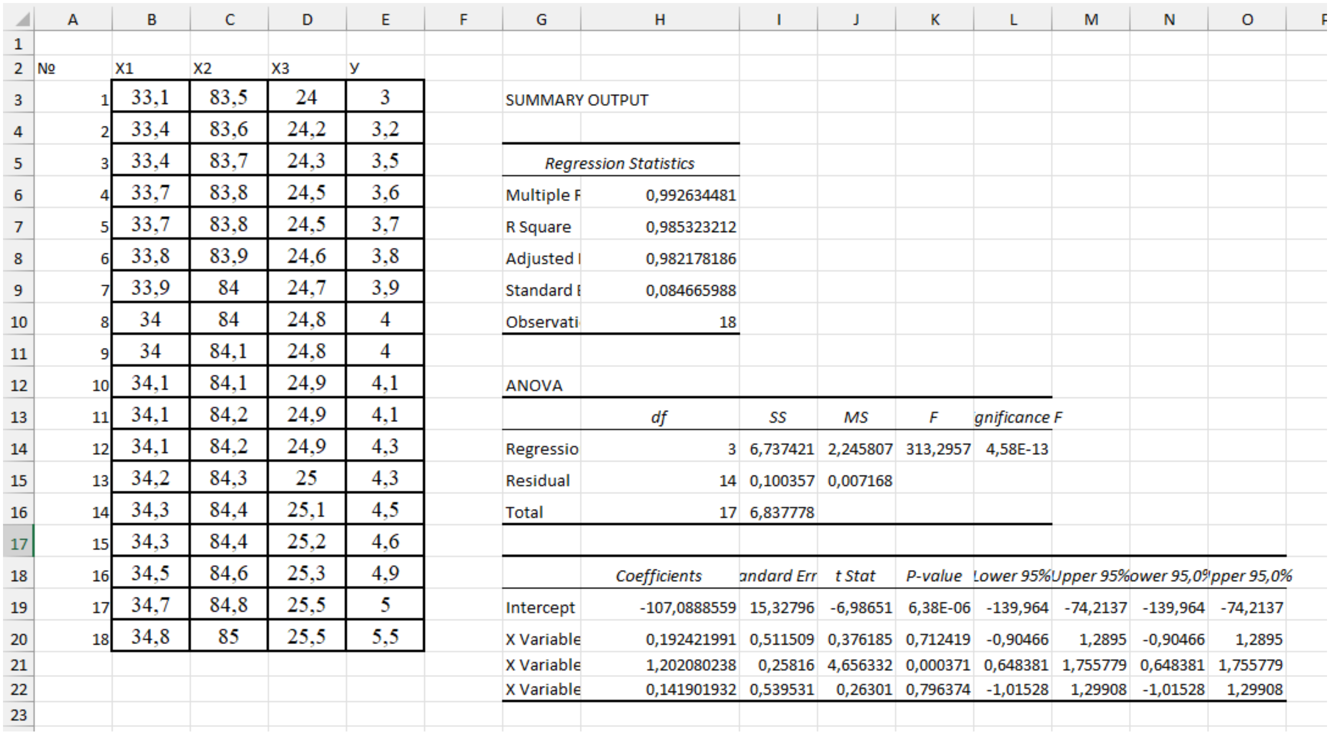


Рисунок 3.5 – Приклад заповнення діалогового вікна *Regression*



№	X1	X2	X3	У
1	33,1	83,5	24	3
2	33,4	83,6	24,2	3,2
3	33,4	83,7	24,3	3,5
4	33,7	83,8	24,5	3,6
5	33,7	83,8	24,5	3,7
6	33,8	83,9	24,6	3,8
7	33,9	84	24,7	3,9
8	34	84	24,8	4
9	34	84,1	24,8	4
10	34,1	84,1	24,9	4,1
11	34,1	84,2	24,9	4,1
12	34,1	84,2	24,9	4,3
13	34,2	84,3	25	4,3
14	34,3	84,4	25,1	4,5
15	34,3	84,4	25,2	4,6
16	34,5	84,6	25,3	4,9
17	34,7	84,8	25,5	5
18	34,8	85	25,5	5,5

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple F	0,992634481
R Square	0,985323212
Adjusted I	0,982178186
Standard I	0,084665988
Observati	18

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*gnificance F*
Regressio	3	6,737421	2,245807	313,2957	4,58E-13
Residual	14	0,100357	0,007168		
Total	17	6,837778			

	Coefficients	*andard Err*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*ower 95,0%*	*pper 95,0%*
Intercept	-107,0888559	15,32796	-6,98651	6,38E-06	-139,964	-74,2137	-139,964	-74,2137
X Variable	0,192421991	0,511509	0,376185	0,712419	-0,90466	1,2895	-0,90466	1,2895
X Variable	1,202080238	0,25816	4,656332	0,000371	0,648381	1,755779	0,648381	1,755779
X Variable	0,141901932	0,539531	0,26301	0,796374	-1,01528	1,29908	-1,01528	1,29908

Рисунок 3.5 – Результати обчислення вікна *Regression*

В результаті отримана регресійна модель вигляду

$$y = -107{,}089 + 0{,}192x_1 + 1{,}202x_2 + 0{,}142x_3$$

з високою точністю апроксимації R=0,98. Значущими коефіцієнтами в моделі є коефіцієнт x_2 (оскільки *p-value* < 0,05).

