

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. А. ЛАЗАРЯНА**

**Кафедра «Теоретична та будівельна механіка»**

**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Методичні рекомендації та завдання для самостійної підготовки  
до модульного контролю МК2 (ІІ семестр).  
Для студентів денної форми навчання всіх технічних спеціальностей

**ЕЛЕКТРОННИЙ АНАЛОГ ДРУКОВАНОГО ВИДАННЯ**

**Дніпро - 2020**

УДК 539.3/.6 (076.5)

Укладачі:

доц. С. А. Костриця

доц. Л. В. Урсуляк

ст. викл. Н. Й. Грановська

ст. викл. Є. Ф. Федоров

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. В. Лобода (ДНУ)

д-р. іст. наук, проф. С. С. Довганюк (ДНУЗТ)

Рекомендовано до друку МКФ (протокол № 4 від 21.12.2020)

та НМВ ДНУЗТ (реєстр. № 481 від 30.12.2020)

Опір матеріалів [Текст]: методичні рекомендації та завдання для самостійної підготовки до модульного контролю МК2 (II семестр) / уклад.: С. А. Костриця, Л. В. Урсуляк, Н. Й. Грановська, Є. Ф. Федоров. Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. А. Лазаряна, 2020. – 68 с.

У методичних рекомендаціях наведені приклади тестових завдань для самостійної підготовки студентів до модульного контролю МК2 (II семестр).

Для студентів денної форми навчання всіх спеціальностей.

Іл. 114. Бібліогр.: 15 назв.

© Костриця С.А.. та ін., укладання, 2020

© Дніпровський нац. ун-т залізн. трансп.  
ім. акад. В. А. Лазаряна, редагування,  
оригінал-макет, 2020

## Зміст

ВСТУП .....	5
1 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ .....	6
1.1. Основні теоретичні питання .....	6
1.2.3 Приклади виконання тестових завдань .....	6
1.2.2 Тестові завдання для самоперевірки.....	9
1.3. Інтеграл Мора. ....	10
1.3.1 Приклади виконання тестових завдань .....	10
1.3.2. Тестові завдання для самоперевірки.....	12
1.4. Спосіб Верещагіна.....	14
1.4.1 Приклади виконання тестових завдань .....	15
1.4.1 Тестові завдання для самоперевірки.....	17
2. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ. МЕТОД СИЛ....	18
2.1. Основні теоретичні питання .....	20
2.2. Визначення ступеня статичної невизначеності системи та вибір основної системи 21	
2.2.1 Приклади розв'язання тестових завдань.....	22
2.2.2 Завдання для самоперевірки .....	26
2.3. Епюри згинальних моментів в рамах .....	28
2.3.1. Приклади розв'язання тестових завдань.....	28
2.3.2 Завдання для самоперевірки .....	33
2.4. Визначення одиничних коефіцієнтів в системі канонічних рівнянь методу сил. 39	
2.4.1 Приклади виконання тестових завдань .....	39
2.4.2 Тестові завдання для самоперевірки .....	44
2.5. Визначення переміщень в статично визначуваних рамах від заданого навантаження.....	48
2.5.1 Приклади виконання тестових завдань.....	49
2.5.2 Тестові завдання для самоперевірки .....	52
2.6. Визначення опорних реакцій у статично невизначуваних рамах.....	54
2.6.1 Приклади виконання тестових завдань.....	54
2.6.2 Тестові завдання для самоперевірки.....	56
3. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ. ....	58
3.1. Основні теоретичні питання.....	58
3.2. Визначення коефіцієнтів динаміки .....	59
3.2.1 Приклади виконання тестових завдань .....	59
3.2.2 Тестові завдання для самоперевірки.....	61
3.3. Визначення напружень та прогинів при ударному навантаженні. ....	64

3.3.1	Приклади виконання тестових завдань .....	64
3.3.2	Тестові завдання для самоперевірки.....	66
	СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	68

## ВСТУП

Згідно з кваліфікаційною характеристикою фахівці в галузі **27-** Транспорт, **19-** Архітектура та будівництво, **13-** Механічна інженерія повинні вміти виконувати розрахунки елементів споруд і рухомого складу на міцність, жорсткість і стійкість.

Студент повинен:

- ознайомитися з сучасними методами розрахунків вузлів та деталей споруд, машин і механізмів, основами їх конструювання;
- зрозуміти основні задачі міцності та надійності машин, зокрема, те, що зниження матеріалоемності конструкцій машин є одним з основних науково технічних завдань інженерної справи;
- зрозуміти основні питання світогляду взагалі та науки про міцність, надійність та стійкість споруд і механізмів зокрема;
- уміти розв'язувати задачі з курсу «Опір матеріалів» за фахом.

Критерієм успішності є отримання позитивної оцінки при захисті індивідуальних завдань та складанні модульних контролів у тестовій формі.

Наступні методичні вказівки розроблені для студентів денної форми навчання, які вивчають повний курс «Опір матеріалів».

У методичних вказівках наведено перелік основних теоретичних питань з розділів «Енергетичні методи», «Метод сил», «Задачі динаміки», знаннями з яких повинен володіти студент для успішного складання модульного контролю МК4, а також тестові завдання та приклади їх виконання.

Приклади типових тестових завдань наведені з таких тем:

- **Енергетичні методи:**
  - теорема Клапейрона;
  - теорема взаємності робіт;
  - теорема Кастіліано;
  - принцип найменшої роботи;
  - інтеграл Мора;
  - правило Верещагіна.
- **Метод сил:**
  - ступінь статичної невизначеності;
  - епюри згинаючих моментів;
  - визначення одиничних коефіцієнтів;
  - визначення вільних членів та коефіцієнтів;
  - визначення опорних реакцій.
- **Задачі динаміки:**
  - визначення коефіцієнтів динамічності;
  - визначення напружень та прогинів при ударі.

Для кожного з зазначених вище розділів наведені приклади виконання тестових завдань.

# 1 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ

Визначення переміщень точок пружних систем є необхідною складовою розрахунку статично визначуваних та статично невизначуваних систем на міцність та жорсткість. Це можна зробити, в тому числі, за допомогою так званих енергетичних методів, тобто таких, які випливають з закону збереження енергії.

Для визначення переміщень точок пружних систем за допомогою енергетичних методів треба знати відповіді на наступні питання.

## 1.1. Основні теоретичні питання

1. Як формулюється теорема Клапейрона?
2. Як записується вираз дійсної роботи при розтяганні?
3. Як записується вираз дійсної роботи при чистому згині?
4. Як записується вираз дійсної роботи при крученні?
5. Як формулюється теорема взаємності робіт (теорема Бетті).
6. Як записується теорема взаємності робіт (теорема Бетті)?
7. Як формулюється теорема Кастіліано?
8. Як формулюється принцип найменшої роботи (теорема Менабреа)?
9. Які величини можна обчислити за допомогою інтеграла Мора?
10. Як формулюється правило Верещагіна обчислення інтегралу Мора?

## 1.2. Теорема Кастіліано

### 1.2.3 Приклади виконання тестових завдань

#### Тестове завдання 1

Потенціальна енергія пружної деформації балки при згині її силою  $F$  становить  $U = \frac{F^2 l^3}{6EJ_z} + \frac{kF^2 l}{2GA}$ . Чому дорівнює прогин балки в точці прикладання сили?

Розв'язання:

Згідно з теоремою Кастіліано переміщення  $\Delta$  точки прикладання сили  $F$ , яку приймаємо за узагальнену силу  $Q$ , у напрямку її дії дорівнює частковій похідній від потенціальної енергії деформації  $U$  по цій силі  $\Delta = \frac{\partial U}{\partial Q}$ :

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2Fl^3}{6EJ_z} + \frac{k2Fl}{2GA}, \text{ тобто } \Delta = \frac{Fl^3}{3EJ_z} + \frac{kFl}{GA}.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta = \frac{Fl^3}{3EJ_z} + \frac{kFl}{GA}$$

#### Тестове завдання 2

Потенціальна енергія пружної деформації стрижня при розтягу його силою  $F$  становить  $U = \frac{3F^2 l}{2EA}$ . Чому дорівнює видовження стрижня?

Розв'язання:

Видовження стрижня дорівнює переміщенню його кінцевого перерізу, в якому прикладена сила  $F$ . Тому для визначення переміщення, як і в попередньому випадку, можна скористуватись теоремою Кастіліано.

$$\text{Тоді видовження стрижня } \Delta l = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{3Fl}{EA}.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta l = \frac{3Fl}{EA}$$

Тестове завдання 3.

Жорсткість стрижнів однакова і становить  $EA$ . Необхідно знайти значення вертикального переміщення вузла  $O$  стрижневої системи (рис. 1.1).

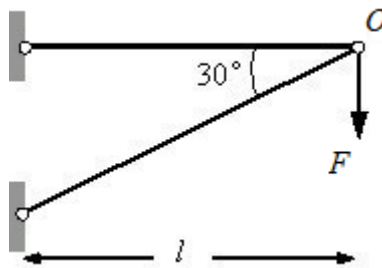


Рис. 1.1

Розв'язання:

Як і раніше, скористуємось теоремою Кастіліано. Для цього необхідно визначити потенційну енергію деформації стрижнів. Спочатку визначаємо зусилля в стрижнях. Стрижні з'єднані між собою та з опорною стінкою шарнірами, тому в них виникають тільки поздовжні зусилля  $N_1$  та  $N_2$  (див. рис. 1.2).

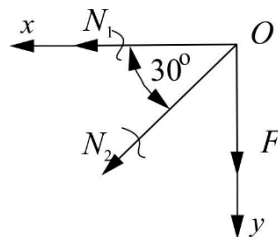


Рис. 1.2

Складаємо рівняння рівноваги збіжної системи сил  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $F$ .

$$\sum F_x = N_1 + N_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = N_2 \cos 60^\circ + F = 0.$$

Знаходимо  $N_2 = -F / \cos 60^\circ = -2F$ ;  $N_1 = -N_2 \cos 30^\circ = F\sqrt{3}$ .

При розтягу (стиску) потенційна енергія деформації визначається як

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_0^l \frac{N_i^2}{EA_i} dx, \text{ тому у нашому випадку } U = \frac{N_1^2 l}{2EA} + \frac{N_2^2 \left( \frac{2l}{\sqrt{3}} \right)}{EA}.$$

чисельнику другого дробу – довжина похилого стрижня. Підставляємо значення  $N_1$  та  $N_2$  і остаточно одержуємо  $U = \frac{F^2 3l}{2EA} + \frac{4F^2 l}{\sqrt{3}EA}$ . Тоді з теореми

Кастіліано випливає, що  $\Delta_o = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{3Fl}{EA} + \frac{8Fl}{EA\sqrt{3}} = 7,619 \frac{Fl}{EA}$ .

Відповідь:  $\Delta_o = 7,619 \frac{Fl}{EA}$

*Тестове завдання 4.*

Дано:  $F, l, d, E$ . Скориставшись теоремою Кастіліано, записати вираз для переміщення перерізу I-I (див. рис. 1.3).

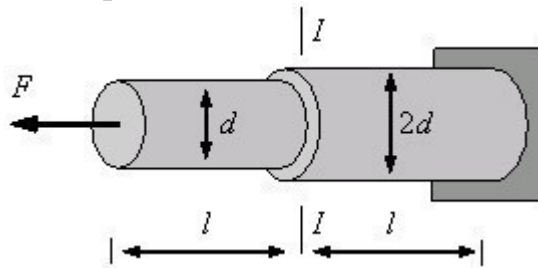


Рис. 1.3

Розв'язання:

В даному випадку необхідно визначити переміщення не в тій точці, в якій прикладена зовнішня сила  $F$ . В такому разі для можливості використання теореми Кастіліано прикладаємо в перерізі I-I фіктивну силу  $Q$ , яка діє у напрямку переміщення, яке розшукається (рис. 1.4).

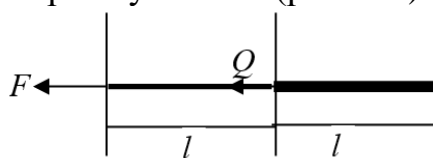


Рис. 1.4

Як і раніше, для визначення потенціальної енергії знаходимо значення внутрішніх зусиль, що діють в стрижні. При розтягу це поздовжні зусилля:  $N_1$  (в частині стрижня з діаметром  $d$ ) та  $N_2$  (в частині стрижня з діаметром  $2d$ ).

Визначаємо:  $N_1 = F$ ,  $N_2 = F + Q$ . Тоді потенціальна енергія

$$U = \frac{N_1^2 l}{2EA_1} + \frac{N_2^2 l}{2EA_2} = \frac{F^2 l}{2E \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)} + \frac{(F+Q)^2 l}{2E \left( \frac{\pi (2d)^2}{4} \right)} = \frac{2F^2 l}{E\pi d^2} + \frac{(F+Q)^2 l}{2E\pi d^2},$$

а переміщення перерізу I-I, в якому прикладена сила  $Q$ , визначається як

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{(F+Q)l}{E\pi d^2}. \text{ Сила } Q \text{ фіктивна, тобто } Q = 0, \text{ тому } \Delta_{I-I} = \frac{Fl}{E\pi d^2}.$$

Відповідь:  $\Delta_{I-I} = \frac{Fl}{E\pi d^2}$

## 1.2.2 Тестові завдання для самоперевірки

1. Потенціальна енергія пружної деформації балки при згині її моментом  $M$  становить  $U = \frac{M^2 l}{2EJ_z}$ . Чому дорівнює величина кута повороту балки в точці прикладання моменту?

2. Жорсткість стрижнів однакова і становить  $EA$ . Як визначається вертикальне переміщення вузла  $O$  стрижневої системи (рис. 1.5) за теоремою Кастіліано?

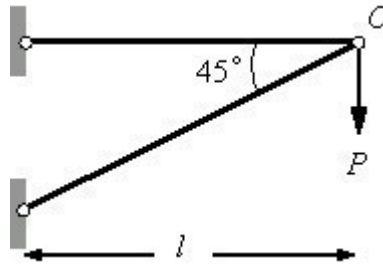


Рис. 1.5

3. Жорсткість стрижнів однакова і становить  $EA$ . Як визначається вертикальне переміщення вузла  $O$  стрижневої системи (рис. 1.6) за теоремою Кастіліано?

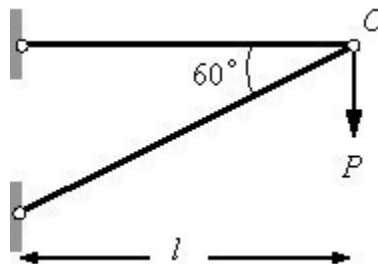


Рис. 1.6

4. Жорсткість стрижнів однакова і становить  $EA$ . Як визначається вертикальне переміщення вузла  $O$  стрижневої системи (рис. 1.7) за теоремою Кастіліано?

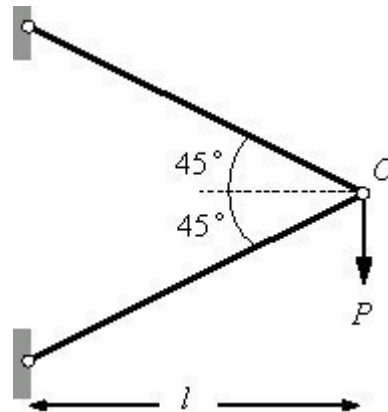


Рис. 1.7

5. Жорсткість стрижнів однакова і становить  $EA$ . Як визначається горизонтальне переміщення вузла  $O$  стрижневої системи (рис. 1.8) за теоремою Кастиліано?

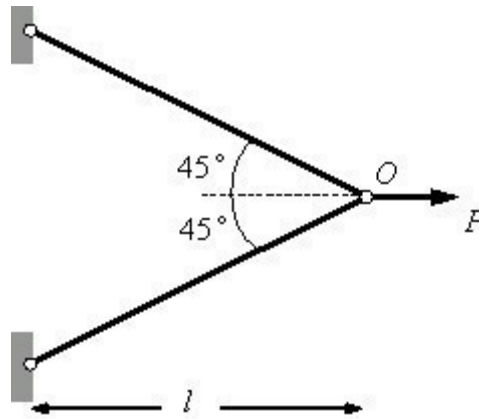


Рис. 1.8

6. Дано:  $M_k, l, d, G$ . Скориставшись теоремою Кастиліано, записати вираз для кута закручування перерізу I-I (рис. 1.9).

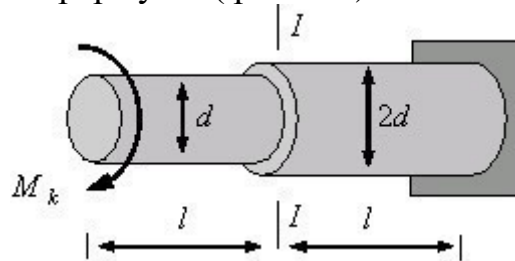


Рис. 1.9

### 1.3. Інтеграл Мора.

Інтеграл Мора дозволяє визначити переміщення будь-якої точки балки при будь-якому навантаженні. Якщо враховуються тільки переміщення від згину, то інтеграл Мора має такий вигляд:

$$\Delta_i = \int \frac{M_F(x) \bar{M}_O(x)}{EJ} dx,$$

де  $\Delta_i$  – переміщення точки  $i$ ;

$M_F(x)$  - рівняння згинального моменту від зовнішнього навантаження;

$\bar{M}_O(x)$  - рівняння згинального моменту від узагальненої одиничної сили, прикладеної в точці  $i$ . У разі, коли розшукується лінійне переміщення, прикладається сила  $Q=1$  у напрямку цього переміщення; якщо кутове переміщення – то момент  $M=1$ ;

$EJ$  - згинальна жорсткість балки.

#### 1.3.1 Приклади виконання тестових завдань

##### Тестове завдання 1

Визначити вертикальне переміщення  $\Delta_K$  точки  $K$  балки (рис. 1.10 а) та кут повороту  $\theta_K$  перерізу  $K$  за допомогою інтеграла Мора.

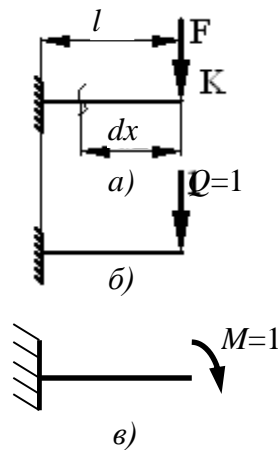


Рис. 1.10

Розв'язання:

Для визначення переміщень скористаємось інтегралом Мора.

Складаємо рівняння згинального моменту від зовнішньої сили  $M_F(x)$ :

$$M_F(x) = -F \cdot x.$$

а) *Визначення вертикального переміщення  $\Delta_K$  точки  $K$ .* Прикладаємо в точці  $K$  вертикальну силу  $Q=1$  (рис. 1.10 б) та записуємо рівняння згинального моменту від цієї сили:

$$\bar{M}_1(x) = -1 \cdot x.$$

Визначаємо переміщення  $\Delta_K$ :

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_F \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (-F \cdot x) \cdot (-1 \cdot x) dx = \frac{Fl^3}{3EJ}.$$

б) *Визначення куту повороту  $\theta_K$  перерізу  $K$ .* Прикладаємо в точці  $K$  згинальний момент  $M=1$  та записуємо рівняння згинального моменту від цього моменту (рис.10 в):

$$\bar{M}_2(x) = -1.$$

Визначаємо переміщення  $\theta_K$ :

$$\theta_K = \Delta_{2F} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_F \bar{M}_2 dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (-F \cdot x) \cdot (-1) dx = \frac{Fl^2}{2EJ}.$$

$$\text{Відповідь. } \Delta_K = \frac{Fl^3}{3EJ}, \theta_K = \frac{Fl^2}{2EJ}.$$

Тестове завдання 2

Визначити прогин балки в середині прольоту (т. С на рис. 1.11 а)  $V_c$  за допомогою інтеграла Мора.

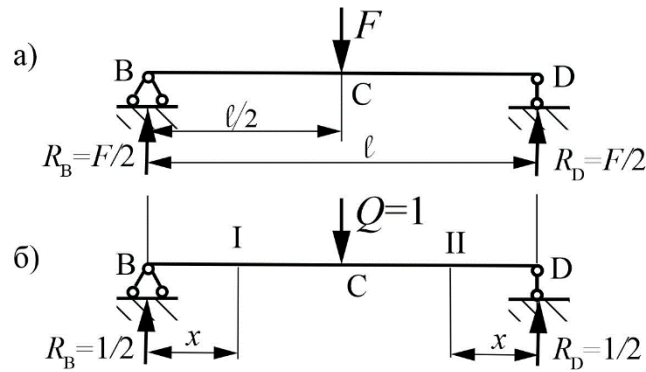


Рис. 1.11

Розв'язання:

За узагальнену координату приймаємо невідомий прогин  $\Delta_1 = v_c$ , за відповідну узагальнену силу  $Q_1 = \bar{F} = 1$ .

