Математические заметки

Том 95 выпуск 1 январь 2014

УДК 517.982.4

Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов

Пусть $L^{\Delta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ – пространство функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\Delta f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В работе получены новые точные неравенства типа Колмогорова для L_∞-норм производных Рисса $D^\alpha f$ функций $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$. Решена задача Стечкина о приближении неограниченного оператора D^α ограниченными на классе функций $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leqslant 1$, а также задача о наилучшем восстановлении оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью δ.

Библиография: 27 названий.

DOI: 10.4213/mzm10196

1. Введение. Неравенства, оценивающие нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка (неравенства типа Колмогорова), играют важную роль во многих областях математики и ее приложениях. Получению такого рода неравенств посвящены работы многих математиков. В настоящее время известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной (см., например, обзоры [1]–[3] и монографии [4]–[6]). Значительно меньше таких результатов получено для функций многих переменных (см., например, [7]–[13]). Отметим, что в [10] получено точное неравенство, оценивающее равномерную норму производной по направлению через равномерную норму функции и L_∞-норму результата применения к функции оператора Лапласа.

Во многих вопросах анализа и его приложений возникает необходимость наряду с производными целых порядков, рассматривать и производные дробных порядков (см., например, [14]). Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка можно найти в работах [15]–[20], [21; гл. 2],[22]. Результаты даной работы непосредственно примыкают к результатам работ [23] и [24].

Задача о точных неравенствах типа Колмогорова тесно связана с задачей Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными на заданном классе элементов Q, а также с задачей оптимального восстановления неограниченного оператора на классе Q в предположении, что элементы Q заданы с известной погрешностью (см. по этому поводу [1], [2], а также [4; § 7.1]).

В данной статье мы получим новые точные неравенства, оценивающие равномерную норму производной Рисса D^α функций многих переменных через L_∞-норму самой функции и L_∞-норму ее лапласиана, а также решим задачу наилучшего приближения оператора D^α на классе $W^\Delta_{\infty,\infty}$ функций f таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leqslant 1$ (Δ – оператор Лапласа, понимаемый в смысле теории обобщенных функций) и задачу оптимального восстановления оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью.

Статья организована следующим образом. В п. 2 мы приведем необходимые определения, постановки задач и известные результаты, непосредственно примыкающие к теме данной статьи. В п. 3 мы введем оператор U^α_h, который впоследствии окажется оператором наилучшего приближения для D^α, и получим оценки отклонения $D^\alpha f$ от $U^\alpha_h f$ на классе $W^\Delta_{\infty,\infty}$. В п. 4 с помощью результатов п. 3 мы получим неравенство типа Колмогорова, оценивающее равномерную норму $D^\alpha f$ через равномерную норму f и равномерную норму Δf, в аддитивной и мультипликативной форме, установим точность полученных неравенств и найдем модуль непрерывности оператора D^α на классе $W^\Delta_{\infty,\infty}$. Это позволит в п. 5 завершить решение задачи Стечкина и решить задачу оптимального восстановления оператора D^α на заданных с погрешностью функциях класса $W^\Delta_{\infty,\infty}$. Наконец, в п. 6 мы решим задачу Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, имеющей заданные значения $\|f\|_\infty$, $\|D^\alpha f\|_\infty$ и $\|\Delta f\|_\infty$.

2. Определения, постановки задач, смежные результаты. Пусть $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = (\sum_{i=1}^m x_i^2)^{1/2}$. Через $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство измеримых функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\},$$

а через $C(\mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных, ограниченных функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

– оператор Лапласа. Для локально интегрируемых на $\mathbb{R}^m$ функций f и g будем писать

$$\Delta f = g,$$

если для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Delta\varphi(x) f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x)\,dx.$$

Через $L^\Delta_{\infty,\infty} = L^\Delta_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ обозначим совокупность функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\Delta f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Через $W^\Delta_{\infty,\infty} = W^\Delta_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ обозначим класс функций из $L^\Delta_{\infty,\infty}$ таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leqslant 1$.