Отже, модель можна представити у вигляді: $y = -107{,}089 + 1{,}202x_2$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

РІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДАМИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для одержання плану першого порядку використовують факторні експерименти: повний і дробовий факторний експеримент (ПФЕ і ДФЕ), що дозволяє одержати інформацію про об'єкт дослідження, представлену у вигляді лінійного або нелінійного полінома першого ступеня, провести статистичний аналіз моделі, здійснити оптимізацію факторів.

У загальному виді поліноміальна модель першого ступеня має вигляд

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i X_i + \sum_{i=1}^{N} b_{ij} X_i X_j \qquad (4.1)$$

де Y – параметр оптимізації;

b_0, b_i, b_{jj} – коефіцієнт рівняння, $i = 1,2,\ldots,n; i \prec j$;

X_i, X_j – фактори.

Розглянемо алгоритм повного факторного експерименту для випадку планування на двох рівнях, тобто реалізуємо ПФЭ 2^n (n - число факторів) для отримання математичної моделі у виді нелінійного поліному першого порядку.

Задача:

Для очистки хімічного устаткування застосовуються суміші мінеральних кислот соляної, ортофосфатної та азотної відповідно X_1, X_2, X_3. Параметр оптимізації швидкість розчинення солевідкладень Р, г/м³·год. Досліди вели при температурі 293 К у кожній точці плану виконувалося по 2 паралельних досліди.

Виготовлення суміші здійснюють із кислот соляної 6 - 7,5 % ортофосфатної – 73 ÷ 79 %, та азотної – 21 ÷ 27 %. швидкість розчинення солевідкладень складає 30 ÷ 34 г/м³·год.

Необхідно оптимізувати швидкість розчинення солевідкладень з метою одержання максимального значення швидкості розчинення солевідкладень.

Рішення:

Для планування математичного експерименту вибираємо наступні фактори:

X_1 – кількість соляної кислоти, %;

X_2 – кількість ортофосфатної кислоти, %;

X_3 – кількість азотної кислоти, %.

Як вихідну змінну – параметр оптимізації приймаємо швидкість розчинення солевідкладень – Y.

Враховуючи кількість факторів необхідно отримати модель – нелінійне рівняння регресії першого ступеня виду

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 \quad (4.2)$$

а) Складання матриці планування експерименту, проведення експерименту. Перевірка однорідності дисперсій

На підставі результатів збору апріорної інформації щодо об’єкту дослідження або попередніх досліджень вибирають X_{i0} (нульовий рівень), який забезпечує найкращі значення параметра Y. Установивши область визначення факторів, задаються інтервалом їх варіювання і визначають верхній та нижній рівні факторів за формулами

$$X_{iB} = X_{i0} + \Delta X_i \qquad\qquad X_{iH} = X_{i0} - \Delta X_i \qquad (4.3)$$

де X_{iB} – верхній рівень i-го фактора;

X_{iH} – нижній рівень i-го фактора;

X_{i0} – основний (нульовий) рівень i-го фактора;

ΔX_i – інтервал варіювання i-го фактора.

Далі кодують фактори, переходячи до нової безрозмірної системи координат $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$x_{iB} = \frac{X_{iB} - X_{i0}}{\Delta X_i} \quad (4.4) \qquad\qquad x_{iH} = \frac{X_{iH} - X_{i0}}{\Delta X_i} \quad (4.5)$$

У новій системі координат фактори приймають значення +1 (верхній рівень) і -1 (нижній рівень). Результати приводять у таблиці 4.1.

З урахуванням кількості досліджуваних факторів (n = 3) складають матрицю планування експерименту ПФЕ 2^3 з кількістю рядків у матриці – N = 8 ($2^3 = 8$). Матриця планування експерименту наведена у таблиці 4.2. Після перевірки властивостей матриці (ортогональність, симетричність, нормування) проводять експеримент і зводять результати визначення швидкість розчинення солевідкладень до таблиці 4.2.