Розглянемо два стани балки. Перший стан – при дії сили  $F$  (рис. 1.11 а). Після знаходження опорних реакцій, запишемо вираз згинального моменту

для першої ділянки довжиною  $\frac{l}{2}$ , тобто  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$   $M_F(x) = \frac{F}{2}x$ . Якщо записати

вираз згинального моменту для другої ділянки ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ), розглядаючи частину балки праворуч від перерізу, то він буде такий же самий, як і для першої ділянки.

Другий стан – при дії одиничної сили  $Q=1$  (рис. 1.11 б), яку прикладаємо у точці  $C$  по напрямку переміщення, що розшукається. Після знаходження опорних реакцій запишемо вираз згинального моменту для першої ділянки

довжиною  $\frac{l}{2}$ , тобто  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$   $\bar{M}_1(x) = \frac{Q}{2}x = \frac{1}{2}x$ . Якщо записати вираз згинального

моменту для другої ділянки ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ), розглядаючи частину балки праворуч від перерізу, то він буде такий самий як для першої ділянки. Тому

можна записати один інтеграл з границями  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ , який помножимо на 2.

Визначаємо прогин балки в середині прольоту  $v_c$ :

$$v_c = \Delta_{1F} = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} M_F \bar{M}_1 dx = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} (F \cdot x/2) \cdot (1 \cdot x/2) dx = \frac{Fl^3}{48EJ}.$$

Відповідь.  $v_c = \frac{Fl^3}{48EJ}$ .

### 1.3.2. Тестові завдання для самоперевірки

1. Визначити кут повороту перерізу А (рис. 1.12) за допомогою інтеграла Мора.

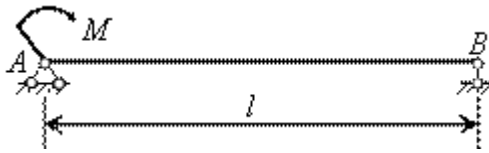


Рис. 1.12

2. Визначити кут повороту перерізу на опорі В (рис. 1.13) за допомогою інтеграла Мора.

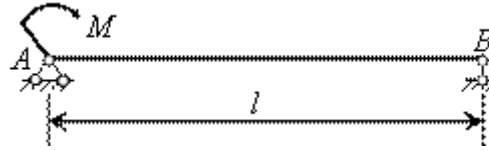


Рис. 1.13

3. Визначити прогин балки в т. С (рис. 1.14) за допомогою інтеграла Мора.

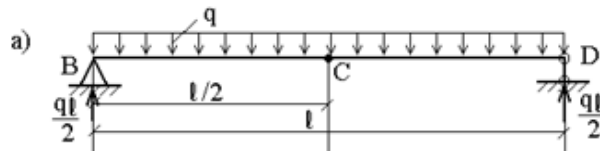


Рис. 1.14

4. Визначити кут повороту в т. В (рис. 1.15) за допомогою інтеграла Мора.

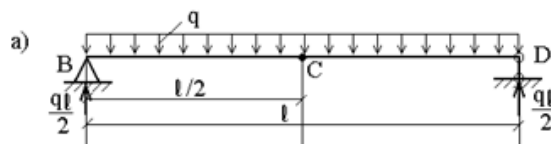


Рис. 1.15

5. Визначити прогин посередині консольної балки (т. А, рис. 1.16) за допомогою інтеграла Мора.

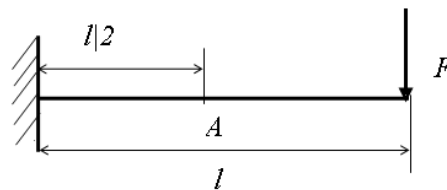


Рис. 1.16

6. Визначити прогин на кінці консольної балки (т. А, рис. 1.17) за допомогою інтеграла Мора.

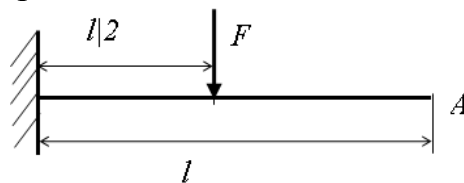


Рис. 1.17

7. Визначити кут повороту посередині консольної балки (т. А, рис. 1.18) за допомогою інтеграла Мора.

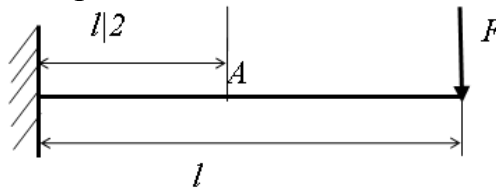


Рис. 1.18

8. Визначити кут повороту на кінці консольної балки (т. А, рис. 1.19) за допомогою інтеграла Мора.

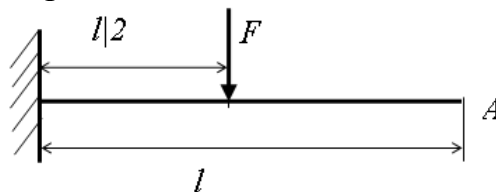


Рис. 1.19

9. Визначити кут повороту перерізу балки в т. А за способом Мора (рис. 1.20)

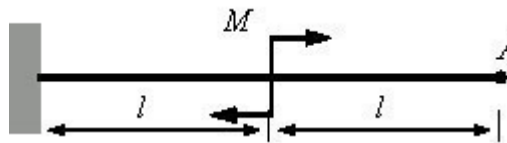


Рис. 1.20

10. Визначити прогин балки в точці А за способом Мора (рис. 1.21).

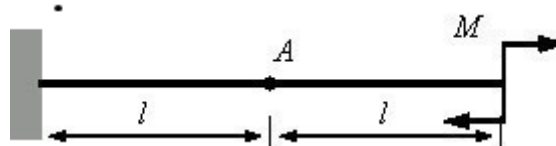


Рис. 1.21

11. Визначити прогин балки в точці А за способом Мора (рис. 1.22).

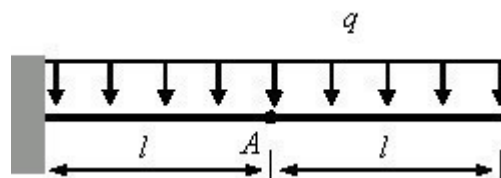


Рис. 1.22

#### 1.4. Спосіб Верещагіна

Способом (або правилом) Верещагіна називається спосіб обчислення інтеграла Мора шляхом заміни безпосереднього інтегрування перемноженням

відповідних епюр. Він полягає в наступному: щоб перемножити дві епюри, з яких хоча б одна є прямолінійною, потрібно площу однієї епюри (якщо є криволінійна епюра, то обов'язково її площу) помножити на ординату іншої епюри, розташовану під центром ваги першої  $\Delta_{iF} = \int_l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_F}{EJ} ds = \frac{\omega \overline{M}_{ic}}{EJ}$ .

### 1.4.1 Приклади виконання тестових завдань

#### Тестове завдання 1

Який результат надає помноження наведених фігур за правилом Верещагіна?

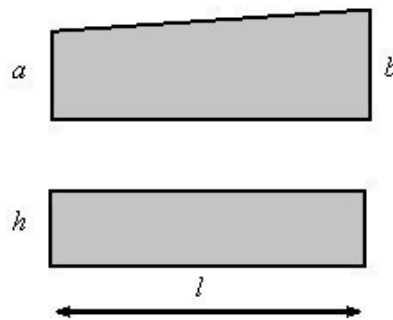


Рис. 1.23

Розв'язання:

Правило Верещагіна можна використовувати, якщо одна з епюр є прямолінійною. У даному випадку такими є обидві епюри. У разі, коли одна з епюр є прямокутником, простіше визначати площу іншої епюри та множити її на ординату прямокутної епюри (вона є однаковою в усіх точках епюри). Тому шуканий результат дорівнює добутку  $\frac{l(a+b)}{2}$  (площа трапеції) та  $h$  (висота прямокутника).

Відповідь:  $\frac{hl(a+b)}{2}$

#### Тестове завдання 2

Помножити наведені фігури за правилом Верещагіна (рис. 1.24).

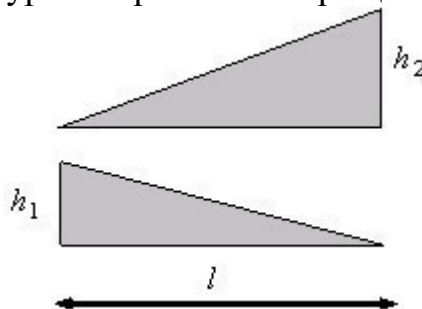


Рис. 1.24

Розв'язання:

За правилом Верещагіна для визначення добутку двох епюр необхідно площу першої з них (якщо є криволінійна, то її) помножити на ординату другої, взяту під центром ваги першої. В даному випадку обидві епюри прямолінійні та трикутні, тому немає різниці, яку епюру вважати першою. Центр ваги трикутника знаходиться на відстані однієї третини висоти від основи, тобто дві третини висоти від вершини. Визначаємо добуток  $\Delta$ , коли в якості першої фігури вибираємо верхню з наведених на рис. 1.24:

$$A_1 = \frac{1}{2} l \cdot h_2, \quad \Delta = \frac{1}{2} l \cdot h_2 \cdot \frac{1}{3} h_1 = \frac{1}{6} l \cdot h_1 \cdot h_2.$$

Тут  $\frac{1}{3} h_1$  - ордината другої епюри на відстані  $\frac{l}{3}$  від вершини.

Візьмемо нижню епюру в якості першої. Тоді

$$A_1 = \frac{1}{2} l \cdot h_1, \quad \Delta = \frac{1}{2} l \cdot h_1 \cdot \frac{1}{3} h_2 = \frac{1}{6} l \cdot h_1 \cdot h_2.$$

Тут  $\frac{1}{3} h_2$  - ордината верхньої епюри на відстані  $\frac{l}{3}$  від вершини.

Як бачимо, результати співпадають.

*Тестове завдання 3*

Визначити прогин балки в середині прольоту (т. С на рис. 1,25 а)  $\Delta_C$ . Скористатись способом Верещагіна.

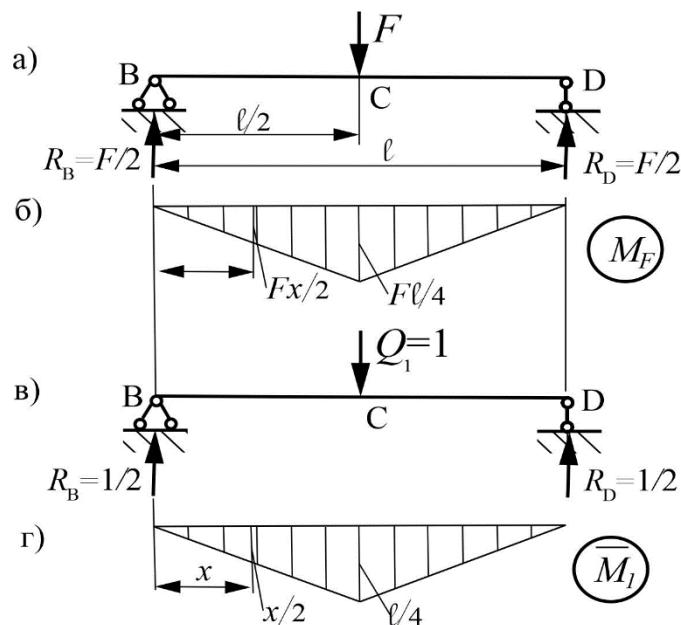


Рис. 1.25

Розв'язання:

Ця задача розглядалась в п.1.3.1. Тепер покажемо, як можна вирішити її за допомогою способу Верещагіна.

Епюри згинальних моментів від дії зовнішньої сили  $M_F$  та одиничної сили  $\bar{M}_C$  наведені на рис. 1.25 б та 1.25 г відповідно. Визначаємо прогин в т. С:

$$\Delta_C = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} M_F \bar{M}_C dx = \frac{2}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{Fl^3}{48EJ}.$$

Вираз у дужках – це результат множення половини епюри  $M_F$  на половину епюри  $\bar{M}_C$ , одержаний способом Верещагіна. Епюри  $M_F$  та  $\bar{M}_C$  є симетричними, тому для визначення  $\Delta_C$  множимо одержаний результат на 2.

Відповідь.  $\Delta_C = \frac{Fl^3}{48EJ}.$

#### 1.4.1 Тестові завдання для самоперевірки

1. Який результат надає помноження наведених на рис. 1.26 фігур за правилом Верещагіна?

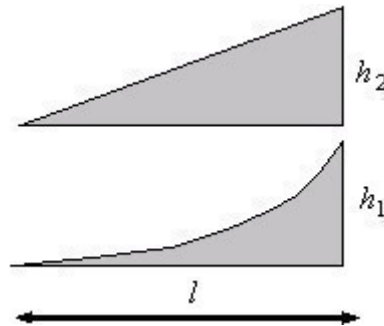


Рис. 1.26

2. Визначити кут повороту перерізу балки в т. А за способом Верещагіна (рис. 1.27).

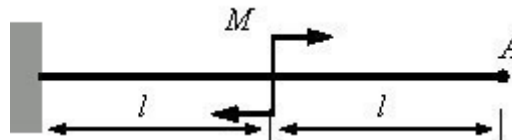


Рис. 1.27

3. Визначити кут прогин балки в перерізі А за способом Верещагіна (рис. 1.27).

Кут повороту перерізу балки А

4. Визначити кут повороту перерізу балки в т. А за способом Верещагіна (рис. 1.28).

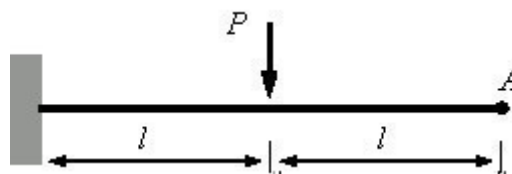


Рис. 1.28

5. Визначити прогин балки в перерізі А за способом Верещагіна (рис. 1.29).

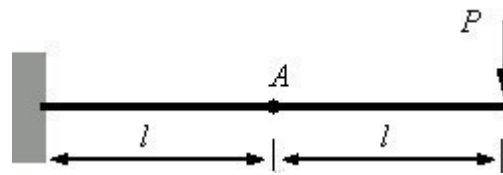


Рис. 1.29

6. Визначити прогин балки в перерізі А за способом Верещагіна (рис. 1.30).

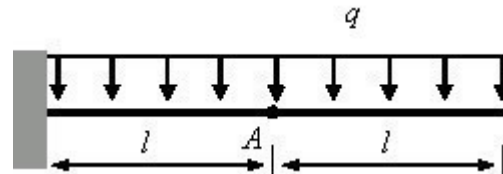


Рис. 1.30

7. Визначити прогин балки в перерізі А за способом Верещагіна (рис. 1.31).

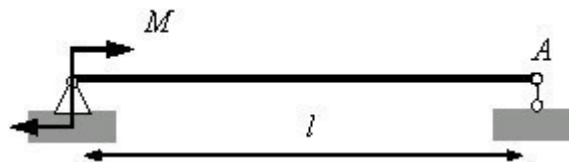


Рис. 1.31

8. Визначити кут повороту на кінці консольної балки (т. А, рис. 1.32) за способом Верещагіна.

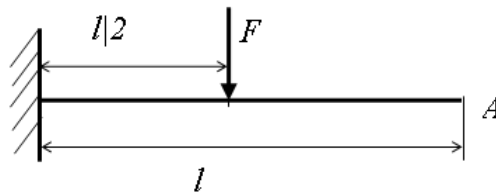


Рис. 1.32

## 2. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ. МЕТОД СИЛ

Статично невизначеними називаються стрижньові системи, опорні реакції в яких не можливо визначити за допомогою одних лише рівнянь статики. В статично невизначених системах число накладених в'язів більше тієї кількості, яка забезпечує геометричну незмінність конструкції.

Будемо розглядати балки і плоскі рами, в яких в'язями, що забезпечують геометричну незмінність, є опорні закріплення. Кожна опора забороняє якесь переміщення, а саме:



методу сил) визначаються з використанням розглянутого вище інтеграла Мора:

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{\bar{M}_i(s)\bar{M}_j(s)}{EJ} ds$$
$$\Delta_{iF} = \int_s \frac{\bar{M}_i(s)\bar{M}_F(s)}{EJ} ds$$

При вирішуванні практичних задач для чисельного визначення наведених інтегралів зручно користуватися способом перемноження епюр. Тобто, для визначення коефіцієнтів  $\delta_{ij}$  та  $\Delta_{iF}$  необхідно попередньо побудувати  $n$  так званих одиничних епюр  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$  від сил  $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ , епюру від зовнішнього навантаження (вантажну епюру)  $M_F$  та перемножити їх за правилом Верещагіна або із застосуванням формули Сімпсона. Слід зауважити, що усі зазначені епюри будуються в основній системі методу сил.

Після розкриття статичної невизначеності (вирішування системи канонічних рівнянь методу сил і визначення реакцій по напрямкам відкинутих «зайвих» в'язів) подальше вирішування задачі проводиться як для звичайної статично визначеної системи.

Враховуючи усе вище зазначене, можна встановити наступний порядок розрахунку статично невизначених систем з використанням методу сил:

1. Визначити ступінь статичної невизначеності.
2. Вибрати основну систему.
3. Сформувати еквівалентну систему.
4. Записати систему канонічних рівнянь.
5. Побудувати одиничні і вантажні епюри внутрішніх силових факторів, що виникають в елементах розглянутої конструкції.
6. Обчислити коефіцієнти при невідомих і вільні члени системи канонічних рівнянь.
7. Вирішити систему канонічних рівнянь, тобто визначити реакції зайвих в'язів.
8. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданої системи (остаточні епюри).

Надалі розглянемо більш детально основні етапи розрахунку рам методом сил.

Для розрахунків статично невизначених систем треба знати відповіді на наступні питання.

## 2.1. Основні теоретичні питання

- 1 Які системи називаються статично невизначеними?
- 2 Чому дорівнює число «зайвих» в'язів у статично невизначеної конструкції?
- 3 Яке призначення методу сил?
- 4 Який фізичний сенс коефіцієнтів при невідомих в рівняннях методу сил?

- 5 Що називається основною системою методу сил?
- 6 Чим визначається число канонічних рівнянь методу сил при розрахунку статично невизначених систем?
- 7 Вкажіть пару коефіцієнтів канонічних рівнянь, рівних між собою.
- 8 Як створюється еквівалентна система?
- 9 Що визначають при розв'язанні канонічних рівнянь методу сил?
- 10 Епюри яких силових факторів треба побудувати для визначення коефіцієнтів в канонічних рівняннях методу сил?

## 2.2. Визначення ступеня статичної невизначеності системи та вибір основної системи

Різниця між числом невідомих реакцій опор і числом незалежних рівнянь статички, які можуть бути складені для даної системи, носить назву ступеня статичної невизначеності. Залежно від цього числа системи поділяються на один, два, три ...,  $n$  раз статично невизначувані. Зазначимо, що встановлення шарніру на осі стержня так саме, як і видалення лінійної в'язі в опорі, знижує ступінь статичної невизначеності системи на одиницю. Такий шарнір називається одиночним або простим.

В системах іноді трапляються випадки, коли один шарнір з'єднує декілька стержнів (рис. 2.1а). Такий шарнір називається кратним. Він відповідає  $(n - 1)$  простим шарнірам, де  $n$  – кількість стержнів, з'єднаних цим шарніром. Так, наприклад, з'єднання на рис. 2.1 а (тут  $n = 3$ ) еквівалентне з'єднанню з двома простими шарнірами (рис. 2.1 б), тобто кратність шарніру дорівнює 2.



Рис. 2.1

Оскільки для будь-якої плоскої системи можна скласти тільки 3 рівняння рівноваги, то ступінь статичної невизначеності будемо визначати за формулою:

$n = C_{on} - III - 3$ , де  $C_{on}$  - кількість опорних реакцій у вихідній рамі,  $III$  - кількість простих шарнірів.

Основною системою в методі сил називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, одержану із заданої статично невизначуваної системи відкиданням «зайвих» в'язей і навантаження.

Вибір основної системи (ОС) є окремою задачею. Невдалий вибір основної системи може призвести до значної трудоемності рішення, а іноді і до грубої помилки. Не можна керуватися тільки одним правилом вибору

основної системи, а саме, що число відкинутих в'язів повинно бути рівним ступені статичної невизначеності. Треба обов'язково стежити ще й за тим, які в'язі відкидаються. Деякі в'язі відкидати неприпустимо. При виборі основної системи треба стежити за тим щоб основна система та її окремі частини були геометрично незмінюваними.

### 2.2.1 Приклади розв'язання тестових завдань

#### Тестове завдання 1

Вкажіть ступінь статичної невизначеності плоскої рами, яка наведена на рисунку 2.2.

