

Влияние сил трения качения на вынужденные колебания балок

Бондаренко Л.Н., к.т.н., доцент, Герасимова О.Л., к.т.н., доцент Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Жаковский А.Д., к.т.н., доцент, Колбун В.В., к.т.н., доцент Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени В. Лазаряна

Постановка проблемы. В отличие от влияния сил, например, неупругого сопротивления на вынужденные колебания балок влияние сил трения качения на них вряд ли рассматривалось, поскольку не существует аналитических зависимостей для их определения.

Цель статьи. Если учесть сопротивление качению W , то основное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} \pm W = P(t). \quad (1)$$

Это уравнение отличается от уравнения свободных колебаний при сухом трении правой частью, а от уравнения вынужденных колебаний при вязком сопротивлении отсутствием первой производной от y .

Перепишем уравнение (1) в таком виде:

$$\ddot{y} + p^2 \cdot y \pm a \cdot p^2 = \frac{P(t)}{m}, \quad (1a)$$

где $p^2 = \frac{c}{m}$; $a = \frac{W}{c}$ - зона «застоя».

Интеграл неоднородного уравнения (1a) следует искать в виде суммы: а) интеграла соответствующего уравнению без правой части (уравнение свободных колебаний) и б) какого либо частного интеграла этого уравнения.

Воспользуемся общим методом вариации произвольных постоянных, который позволит получить результат справедливый для любых законов изменения возмущающей силы.

Частное решение будем искать в виде

$$y = C_1 \cdot \sin(p \cdot t) + C_2 \cdot \cos(p \cdot t). \quad (2)$$

Выражение для скорости

$$\dot{y} = C_1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) - C_2 \cdot p \cdot \sin(p \cdot t) + \dot{C}_1 \cdot \sin(p \cdot t) + \dot{C}_2 \cdot \cos(p \cdot t).$$

Свяжем $C_1(t)$ и $C_2(t)$ выражением

$$\dot{C}_1 \cdot \sin(p \cdot t) + \dot{C}_2 \cdot \cos(p \cdot t) = 0 \quad (3)$$

и запишем скорость в более простой форме

$$\dot{y} = C_1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) - C_2 \cdot p \cdot \sin(p \cdot t).$$

Тогда ускорение

$$\ddot{y} = -C_1 \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t) - C_2 \cdot p^2 \cdot \cos(p \cdot t) + \dot{C}_1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) - \dot{C}_2 \cdot p \cdot \sin(p \cdot t). \quad (4)$$

Подставив выражения (2) и (4) в уравнение (1a) получим

$$\dot{C}_1 \cdot \cos(p \cdot t) - \dot{C}_2 \cdot \sin(p \cdot t) = \frac{P(t)}{m \cdot p} \mp a \cdot p. \quad (5)$$

Из (3) и (5) найдем производные \dot{C}_1 , \dot{C}_2

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= \frac{P(t)}{m \cdot p} \cdot \cos(p \cdot t) \mp a \cdot p \cdot \cos(p \cdot t); \\ \dot{C}_2 &= -\frac{P(t)}{m \cdot p} \cdot \sin(p \cdot t) \pm a \cdot p \cdot \sin(p \cdot t).\end{aligned}$$

интегрируя эти выражения, получим

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{m \cdot p} \cdot \int_0^t [P(\tau) \mp a \cdot m \cdot p^2] \cdot \cos(p \cdot \tau) d\tau + B_1; \\ C_2 &= -\frac{1}{m \cdot p} \cdot \int_0^t [P(\tau) \pm a \cdot m \cdot p^2] \cdot \sin(p \cdot \tau) d\tau + B_2.\end{aligned}\tag{6}$$

где B_1 и B_2 постоянные; обозначение τ здесь введено для того, чтобы отличить время, меняющееся в процессе интегрирования от нуля до τ , от верхнего предела t , который здесь считается постоянным.