Таблиця 4.1 – Умови проведення експерименту

Рівні факторів	Позначення	Фактори		
		X_1	X_2	X_3
Основний рівень	X_{i0}	5	24	6
Інтервал варіювання	ΔX_i	2	3	1,5
Верхній рівень (+1)	X_{iB}	7	27	7,5
Нижній рівень (-1)	X_{iH}	3	21	4,5

Далі знаходимо середнє значення параметра (функція AVERAGE) і порядкові дисперсії за паралельними визначеннями по кожному рядку матриці (функція VAR.S) та суму середніх значень параметра і дисперсії функція SUM). Для цього натисніть на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставлення функції.* У діалоговому вікні, що з'явилося *Вставлення функції* у робочому полі *Категорія* виберіть *Статистичні*, а у робочому полі *Виберіть функцію* оберіть – AVERAGE і натисніть OK.

Таблиця 4.2 – Матриця планування і результати експерименту

Номер досліду	Фактори (кодовані позначення)			Параметр оптимізації			Дисперсія S_u^2	Розрахункове значення $\hat{Y}_u$
				Паралельні визначення		$\bar{Y}_u$		
	X_1	X_2	X_3	Y_{u1}	Y_{u2}			
1	+1	+1	+1	22,9	24,3	23,6	0,980	23,34
2	–1	+1	+1	23,1	23,4	23,25	0,045	23,51
3	+1	–1	+1	19,0	20,6	19,80	1,280	19,81
4	–1	–1	+1	23,0	25,1	24,05	2,205	24,04
5	+1	+1	–1	35,5	36,8	36,15	0,845	36,14
6	–1	+1	–1	41,1	39,6	40,35	1,125	40,36
7	+1	–1	–1	21,9	21,8	21,85	0,005	22,11
8	–1	–1	–1	22,6	22,5	22,55	0,005	22,29
$\sum_{u=1}^{N} Y_u =, \sum_{u=1}^{N} S_{uk}^2 =$						211,6	6,49	-

Для обчислення дисперсії по генеральної сукупності застосовується функція VAR.S. яка знаходиться у робочому полі *Виберіть функцію* оберіть –

VAR.S і натисніть ОК. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* VAR.S введіть число 1 та число 2 (рисунок 4.1) і натисніть ОК.

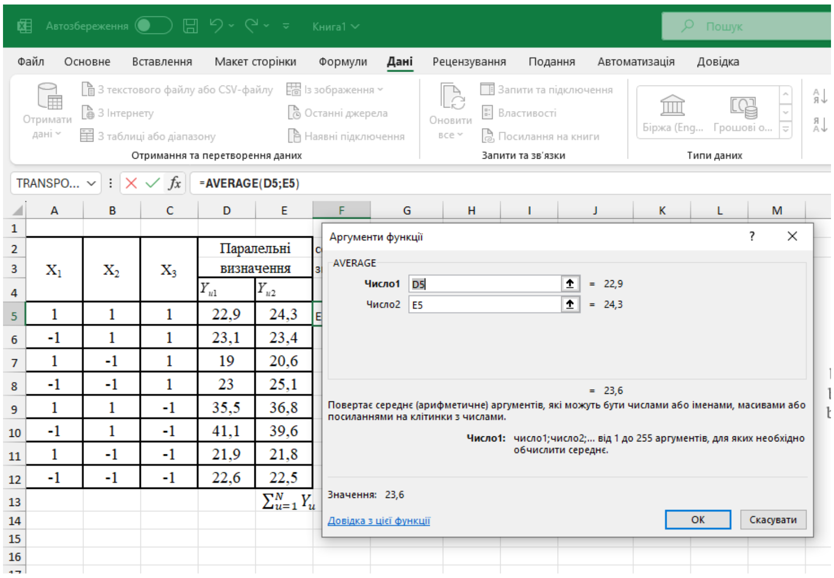


Рисунок 4.1 – Розрахунок дисперсії

Результати обчислень зводять у таблицю 4.2.

Для перевірки гіпотези однорідності дисперсій і відтворюваності вимірів при однаковому числі паралельних визначень використовують критерій Кохрена, який розраховується за формулою

$$G^{розр.} = \frac{S^2_{uk\max}}{S^2_u}, \tag{4.6}$$

де $G^{розр.}$ – критерій Кохрена;

$S^2_{uk\max}$ – максимальне значення порядкової дисперсії.

$$G^{розр.} = \frac{2{,}205}{6{,}49} = 0{,}3398$$

Гіпотеза про однорідність дисперсій підтверджується, якщо виконується умова

$$G^{розр.} \prec G^{табл.} \tag{4.7}$$

У разі невиконання умови (4.7) гіпотеза про однорідності дисперсії відкидається, і одним з рішень є збільшення числа паралельних дослідів, зміна методу контролю вихідний змінної та інше.

Для знаходження табличного значення критерію Кохрена задаються рівнем значимості ($\alpha = 0{,}05$) і ступенями вільності, які розраховуються по формулах

$$f_1 = m - 1, \qquad (4.8) \qquad\qquad f_2 = N, \qquad (4.9)$$

де f_1, f_2 – ступені вільності;

m – число паралельних дослідів;

N – число різних умов досліду (число рядків матриці).