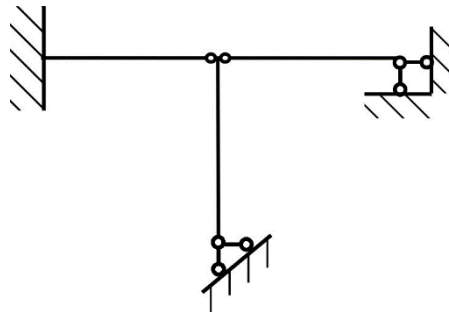


Рис. 2.2

Розв'язання:

Ступінь статичної невизначеності  $n$  будемо визначати за формулою:

$n = C_{on} - III - 3$ , де  $C_{on}$  - кількість опорних реакцій у вихідній рамі,  $III$  - кількість простих шарнірів.

В нашому випадку кількість опорних реакцій

- в жорсткому защемленні -3
- в шарнірно-нерухомих опорах по 2.

Всього  $C_{on} = 3 + 2 + 2 = 7$

Кількість простих шарнірів  $III = 2$ . Тоді ступінь статичної невизначеності  $n$  буде дорівнювати:

$$n = C_{on} - III - 3 = 7 - 2 - 3 = 2$$

Відповідь.  $n = 2$ .

#### Тестове завдання 2

Вкажіть ступінь статичної невизначеності плоскої рами, яка наведена на рисунку

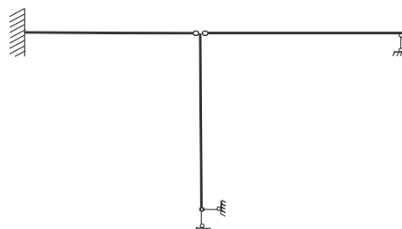


Рис. 2.3

Розв'язання:

Ступінь статичної невизначеності  $n$  будемо визначати за формулою:

$n = C_{on} - III - 3$ , де  $C_{on}$  - кількість опорних реакцій у вихідній рамі,  $III$  - кількість простих шарнірів.

В нашому випадку кількість опорних реакцій

- в жорсткому заземленні - 3
- в шарнірно -нерухомій опорі - 2
- в шарнірно -рухомій опорі - 1.

Всього  $C_{on} = 3 + 2 + 1 = 6$ .

Кількість простих шарнірів  $III = 2$ . Тоді ступінь статичної невизначеності  $n$  буде дорівнювати:

$$n = C_{on} - III - 3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Відповідь.  $n = 1$ .

### Тестове завдання 3

Для статично невизначуваної рами, яка наведена на рис. 2.4, вказати варіант (див. рис. 2.5) з невірно обраною основною системою

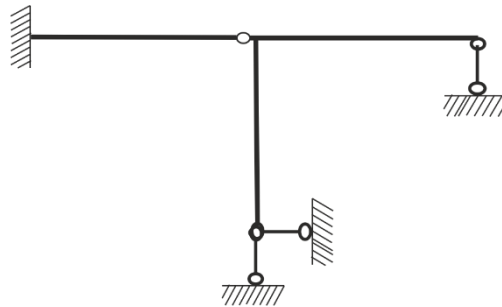


Рис. 2.4

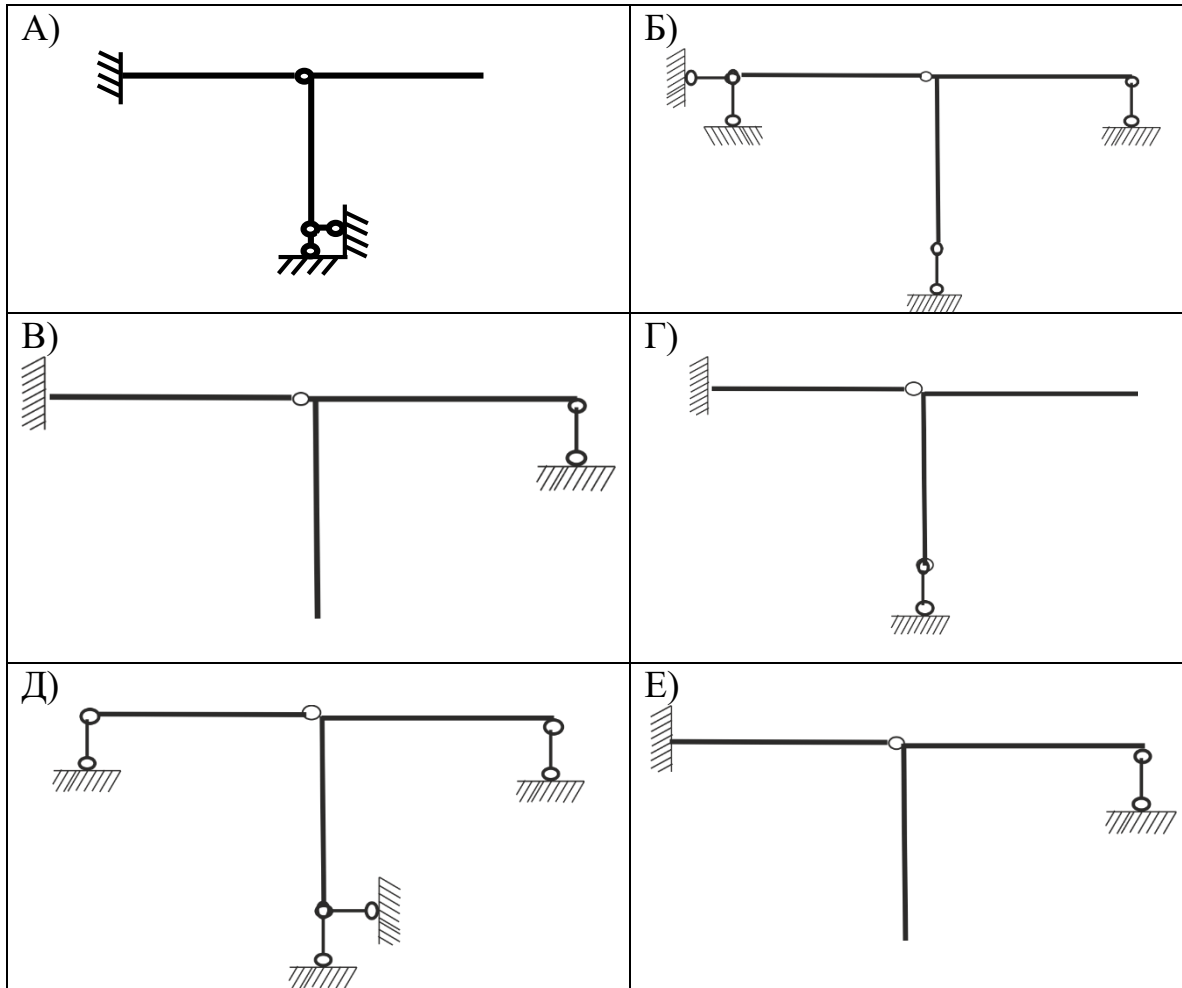


Рис. 2.5

Розв'язання:

Для невірно обраної основної системи ступінь статичної невизначеності  $n \neq 0$ . Тому для всіх рам, які наведені у таблиці будемо визначати ступінь статичної невизначеності  $n = C_{on} - III - 3$ , де  $C_{on}$  - кількість опорних реакцій у вихідній рамі,  $III$  - кількість простих шарнірів.

Варіант А)  $C_{on} = 3 + 2 = 5$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 5 - 1 - 3 = 1$

Варіант Б)  $C_{on} = 2 + 1 + 1 = 4$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$

Варіант В)  $C_{on} = 3 + 1 = 4$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$

Варіант Г)  $C_{on} = 3 + 1 = 4$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$

Варіант Д)  $C_{on} = 1 + 2 + 1 = 4$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$

Варіант Е)  $C_{on} = 3 + 1 + 1 = 5$ ;  $III = 2$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 5 - 2 - 3 = 0$ .

Отже,  $n \neq 0$  тільки для рами, яка наведена у варіанті А).

Відповідь. Невірно обрана основна система для вихідної статично невизначуваної рами наведена у варіанті А).

Тестове завдання 4

Для статично невизначуваної рами, яка наведена на рис. 2.6, вказати варіант (див. рис. 2.7) з вірно обраною основною системою

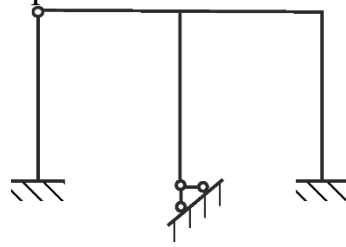


Рис. 2.6

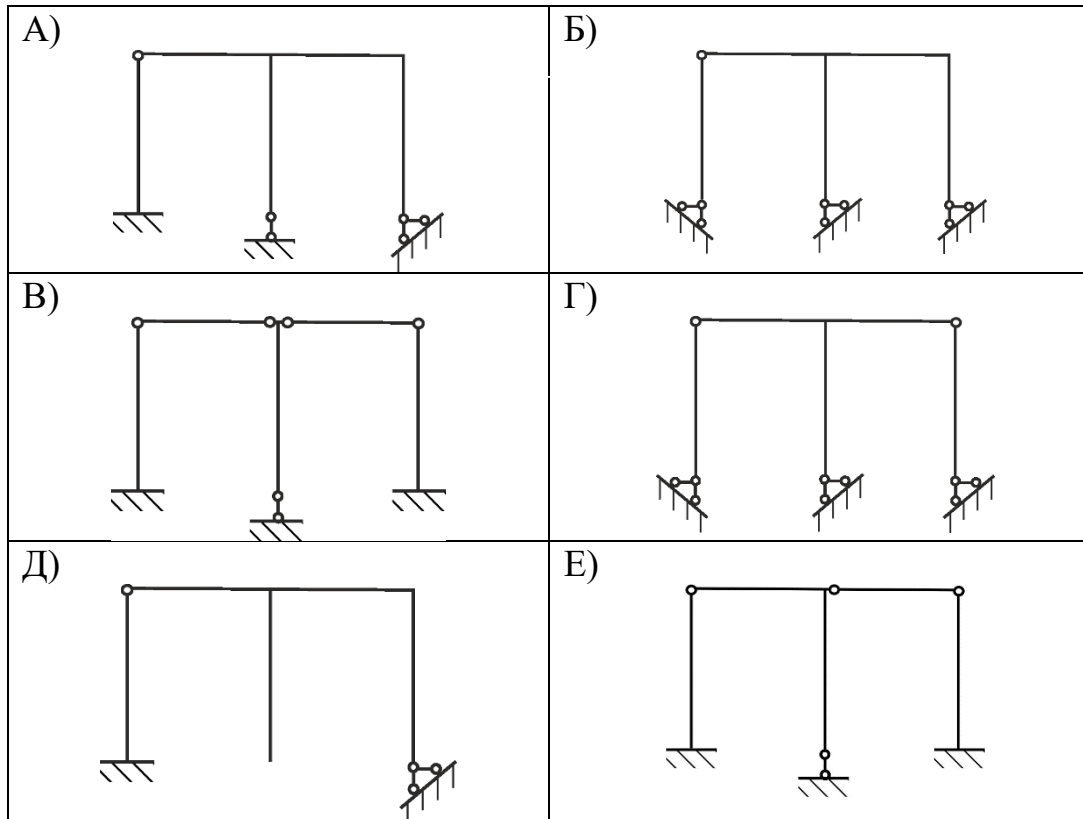


Рис. 2.7

Розв'язання:

Для вірно обраної основної системи ступінь статичної невизначеності  $n = 0$ . Тому для всіх рам, які наведені у таблиці будемо визначати ступінь статичної невизначеності  $n = C_{on} - III - 3$ , де  $C_{on}$  - кількість опорних реакцій у вихідній рамі,  $III$  - кількість простих шарнірів.

Варіант А)  $C_{on} = 3 + 1 + 2 = 6$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 6 - 1 - 3 = 2$

Варіант Б)  $C_{on} = 2 + 2 + 2 = 6$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 6 - 1 - 3 = 2$

Варіант В)  $C_{on} = 3 + 1 + 3 = 7$ ;  $III = 4$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 7 - 4 - 3 = 0$

Варіант Г)  $C_{on} = 2 + 2 + 2 = 6$ ;  $III = 2$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 6 - 2 - 3 = 1$

Варіант Д)  $C_{on} = 3 + 2 = 5$ ;  $III = 1$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 5 - 1 - 3 = 1$

Варіант Е)  $C_{on} = 3 + 1 + 3 = 7$ ;  $III = 3$ ;  $n = C_{on} - III - 3 = 7 - 3 - 3 = 1$ .

Отже,  $n = 0$  тільки для рами, яка наведена у варіанті В).

Відповідь. Вірно обрана основна систем для вихідної статично невизначуваної рами наведена у варіанті В).

### 2.2.2 Завдання для самоперевірки

1. Вкажіть ступінь статичної невизначеності плоских рам, які наведені на рисунках 2.8 – 2.18.

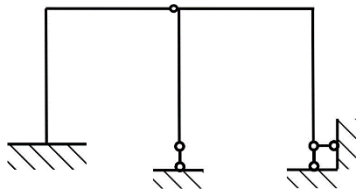


Рис. 2.8

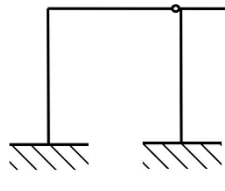


Рис. 2.9

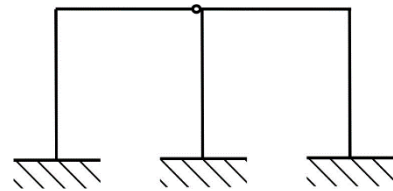


Рис. 2.10

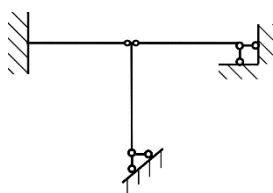


Рис. 2.11

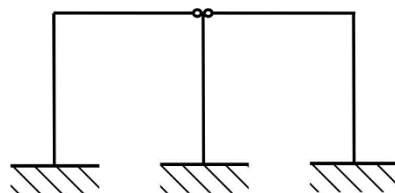


Рис. 2.12

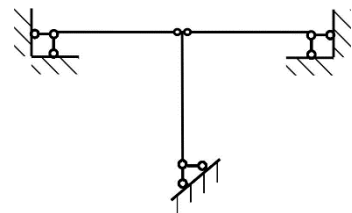


Рис. 2.13

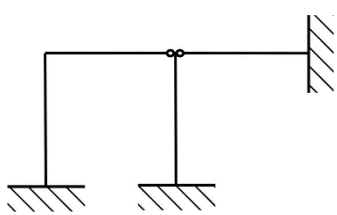


Рис. 2.14

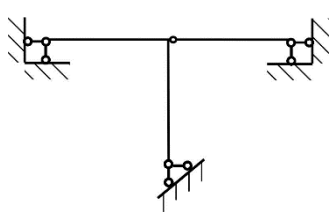


Рис. 2.15

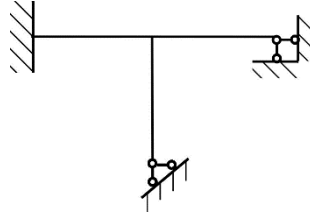


Рис. 2.16

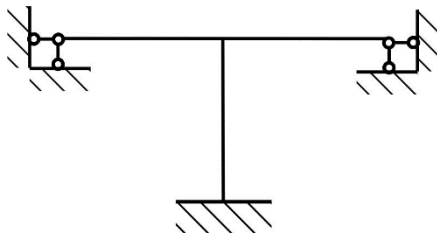


Рис. 2.17

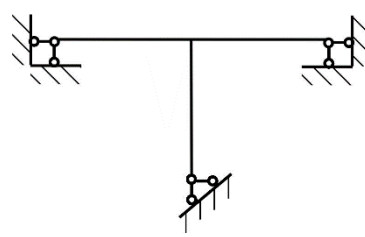


Рис. 2.18

2. Для статично невизначуваної рами, яка наведена на рис. 2.19, вказати варіант (див. рис.52) з невірно обраною основною системою

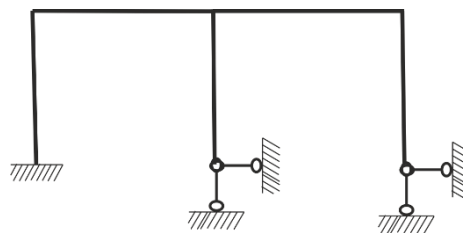


Рис. 2.19

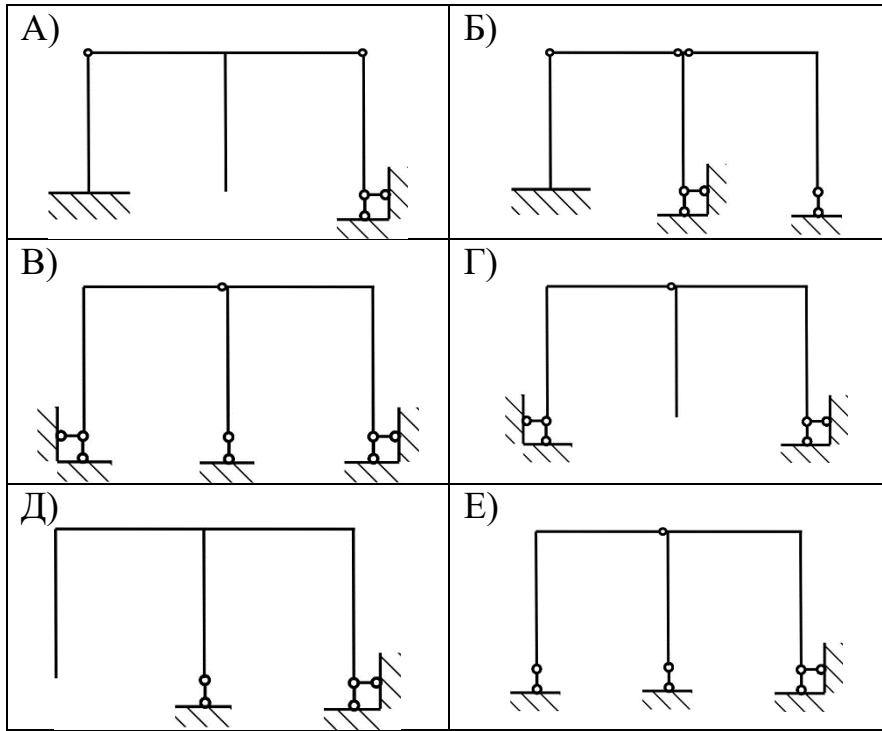


Рис. 2.20

3. Для статично невизначуваної рами, яка наведена на рис. 2.21, вказати варіант (див. рис. 2.22) з вірно обраною основною системою

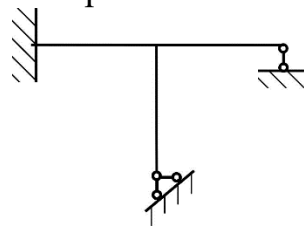


Рис. 2.21

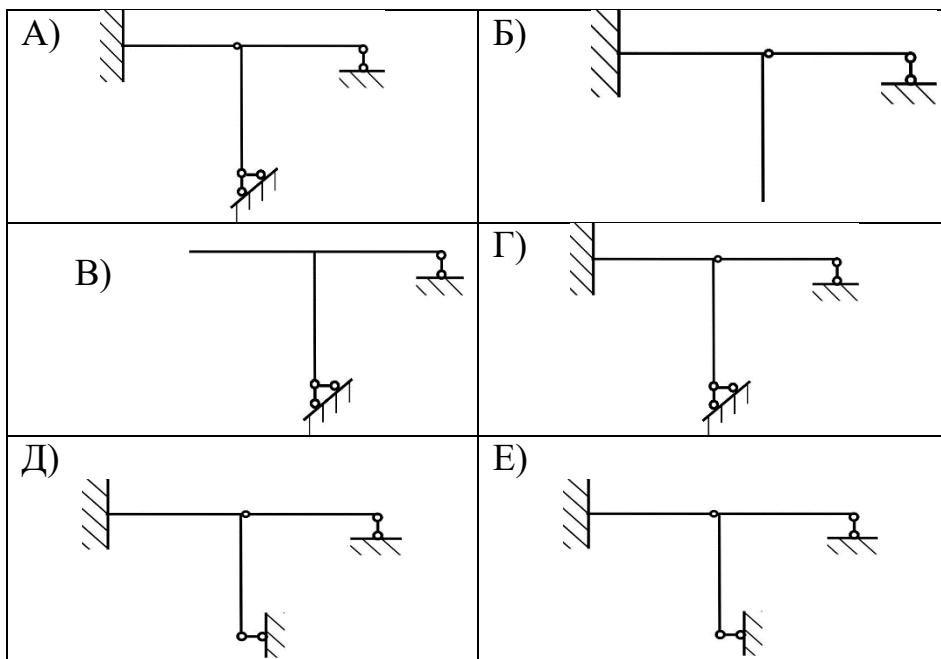


Рис. 2.22

4 Для статично невизначуваної рами, яка наведена на рис. 2.23, вказати варіант (див. рис. 2.24) з невірною обраною основною системою