Общий интеграл уравнения (1а)

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{m \cdot p} \cdot \{ \sin(p \cdot t) \cdot \int_0^t [P(\tau) \mp a \cdot m \cdot p^2] \cdot \cos(p \cdot \tau) d\tau - \cos(p \cdot t) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^t [P(\tau) \pm a \cdot m \cdot p^2] \} + B_1 \cdot \sin(p \cdot t) + B_2 \cdot \cos(p \cdot t).\end{aligned}$$

Внося $\sin(p \cdot t)$ и $\cos(p \cdot t)$ под знак интегралов, после некоторых преобразований получим общее решение уравнения (1а)

$$\begin{aligned}y &= B_1 \cdot \sin(p \cdot t) + B_2 \cdot \cos(p \cdot t) + \frac{1}{m \cdot p} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin p \cdot (t - \tau) d\tau \mp \\ &\quad \mp a \cdot p^2 \cdot \int_0^t \sin p \cdot (t - \tau) d\tau.\end{aligned}\tag{7}$$

Для скорости получим

$$\begin{aligned}\dot{y} &= B_1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) - B_2 \cdot p \cdot \sin(p \cdot t) + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \cos p \cdot (t - \tau) d\tau \mp \\ &\quad \mp a \cdot p^2 \cdot \int_0^t \cos p \cdot (t - \tau) d\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

Значения постоянных B_1 и B_2 определяются из начальных условий и, например, если при $t=0$ $y=A_0$; $\dot{y}=0$ из (7) и (8) получим $B_1=0$; $B_2= A_0$ и решение принимает вид

$$y = A_0 \cdot \cos(p \cdot t) + \frac{1}{m \cdot p} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin p \cdot (t - \tau) d\tau \mp \frac{W}{c} \cdot p \cdot \int_0^t \sin p \cdot (t - \tau) d\tau.$$

Первый член выражает свободные колебания, вызванные начальным возмущением A_0 , а второй вынужденные колебания, вызываемые возмущающей силой $P(\tau)$.

В случае нулевых начальных условий, т.е. когда движение начинается при $A_0=0$ получим

$$y = \frac{1}{m \cdot p} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin p \cdot (t - \tau) d\tau \mp \frac{W \cdot p}{c} \cdot \int_0^t \sin p \cdot (t - \tau) d\tau\tag{9}$$

В дальнейших выкладках будем пользоваться этой формулой.

Найдем и другую форму решения уравнения (9) проинтегрировав его по частям:

$$y = \frac{P(t)}{m \cdot p} - \frac{1}{m \cdot p^2} \cdot \int_0^t \dot{P}(\tau) \cdot \cos p \cdot (t - \tau) d\tau \mp a \cdot p \cdot \int_0^t \cos p \cdot (t - \tau) d\tau; \quad (10)$$

Здесь принято, что в начальное мгновения сила $P(0)=0$.

Получим решение для случая действия на балку гармонической силы $P = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ с гасителем трения качения (рис. 1)