Для розглянутої матриці $f_1 = 2 - 1 = 1$, $f_2 = 8$. Табличне значення критерію Кохрена дорівнює $G_{1;8}^{табл.} = 0{,}6798$ (додаток А). Так як $0{,}3398 \prec 0{,}6798$, то дисперсії однорідні.

б) Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії

Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії роблять по формулах

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}\overline{Y}_u \qquad (4.10) \qquad\qquad b_i = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot\overline{Y}_u \qquad (4.11)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot x_{ju}\cdot\overline{Y}_u \qquad (4.12) \qquad\qquad b_{ijk} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot x_{ju}\cdot x_{ku}\cdot\overline{Y}_u \qquad (4.13)$$

де i, j, k - номер фактора; $i \prec j \prec k, i = 1,2,3\ldots,n$;

x_{iu} - значення x_i -го в u -тім досліді.

Для обчислення коефіцієнтів рівняння регресії застосовується функція SUMPRODUCT, для цього натисніть на панелі інструментів *Стандартна* кнопку *Вставіть функцію.* У діалоговому вікні, що з'явилося *Вставка функції* у робочому полі *Категорія* виберіть *Математичні*, а у робочому полі *Виберіть функцію* оберіть – SUMPRODUCT і натисніть ОК. У вікні, що з'явилося *Аргументи функції* SUMPRODUCT введіть масив 1 та масив 2 і натисніть ОК. Курсор переведіть в *строку формул* та доповніть отриману формулу діленням на 8 (рисунок 4.2).

X_1	X_2	X_3	Паралельні визначення Y_{u1}	Y_{u2}	середнє значення $\bar{Y}_u$	Дисперсія S_u^2		
1	1	1	22,9	24,3	23,6	0,98	b0=	26,45
-1	1	1	23,1	23,4	23,25	0,045	b1=	-1,1
1	-1	1	19	20,6	19,8	1,28	b2=	4,3875
-1	-1	1	23	25,1	24,05	2,205	b3=	-3,775
1	1	-1	35,5	36,8	36,15	0,845	b12=	0,1375
-1	1	-1	41,1	39,6	40,35	1,125	b13=	0,125
1	-1	-1	21,9	21,8	21,85	0,005	b23=	-3,6375
-1	-1	-1	22,6	22,5	22,55	0,005	b123=	1,0125
				$\sum_{u=1}^{N} Y_u =$	211,6	$\sum_{u=1}^{N} S_{uk}^2 = 6{,}49$		

Рисунок 4.2 – Розрахунок дисперсії коефіцієнтів рівняння регресії

в) Розрахунок помилки досліду та оцінка значимості коефіцієнтів рівняння

Розрахунок дисперсії відтворюваності (помилки досліду) виробляється усередненням порядкових дисперсії по формулі

$$S_y^2 == \frac{1}{N \cdot (m-1)} \cdot S_u^2 , \qquad (4.14)$$

де S_y^2 – дисперсія відтворюваності (помилка досліду);

N – число різних умов досліду (число рядків матриці планування);

m – число паралельних дослідів по кожному рядку матриці;

S_u^2 – дисперсія суми дисперсії за рядками.

$$S_y^2 = \frac{1}{8 \cdot (2-1)} \cdot 6{,}49 = 0{,}81125 .$$

Значимості коефіцієнтів рівняння регресії оцінюють за критерієм Стьюдента, для розрахунку якого попередньо визначають дисперсію коефіцієнтів по формулі

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m}, \qquad (4.15)$$

де $S_{b_i}^2$ – дисперсія коефіцієнтів рівняння регресії;

S_y^2 – дисперсія відтворюваності (помилки досліду);

N – число різних умов досліду;

m – число паралельних дослідів по кожному рядку матриці.

$$S_{b_i}^2 = \frac{0{,}81125}{8 \cdot 2} = 0{,}0507.$$

Розрахунок t- критерію Стьюдента виконують за формулою

$$t_0 = \frac{|b_0|}{\sqrt{S_{b_i}^2}}, \quad t_i = \frac{|b_i|}{\sqrt{S_{b_i}^2}}, \quad t_{ij} = \frac{|b_{ij}|}{\sqrt{S_{b_i}^2}}, \quad t_{ijk} = \frac{|b_{ijk}|}{\sqrt{S_{b_i}^2}}, \tag{4.16}$$

де $t_0, t_i, t_{ij}, t_{ijk}$ – критерій Стьюдента коефіцієнтів рівняння;

$b_0, b_i, b_{ij}, b_{ijk}$ – коефіцієнти рівняння регресії;

i, j, k – номер фактора.