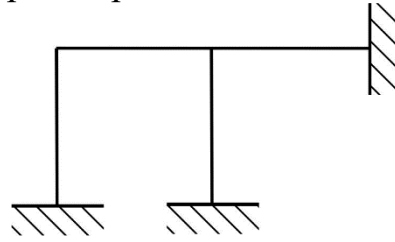


Рис. 2.23

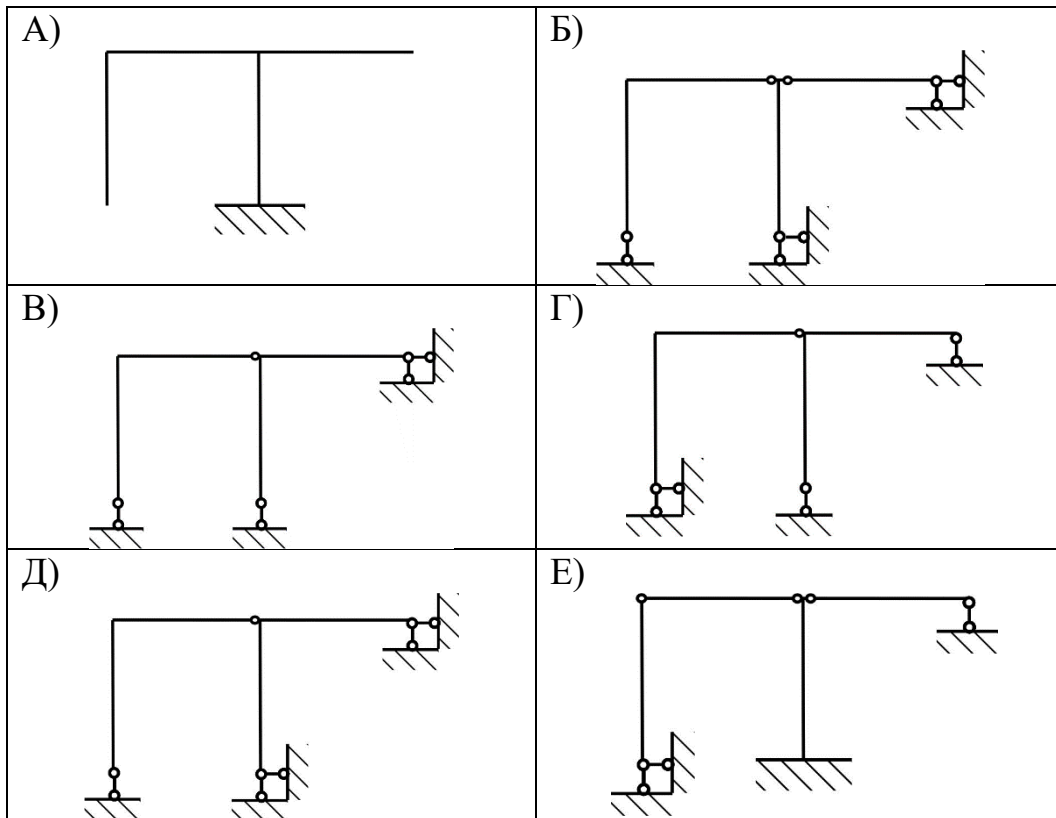


Рис. 2.24

### 2.3. Епюри згинальних моментів в рамах

При побудові епюр згинальних моментів приймається наступне правило: епюри згинальних моментів будуються на розтягнутих волокнах з використанням методу перерізів. Якщо рама розташована на шарнірних опорах, то спочатку визнаються опорні реакції (при наймі визначається їх напрямок). Якщо рама має жорстке зацмлення, то епюру починають будувати з вільного кінця рами.

#### 2.3.1. Приклади розв'язання тестових завдань

##### Тестове завдання 1

Для сталеві рами (рис. 2.2 5) побудувати епюру згинальних моментів.

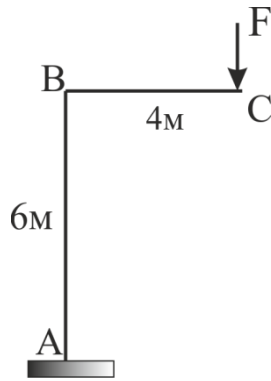


Рис. 2.25

Розв'язання:

Оскільки рама має жорстке зачеплення, то будувати епюру згинальних моментів будемо з вільного кінця. Епюра буде розташована на розтягнутих волокнах. На ділянці BC під дією сили  $F$  розтягнуті волокна розташовані зверху від осі стрижня. Вираз згинального моменту на цій ділянці має вигляд  $M(x) = Fx$ , де  $0 \leq x \leq 4\text{ м}$ .  $M(0) = F \cdot 0 = 0$ ;  $M(4) = F \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

На ділянці AB розтягнуті моменти будуть розташовані ліворуч від осі стрижня. Вираз згинального моменту на цій ділянці має вигляд  $M(x) = F \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40\text{ кН} \cdot \text{м}$ , де  $0 \leq x \leq 6\text{ м}$ . Отже епюра згинальних моментів має вигляд, який наведено на рис. 2.26.

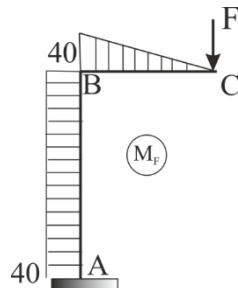


Рис. 2.26

### Тестове завдання 2

Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.27).

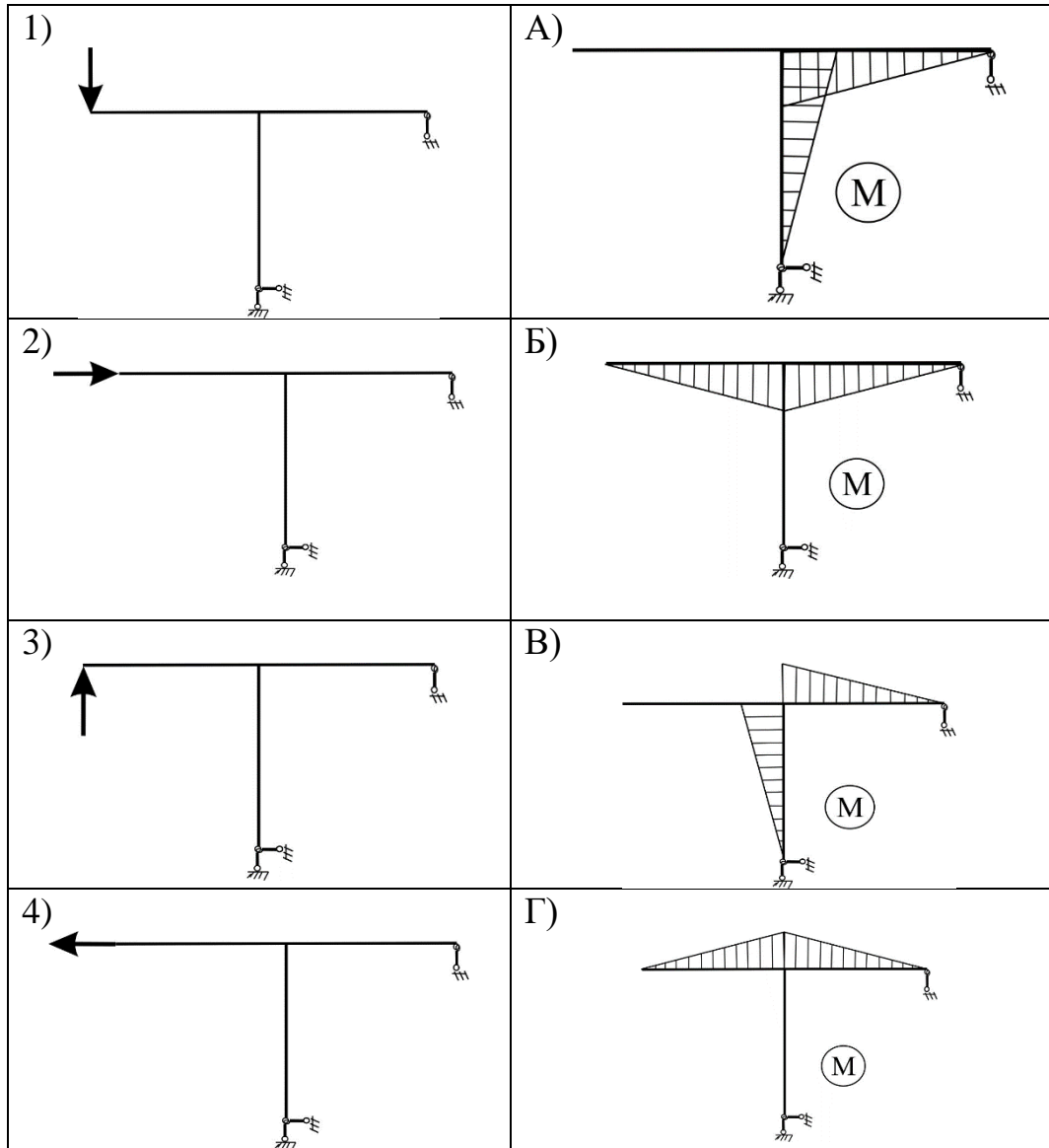


Рис. 2.27

Розв'язання:

Розглянемо раму 1) у лівому стовбці рис. 2.27

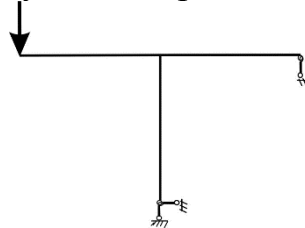


Рис. 2.28

Наведена рама розташована на шарнірних опорах, тому щоб визначити з якого боку будуть розташовані розтягнуті волокна треба визначити напрямки опорних реакцій (рис. 2.29). Для цього використовуємо рівняння рівноваги.

$$\sum F_x = 0: X_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0:$$

Щоб сума моментів сили  $F$  та опорної реакції  $Y_B$  відносно точки  $A$  дорівнювалася нулю, ці сили повинні повертати раму відносно точки  $A$  у протилежні сторони (див. рис. 2.29). Це можливо, якщо опорна реакція  $Y_B$  буде спрямована донизу.

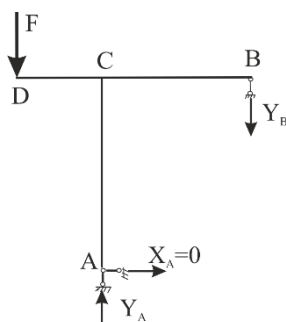


Рис. 2.29.

Отже на підставі проведених міркувань, визначаємо, на яких ділянках рами буде відбуватися згинання та з якого боку будуть розташовані розтягнуті волокна, а саме:

ділянка  $CD$  - розглядаємо її частину ліворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $F$  розтягнуті волокна будуть розташовані зверху від осі стрижня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів;

ділянка  $CB$  - розглядаємо її частину праворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $Y_B$  розтягнуті волокна будуть розташовані зверху від осі стержня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів;

на ділянці  $AC$  - згинання відсутнє, оскільки  $X_A = 0$ .

Таким чином вірно побудована епюра згинальних моментів наведена у варіанті Г).

Розглянемо раму 2) у лівому стовбці ( див. рис. 2.30)

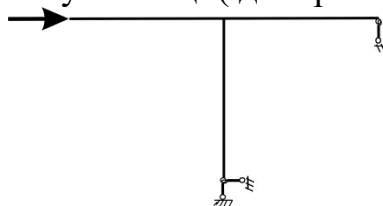


Рис. 2.30

Як і в попередньому випадку, треба визначити напрямок та нульові опорні реакції (рис. 63). Для цього використовуємо рівняння рівноваги.

$$\sum F_x = 0: F - X_A = 0; X_A = F$$

$$\sum M_A = 0:$$

Щоб сума моментів сили  $F$  та опорної реакції  $Y_B$  відносно точки  $A$  дорівнювалася нулю, ці сили повинні повертати раму відносно точки  $A$  у

протилежні сторони. Це можливо , якщо опорна реакція  $Y_B$  буде спрямована догори. (див. рис. 2.31).

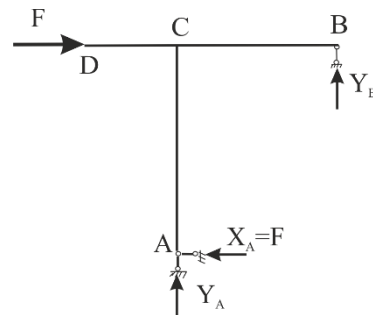


Рис. 2.31

Отже, на підставі проведених міркувань визначаємо, на яких ділянках рами буде відбуватися згинання та де (з якого боку) будуть розташовані розтягнуті волокна, а саме:

ділянка  $CD$  - розглядаємо її частину ліворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $F$  буде відбуватися тільки стискання. Згин - відсутній;

ділянка  $CB$  - розглядаємо її частину праворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $Y_B$  розтягнуті волокна будуть розташовані знизу від осі стрижня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів;

ділянка  $AC$  - розглядаємо її частину знизу від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $X_A$  розтягнуті волокна будуть розташовані ліворуч від осі стержня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів

Таким чином епюри згинальних моментів розташовані у варіанті А).

Розглянемо раму 3) у лівому стовбці (рис. 2.32)

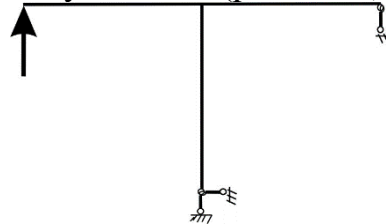


Рис. 2.32

Як і в попередньому випадку, треба визначити напрямок та нульові опорні реакції. Для цього використовуємо рівняння рівноваги.

$$\sum F_x = 0: X_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0:$$

Щоб сума моментів сили  $F$  та опорної реакції  $Y_B$  відносно точки  $A$  дорівнювалася нулю, ці сили повинні повертати раму відносно точки  $A$  протилежні сторони. Це можливо , якщо опорна реакція  $Y_B$  буде спрямована догори. (див. рис. 2.33).

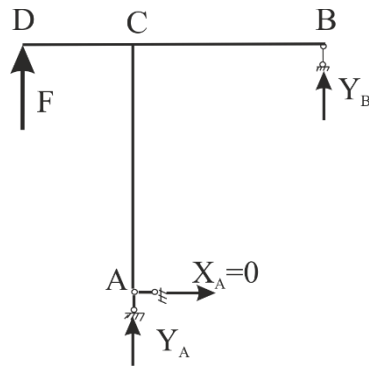


Рис. 2.33

Отже на підставі проведених міркувань, визначаємо на яких ділянках рами буде відбуватися згинання та де з якого боку будуть розташовані розтягнуті волокна, а саме:

ділянка  $CD$  - розглядаємо її частину ліворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $F$  розтягнуті волокна будуть розташовані знизу від осі стержня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів;

ділянка  $CB$  - розглядаємо її частину праворуч від умовно проведеного перерізу. Під дією сили  $Y_B$  розтягнуті волокна будуть розташовані знизу від осі стержня, тому там і буде розташована епюра згинальних моментів;

на ділянці  $AC$  - згинання відсутнє, оскільки  $X_A = 0$ .

Таким чином епюри згинальних моментів розташовані у варіанті Б).

Останню раму у лівому стовбці можна не розглядати, оскільки у правому стовбці залишився тільки один варіант В).

Відповідь. Рамі 1) відповідає епюра згинальних моментів Г);  
 рамі 2) відповідає епюра згинальних моментів А);  
 рамі 3) відповідає епюра згинальних моментів Б);  
 рамі 4) відповідає епюра згинальних моментів В).

### 2.3.2 Завдання для самоперевірки

1. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (рис.1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.34).

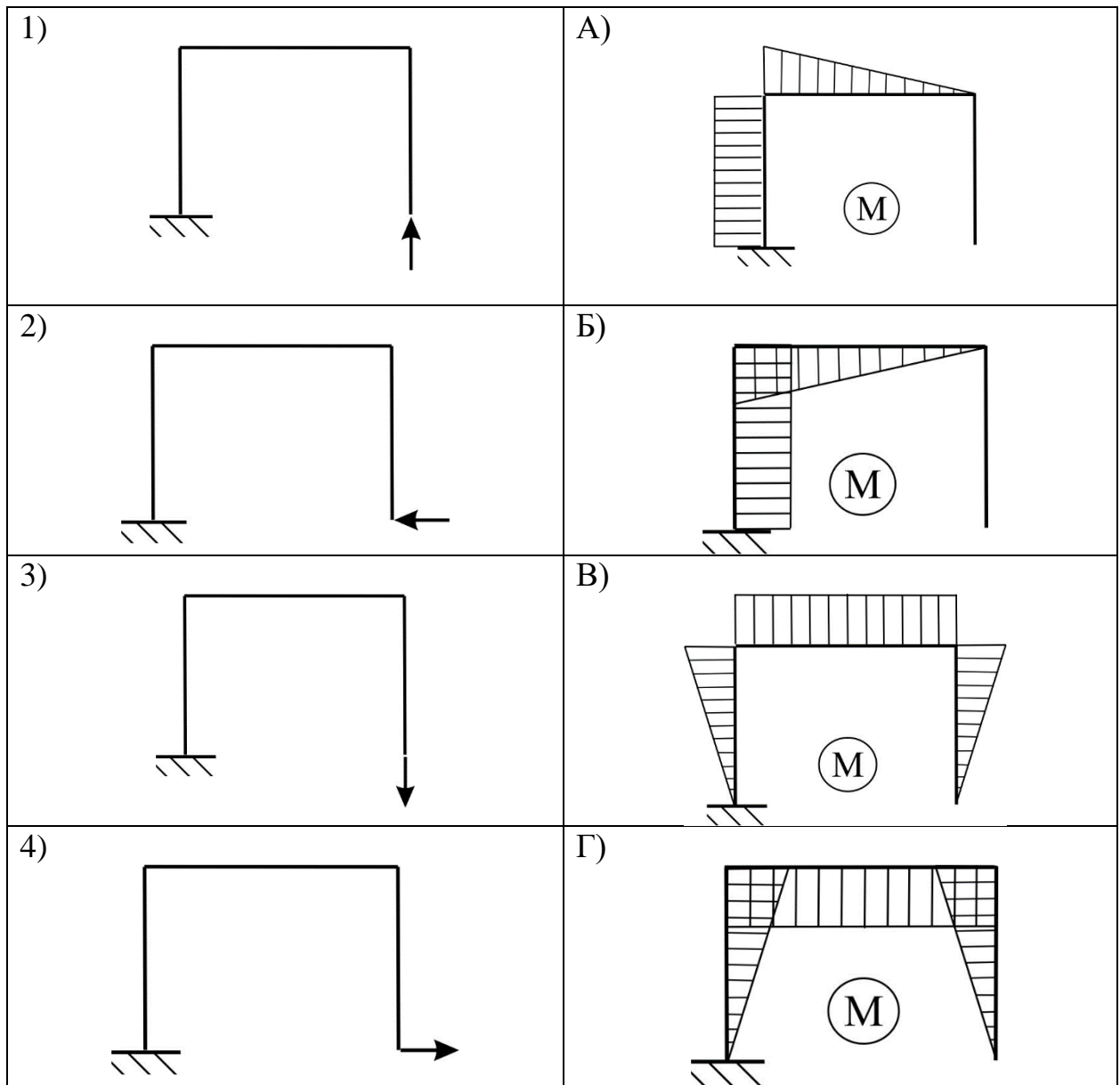


Рис. 2.34

2. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2,3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.35).