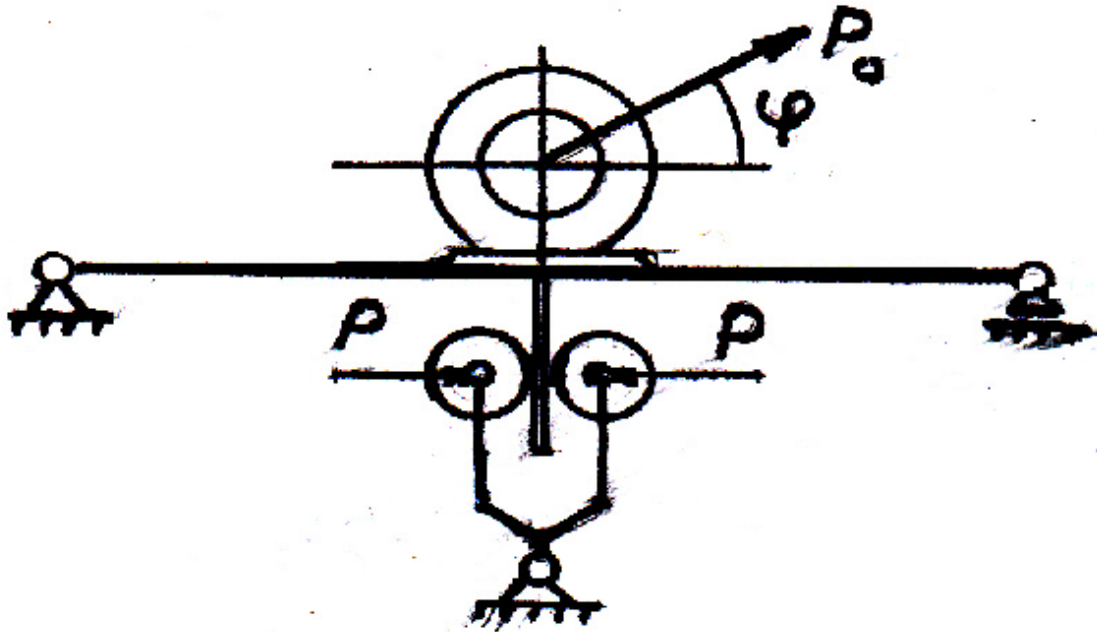


Рис. 1. Схема балки с гармоническим возбуждением и гасителем трением качения

Описание колебаний системы, вызываемые такой силой можно получить с помощью формулы (9). При $\omega \neq p$ получим

$$y = a \cdot (\mp 1 \pm \cos(p \cdot t)) + \frac{P_0}{m \cdot (p^2 - \omega^2)} \cdot (\sin(\omega \cdot t) - \frac{\omega}{p} \cdot \sin(p \cdot t)); \quad (11)$$

напомним, что здесь $a = \frac{W}{c}$, а $p^2 = \frac{c}{m}$, величина $c = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3}$.

Перепишем уравнение (11) так:

$$y = \frac{P_0}{m \cdot (p^2 - \omega^2)} \cdot \sin(\omega \cdot t) + a \cdot (\mp 1 \pm \cos(p \cdot t)) - \frac{P_0 \cdot \omega}{m \cdot p \cdot (p^2 - \omega^2)} \cdot \sin(p \cdot t), \quad (11a)$$

где $y_{ст} = \frac{P_0}{c}$ - статический прогиб, вызываемый силой P_0 .

Таким образом, при нулевых начальных условиях возникают сложные колебания, которые состоят из двух частей: а) колебания, проходящие с частотой ω возмущающей силы и б) колебания, происходящие с собственной частотой p .

Первые колебания, как известно, называются вынужденными, а вторые – свободными. Однако условность этих названий очевидна, поскольку просматривается зависимость свободных колебаний от величины возмущающей силы P_0 .

Для построения процесса сложения двух колебаний с разными частотами ω и p найдем величину a и также проследим ее влияние на характер колебаний. Предположим, что источник сопротивления качению состоит из двух цилиндров – катков радиусом R_1 и длиной B приложенных к пластине, прикрепленной к балке, с разной силой (хотя конструкция возможна «наоборот»).

Если известна величина W , состоящая из двух сопротивлений $W=W_1+W_2$, то можно найти необходимую силу прижатия P катков.

Д. Табором [1] аналитически, а нами [2] экспериментально – аналитически доказано, что коэффициент трения качения k может быть найден через статическую полуширину пятна контакта b_0 .

При качении цилиндра по плоскости

$$k = 0,225 \cdot b \cdot e^{-1,2 \cdot R_1}; \quad (12)$$

где величина b с учетом равенства модулей упругости материалов катков и пластины и при равенстве коэффициента Пуассона 0,3 определяется из выражения [3]

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot R_1}{B \cdot E}}.$$

Теперь

$$k = 0,343 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot R_1}{B \cdot E}} \cdot e^{-1,2 \cdot R_1}. \quad (12a)$$

Естественно, что радиус катков должен быть таким, чтобы колебательные напряжения при максимальной силе P не превышали допусковых, т.е.

$$R_1 = \frac{0,175 \cdot P \cdot E}{B \cdot [\sigma]_k^2}. \quad (13)$$

Теперь формулу (12a) можно записать в виде

$$k = 0,143 \cdot \frac{P}{B \cdot [\sigma]_k} \cdot \exp\left(-0,21 \cdot \frac{P \cdot E}{B \cdot [\sigma]_k^2}\right). \quad (12б)$$

Сопротивление качению двух катков

$$W = \frac{2 \cdot P \cdot k}{R_1} = 1,63 \cdot \frac{P \cdot [\sigma]_k}{E} \cdot \exp\left(-0,21 \cdot \frac{P \cdot E}{B \cdot [\sigma]_k^2}\right). \quad (14)$$

Очевидным преимуществом такого гасителя поперечных колебаний есть то, что можно конструктивно легко осуществлять изменение силы прижатия катков, а, следовательно, и силы сопротивления их качению, например, связав его с изменением амплитуды или ускорений колебаний балки.