Производная Рисса порядка α $(0 < \alpha < 2)$ функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ определяется равенством (см. [14; с. 367–368])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt,$$

где

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+m/2}}{\sin(\alpha\pi/2)\Gamma(1+\alpha/2)\Gamma((m+\alpha)/2)}$$

– нормирующий множитель [14; с. 373]. Отметим, что производная Рисса D^α реализует [14; с. 368] дробную степень $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ *усеченной производной Рисса порядка* $\alpha \in (0, 2)$ функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется

$$(D_h^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt$$

(здесь и везде ниже $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant h\}$ – шар радиуса h с центром в начале координат).

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A\colon X \to Y$ – оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ – некоторое множество.

Функция

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta, A, Q) := \sup_{\substack{f \in Q \\ \|f\|_X \leqslant \delta}} \|Af\|_Y, \qquad \delta > 0, \tag{2.1}$$ {eq2.

называется *модулем непрерывности* оператора A на множестве Q. Задача отыскания функции $\Omega(\delta)$ для заданных оператора A и множества Q является абстрактной версией задачи о неравенствах типа Колмогорова.

Через $\mathscr{L} = \mathscr{L}(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов $S\colon X \to Y$. Для $N > 0$ полагаем

$$E_N(A, Q) = \inf_{\substack{S \in \mathscr{L}(X,Y) \\ \|S\| \leqslant N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \tag{2.2}$$ {eq2.

Задача С. Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора A на множестве Q линейными ограниченными операторами состоит в том, чтобы при любом $N > 0$ найти величину (2.2), а также указать экстремальный оператор, т.е. оператор, реализующий точную нижнюю грань в правой части (2.2). Эта задача впервые возникла в исследованиях Стечкина в 1965 г. Постановка задачи, первые важные результаты и решение этой задачи для дифференциальных операторов малых порядков представлены в [25]. Обзор дальнейших результатов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [1], [2].

Пусть еще

$$l(\delta, A, Q) = \inf_{N \geqslant 0} \{E_N(A, Q) + N\delta\}.$$

Следующая теорема Стечкина [25] (см. также [1], [2] и [4; теорема 7.1.1]) дает простую, но часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности и устанавливает связь между задачей Стечкина и задачей о точных неравенствах типа Колмогорова.

Теорема A. *Если A – однородный (в частности, линейный) оператор, Q – центрально-симметричное выпуклое множество из области определения оператора A, то выполняются неравенства*

$$E_N(A,Q) \geqslant \sup_{\delta>0}\{\Omega(\delta,A,Q)-N\delta\} = \sup_{f\in Q}\{\|Af\|_Y - N\|f\|_X\}, \qquad N\geqslant 0, \tag{2.3}$$
{eq2.

$$\Omega(\delta,A,Q) \leqslant l(\delta,A,Q), \qquad \delta\geqslant 0. \tag{2.4}$$
{eq2.

Если при этом существует элемент $f\in Q$ и линейный ограниченный оператор T такие, что

$$\|Af\|_Y = \sup_{f\in Q}\|Af-Tf\|_Y + \|T\|\cdot\|f\|_X, \tag{2.5}$$
{eq2.

то справедливы равенства

$$\Omega(\|f\|_X,A,Q) = \|Af\|_Y,$$
$$E_{\|T\|}(A,Q) = \sup_{f\in Q}\|Af-Tf\|_Y = \|Af\|_Y - \|T\|\cdot\|f\|_X$$

и, следовательно, оператор T является экстремальным в задаче (2.2) при $N=\|T\|$, а элемент f в задаче (2.1) при $\delta=\|f\|_X$.

Многие задачи численного анализа, теории функций и других разделов математики являются некорректными задачами восстановления оператора A на элементах класса $Q\subset D(A)$ в предположении, что элементы класса Q заданы с известной погрешностью. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества отображений $\mathscr{R}=\mathscr{R}(X,Y)\subset\mathscr{O}(X,Y)$, где $\mathscr{O}=\mathscr{O}(X,Y)$ – совокупность всех отображений, действующих из X в Y.