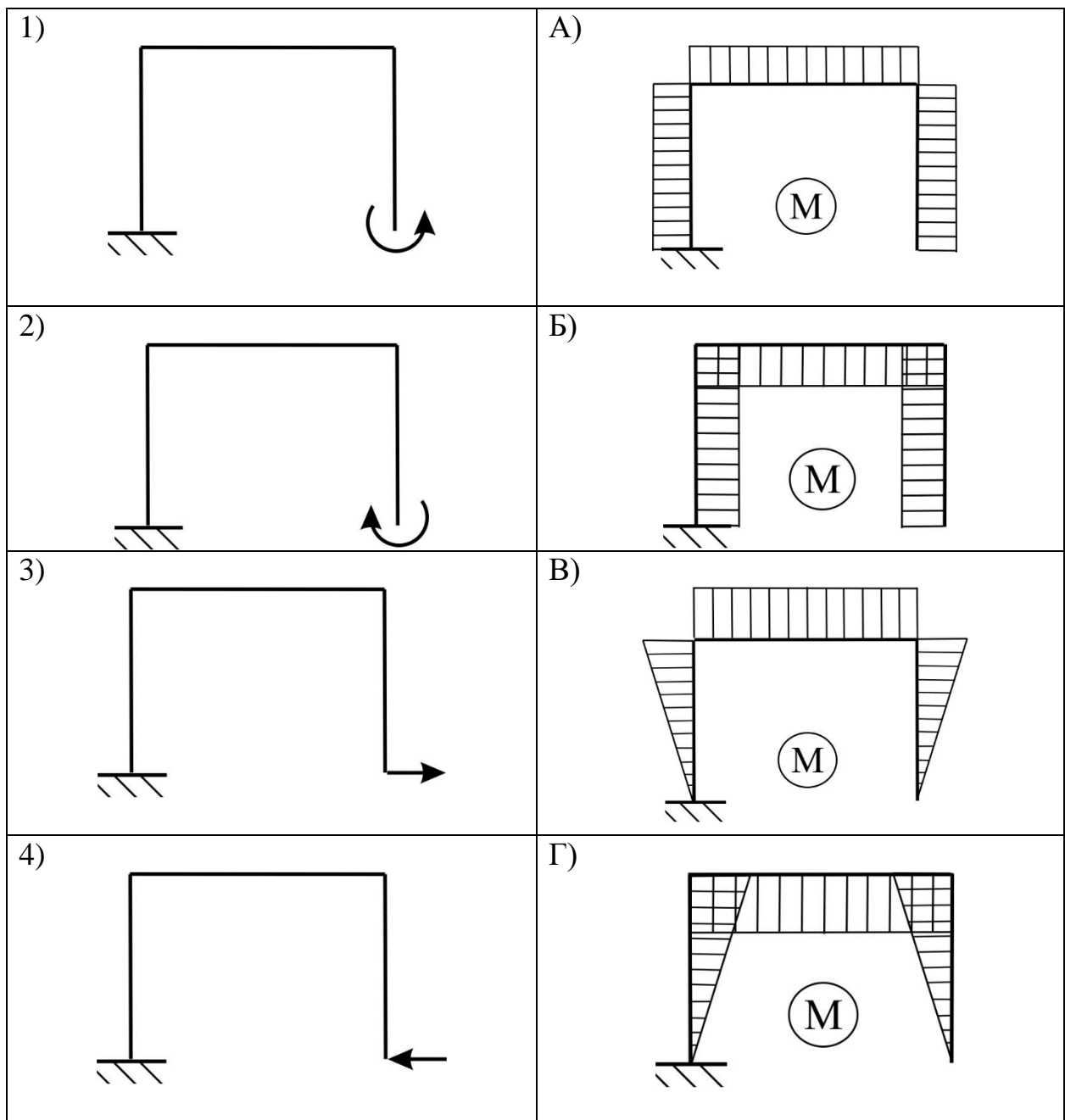


Рис. 2.35

3. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.36).

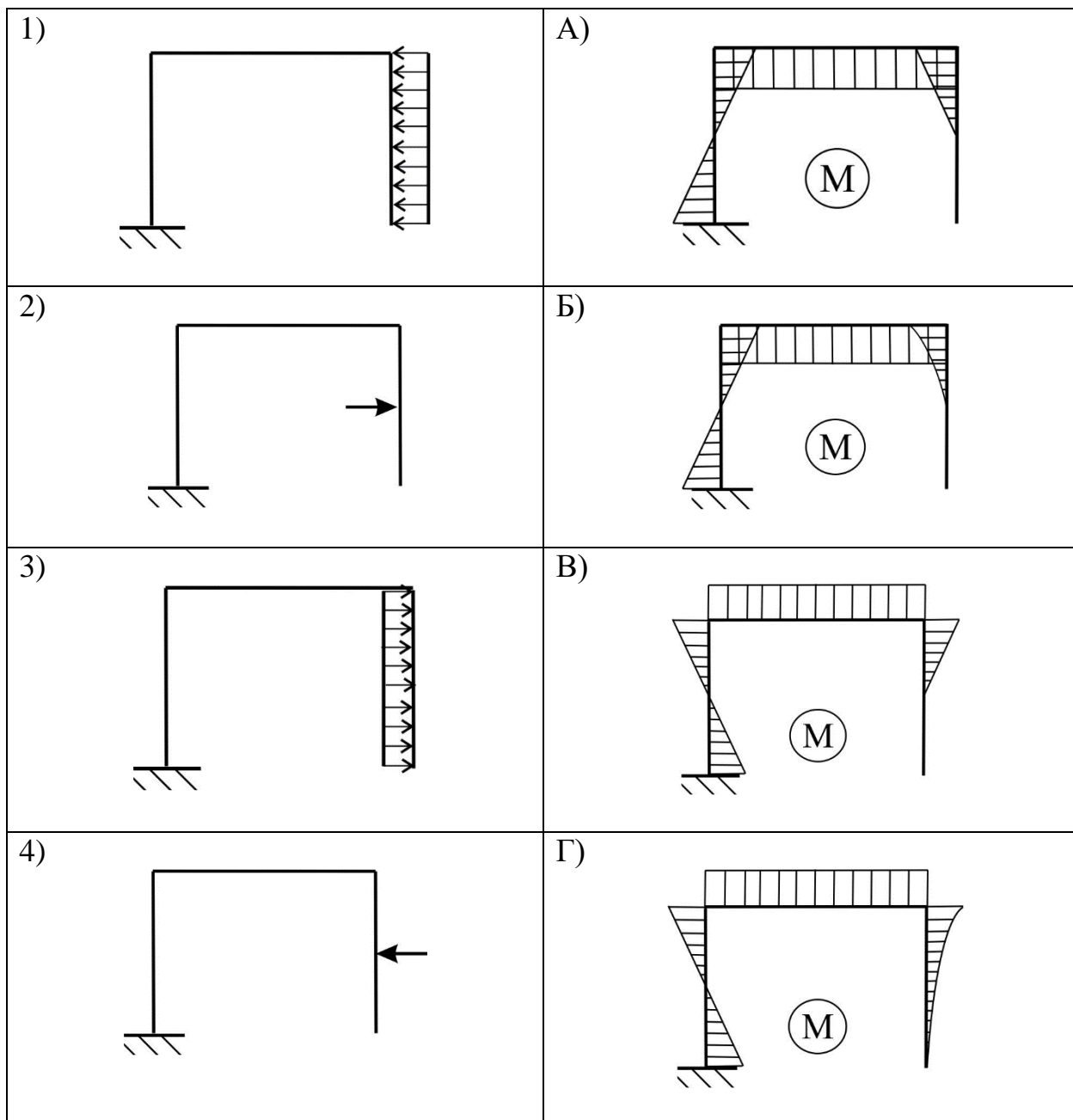


Рис. 2.36

4. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.37).

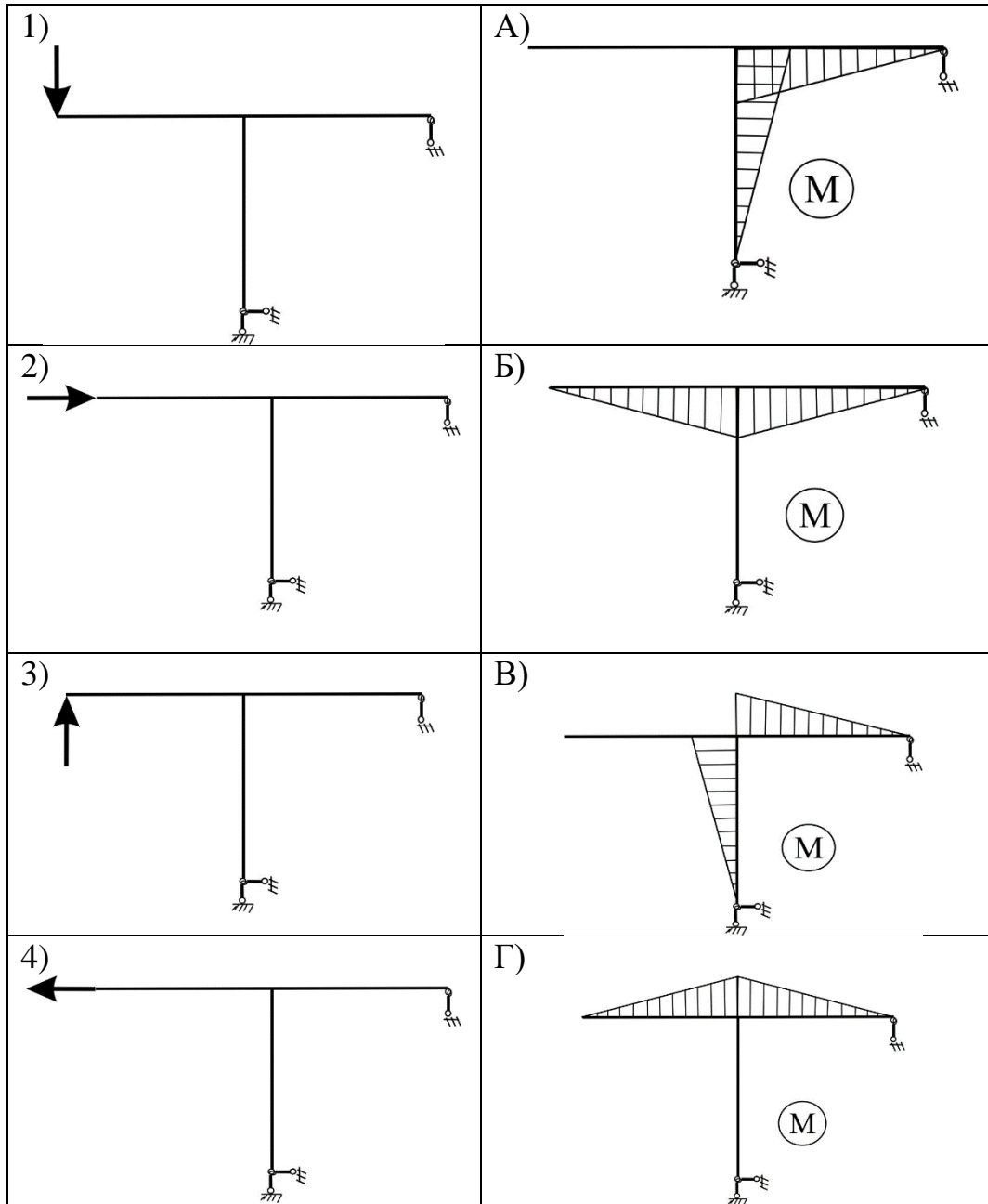


Рис. 2.37

4. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.38).

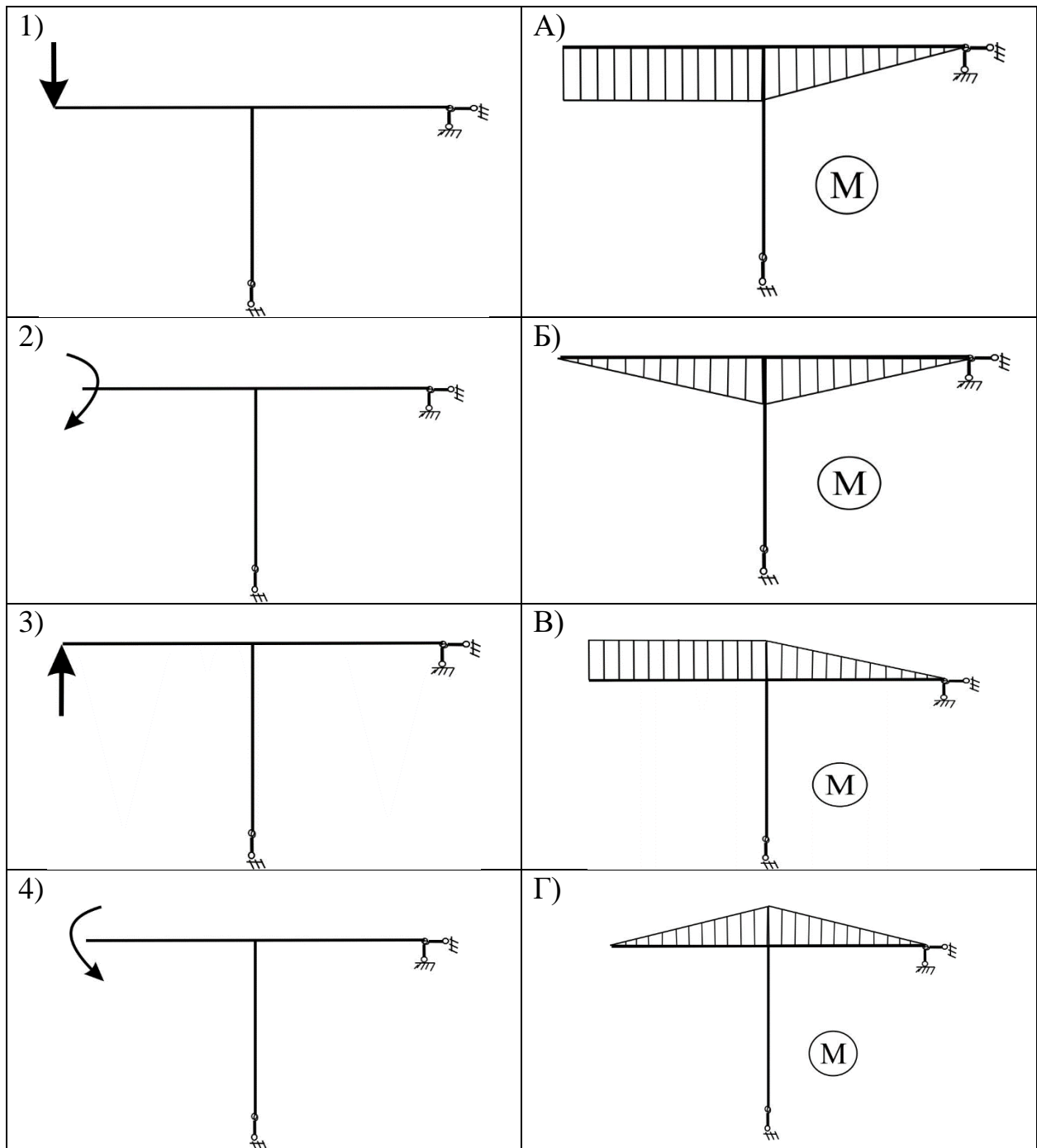


Рис. 2.38

5. Встановіть відповідність між схемами навантажень рами (1, 2, 3, 4) та епюрами згинальних моментів (А, Б, В, Г), якщо епюри побудовані на розтягнутих волокнах (рис. 2.39).

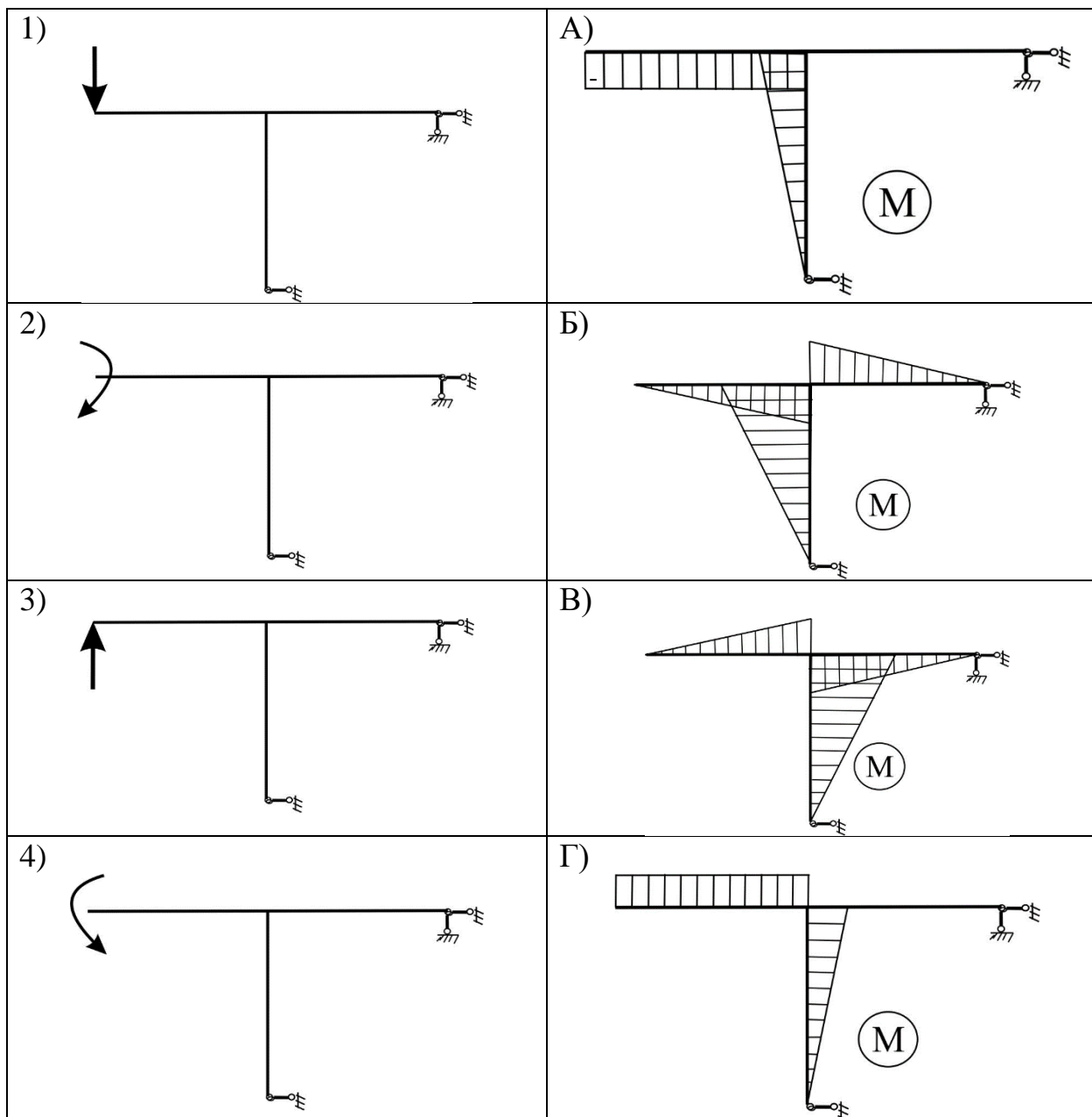


Рис. 2.39

## 2.4. Визначення одиничних коефіцієнтів в системі канонічних рівнянь методу сил.

Одиничне переміщення (коефіцієнт)  $\delta_{ij}$  знаходяться способом Верещагіна за допомогою побудованих одиничних епюр  $\overline{M}_i$  та  $\overline{M}_j$  від вказаних одиничних силових факторів, спрямованих по напрямкам відкинутих в'язів.

### 2.4.1 Приклади виконання тестових завдань Тестове завдання 1

Для рами, яка наведена на рис. 2.40, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

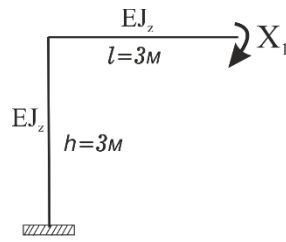


Рис. 2.40

### Розв'язання

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  треба побудувати епюру згинального моменту від одиничного навантаження  $X_1 = 1$ . Епюру згинальних моментів будемо на розтягнутих волокнах, починаючи з вільного кінця рами (праворуч) (див. рис. 2.41). На епюрі повинен бути стрибок в перерізу, де прикладений одиничний момент  $X_1 = 1$ .

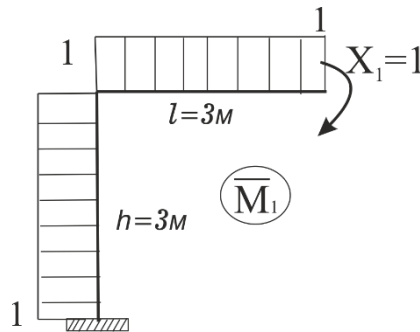


Рис. 2.41

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  помножимо отриману епюру  $\overline{M}_1$  саму на себе.

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_1}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1) = \frac{6}{EJ_z}.$$

Відповідь:  $\delta_{11} = \frac{6}{EJ_z}.$

### Тестове завдання 2

Для рами, яка наведена на рис. 2.42, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

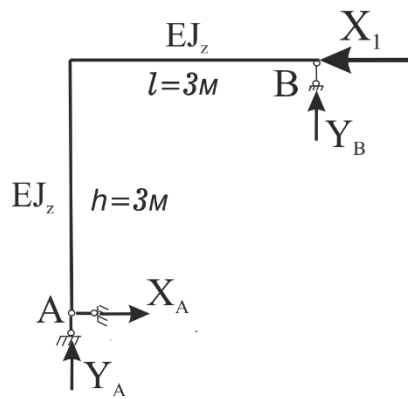


Рис. 2.42.

### Розв'язання

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  побудуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили  $X_1 = 1$ . Оскільки рама має шарнірні опори, то спочатку треба визначити опорні реакції  $Y_A, X_A, Y_B$  за допомогою рівнянь рівноваги.

$$\sum F_x = 0: X_A - X_1 = 0; X_A = X_1 = 1$$

$$\sum M_A = 0: X_1 \cdot h + Y_B \cdot l = 0; Y_B = -\frac{X_1 \cdot h}{l} = -\frac{1 \cdot 3}{3} = -1$$

Оскільки опорна реакція  $Y_B$  отримана від'ємною, то її напрямок змінимо на протилежний (див. рис. 2.38).

$$\sum F_y = 0: Y_A - Y_B = 0; Y_A = Y_B = 1.$$

Епюру згинальних моментів будуємо на розтягнутих волокнах (див. рис. 2.43).