$$t_0 = \frac{|26{,}45|}{\sqrt{0{,}0507}} = 117{,}46; \qquad t_1 = \frac{|-1{,}10|}{\sqrt{0{,}0507}} = 4{,}89; \qquad t_2 = \frac{|4{,}39|}{\sqrt{0{,}0507}} = 19{,}5;$$

$$t_3 = \frac{|-3{,}77|}{\sqrt{0{,}0507}} = 16{,}74; \qquad t_{12} = \frac{|0{,}14|}{\sqrt{0{,}0507}} = 0{,}62; \qquad t_{13} = \frac{|0{,}13|}{\sqrt{0{,}0507}} = 0{,}58;$$

$$t_{23} = \frac{|-3{,}64|}{\sqrt{0{,}0507}} = 16{,}17; \qquad t_{123} = \frac{|1{,}01|}{\sqrt{0{,}0507}} = 4{,}49.$$

Прийняття рішення про значимість коефіцієнтів рівняння регресії здійснюють на підставі виконання умов:

$$t_0 \geq t_{\alpha,f}^{табл}; \quad t_i \geq t_{\alpha,f}^{табл}; \quad t_{ij} \geq t_{\alpha,f}^{табл}; \quad t_{ijk} \geq t_{\alpha,f}^{табл}, \tag{4.17}$$

де $t_{\alpha,f}^{табл.}$ – табличне значення критерію Стьюдента (додаток Б);

α – рівень значимості ($\alpha = 0{,}05$);

f – число ступенів вільності.

Якщо для якогось коефіцієнта рівняння умови (4.17) не виконується, то відповідний фактор варто визнати не значимим і виключити його з рівняння регресії.

Число ступенів вільності визначають по формулі

$$f = N \cdot (m-1), \tag{4.18}$$

де N, m – число різних умов і паралельних дослідів відповідно.

Кількість ступенів вільності становить $f = 8 \cdot (2-1) = 8$, тоді $t_{0,05;8}^{табл.} = 2{,}31$.

$t_0 = 117{,}45 \succ 2{,}31$; $t_1 = 4{,}89 \succ 2{,}31$; $t_2 = 19{,}5 \succ 2{,}31$; $t_3 = 16{,}74 \succ 2{,}31$;

$t_{12} = 0{,}62 \prec 2{,}31$; $t_{13} = 0{,}58 \prec 2{,}31$; $t_{23} = 16{,}17 \succ 2{,}31$; $t_{123} = 4{,}49 \succ 2{,}31$.

Таким чином, коефіцієнти рівняння регресії b_{12}, b_{13} не значимі, й вони виключаються з полінома першого ступеня (4.2), що для розглянутого завдання має вигляд

$$Y = 26{,}45 - 1{,}1X_1 + 4{,}39X_2 - 3{,}77X_3 - 3{,}64X_2X_3 + 1{,}01X_1X_2X_3 \qquad (4.19)$$

г) Аналіз адекватності математичної моделі

Для перевірки адекватності необхідно за отриманим рівнянням регресії й відповідно до матриці планування експерименту розрахувати значення параметра оптимізації і результати розрахунків занести у таблицю 4.2.

Для перевірки адекватності рівняння необхідно розрахувати дисперсію адекватності по формулі

$$S^2_{адекв.} = \frac{m}{N-l} \cdot \sum_{u=1}^{N} (\hat{Y}_u - \bar{Y}_{uk})^2, \qquad (4.20)$$

де $S^2_{адекв.}$ – дисперсія адекватності;

N – число різних умов досліду;

m – число паралельних дослідів по кожному рядку матриці;

l – кількість коефіцієнтів рівняння, що залишилися після перевірки їх значимості;

$\bar{Y}_{uk}$ – значення параметра по u-тому рядку матриці в k-тому досліді ;

$\hat{Y}_u$ – розрахункове значення параметра по рівнянню регресії зі значимими коефіцієнтами.

$$S^2_{адекв} = \frac{2}{8-6} \cdot \begin{bmatrix} (23{,}34 - 23{,}6)^2 + (23{,}51 - 23{,}25)^2 + (19{,}81 - 19{,}8)^2 + \\ + (24{,}04 - 24{,}05)^2 + (36{,}14 - 36{,}15)^2 + (40{,}36 - 40{,}35)^2 + \\ + (22{,}11 - 21{,}85)^2 + (22{,}29 - 22{,}55)^2 \end{bmatrix} = 0{,}27625$$

Адекватність рівняння перевіряється за критерієм Фішера. Якщо розрахункове значення критерію Фішера задовольняє умові

$$F_{розр.} \prec F_{табл.}, \qquad (4.21)$$

то рівняння вважається адекватним. Якщо умова (4.21) не виконується, то це свідчить про істотну кривизну функції відгуку (параметра), і рівняння вважається неадекватним.