Для числа $\delta\geqslant 0$ и оператора $T\in\mathscr{R}(X,Y)$ положим

$$\mathscr{E}_\delta(\mathscr{R};A,Q) = \inf_{T\in\mathscr{R}}\ \sup_{\substack{f\in Q,\eta\in X,\\ \|f-\eta\|_X\leqslant\delta}}\|Af-T\eta\|_Y. \tag{2.6}$$
{eq2.

Задача оптимального восстановления оператора A с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathscr{R}$ на элементах класса Q, заданных с погрешностью δ, состоит в том, чтобы найти величину (2.6) и указать оптимальный (т.е. реализующий точную нижнюю грань в (2.6)) метод восстановления.

Связь задачи (2.6) с неравенствами типа Колмогорова, с одной стороны, и задачей приближения неограниченных операторов ограниченными, с другой, дается следующей теоремой (см. [25], а также [1], [2] и [4; теорема 7.1.2]).

Теорема B. *Если Q – уравновешенное множество и A – однородный оператор, то*

$$\Omega(\delta,A,Q)\leqslant\mathscr{E}_\delta(\mathscr{O};A,Q)\leqslant\mathscr{E}_\delta(\mathscr{L};A,Q)\leqslant l(\delta,A,Q).$$

Если при этом существует элемент $f\in Q$ и оператор $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ со свойством (2.5), то

$$\|Af\|_Y = \Omega(\delta,A,Q) = \mathscr{E}_\delta(\mathscr{O};A,Q) = \mathscr{E}_\delta(\mathscr{L};A,Q), \qquad \delta=\|f\|_X,$$

и для соответствующего δ оператор T является оптимальным.

Мы будем рассматривать сформулированные задачи в случае, когда $X = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $Y = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $A = D^\alpha$ и $Q = W^\Delta_{\infty,\infty}$. При этом для решения задачи отыскания модуля непрерывности $\Omega(\delta, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty})$ мы ниже получим неулучшаемые неравенства типа Колмогорова, оценивающие $\|D^\alpha f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ и $\|\Delta f\|_\infty$ для функции $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ в аддитивной и мультипликативной форме.

3. Оценка сверху нормы оператора U^α_h и его уклонения от D^α. Пусть $h > 0$. Через $G_h(x,y)$ будем обозначать функцию Грина шара B_h (см., [26; с. 265]), т.е. для $x, y \in B_h$, $x \neq y$, в случае $m \geqslant 3$

$$G_h(x,y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2 y|^{m-2}}\right),$$

и в случае $m = 2$

$$G_h(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{h^2 - xy}{h(x-y)}\right|$$

(здесь и везде ниже σ_{m-1} – площадь поверхности единичной сферы S^{m-1} пространства $\mathbb{R}^m$).

Для $\rho \in (0, h]$ положим

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\dfrac{1}{\rho^{m-2}} - \dfrac{1}{h^{m-2}}\right), & m \geqslant 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{h}{\rho}, & m = 2. \end{cases}$$

Отетим, что для $y \in B_h$, $y \neq 0$

$$G_h(0,y) = G_h(|y|).$$

Усреднением функции f в точке x по сфере радиуса h назовем величину

$$\widetilde{f}(x,h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}}\int_{S^{m-1}} f(x + hy)\, ds_y$$

(ds_y – элемент площади поверхности сферы S^{m-1}).

Известно(см., например, [26; с. 289]), что для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции f справедливо представление

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int_{B_h} G_h(x,y)(-\Delta f(y))\, dy. \tag{3.1}$$ {eq3.

Применяя представление (3.1) к функции $f(z \pm x)$ (при фиксированном x) и полагая затем $z = 0$, получим

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int_{B_h} G_h(0,y)(-\Delta f(x \pm y))\, dy.$$

Для любой функции $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ и любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ будем иметь

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\left[\widetilde{\varphi}(x,h) + \int_{B_h} G_h(0,y)(-\Delta\varphi(x \mp y))\, dy\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\left[\widetilde{f}(x,h) + \int_{B_h} G_h(0,y)(-\Delta f(x \pm y))\, dy\right] dx.\end{aligned}$$

Таким образом, для $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy. \tag{3.2}$$ {eq3.