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  помножимо отриману епюру  $\overline{M}_1$  саму на себе.

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_1}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{18}{EJ_z}.$$

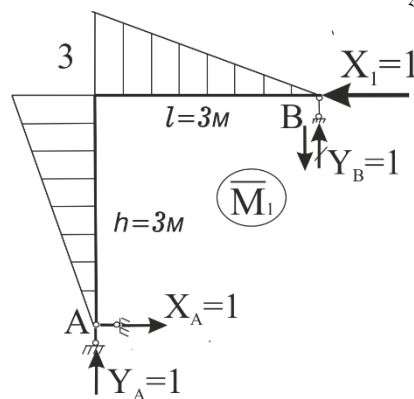


Рис. 2.43

Відповідь.  $\delta_{11} = \frac{18}{EJ_z}$ .

*Тестове завдання 3.*

Для рами, яка наведена на рис. 2.44, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

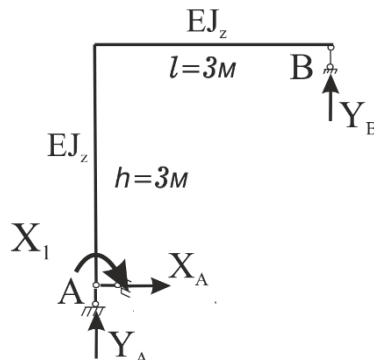


Рис. 2.44

Розв'язання:

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  побудуємо епюру згинальних моментів від одиничної моменту  $X_1 = 1$ . Оскільки рама має шарнірні опори, то спочатку треба визначити опорні реакції  $Y_A, X_A, Y_B$  (рис. 2.45) за допомогою рівнянь рівноваги.

$$\sum F_x = 0: X_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: X_1 - Y_B \cdot l = 0; Y_B = \frac{X_1}{l} = \frac{1}{3}$$

$$\sum F_y = 0: Y_A + Y_B = 0; Y_A = -Y_B = -1.$$

Початковий напрямок  $Y_A$  змінюємо на протилежний.

Епюру згинальних моментів будуємо на розтягнутих волокнах (див. рис. 2.45).

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  помножимо отриману епюру саму на себе.

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M_1} \times \overline{M_1}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{4}{EJ_z}.$$

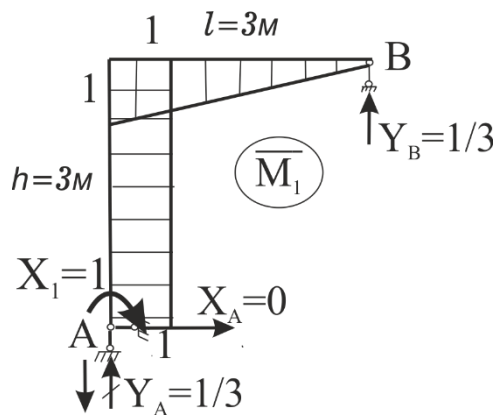


Рис. 2.45

Відповідь.  $\delta_{11} = \frac{4}{EJ_z}$ .

Тестове завдання 4.

Для рами, яка наведена на рис. 2.46, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$

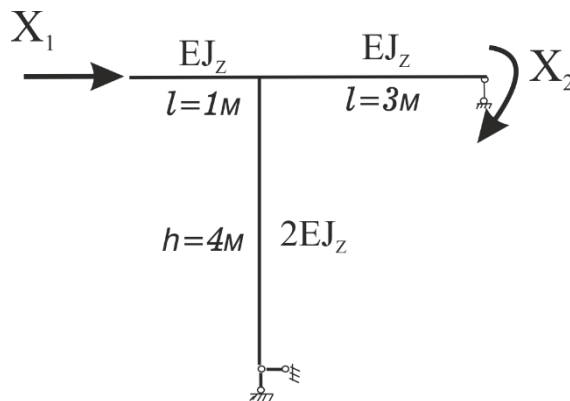


Рис. 2.46

Розв'язання:

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{12}$  побудуємо дві епюри згинальних моментів від одиничної сили  $X_1=1$  та від одиничного моменту  $X_2=1$ . Оскільки рама має шарнірні опори, то спочатку для кожного одиничного навантаження треба визначити опорні реакції за допомогою рівнянь рівноваги.

Розглянемо спочатку дію тільки одиничної сили  $X_1=1$  (див. рис. 2.47)

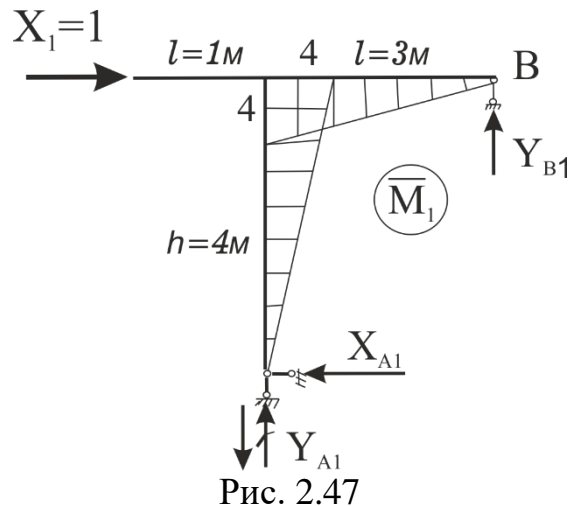
$$\sum F_x = 0: X_1 - X_{A1} = 0; X_{A1} = X_1 = 1$$

$$\sum M_A = 0: X_1 \cdot 4 - Y_{B1} \cdot 3 = 0; Y_{B1} = \frac{X_1 \cdot 4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sum F_y = 0: Y_{A1} + Y_{B1} = 0; Y_{A1} = -Y_{B1} = -\frac{4}{3}$$

Початковий напрямок  $Y_{A1}$  змінюємо на протилежний.

Епюру згинальних моментів будуюмо на розтягнутих волокнах (див. рис. 2.47).

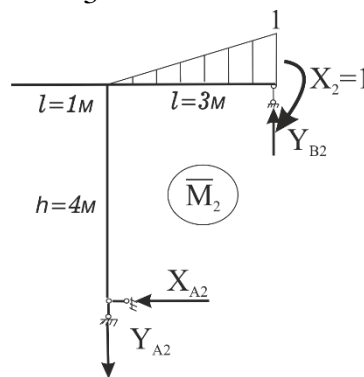


Розглянемо тільки дію одиничного моменту  $X_2 = 1$  (див. рис. 2.48)

$$\sum F_x = 0: X_{A2} = 0$$

$$\sum M_A = 0: X_1 - Y_{B2} \cdot 3 = 0; Y_{B2} = \frac{X_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sum F_y = 0: -Y_{A2} + Y_{B2} = 0; Y_{A2} = Y_{B2} = \frac{1}{3}$$



Для визначення коефіцієнту  $\delta_{12}$  перемножимо епюру згинальних моментів  $\overline{M}_1$  на епюру  $\overline{M}_2$ .

$$\delta_{12} = \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_2}{EJ_z} = -\frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = -\frac{2}{EJ_z}$$

Відповідь.  $\delta_{12} = -\frac{2}{EJ_z}$

### 2.4.2 Тестові завдання для самоперевірки

1. Для рами, яка наведена на рис. 2.49, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

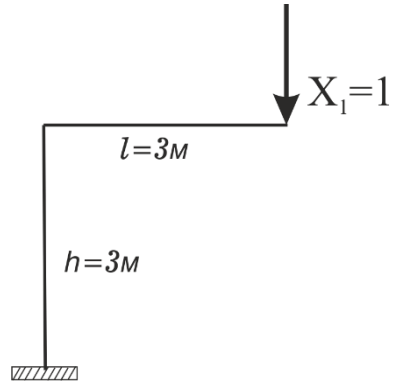


Рис. 2.49

2. Для рами, яка наведена на рис. 2.50, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

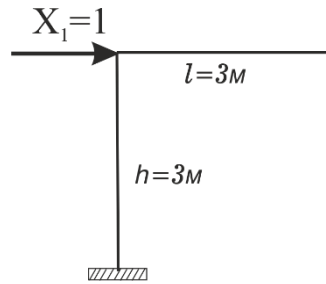


Рис. 2.50

3. Для рами, яка наведена на рис. 2.51, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

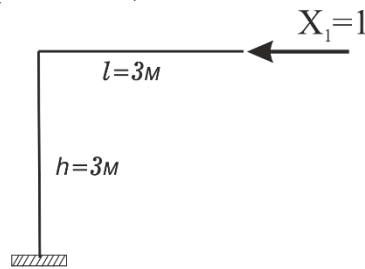


Рис. 2.51

4. Для рами, яка наведена на рис. 2.52, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

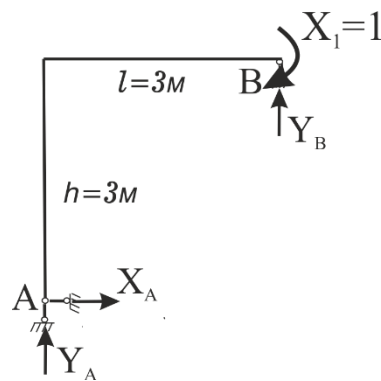


Рис. 2.52

5. Для рами, яка наведена на рис. 2.53, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

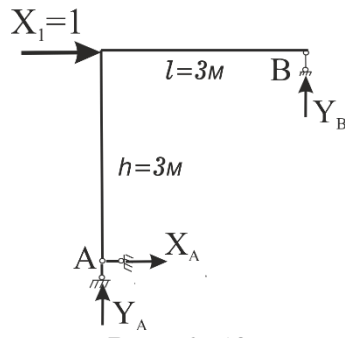


Рис. 2.53

6. Для рами, яка наведена на рис. 2.54, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

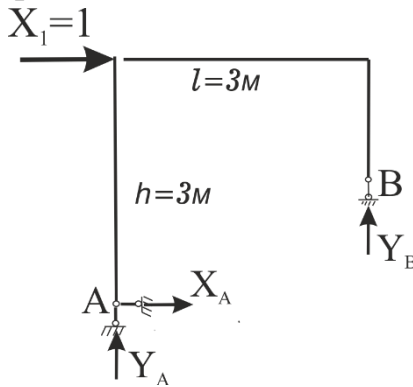


Рис. 2.54

7. Для рами, яка наведена на рис. 2.55, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

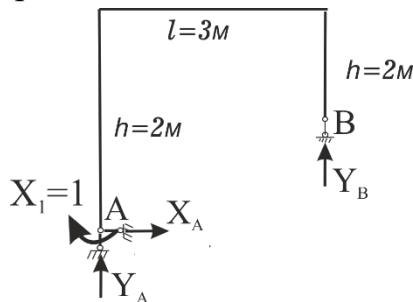


Рис. 2.55

8. Для рами, яка наведена на рис. 2.56, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

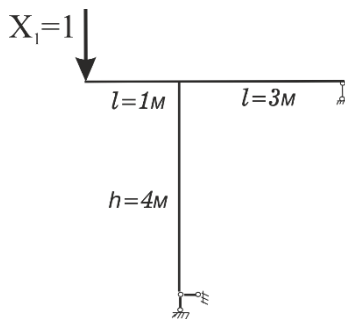


Рис. 2.56

9. Для рами, яка наведена на рис. 2.57, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$

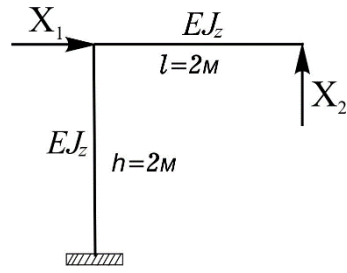


Рис. 2.57

10. Для рами, яка наведена на рис. 2.58, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$

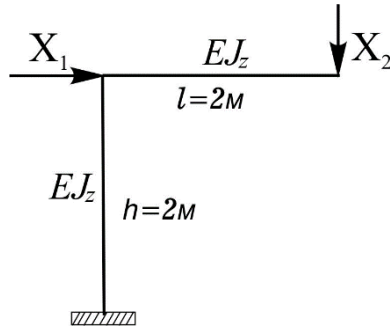


Рис. 2.58

11. Для рами, яка наведена на рис. 2.59, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$

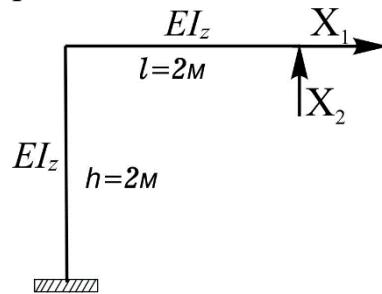


Рис. 2.59

12. Для рами, яка наведена на рис. 2.60, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$

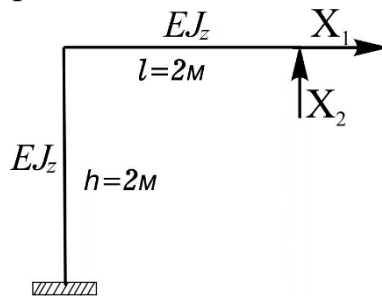


Рис. 2.60

13. Для рами, яка наведена на рис. 2.61, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$

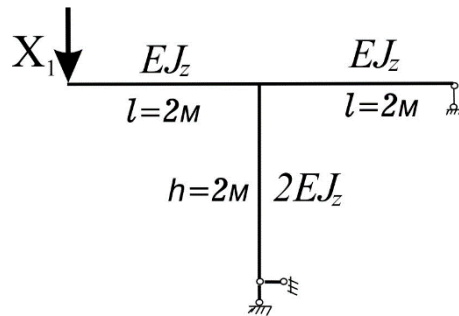


Рис. 2.61

14. Для рами, що наведена на рис. 2.62, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{11}$ .

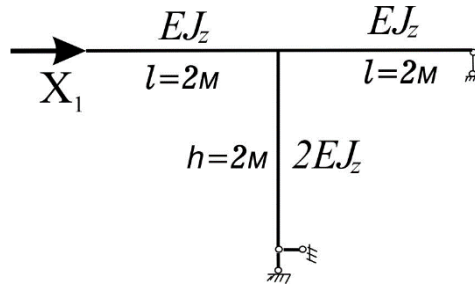


Рис. 2.62

15. Для рами, що наведена на рис. 2.63, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$ .

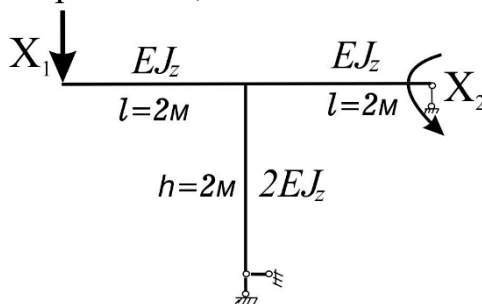


Рис. 2.63

16. Для рами, що наведена на рис. 2.64, визначити одиничний коефіцієнт  $\delta_{12}$ .

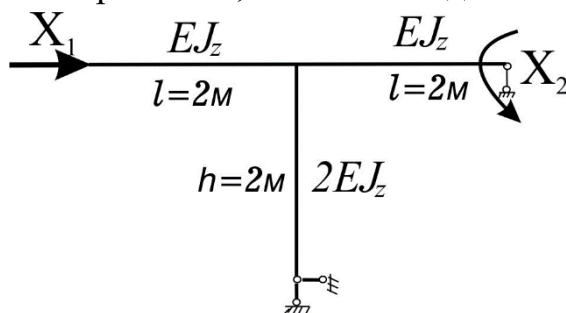


Рис. 2.64

## 2.5. Визначення переміщень в статично визначуваних рамах від заданого навантаження.

Для визначення переміщення від заданого навантаження у заданому перерізі треба:

1. Залишити тільки зовнішнє навантаження та побудувати епюру згинального моменту  $M_F$ .

2. Прибрати з рами зовнішнє навантаження. Прикласти одиничний силовий фактор  $X_1 = 1$  та побудувати епюру згинального моменту  $\overline{M}_1$ .

3. Перемножити отримані епюри  $M_F$  і  $\overline{M}_1$  та зробити відповідні обчислення.

Отримане переміщення від заданого навантаження  $q$  (розподілене навантаження),  $F$  (зосереджена сила),  $M$  (зосереджений момент) у канонічному рівнянні методу сил позначають, відповідно, як  $\Delta_{1q}$ ,  $\Delta_{1F}$ ,  $\Delta_{1M}$ .

### 2.5.1 Приклади виконання тестових завдань

#### Тестове завдання 1

Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.65, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

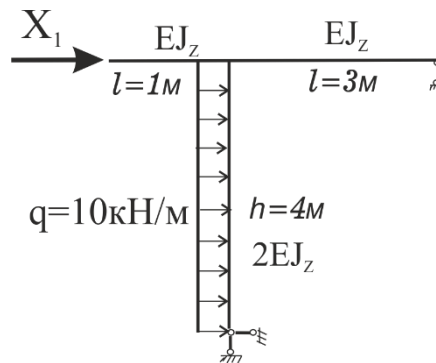


Рис. 2.65

#### Розв'язання

Для визначення коефіцієнту  $\Delta_{1q}$  побудуємо дві епюри згинальних моментів від одиничної сили  $X_1 = 1$  та від заданого рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$ . Оскільки рама має шарнірні опори, то спочатку для кожного навантаження треба визначити опорні реакції за допомогою рівнянь рівноваги.

Розглянемо спочатку дію тільки одиничної сили  $X_1 = 1$  (див. рис. 2.66)

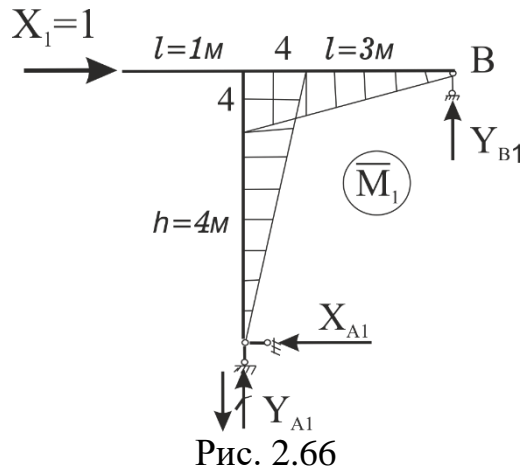
$$\sum F_x = 0: X_1 - X_{A1} = 0; X_{A1} = X_1 = 1$$

$$\sum M_A = 0: X_1 \cdot 4 - Y_{B1} \cdot 3 = 0; Y_{B1} = \frac{X_1 \cdot 4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sum F_y = 0: Y_{A1} + Y_{B1} = 0; Y_{A1} = -Y_{B1} = -\frac{4}{3}$$

Початковий напрямок  $Y_{A1}$  змінюємо на протилежний.

Епюру згинальних моментів будуємо на розтягнутих волокнах (див. рис. 2.61).

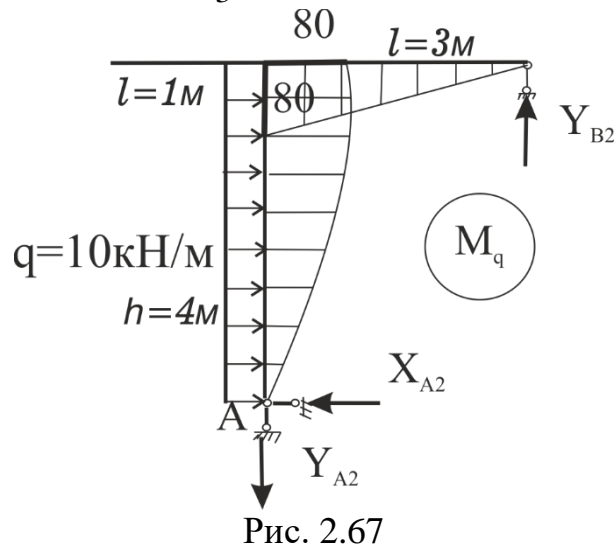


Розглянемо тільки дію рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$ . (див. рис. 2.67)

$$\sum F_x = 0: q \cdot h - X_{A2} = 0; X_{A2} = q \cdot h = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0: q \cdot h \cdot \frac{h}{2} - Y_{B2} \cdot l = 0; Y_{B2} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2}{3} = \frac{80}{3} \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: -Y_{A2} + Y_{B2} = 0; Y_{A2} = Y_{B2} = \frac{80}{3} \text{ кН}.$$



Для визначення коефіцієнту  $\Delta_{1q}$  перемножимо епюру згинального моменту від одиничного навантаження  $\overline{M}_1$  на епюру згинального моменту від заданого навантаження  $M_q$ .

$$\Delta_{1q} = \frac{\overline{M}_1 \times M_q}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 \right) + \frac{1}{2EJ_z} \left( \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 \right) = \frac{1760}{EJ_z}.$$

Відповідь.  $\Delta_{1q} = \frac{1760}{EJ_z}$ .