Якщо гіпотеза адекватності моделі відкидається, то можливі наступні прийоми одержання адекватної моделі:

- збільшення інтервалів варіювання факторів (цей прийом може привести до мети, якщо вирішується завдання оптимізації);

- виділення (якщо можливо) фактору, що породжує неадекватність, і реалізація для k - 1 факторів нових планів, що залишилися (при цьому виділений фактор повинен бути зафіксований на певному рівні);

- перетворення контрольованих змінних (факторів), тобто перехід до нових факторів, статистично зв'язаних з попередніми.

Розрахункове значення критерію Фішера визначається по формулі

$$F_{розр.} = \frac{S^2_{адекв.}}{S^2_y}, \tag{4.22}$$

де $F_{розр.}$ – розрахункове значення критерію Фішера;

$S^2_{адекв.}$ – дисперсія адекватності;

S^2_y – дисперсія відтворюваності (помилка досліду).

$$F_{розр.} = \frac{0,27625}{0,81125} = 0,3405$$

Табличне значення критерію Фішера визначається для $\alpha = 0,05$ і ступенів вільності f_1 и f_2 (додаток В).

$$f_1 = N - l, \tag{4.23}$$

$$f_2 = N \cdot (m - 1), \tag{4.24}$$

де f_1, f_2 – число ступенів вільності;

N – число різних умов;

m – число паралельних дослідів по кожному рядку матриці;

l – кількість коефіцієнтів рівняння, що залишилися після перевірки їх значимості.

$$f_1 = 8 - 6 = 2, \quad f_2 = 8 \cdot (2 - 1) = 8.$$

Табличне значення критерію Фішера дорівнює $F_{табл.} = 19,37$, а $F_{розр.} = 0,3405$, тобто $F_{розр.} \prec F_{табл.}$, отже, математична модель адекватна.

д) Аналіз математичної моделі

Отримана математична модель дозволяє оцінити ступінь як самостійного, так і спільного впливу факторів процесу корозії. Відносну силу впливу різних факторів можна представити у вигляді таблиці або діаграми, де величина кожного коефіцієнта позначена стовпчиком відповідної висоти (таблиця 4.3, рисунок 4.3).

Таблиця 4.3 – Коефіцієнти рівняння регресії

Позначення коефіцієнта	b_1	b_2	b_3	b_{23}	b_{123}
Значення	-1,10	4,39	-3,77	-3,64	-1,01

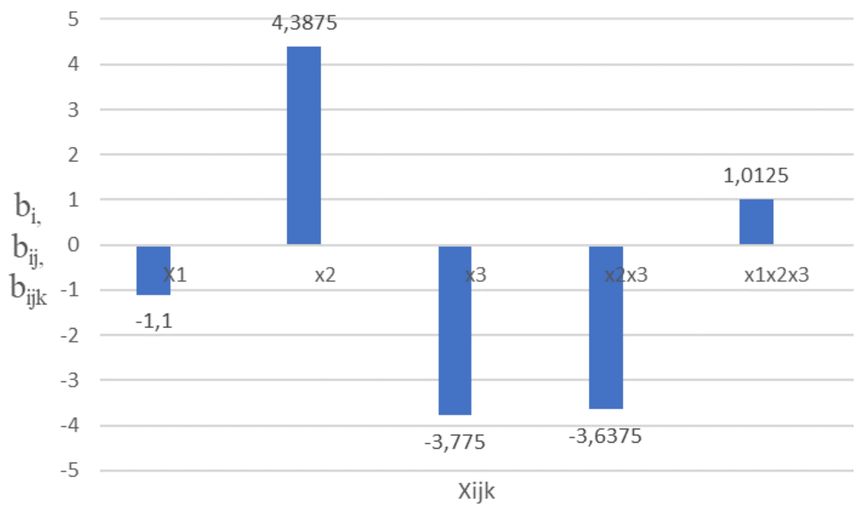


Рисунок 4.3 – Відносна сила впливу факторів

При аналізі коефіцієнтів рівняння регресії враховується наступне:

- чим більше абсолютна величина коефіцієнта фактора X_i, тим більший вплив цього фактора на величину параметра Y ;

- якщо коефіцієнт рівняння регресії фактора X_i приймає негативне значення, то для збільшення значення параметра оптимізації Y потрібно зменшити значення відповідного фактора;

- якщо коефіцієнт рівняння регресії фактора X_i приймає позитивне значення, то для збільшення значення параметра оптимізації Y потрібно збільшити значення відповідного фактора;

- якщо ефект взаємодії факторів $X_i X_j$ має негативний знак, то для збільшення значення параметра оптимізації Y фактори X_i і X_j повинні змінюватися в різних напрямках.