Введем также следующую функцию:

$$F_h(t) = \int_t^h G_\rho(t)\,\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}\,, \qquad t \in [0,h].$$

Нетрудно видеть, что для функций $G_h(|y|)$ и $F_h(|y|)$ имеют место следующие соотношения:

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1\left(\frac{|y|}{h}\right) \tag{3.3}$$ {eq3.

и

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1\left(\frac{|y|}{h}\right). \tag{3.4}$$ {eq3.

Для заданного $h > 0$ рассмотрим оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x) - \widetilde{f}(x,h)),$$

где

$$c_h = \frac{F_h(h/\sqrt[m]{2})}{G_h(h/\sqrt[m]{2})} = h^{-\alpha}\frac{F_1(1/\sqrt[m]{2})}{G_1(1/\sqrt[m]{2})} = h^{-\alpha}c_1. \tag{3.5}$$ {eq3.

Покажем, что U_h^α – ограниченный оператор, действующий из $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, и найдем его норму.

Для любой функции $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ и $h > 0$

$$\begin{aligned}\|U_h^\alpha f\|_\infty = \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\bigg\|\int_{\mathbb{R}^m\setminus B_h} &\frac{2f(\,\cdot\,) - f(\,\cdot\, + t) - f(\,\cdot\, - t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt \\ &+ 2c_h\sigma_{m-1}(f(\,\cdot\,) - \widetilde{f}(\,\cdot\,,h))\bigg\|_\infty \\ \leqslant \frac{4\|f\|_\infty}{d_{m,2}(\alpha)}\bigg\{\int_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h\sigma_{m-1}\bigg\} &= \frac{4\|f\|_\infty\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right),\end{aligned}$$

так что

$$\|U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{4\|f\|_\infty\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right) = \frac{4\|f\|_\infty\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\,h^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right). \tag{3.6}$$ {eq3.

Последнее выражение нам будет удобно записать с использованием следующей функции, которая в рассматриваемых задачах является многомерным аналогом эйлерова идеального сплайна второго порядка (см., например, [4; стр. 66–69]).

Пусть для $\rho \geqslant 0$ и $\delta = \sqrt[m]{2}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{2m}\left(\rho^2 - \dfrac{1}{\delta^2} - \sigma_{m-1}G_1\left(\dfrac{1}{\delta}\right) + \dfrac{1}{2}\right), & 0 \leqslant \rho \leqslant \dfrac{1}{\delta}\,, \\ \dfrac{1}{2m}\left(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1}G_1(\rho) + \dfrac{1}{\delta^2} + \sigma_{m-1}G_1\left(\dfrac{1}{\delta}\right) + \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{\delta} < \rho \leqslant 1, \\ \psi(1), & \rho > 1. \end{cases} \tag{3.7}$$ {eq3.

Для $h > 0$ и $x \in \mathbb{R}^m$ положим

$$\varphi_{h,2}(x) = h^{-2}\psi(h|x|). \tag{3.8}$$
{eq3.

Функция $\varphi_{h,2}(x)$ очевидно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^m$.

Пользуясь представлением оператора Лапласа для радиальных функций $\varphi(\rho)$,

$$\Delta\varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\,\varphi'(\rho),$$

нетрудно проверить, что $\varphi_{h,2} \in W^{\Delta}_{\infty,\infty}$ и при этом

$$\Delta\varphi_{h,2}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \dfrac{h}{\delta}, \\ -1, & \dfrac{h}{\delta} < |x| < h, \\ 0, & |x| \geqslant h, \end{cases} \tag{3.9}$$
{eq3.

так что

$$\|\Delta\varphi_{h,2}\|_\infty = 1. \tag{3.10}$$
{eq3.

Ясно, что при любом $h > 0$

$$\|\varphi_{h,2}\|_\infty = h^{-2}\|\varphi_{1,2}\|_\infty, \tag{3.11}$$
{eq3.

и, как нетрудно проверить,

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = h^{2-\alpha}\|D^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty. \tag{3.12}$$
{eq3.