Тестове завдання 2

Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.68, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

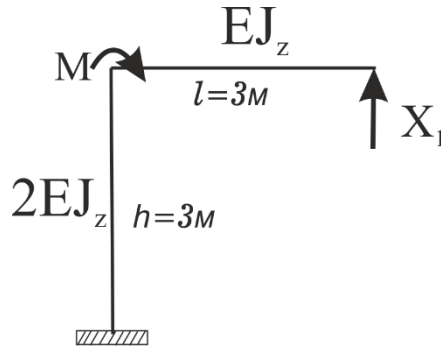


Рис. 2.68

Розв'язання

Для визначення коефіцієнту  $\Delta_{1M}$  побудуємо дві епюри згинальних моментів від одиничної сили  $X_1 = 1$  та зосередженого моменту величиною  $M$ .

Епюру згинальних моментів будуємо на розтягнутих волокнах, починаючи з вільного кінця рами. (див. рис. 2.69).

Спочатку розглядаємо тільки одиничну силу  $X_1 = 1$

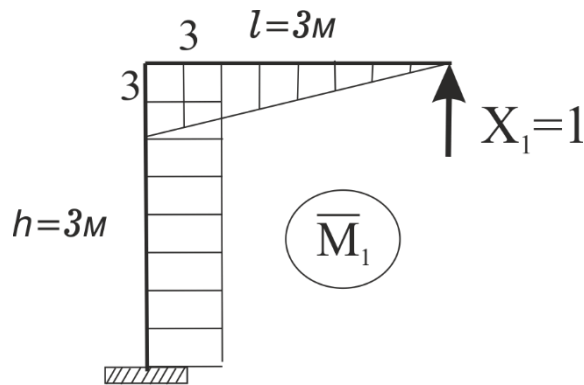


Рис. 2.69

Прибираємо одиничне навантаження та прикладаємо зосереджений момент  $M$  (див. рис. 2.70).

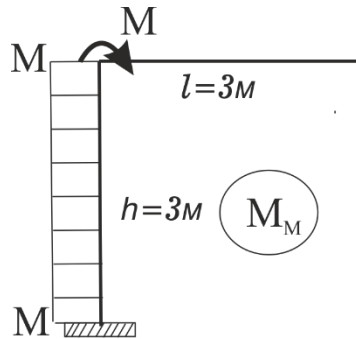


Рис. 2.70

Для визначення коефіцієнту  $\Delta_{1M}$  перемножимо епюру згинального моменту від одиничного навантаження  $\overline{M}_1$  на епюру згинального моменту від заданого навантаження  $M_M$ .

$$\Delta_{1M} = -\frac{\overline{M}_1 \times M_M}{EJ_z} = -\frac{1}{2EJ_z} (M \cdot 3 \cdot 3) = -\frac{9M}{2EJ_z}.$$

Відповідь.  $\Delta_{1M} = -\frac{9M}{2EJ_z}$ .

### 2.5.2 Тестові завдання для самоперевірки

1. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.71, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

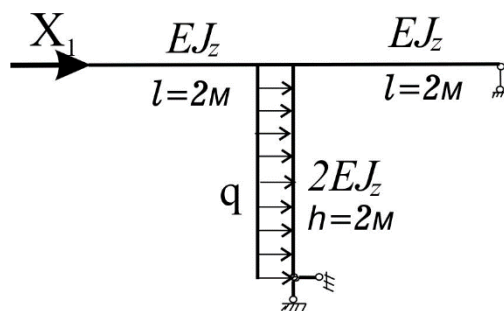


Рис. 2.71

2. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.72, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

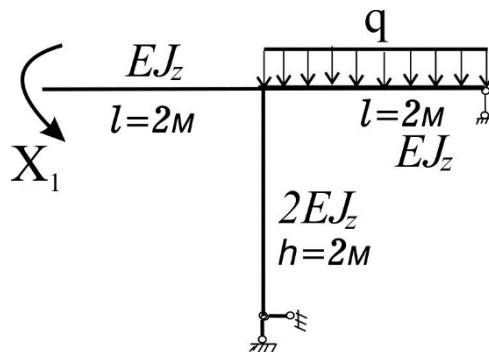


Рис. 2.72

3. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.73, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1M}$ .

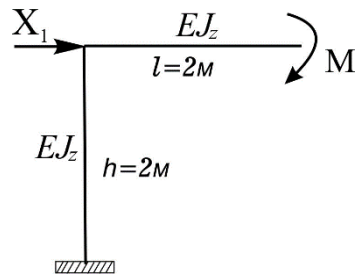


Рис. 2.73

4. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.74, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1F}$ .

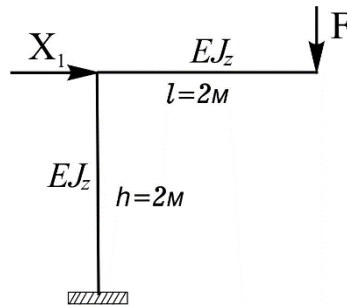


Рис. 2.74

5. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.75, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

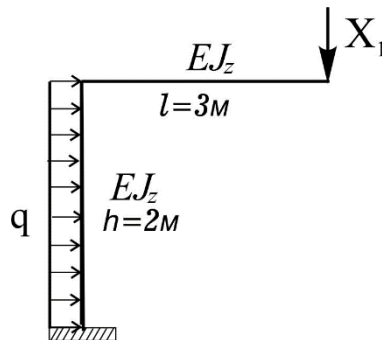


Рис. 2.75

6. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.76, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1q}$ .

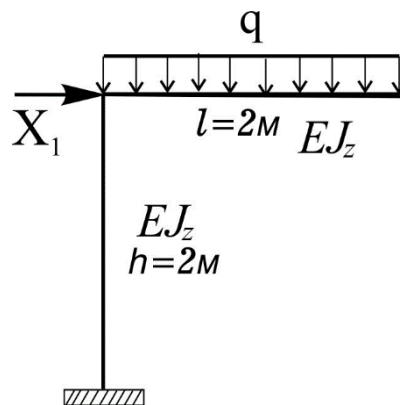


Рис. 2.76

7. Для еквівалентної системи, яка наведена на рис. 2.77, визначити коефіцієнт  $\Delta_{1M}$ .

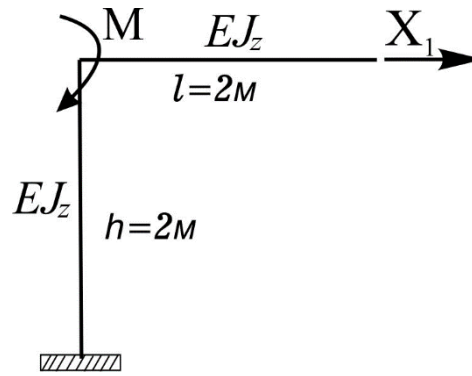


Рис. 2.77

## 2.6. Визначення опорних реакцій у статично невизначуваних рамах.

Будемо розглядати тільки один раз статично невизначувану раму. Для визначення вказаної опорної реакції в статично невизначуваній рамі треба:

1. Обрати основну систему, відкинувши невідому опорну реакцію.
2. Скласти канонічне рівняння:  $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$ ,  
де  $\Delta_{1F}$  - переміщення у напрямку  $X_1$  від заданого навантаження,  
 $\delta_{11}$  - у напрямку  $X_1$  від  $X_1 = 1$ .
3. В отриманій основній системі побудувати епюри згинальних моментів від невідомого  $X_1 = 1$  та від заданого навантаження.
4. Визначити переміщення (коефіцієнт  $\delta_{11}$  та вільний член  $\Delta_{1F}$  рівнянь) за способом Верещагіна.
5. З канонічного рівняння знайти невідому опорну реакцію.

### 2.6.1 Приклади виконання тестових завдань

#### Тестове завдання 1

Для рами, яка наведена на рис. 2.78, визначити реакцію опори В.

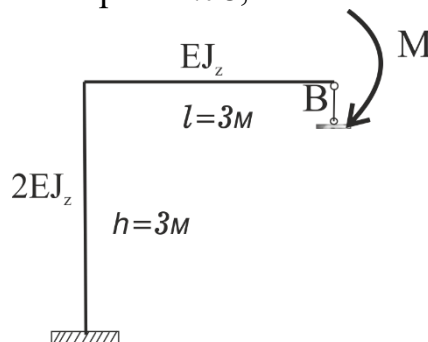


Рис. 2.78

Розв'язання:

Опорну реакцію в перерізі  $B$  позначимо через  $X_1$ . Основна та еквівалентна системи для вихідної рами наведені на рис. 2.79 а та 2.79 б.

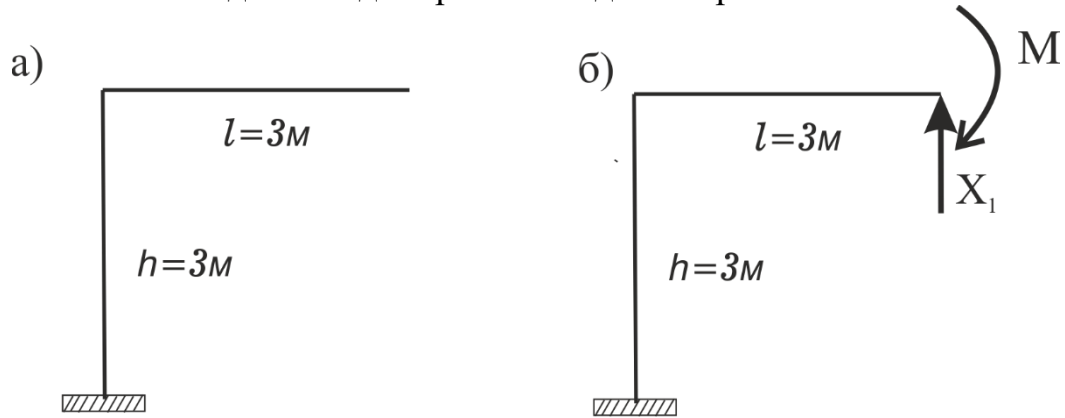


Рис. 2.79

Канонічне рівняння має вигляд:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

Для визначення коефіцієнтів  $\delta_{11}$  та  $\Delta_{1F}$  побудуємо спочатку епюру згинальних моментів від одиничної сили  $X_1=1$ , а потім від зосередженого моменту величиною  $M$ .

Епюру згинальних моментів будуємо на розтягнутих волокнах, починаючи з вільного кінця рами. (див. рис. 2.80).

Спочатку розглядаємо тільки одиничну силу  $X_1=1$

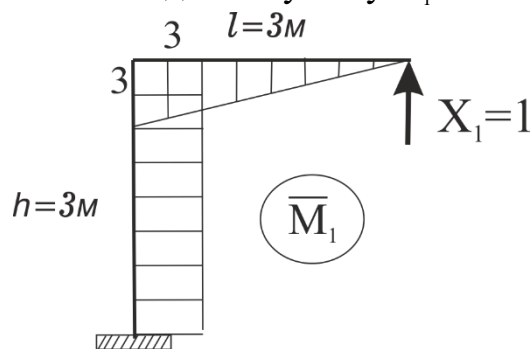


Рис. 2.80

Прибираємо одиничне навантаження та прикладаємо зосереджений момент  $M$  (див. рис. 2.81).

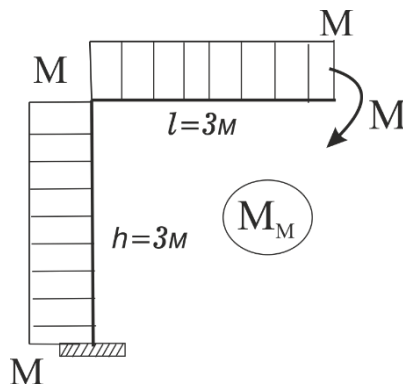


Рис. 2.81

Для визначення коефіцієнту  $\delta_{11}$  помножимо епюру згинального моменту від одиничного навантаження  $\overline{M}_1$  саму на себе.

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \times \overline{M}_1}{EJ_z} = \frac{1}{2EJ_z} (3 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{45}{2EJ_z}.$$

Для визначення коефіцієнту  $\Delta_{1F}$  перемножимо епюру згинального моменту від одиничного навантаження  $\overline{M}_1$  та епюру згинального моменту від заданого навантаження  $M_M$ .

$$\Delta_{1M} = -\frac{\overline{M}_1 \times M_M}{EJ_z} = -\frac{1}{2EJ_z} (M \cdot 3 \cdot 3) + \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot M \right) = -\frac{18M}{2EJ_z} = -\frac{9M}{EJ_z}.$$

$$\frac{45}{2EJ_z} \cdot X_1 - \frac{9M}{EJ_z} = 0; X_1 = \frac{18M}{45} = \frac{2M}{5}$$

$$\text{Відповідь. } Y_B = \frac{2M}{5EJ_z}.$$

### 2.6.2 Тестові завдання для самоперевірки

- Для рами, яка наведена на рис. 2.82, визначити вертикальну опорну реакцію в точці В.

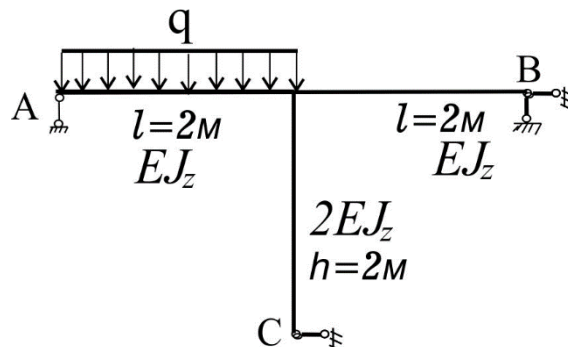


Рис. 2.82

- Для рами, яка наведена на рис. 2.83, визначити опорну реакцію в точці А.

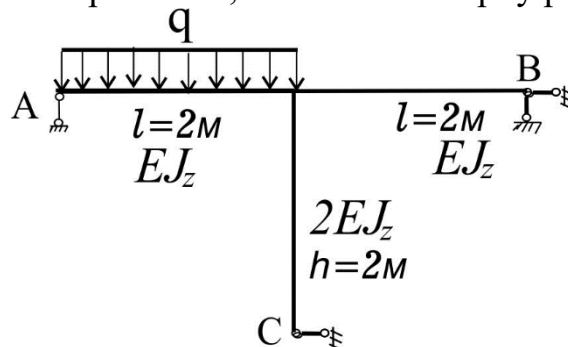


Рис. 2.83

- Для рами, яка наведена на рис. 2.84, визначити опорну реакцію в точці В.

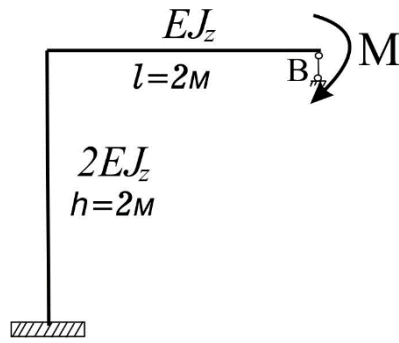


Рис. 2.84

4. Для рами, яка наведена на рис. 2.85, визначити опорну реакцію в точці В.

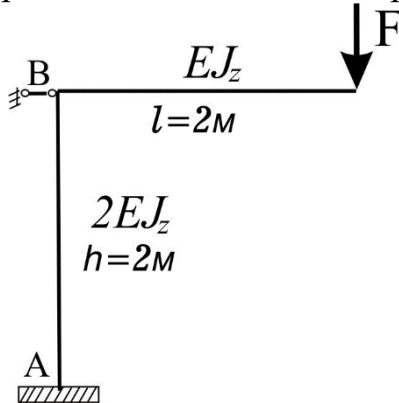


Рис. 2.85

5. Для балки, яка наведена на рис. 2.86, визначити опорний момент  $M_A$ .

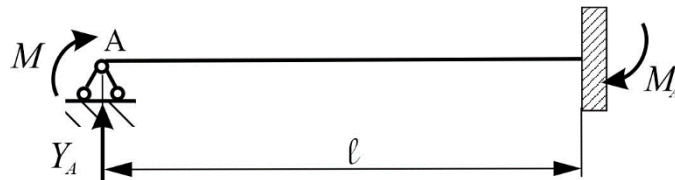


Рис. 2.86

6. Для балки, яка наведена на рис. 2.87, визначити опорну реакцію  $Y_A$ .

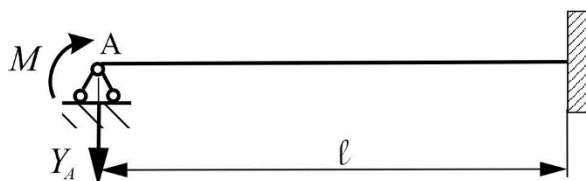


Рис. 2.87

7. Для балки, яка наведена на рис. 2.88, визначити опорну реакцію  $Y_A$ .

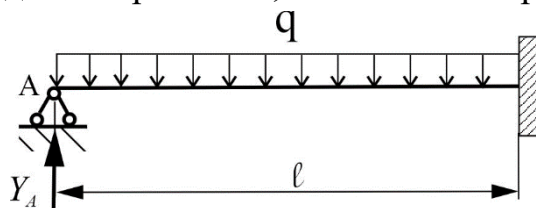


Рис. 2.88

### 3. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ.

В попередніх розділах методичних вказівок розглядалась дія статичних навантажень, але при проведенні інженерних розрахунків зустрічаються так звані динамічні навантаження, тобто такі навантаження які швидко змінюють свої значення за часом.

При розрахунках на дію динамічних навантажень необхідно враховувати сили інерції, які залежать як від маси самої конструкції так і від маси тіла, яке викликає динамічне навантаження. Сили інерції викликають в конструкції додаткові напруження та деформації. Ці додаткові напруження і деформації можуть досягати значних величин.

При проведенні практичних розрахунків, вплив динамічного навантаження враховується за допомогою так званого коефіцієнта динамічності. Для визначення максимального значення внутрішніх зусиль (напружень, деформацій)  $S_{дин}$  при дії динамічного навантаження, динамічне навантаження замінюється статичним, а знайдене від нього зусилля (напруження, деформація)  $S_{ст}$  помножується на коефіцієнт динамічності  $K_d$ :

$$S_{дин} = K_d S_{ст}$$

В курсі опору матеріалів розглядаються найпростіші випадки динамічного навантаження, а саме визначення напружень в канаті при підйомі вантажу, повздовжній та поперечний удар.

З метою допомоги студентам в самостійній підготовці до успішного складання четвертого модульного контролю по відповідній частині курсу «Опір матеріалів» нижче надаються теоретичні питання, приклади розв'язання типових тестових завдань та тестові завдання для самоперевірки.

#### 3.1. Основні теоретичні питання

1. Як визначити коефіцієнт динамічності, якщо відомі статичний та динамічний прогини?
2. Чому дорівнює коефіцієнт динамічності при  $h = 0$  ( $h$  - висота падіння тіла).
3. Чому дорівнює коефіцієнт, який враховує масу стержня при повздовжньому ударі, якщо один кінець защемлений, а інший вільний?
4. Чому дорівнює коефіцієнт зведення маси при ударному навантаженні посередині балки, яка розташована на двох шарнірних опорах?
5. Як впливає маса тіла на коефіцієнт динамічності  $k_d$ ?
6. Записати вираз коефіцієнту динамічності, коли тіло рухається з прискоренням  $\vec{a}$ .
7. Як впливає величина статичного переміщення конструкції на коефіцієнт динамічності?
8. Назвіть міру опору удару.
9. Як впливає зниження температури на крихкість металу?

10. . В якому перерізі балки знаходиться статичний прогин  $\delta_{ст}$  при визначенні коефіцієнта динамічності?
11. Від якого навантаження знаходять статичний прогин  $\delta_{ст}$  ?.
12. Назвіть допущення в технічній теорії удару.
13. Як визначити питому ударну в'язкість ?

### 3.2. Визначення коефіцієнтів динаміки

Для розрахунку канатів при **підйомі** вантажу коефіцієнт динамічності визначається за формулою:

$$k_{д} = 1 + \frac{a}{g}.$$

де  $a$  - прискорення вантажу;  
 $g$  - прискорення вільного падіння,  $g=9,8\text{м/с}^2$ .

При ударному навантаженні коефіцієнт динамічності визначається за формулою:

$$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}},$$

де  $h$  - висота падіння тіла,  $\delta_{ст}$  - статичне подовження при осьовому навантаженні або статичний прогин при згині балки у місці удару.

#### 3.2.1 Приклади виконання тестових завдань

##### Тестове завдання 1

Визначити напруження  $\sigma_{д}$  в канаті, за допомогою якого підіймається вантаж масою  $m$  з прискоренням  $a$  (рис. 2.89). Вагою каната нехтуємо, площа поперечного перерізу канату  $A$ .

Розв'язання.