Істотний вплив на параметр Y – швидкості розчинення солевідкладень, мають фактори X_2 ($|b_2| = 4{,}39$) – кількість ортофосфатної і X_3 ($|b_3| = 3{,}77$) – кількість азотної кислоти у суміші, а так само їх спільна взаємодія ($|b_{23}| = 3{,}64$). Фактор X_1 – кількість соляної кислоти і спільна взаємодія факторів X_1, X_2, X_3 здійснюють незначний вплив на швидкість розчинення солевідкладень ($|b_1| = 1{,}1, b_{123} = 1{,}01$).

Враховуючи те, що величина коефіцієнтів рівняння регресії фактора X_2 приймає позитивне значення ($b_2 = 4{,}39$), а коефіцієнт фактора X_3 негативне значення ($b_3 = -3{,}77$), то для підвищення швидкості розчинення необхідно збільшувати кількість ортофосфатної кислоти (X_2) і зменшувати кількість азотної у суміші (X_3).

За допомогою отриманого рівняння регресії можна розрахувати швидкість розчинення солевідкладень для випадку зміни одного з факторів у досліджуваній області за умови фіксування двох інших факторів на нульовому рівні.

Наприклад, при $X_1 = +1$ і $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ швидкість розчинення солевідкладень складатиме

$$Y = 26{,}45 - 1{,}1 \cdot (+1) + 4{,}39 \cdot 0 - 3{,}77 \cdot 0 - 3{,}64 \cdot 0 \cdot 0 + 1{,}01 \cdot (+1) \cdot 0 \cdot 0 = 27{,}5$$

Результати розрахунків швидкість розчинення солевідкладень наведено в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Розрахункові значення параметра оптимізації

№ з/п	X_1	X_2	X_3	Y, г/м³·год
1	+ 1	0	0	27,5
2	- 1	0	0	25,3
3	0	+ 1	0	30,8
4	0	- 1	0	22,1
5	0	0	+ 1	22,7
6	0	0	- 1	30,2

Отже, максимальні значення швидкості розчинення солевідкладень відповідають X_2 = +1 ($Y = 30{,}8$ г/м³·год) і X_3 = -1 ($Y = 30{,}2$ г/м³·год), і зменшення кількості ортофосфатної кислоти (фактор X_2 - рівень –1) так само, як і збільшення азотної (фактор X_3 - рівень +1) обумовлюють зниження швидкості розчинення солевідкладень до 22,1 г/м³·год і 22,7 г/м³·год відповідно.

При X_1 = +1 і X_1 = -1 швидкість розчинення солевідкладень знижується до 25,3 г/м³·год і 27,5 г/м³·год, тобто зменшення кількості соляної кислоти у суміші сприяє деякому підвищенню швидкості розчинення солевідкладень.

Таким чином, із проведеного аналізу можна припустити, що область оптимальних значень фактора X_2 перебуває в інтервалі значень від нульового рівня до рівня +1, тобто кількість ортофосфатної кислоти в суміші повино становити 24 – 27 %, а кількість азотної кислоти – фактор X_3 доцільно приймати в інтервалі від нульового рівня до –1, що відповідає значенням 6 – 4,5 %. Величина фактора X_1 може змінюватися в межах рівня від +1 до –1, тобто від 3 % до 7 %.

Зважаючи на те, що на швидкість розчинення солевідкладень впливає спільна взаємодія факторів, особливо X_2 і X_3 ($b_{23} = -3{,}64$), то доцільно провести аналіз моделі при фіксованому значенні одного фактора на нульовому рівні і зміні двох інших на верхньому (+1) і нижньому (–1) рівнях (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Розрахункові значення параметра оптимізації при зміні факторів

№ з/п	X_1	X_2	X_3	Y, г/м³·год
1	0	+1	+1	23,4
2	0	+1	-1	38,3
3	0	-1	-1	22,2
4	0	-1	+1	21,9
5	+1	0	+1	23,8
6	+1	0	-1	31,3
7	-1	0	-1	29,1
8	-1	0	+1	21,6
9	+1	+1	0	31,9
10	+1	-1	0	23,2
11	-1	-1	0	21,0
12	-1	+1	0	29,7

Отримані дані підтверджують раніше зроблені висновки і дозволяють визначити значення факторів для виробництва суміші з швидкістю розчинення солевідкладень більше 31 г/м³·год (таблиця 4.6).

Таблиця 4.6 – Оптимальні технологічні параметри виготовлення вогнетривів

№ з/п	Фактори (кодовані позначення)			Фактори (натуральні значення)			Y, г/м³·год
	X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3	
1	0	+1	-1	5	27	4,5	38,3
2	+1	0	-1	7	24	4,5	31,3
3	+1	+1	0	7	27	6	31,9

Таким чином, підвищення вмісту соляної кислоти у суміші до 7% незалежно від кількості ортофосфатної та азотної кислот обумовлює низьку швидкість розчинення солевідкладень –31,3 г/м³·год і 31,9 г/м³·год. Зменшення кількості соляної при однаковій кількості азотної кислоти і при збільшенні ортофосфатної кількості обумовлює збільшення швидкістю розчинення солевідкладень.