Отметим также, что представление (3.2) для функции $\varphi_{h,2}$ имеет место в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$.

Для любого $h > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty &\geqslant |U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| \\ &= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\left|\int_{\mathbb{R}^m\setminus B_h} \frac{2\varphi_{h,2}(0) - 2\varphi_{h,2}(y)}{|y|^{m+\alpha}}\,dy + 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi_{h,2}(0) - \widetilde{\varphi}_{h,2}(0))\right| \\ &= \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_\infty}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\int_{\mathbb{R}^m\setminus B_h} \frac{dy}{|y|^{m+\alpha}} + 4c_h\sigma_{m-1}\right) \\ &= \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_\infty\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\,h^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (3.6) и (3.11) получаем, что для функции $\varphi_{h,2}$ имеет место равенство

$$\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = |U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| = \frac{4\|\varphi_{1,2}\|_\infty\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\,h^{-2-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) = h^{-2-\alpha}\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty. \tag{3.13}$$
{eq3.

Ввиду соотношений (3.6) и (3.13) видим, что справедлива

Лемма 1. *Пусть $h > 0$ и $\alpha \in (0,2)$. Тогда*
$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Теперь для функций $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ мы получим оценку величины $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$. Прежде всего покажем, что для $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место представление
$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{3.14}$$
{eq3.

Как легко видеть, для любой функции $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ и любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ
$$\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x))\,dx. \tag{3.15}$$
{eq3.

Используя определения $D^\alpha\varphi$ и $U_h^\alpha\varphi$ и переходя к полярным координатам, получаем
$$\begin{aligned}
&d_{m,2}(\alpha)(D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x))\\
&\quad= \int_{B_h}\frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{m+\alpha}}\,dy - 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,h))\\
&\quad= \int_{S^{m-1}} ds_y \int_0^h \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+\rho y) - \varphi(x-\rho y)}{\rho^{\alpha+1}}\,d\rho - 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,h))\\
&\quad= 2\int_{S^{m-1}} ds_y \int_0^h \frac{\varphi(x) - \varphi(x+\rho y)}{\rho^{\alpha+1}}\,d\rho - 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,h))\\
&\quad= 2\int_0^h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,\rho))\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} - 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,h)).
\end{aligned}$$
Учитывая представление (3.1), приходим к равенствам
$$\begin{aligned}
&d_{m,2}(\alpha)(D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x))\\
&\qquad= 2\int_0^h \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}\int_{B_\rho} G_\rho(|y|)(-\Delta\varphi(x+y))\,dy - 2c_h\int_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))G_h(|y|)\,dy\\
&\qquad= 2\int_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy,
\end{aligned}$$
т.е.
$$D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{3.16}$$
{eq3.

Подставляя (3.16) в (3.15) и меняя порядок интегрирования, получим
$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx\\
&\qquad= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\int_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy\,dx\\
&\qquad= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любой функции $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство (3.14).

Используя (3.14), получим, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_\infty \int_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\, dy. \tag{3.17}$$ {eq3.

Отметим, что при выводе соотношения (3.16) бесконечная дифференцируемость функции φ была несущественной. В действительности использовалось только то обстоятельство, что для таких функций представление (3.2) имело место в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$. Поэтому, учитывая замечание, сделанное после вывода (3.2), заключаем, что для функции $\varphi_{h,2}$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$D^\alpha \varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta\varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy. \tag{3.18}$$ {eq3.

Учитывая (3.9), а также определения функций $G_h(|y|)$, $F_h(|y|)$ и константы c_h, нетрудно проверить, что почти всюду

$$\Delta\varphi_{h,2}(x) = \operatorname{sgn}(F_h(|x|) - c_h G_h(|x|)) \tag{3.19}$$ {eq3.

(константа c_h в определении оператора U_h^α как раз и была выбрана так, чтобы (3.19) имело место). Поэтому для функции $\varphi_{h,2}$ с учетом (3.18) получим

$$|D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\, dy. \tag{3.20}$$ {eq3.