Оберемо довільний переріз канату з координатою  $x$  та запишемо умову рівноваги вантажу під дією сили тяжіння  $mg$ , сили інерції  $ma$  та сили натягу  $N$ . З умови рівноваги одержуємо

$$N = ma + mg = mg\left(1 + \frac{a}{g}\right) = mg \cdot k_{д}.$$

$$\text{Напруження в канаті дорівнює } \sigma_{д} = \frac{N}{A} = \frac{mg \cdot k_{д}}{A} = \sigma_{ст} k_{д}.$$

$$\text{Відповідь. } \sigma_{д} = \frac{mg \cdot k_{д}}{A} = \frac{mg \cdot (1 + a/g)}{A}.$$

##### Тестове завдання 2

Визначити значення коефіцієнту динамічності, якщо висота падіння тіла  $h=0$ , діаметр  $d=16$  см, вага тіла  $G=9$  кН, довжина балки  $L=1$  м, коефіцієнт пружності  $E=200000$  МПа.

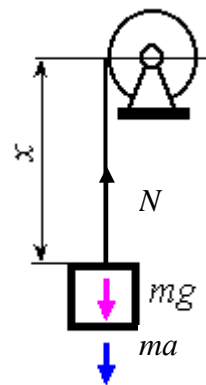


Рис. 2.89

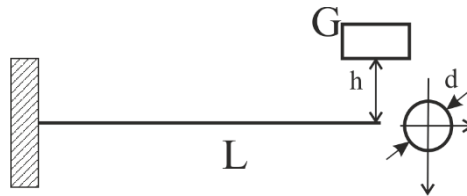


Рис. 2.90

Розв'язання:

Якщо висота падіння тіла дорівнює нулю ( $h=0$ ), то коефіцієнт динамічності завжди дорівнює 2, тобто

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{0}{\delta_{cm}}} = 2$$

Відповідь.  $k_d = 2$ .

Тестове завдання 3

З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динамічності, якщо висота падіння тіла  $h = 2$  см, розміри поперечного перерізу  $b = 12$  см,  $c = 18$  см, вага тіла  $G = 12$  кН, довжина балки  $L = 1,5$  м, коефіцієнт пружності  $E = 200000$  МПа.

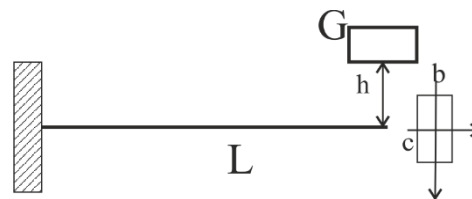


Рис. 2.91

Розв'язання:

Коефіцієнт динаміки визначається за формулою:  $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}}$ .

Статичний прогин  $\delta_{cm}$  визначається у місці удару и залежить від схеми навантаження та умов спирання балки.

Для нашого випадку:

$\delta_{cm} = \frac{GL^3}{3EJ_z}$ , де  $J_z$  - осьовий момент інерції відносно головних центральних

осей. Для прямокутного перерізу  $J_z = \frac{bc^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4$ .

$$\text{Тоді } \delta_{cm} = \frac{GL^3}{3EJ_z} = \frac{12 \text{ кН} \cdot 150^3 \text{ см}^3}{3 \cdot 20000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 5832 \text{ см}^4} = 0,116 \text{ см}.$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2 \text{ см}}{0,116 \text{ см}}} = 6,96$$

Відповідь.  $k_d = 6,96$ .

#### Тестове завдання 4

З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h=1$  см, діаметр  $d=14$  см, вага тіла  $G=9$  кН, довжина балки  $L=1$  м, коефіцієнт пружності  $E=200000$  МПа.

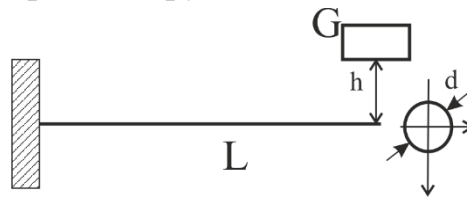


Рис. 2.92

Розв'язання:

Коефіцієнт динаміки визначається за формулою:  $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}}$ .

Для нашого випадку:

$\delta_{cm} = \frac{GL^3}{3EJ_z}$ , де  $J_z$  - осьовий момент інерції відносно головних центральних

осей. Для прямокутного перерізу  $J_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,15 \cdot 14^3}{64} = 134,6275 \text{ см}^4$ .

Тоді  $\delta_{cm} = \frac{GL^3}{3EJ_z} = \frac{9 \text{ кН} \cdot 100^3 \text{ см}^3}{3 \cdot 200000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 134,6275 \text{ см}^4} = 1,114 \text{ см}$ .

$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1 \text{ см}}{1,114 \text{ см}}} = 2,67$

Відповідь.  $k_d = 2,67$ .

#### 3.2.2 Тестові завдання для самоперевірки

Завдання №1. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h=2$  см, діаметр  $d=10$  см, вага тіла  $G=9$  кН, довжина балки  $L=2$  м, коефіцієнт пружності  $E=200000$  МПа.

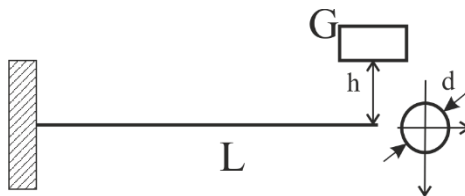


Рис. 2.93

Завдання №2. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h=2$  см, розміри

поперечного перерізу  $b = 10$  см,  $c = 20$  см, вага тіла  $G = 9$  кН, довжина балки  $L = 2$  м, коефіцієнт пружності  $E = 200000$  МПа.

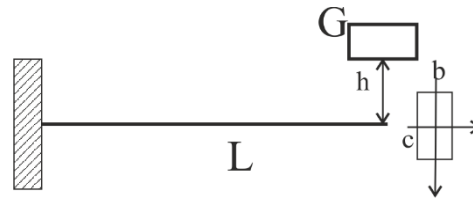


Рис. 2.94

Завдання №3. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 2$  см, осьовий момент інерції  $J_z = 2400$  см<sup>4</sup>, вага тіла  $G = 9$  кН, довжина балки  $L = 2$  м, коефіцієнт пружності  $E = 200000$  МПа.

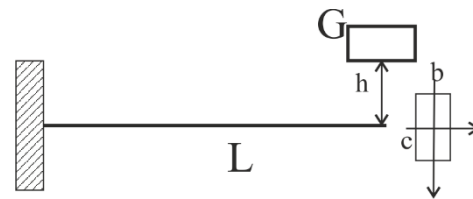


Рис. 2.95

Завдання №4. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 1$  см, розміри поперечного перерізу  $b = 10$  см,  $c = 20$  см, вага тіла  $G = 12$  кН, довжина балки  $L = 2$  м, коефіцієнт пружності  $E = 200000$  МПа.

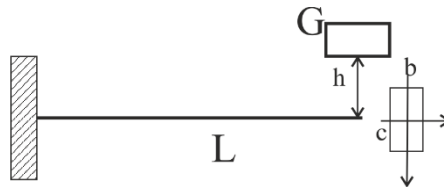


Рис. 2.96

Завдання №5. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 1$  см, діаметр  $d = 16$  см, вага тіла  $G = 9$  кН, довжина балки  $L = 1$  м, коефіцієнт пружності  $E = 200000$  МПа.

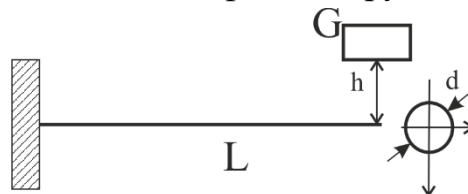


Рис. 2.97

Завдання №6. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 2$  см, осьовий момент

інерції  $J_z = 2400 \text{ см}^4$ , вага тіла  $G = 9 \text{ кН}$ , довжина балки  $L = 2 \text{ м}$ , коефіцієнт пружності  $E = 200000 \text{ МПа}$ .

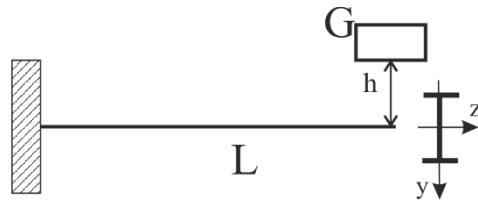


Рис. 2.98

Завдання №7. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 1 \text{ см}$ , осьовий момент інерції  $J_z = 3800 \text{ см}^4$ , вага тіла  $G = 14 \text{ кН}$ , довжина балки  $L = 1 \text{ м}$ , коефіцієнт пружності  $E = 200000 \text{ МПа}$ .

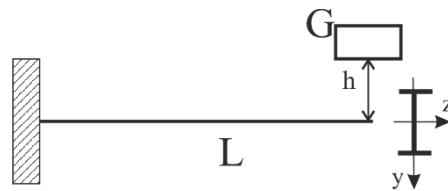


Рис. 2.99

Завдання №8. Визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 0$ , осьовий момент інерції  $J_z = 2400 \text{ см}^4$ , вага тіла  $G = 10 \text{ кН}$ , довжина балки  $L = 2 \text{ м}$ , коефіцієнт пружності  $E = 200000 \text{ МПа}$ .

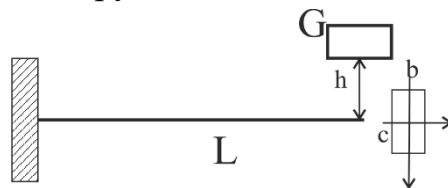


Рис. 2.100

Завдання №9. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 0$ , діаметр  $d = 16 \text{ см}$ , вага тіла  $G = 9 \text{ кН}$ , довжина балки  $L = 1 \text{ м}$ , коефіцієнт пружності  $E = 200000 \text{ МПа}$ .

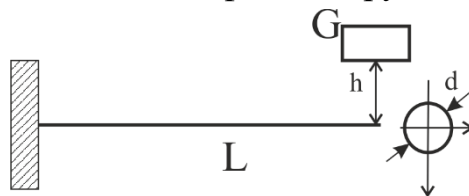


Рис. 2.101

Завдання №10. З точністю до двох знаків після коми визначте значення коефіцієнту динаміки, якщо висота падіння тіла  $h = 1 \text{ см}$ , осьовий момент інерції  $J_z = 5500 \text{ см}^4$ , вага тіла  $G = 8 \text{ кН}$ , довжина балки  $L = 3 \text{ м}$ , коефіцієнт пружності  $E = 200000 \text{ МПа}$ .

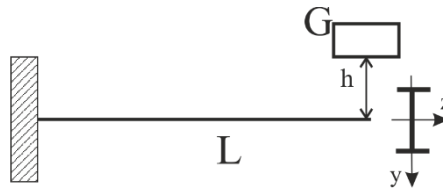


Рис. 2.102

### 3.3. Визначення напружень та прогинів при ударному навантаженні.

#### 3.3.1 Приклади виконання тестових завдань

##### Тестове завдання 1.

Вертикальний стрижень, статично стиснутий силою  $F$ , скорочується на 2 мм. Визначити скорочення стержня у випадку, коли вантаж вагою  $F$  падає на цей стрижень з висоти 1 мм.

Розв'язання.

При динамічному прикладанні поздовжньої сили деформація стрижня визначається за формулою

$$\delta_o = \delta_{cm} \cdot \kappa_d,$$

де  $\delta_{cm}$  – подовження чи скорочення стрижня при статичному навантаженні;  
 $\kappa_d$  – коефіцієнт динамічності, який визначається як вказано в п. 3.2.

За умовами задачі  $\delta_{cm} = 2$  мм, а  $\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{2}} = 2,42$ . Тому

$$\delta_o = \delta_{cm} \cdot \kappa_d = 2 \cdot 2,42 = 4,84 \text{ мм.}$$

Відповідь: 4,84мм.

##### Тестове завдання 2.

До сталевої балки прямокутного поперечного перерізу довжиною 2 метри, шарнірно обпертої по кінцях, раптово прикладений посередині вантаж вагою 4 Кн. Визначити прогин балки під вантажем в см. Ширина перерізу  $b = 10$  см, висота  $h = 15$  см, модуль пружності I роду  $E = 200000$  МПа. Масою балки зневажити.

Розв'язання.

При динамічному прикладанні сили  $F$  при згині балки її прогин визначається за формулою

$$\delta_o = \delta_{cm} \cdot \kappa_d,$$

де  $\delta_{cm}$  – прогин балки при статичному навантаженні силою  $F$ ;

$\kappa_d$  – коефіцієнт динамічності, який визначається як вказано в п. 3.2.

Прогин  $f$  в середині шарнірно обпертої по кінцях балки довжиною  $l$ , якщо статична сила  $F$  теж прикладена в середині, визначається за формулою

$$f = \frac{Fl^3}{48EJ_z},$$

де  $EJ_z$  - згинальна жорсткість балки.

У випадку прямокутного перерізу момент інерції  $J_z$  дорівнює

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2812,5 \text{ см}^4, \text{ тому } EJ_z = 5625 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

Значення  $E$  підставляємо в  $(\text{кН} / \text{см}^2)$ , тому що  $J_z$  вимірюється в  $\text{см}^4$ , тобто  $E = 2 \cdot 10^4$ .

Таким чином, статичний прогин  $\delta_{cm}$  дорівнює

$$\delta_{cm} = \frac{4 \cdot (200)^3}{48EJ_z} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^6}{48 \cdot 5625 \cdot 10^4} = 0,012 \text{ см}.$$

При раптовому прикладенні сили  $\kappa_d = 2$ , тому  $\delta_o = \delta_{cm} \cdot \kappa_d = 2 \cdot 0,012 = 0,024$  см.

Відповідь: 0,024 см.

*Тестове завдання 3.*

До дерев'яної балки круглого поперечного перерізу довжиною 2 метри, жорстко защемленої з одного краю, раптово прикладений на вільному кінці вантаж вагою 2 Кн. Визначити найбільше напруження в МПа. Діаметр балки 20 см. Масою балки зневажити. У відповіді надати тільки ціле значення.

Розв'язання.

При динамічному прикладенні сили напруження, які виникають у перерізах балки, визначається за формулою

$$\sigma_o = \sigma_{cm} \cdot \kappa_d,$$

де  $\sigma_{cm}$  – напруження в перерізі балки при статичному навантаженні;

$\kappa_d$  – коефіцієнт динамічності, який визначається як вказано в п. 3.2.

Найбільші напруження  $\sigma$  в перерізі балки при статичному згині визначається за формулою

$$\sigma_{cm} = \frac{M}{W_z},$$

де  $W_z$  – момент опору балки,  $M$  – згинальний момент.

У випадку круглого перерізу момент опору  $W_z$  дорівнює

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 20^3}{32} = 785 \text{ см}^3.$$

Найбільший згинальний момент, який виникає в перерізі консольної балки, якщо сила  $F$  прикладена на вільному кінці, виникає в защемленні та дорівнює  $M_{\max} = F \cdot l$ , де  $l$  – довжина балки. Таким чином,  $M_{\max} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м} = 400 \text{ кН} \cdot \text{см}$ .

Найбільше статичне напруження  $\sigma_{cm}$  дорівнює

$$\sigma_{cm} = \frac{400}{785} = 0,51 \text{ кН} / \text{см}^2.$$

При раптовому прикладенні сили  $\kappa_o = 2$ , тому

$$\sigma_o = \sigma_{cm} \cdot \kappa_d = 2 \cdot 0,51 = 1,02 \text{ кН} / \text{см}^2.$$

Відповідь: 1,02 кН/см<sup>2</sup>.

### 3.3.2 Тестові завдання для самоперевірки

Завдання №1. До дерев'яної балки прямокутного поперечного перерізу довжиною 3 метри, шарнірно обпертої по кінцях, раптово прикладений посередині вантаж вагою 2 Кн. Визначити прогин балки під вантажем в см. Ширина перерізу  $b=10$  см, висота  $h=15$  см., модуль пружності I роду  $E = 120000$  МПа. Масою балки зневажити. Відповідь дати із двома знаками після коми.

Завдання №2. До дерев'яної балки прямокутного поперечного перерізу довжиною 3 метри, шарнірно обпертої по кінцях, раптово прикладений посередині вантаж вагою 2 Кн. Визначити найбільше напруження в МПа. Ширина перерізу  $b=10$  см, висота  $h=15$  см. Масою балки зневажити. У відповіді надати тільки ціле значення.

Завдання №3. На сталеву балку з жорстким защемленням двотаврового перерізу (двотавр № 20 ; осьовий момент інерції  $J_z= 2030\text{см}^4$ ) на вільний кінець з висоти  $h = 10$  см падає вантаж вагою 3 кН. Довжина балки 2 метри. Визначити прогин під вантажем в см. Модуль пружності I роду  $E = 200000$  МПа. Масою балки зневажити. Відповідь дати із двома знаками після коми.

Завдання №4. На сталеву балку з жорстким защемленням двотаврового перерізу (двотавр № 20 ; осьовий момент інерції  $J_z= 2030\text{см}^4$ ) на вільний кінець з висоти  $h = 10$  см падає вантаж вагою 3 кН. Довжина балки 2 метри. Визначити найбільше напруження в МПа в балці. Масою балки зневажити. У відповіді надати тільки ціле значення.

Завдання №5. На середину дерев'яної балки прямокутного поперечного перерізу довжиною 2 метри, шарнірно обпертої по кінцях, з висоти 3 см падає вантаж вагою 3 Кн. Визначити прогин балки під вантажем в см. Ширина перерізу  $b=15$  см, висота  $h=25$  см, модуль пружності I роду  $E = 120000$  МПа. Масою балки зневажити. Відповідь дати із двома знаками після коми.

Завдання №6. На середину дерев'яної балки круглого поперечного перерізу довжиною 2 метри, шарнірно обпертої по кінцях, з висоти 3 см падає вантаж вагою 3 Кн. Визначити найбільше напруження в МПа. Діаметр перерізу 10 см, модуль пружності I роду  $E = 120000$  МПа. Масою балки зневажити. У відповіді надати тільки ціле значення.

Завдання №7. На консольну сталеву балку (кутик № 18; осьовий момент інерції  $J_z= 1216\text{см}^4$ ) з жорстким защемленням на вільний кінець з висоти  $h = 5$  см падає вантаж вагою 3 кН. Довжина балки 3 метри. Визначити прогин під

вантажом в см. Модуль пружності I роду  $E = 200000$  МПа. Масою балки зневажити. Відповідь дати із двома знаками після коми.

Завдання №8. На консольну сталеву балку з жорстким защемленням двотаврового перерізу (двотавр № 20 ; осьовий момент інерції  $J_z = 2030\text{см}^4$ ) на вільний кінець з висоти  $h = 8$  см падає вантаж вагою 4 кН. Довжина балки 2 метри. Визначити найбільше напруження в МПа в балці. Масою балки зневажити. У відповіді надати тільки ціле значення.

Завдання №9. Сталевий стрижень діаметром 25 мм та довжиною 1,5 м розтягується раптово прикладеною постійною силою 25 кН. Визначити величину найбільших напружень, які виникають у стрижні.

Завдання №10. Сталевий стрижень діаметром 25 мм та довжиною 1,5 м розтягується раптово прикладеною постійною силою 25 кН. Визначити величину деформації стрижня.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко, Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К.: Вища шк., 2004. 655 с.
2. Астанін, В. В. Основи розрахунків на міцність: Навчальний посібник / В. В. Астанін. – Х.: ХФВ «Транспорт України», 2001. 210 с.
3. Лазарян В. А. Напряжения и деформация: Учебное пособие для вузов. Днепропетровск: 1968. 140 с.
4. Лазарян В. А. Техническая теория изгиба. Київ: Наукова думка, 1976. 204 с.
5. Опір матеріалів : метод. вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт: у 2 ч. / уклад.: О. М. Бондарев, С. А. Костиця, Л. В. Урсуляк, С. Ю. Молчанов; ДНУЗТ. – Дніпро, 2017. – Ч. 1. 58 с.
6. Методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних робіт з опору матеріалів. Частина 2/О. М. Бондарев, С. Й. Конашенко, Ю. А. Лабузов, С. Г. Крюков, Л. О. Недужа, В. О. Репетя. Д.: ДДТУЗТ, 2002. 40 с.
7. Костиця С.А., Островерхов М.П., Султан О.В., Озерна О.В. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Опір матеріалів». Частина 2. ДІТ, 2000. 24 с.

### Інформаційні ресурси

1. Дистанційний курс «Опір матеріалів». URL.: <http://lider.diit.edu.ua>
2. Бібліотека університету та її депозитарій.  
URL.: <https://library.diit.edu.ua/uk/catalog>,  
URL.: <https://library.diit.edu.ua/uk/catalog?category=books-and-other>

Навчально – методичне видання

## ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Методичні рекомендації та завдання для самостійної підготовки до складання модульного контролю МК4

Редактор Ю. Г. Дішкант  
Комп'ютерна верстка О. М. Гончаренко

Підписано до друку 10.10.2020. Формат 60x84<sub>1/16</sub>  
Папір друк. Друк плоский. Облік. – вид. арк.. 4,0. Умов.друк. арк. 3,95.

Український Державний університет науки та технологій  
49019, м. Дніпро, вул. Лазаряна, 2

---

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1315 від 31.03.2003