В якості оптимальної суміші кислот, яка забезпечить підвищену швидкість розчинення солевідкладень (більше 38,3 г/м³·год), рекомендуються наступні:

- Кількість соляної кислоти (X_1) – 5 %
- Кількість ортофосфатної (X_2) – 27 %
- Кількість азотної (X_3) – 4,5 %

ЛІТЕРАТУРА

1. Vernin G., Chanon M. Computer Aids to Chemistry. Harlow : Pearson Education, 1986. 412 p.
2. Johnson K. Numerical Methods in Chemistry : textbook. New York City : Marcel Dekker Inc, 1980. 503 p.
3. Пінчук С. Й. Організація експерименту при моделюванні та оптимізації технічних систем : навч. посіб. 2-ге вид., переробл. і допов. Дніпропетровськ : РВА “Дніпро-VAL”, 2009. 289 с.
4. Горват А. А., Молнар О. О., Міонькович В. В. Методи обробки експериментальних даних з використанням MS Excel : навч. посіб. Ужгород : УжНУ “Говерла”, 2019. 160 с.
5. Гришуніна М. Обчислення статистичних характеристик. *Гадяцька гімназія імені Олени Пчілки*. URL: http://pchilka-litsei.in.ua/excel-book/calculation.html (дата звернення: 10.01.2024).

ДОДАТОК А

Значення критерію Кохрена (*G*-критерій) для $\alpha = 0{,}05$

f_2 \ f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**
2	0,9985	0,9750	0,90392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1815	0,1671	0,1429
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1303

ДОДАТОК Б

Значення критерію Стьюдента (*t*-критерію)

Число ступенів вільності	Рівень значимості, α			Число ступенів вільності	Рівень значимості, α		
	0,1	0,05	0,1		0,01	0,05	0,1
1	6,31	12,7	10,01	26	1,71	2,06	2,78
2	2,92	4,30	9,93	27	1,70	2,05	2,77
3	2,35	3,18	5,84	28	1,70	2,05	2,76
4	2,13	2,78	4,60	29	1,70	2,05	2,76
5	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,045	2,756
6	1,94	2,45	3,71	32	1,699	2,041	2,742
7	1,90	2,37	3,50	34	1,696	2,037	2,737
8	1,86	2,31	3,36	36	1,692	2,032	2,729
9	1,83	2,26	3,25	38	1,691	2,028	2,715
10	1,81	2,23	3,17	40	1,689	2,023	2,708
11	1,80	2,20	3,11	42	1,688	2,020	2,701
12	1,78	2,18	3,06	46	1,685	2,016	2,692
13	1,77	2,16	3,01	48	1,684	2,011	2,683
14	1,76	2,15	2,98	50	1,682	2,009	2,679
15	1,75	2,13	2,95	55	1,680	2,005	2,669
16	1,75	2,12	2,92	60	1,677	2,001	2,662
17	1,74	2,11	2,90	65	1,675	1,998	2,675
18	1,73	2,10	2,88	70	1,674	1,996	2,649
19	1,73	2,09	2,86	75	1,671	1,993	2,645
20	1,73	2,09	2,85	80	1,669	1,991	2,640
21	1,72	2,08	2,83	85	1,667	1,989	2,637
22	1,72	2,07	2,82	90	1,667	1,987	2,633
23	1,71	2,07	2,81	95	1,665	1,985	2,629
24	1,71	2,06	2,80	100	1,662	1,984	2,627
25	1,71	2,06	2,79				

ДОДАТОК В

Критерій Фішера (F - критерій) для $\alpha = 0{,}05$

Число ступенів вільності	Число ступенів вільності														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	40	100
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	249	251	253
2	18,51	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,45	19,47	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,38	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,64	8,60	8,56
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,0	5,96	5,91	5,84	5,77	5,71	5,66
5	6,10	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,53	4,46	4,40
6	5,99	5,14	5,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,03	4,0	3,92	3,84	3,77	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,49	3,41	3,34	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,2	3,12	3,05	2,98
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,98	2,98	2,82	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,32	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,74	2,67	2,59
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,0	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,50	2,46	2,35
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,35	2,27	2,19
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,24	2,16	2,07
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,15	2,07	1,98

Навчально-методичне видання

Голуб Ірина Валеріївна,
Біла Олена Вікторівна

ОПТИМІЗАЦІЯ КОРОЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчально-методичні рекомендації до лабораторного практикуму

Електронне видання

Експертний висновок склав канд. техн. наук, доц. Ольга Носко
Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 690 від 14.02.2024)

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка І. В. Голуб

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2,67. Облік.-вид. арк.1,07.
Зам № 8

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адрес видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010