Сопоставляя (3.17) и (3.20), видим, что справедлива

Лемма 2. *Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любого $h > 0$ и для любой функции $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$*

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{2-\alpha} \|\Delta f\|_\infty |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)|.$$

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть $0 < \alpha < 2$ и*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{1/\alpha}$$

для $N > 0$. Тогда $\|U_{h_N}^\alpha\| = N$ и

$$\begin{aligned} E_N(D^\alpha, W^{\Delta}_{\infty,\infty}) &\leqslant \sup_{f \in W^{\Delta}_{\infty,\infty}} \|D^\alpha f - U_{h_N}^\alpha f\|_\infty = h_N^{2-\alpha} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)| \\ &= N^{1-2/\alpha} \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \right)^{2/\alpha - 1} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)|. \end{aligned}$$

4. Неравенства типа Колмогорова. Из лемм 1 и 2 для $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$ и $0 < \alpha < 2$ следует, что при любом $h > 0$

$$\begin{aligned}\|D^\alpha f\|_\infty &\leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \\ &\leqslant |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)|\|\Delta f\|_\infty h^{2-\alpha} + \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\|f\|_\infty h^{-\alpha}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

{eq4.

Покажем, что при любом $h > 0$ неравенство (4.1) обращается в равенство для функции $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Для этого, прежде всего, покажем, что функция $D^\alpha \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна при $x = 0$. Для $\delta \in \mathbb{R}^m$ определим множество $\Omega_{h,\delta}$ следующим образом:

$$\Omega_{h,\delta} = B_h \cap \operatorname{supp}(\Delta\varphi_{h,2}(y) - \Delta\varphi_{h,2}(y+\delta)).$$

Ясно, что $\operatorname{mes}\Omega_{h,\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$. Для $\delta \in \mathbb{R}^m$ имеем с учетом (3.19)

$$\begin{aligned}&|(D^\alpha - U_h^\alpha)(\varphi_{h,2}(0) - \varphi_{h,2}(\delta))| \\ &\quad = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left|\int_{B_h}(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))(\Delta\varphi_{h,2}(y) - \Delta\varphi_{h,2}(y+\delta))\,dy\right| \\ &\quad \leqslant \int_{\Omega_{h,\delta}} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\,dy.\end{aligned}$$

Так как последний интеграл стремится к нулю при $\delta \to 0$, функция $(D^\alpha - D_h^\alpha)\varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Ясно также, что функция $U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Следовательно, и $D^\alpha \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Поэтому

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha \varphi_{h,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)|.$$

Учитывая определение функции $\varphi_{h,2}$, производной $D^\alpha \varphi_{h,2}$, оператора U_h^α, а также соотношения (3.19) и (3.16), нетрудно проверить, что $D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0) < 0$ и $U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0) < 0$. Поэтому, используя еще соотношения (3.13) и (3.12), получаем

$$\begin{aligned}\|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty &\geqslant |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| \\ &= h^{2-\alpha}|D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{1,2}(0)| + h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\|\varphi_{h,2}\|_\infty. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

{eq4.

Таким образом, неравенство (4.1) точное, и нами доказана

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любой функции $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$ при каждом $h > 0$ имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{2-\alpha}|D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)| \cdot \|\Delta f\|_\infty + h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \cdot \|f\|_\infty. \qquad (4.3)$$

{eq4.

Неравенство (4.3) обращается в равенство для функции $\varphi_{h,2}$, определенной соотношениями (3.7) и (3.8).

Получим теперь мультипликативное неравенство. Пусть сначала $\|\Delta f\|_\infty = 1$. Выберем h так, чтобы выполнялось

$$\|f\|_\infty = \|\varphi_{h,2}\|_\infty = h^{-2}\|\varphi_{1,2}\|_\infty. \qquad (4.4)$$

{eq4.

Из (4.4) следует, что $h = (\|\varphi_{1,2}\|_\infty / \|f\|_\infty)^{1/2}$. Покажем, что $\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty$. Действительно, с учетом (4.3), (4.4) и (4.2) получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{2-\alpha} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)| + h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \cdot \|\varphi_{h,2}\|_\infty = \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty. \tag{4.5}$$ {eq4.