Поскольку процесс сложения двух колебаний с различными частотами p и ω достаточно хорошо изучен, то в дальнейшем рассмотрим влияние величины сопротивления качению W ролика, а, следовательно, и силы P их прижатия.

Пример. С целью более наглядных графиков рассмотрим низкочастотную систему с частотой свободных колебаний $p=\pi$ рад/с и двумя частотами вынужденных $\omega_1=\pi/2$ и $\omega_2=2\pi$ рад/с при $m=2030$ кг; $c=20$ кН/м;

$P_0=1000$ Н; при этом период свободных колебаний составит $T=2\pi/p=2$ с, а вынужденных $T_1=4$ и $T_2=1$ с.

Для случая $y=y_0=2\cdot a$; $p=\pi$; $\omega=\pi/2$; $T=4$ с кривая колебаний показана на рис. 2.

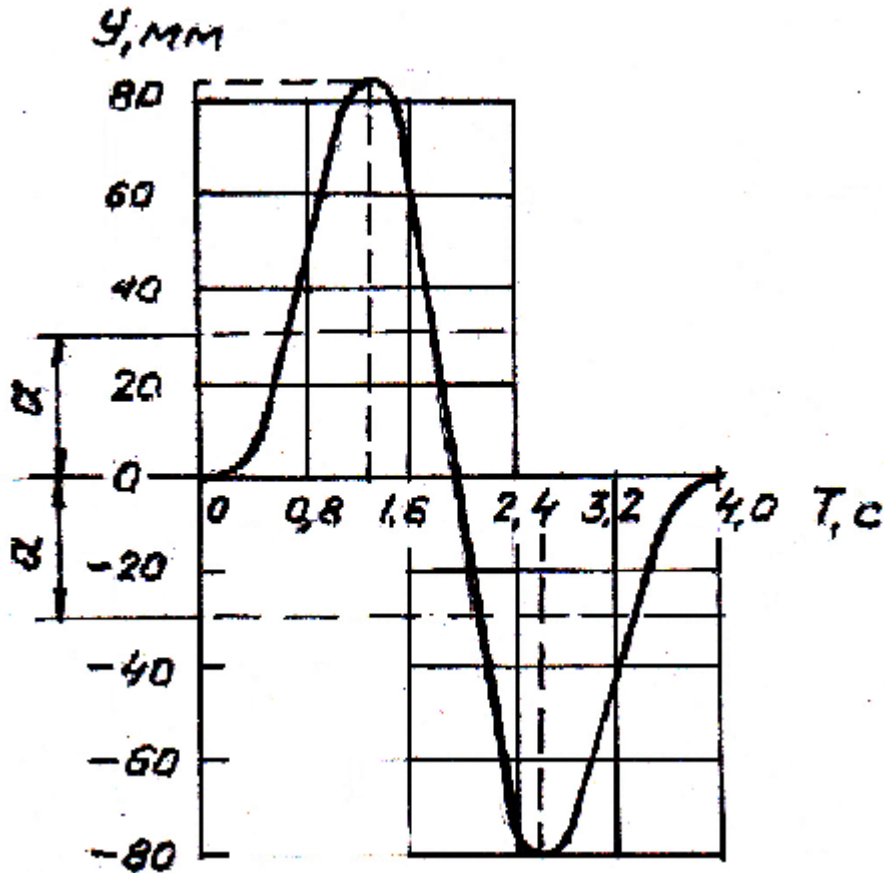


Рис. 2. Кривая колебаний балки под действием гармонической силы и гашением трением качения.

Литература

1. Tabor D. *The mechanism of rolling friction: the elastic range.* – *Proc. Roy. Soc.*, 1955. – P. 198.
2. Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкін В.С. Деформаційні опори в машинах. – Дн-ськ: Дніпро – VAL, 2002. – 200 с.
3. Справочник по сопротивлению материалов/ Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.