Отсюда с учетом (3.12) получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{\alpha-2} \|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty,$$

откуда при $h = (\|\varphi_{1,2}\|_\infty / \|f\|_\infty)^{1/2}$, получаем

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \right)^{1-\alpha/2}. \tag{4.6}$$ {eq4.

Если f – произвольная функция из $L^\Delta_{\infty,\infty}$, то применив неравенство (4.6) к функции $f/\|\Delta f\|_\infty$, получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_\infty^{\alpha/2} \|f\|_\infty^{1-\alpha/2}.$$

Очевидно, что последнее неравенство обращается в равенство для любой функции вида $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Таким образом доказана

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любой функции $f \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_\infty^{\alpha/2} \|f\|_\infty^{1-\alpha/2}. \tag{4.7}$$ {eq4.

Неравенство (4.7) обращается в равенство для функций вида $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 для всех $\delta > 0$,*

$$\Omega(\delta, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \cdot \delta^{1-\alpha/2}. \tag{4.8}$$ {eq4.

5. Наилучшее приближение оператора D^α ограниченными и оптимальное восстановление этого оператора по неточно заданной информации на классе $W^\Delta_{\infty,\infty}$. Пусть

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{1/\alpha}$$

для $N > 0$. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что выполняется условие (2.5) теоремы A с оператором $D^\alpha_{h_N}$ и функцией $\varphi_{h,2}$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $N>0$ *и* $0<\alpha<2$. *Тогда*

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = h_N^{2-\alpha}|D^\alpha\varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha\varphi_{1,2}(0)|$$
$$= \left(\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N}\right)^{2/\alpha-1}|D^\alpha\varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha\varphi_{1,2}(0)|.$$

При этом оператор

$$U^\alpha_{h_N}f(x) = D^\alpha_{h_N}f(x) - \frac{2c_{h_N}\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x) - \widetilde{f}(x,h_N)), \qquad h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N}\right)^{1/\alpha}, \quad (5.1)$$ {eq5.

является экстремальным оператором.

Теперь, пользуясь теоремой B, можем получить значение величины оптимальной погрешности восстановления оператора D^α с помощью множества отображений $\mathscr{L}(C,C)$ и $\mathscr{O}(C,C)$ на элементах класса $W^\Delta_{\infty,\infty}$, заданных с погрешностью δ. Выберем h из условия

$$\|\varphi_{h,2}\|_\infty = \delta,$$

т.е. положим

$$h = \left(\frac{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Отметим, что функция $\varphi_{h,2}\in W^\Delta_{\infty,\infty}$. Для этой функции и оператора U_h^α, как уже отмечалось, выполнено условие (2.5) теоремы A, и, следовательно, в силу теоремы B

$$\mathscr{E}_\delta(\mathscr{O}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = \mathscr{E}_\delta(\mathscr{L}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = \|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = \Omega(\delta, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть* $N>0$ *и* $0<\alpha<2$. *Тогда для всех* $\delta>0$

$$\mathscr{E}_\delta(\mathscr{O}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = \mathscr{E}_\delta(\mathscr{L}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,\infty}) = \frac{\|D^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}}\cdot\delta^{1-\alpha/2}.$$

При этом оператор (5.1) *является экстремальным оператором.*

6. Задача Колмогорова. Неравенства для норм промежуточных производных тесно связаны также с задачей Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, для которой данные числа являются точными гранями модулей ее производных соответствующих порядков [28], [29]. Некоторые известные результаты в этом направлении изложены, например, в [4]. Мы рассмотрим задачу Колмогорова в следующей постановке. Пусть числа M_0, M_α, M_Δ заданы. Требуется найти необходимое и достаточное условия для существования функции $f\in L^\Delta_{\infty,\infty}$ такой, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta.$$

Решение этой задачи дает следующая

Теорема 5. *Пусть* $0 < \alpha < 2$ *и* M_0, M_α, M_Δ *– положительные числа. Для существования функции* $f \in L^{\Delta}_{\infty,\infty}$ *такой, что*

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$M_\alpha \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} M_0^{1-\alpha/2} M_\Delta^{\alpha/2}. \tag{6.1}$$

{eq6.

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы 2. Докажем *достаточность*. Не уменьшая общности, можно считать, что $M_\Delta = 1$. Так как выполнено условие (6.1), найдется $0 < L_0 < M_0$ такое, что

$$M_\alpha = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} L_0^{1-\alpha/2}.$$

Пусть h_0 выбрано из условия $\|\varphi_{h_0,2}\|_\infty = L_0$, т.е. с учетом (3.11) и (3.10)

$$h_0 = \left(\frac{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{L_0}\right)^{1/2}.$$

Тогда в силу теоремы 2

$$\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} L_0^{1-\alpha/2},$$

откуда получаем $\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = M_\alpha$. В качестве искомой функции f возьмем $f = \varphi_{h_0,2} + M_0 - L_0$. Ясно, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta = 1.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 11, 42–68.

[2] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51**:6 (1996), 89–124.

[3] В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев, “Неравенства для производных”: А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 387–390.

[4] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.

[5] M. K. Kwong, A. Zettl, *Norm Inequalities for Derivatives and Differences*, Lecture Notes in Math., **1536**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Math. Appl. (East European Ser.), **53**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

[7] В. Н. Коновалов, "Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных", *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 67–78.

[8] А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, "О неравенствах для производных в многомерном случае", *Матем. заметки*, **25**:1 (1979), 59–73.

[9] О. А. Тимошин, "Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков", *Докл. РАН*, **344**:1 (1995), 20–22.

[10] В. Г. Тимофеев, "Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных", *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 676–689.

[11] V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, "Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications", *Multivariate Approximation and Splines*, eds. G. Nërberger, J. W. Schmidt, G. Walz, Birkhäuser, Basel, 1997, 1–12.

[12] В. Ф. Бабенко, "О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных", *Доп. НАН України*, 2005, № 5, 7–11.

[13] V. F. Babenko, S. A. Pichugov, "Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables", *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 321–329.

[14] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

[15] С. П. Гейсберг, "Обобщение неравенства Адамара", Сб. научн. тр. ЛОМИ, **50**, ЛОМИ, Л., 1965, 42–54.

[16] V. V. Arestov, "Inequalities for fractional derivatives on the half-line", *Approximation Theory*, Banach Center Publ., **4**, PWN, Warsaw, 1979, 19–34.

[17] G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov, "On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line", *Anal. Math.*, **7**:1 (1981), 37–47.

[18] В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова, "О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка", *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, 2001, № 6, 16–20.

[19] В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, "Точные оценки норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условиям Гёльдера", *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 26–34.

[20] V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov, "Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions", *Укр. матем. журн.*, **62**:3 (2010), 301–314.

[21] В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова, *Теория аппроксимации и гармонический анализ*, Наукова думка, Киев, 2012.

[22] V. F. Babenko, M. S. Churilova, "Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic", *Banach J. Math. Anal.*, **1**:1 (2007), 66–77.

[23] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, "Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения", Тр. ИММ УрО РАН, **17**, 2011, 60–70.

[24] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, "Неравества типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения", *Укр. матем. вiсник*, **9**:2 (2012), 157–174.

[25] С. Б. Стечкин, "Наилучшее приближение линейных операторов", *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.

[26] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

[27] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.

[28] А. Н. Колмогоров, "О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции", Уч. записки Моск. гос. ун-та, **30**, Математика, кн. 3, Изд-во Моск. ун-та, М., 1939, 3–16.

[29] А. Н. Колмогоров, "О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале", *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 252–263.

В. Ф. Бабенко
Днепропетровский национальный университет
E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Н. В. Парфинович
Днепропетровский национальный университет
E-mail: nparfinovich@yandex.ru

С. А. Пичугов
Днепропетровский национальный университет,
Днепропетровский национальный технический
университет железнодорожного транспорта

Поступило
10.07.2011
Исправленный вариант
21.07.2013