

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Фізика та прикладна
математика»

В авторській редакції

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ «Теорія ймовірностей. Випадкові величини»

Навчально-методичні рекомендації до виконання самостійних робіт для
студентів всіх спеціальностей

Електронне видання

ДНПРО

2026

УДК 519.21 (076.1)

В 95

Упорядник:

О. О. Левкович, канд. фіз.-мат. наук,

Т. Є. Романенко, ст.викладач

Електронне видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
133 «Експлуатація та ремонт техніки Держспецтрансслужби»

Протокол № 2 від 16.04.2026 р.

В 95 Вища математика. Розділ «Теорія ймовірностей. Випадкові величини». Навчально-методичні рекомендації до виконання самостійних робіт для студентів всіх спеціальностей / уклад. О. О. Левкович, Т. Є. Романенко ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2026. – 35 с.

У методичних вказівках наведені приклади для самостійної підготовки до модульного контролю для студентів, що вивчають вищу математику розділ «Теорія ймовірностей» на усіх спеціальностях. Теоретичні відомості, а також ряд докладних розробок типових прикладів, зразки контрольних робіт, тести для перевірки залишкових знань студентів.

Для студентів ступеня бакалавра всіх спеціальностей денної та заочної форми навчання.

Бібліогр.: 3 наз.

© Левкович О. О. та ін., упорядкування, 2026

© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ	6
1.1. Дискретні і неперервні випадкові величини	6
1.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини	6
1.3. Загальні властивості функції розподілу	8
1.4. Неперервні випадкові величини	8
1.5. Щільність розподілу	9
1.6. Властивості щільності розподілу	10
2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	10
2.1. Математичне сподівання	10
2.2. Властивості математичного сподівання	12
2.3. Дисперсія випадкової величини	12
2.4. Властивості дисперсії	13
2.5. Середнє квадратичне відхилення	13
3. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	14
3.1. Біномний розподіл	14
3.2. Розподіл Пуассона	14
3.3. Геометричний розподіл	15
3.4. Гіпергеометричний розподіл	15
3.5. Рівномірний розподіл	16
3.6. Показниковий розподіл	16
3.7. Нормальний розподіл	17
3.8. Нормальна крива	18
4. ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЇ ДВОВИМІРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.....	19
4.1. Функція розподілу щільності.....	19

4.2. Геометричне тлумачення функції розподілу	
двовимірної випадкової величини.....	20
4.3. Властивості функцій розподілу	20
4.4. Ймовірність попадання випадкової величини в півсмугу	21
4.5. Ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник	21
4.6. Імовірнісний зміст двовимірної щільності ймовірності	22
4.7. Умовні закони розподілу складових системи	
дискретних випадкових величин	23
4.8. Умовні закони розподілу складових системи	
безперервних випадкових величин	23
4.9. Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини Y	24
4.10. Залежні та незалежні випадкові величини	24
4.11. Числові характеристики системи двох випадкових величин.	
Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції.....	24
4.12. Приклади розв'язування задач	26
4.13. Семестрове завдання	29
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	34

ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Вища математика» є: забезпечення студентів базовими знаннями сучасної математики, формування фундаментальної основи для успішного оволодіння ними профільними дисциплінами проєктувальних та технічних спеціальностей університету та досягнення компетентностей, зазначених в освітньо-професійній програмі.

Навчально-методичні рекомендації відповідають робочій програмі навчальної дисципліни «Вища математика» та сприяють досягненню очікуваних результатів навчання (ОРН 2, ОРН 3, ОРН 5, ОРН 7, ОРН 8), які пов'язано з умінням вирішувати типові задачі з теорії ймовірностей, розпізнавати типові задачі, або зводити задачі до типових. Вміти за змістом завдання зрозуміти, матеріал якого розділу математики треба використовувати і які відомі методи потрібно застосувати для розв'язання задач механічної інженерії. Інтегрувати знання з різних розділів математики при розв'язанні складних практичних проблем в сфері механічної інженерії, зокрема під час розрахунку задач в галузі машинобудування. Застосувати математичні методи з використанням сучасних інформаційних технологій для вирішення інженерних задач при проєктуванні та реалізації технологічних процесів, зокрема в галузі машинобудування, під час експлуатації та ремонту спецтехніки.

Запропоноване видання сприяє досягненню очікуваних результатів навчання шляхом забезпечення формування у здобувачів вищої освіти відповідних знань та навичок під час виконання самостійних робіт, у т.ч. засвоєння необхідних теоретичних відомостей, проведення самоконтролю відповідно до наведених у виданні контрольних запитань та електронних підручників та посібників, які перебувають у вільному доступі й не потребують оплати.

Матеріал, який наведено у виданні є достатнім для досягнення очікуваних результатів навчання, відповідає сучасним науковим концепціям та підготовлений із дотриманням принципів академічної доброчесності.

Велику роль у вивченні математики грає розділ «Теорія ймовірностей. Випадкові величини».

1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою називають величину, що у результаті випробувань приймає одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме і яке залежить від випадкових причин, що заздалегідь не можуть бути враховані.

Будемо далі позначати випадкові величини прописними буквами X, Y, Z , а їхні можливі значення – відповідними малими літерами x, y, z . Наприклад, якщо випадкова величина X має три можливих значення, то вони будуть позначатися так: x_1, x_2, x_3 . [1]

1.1. Дискретні і неперервні випадкові величини

Дискретною (перервною) називається випадкова величина, що приймає окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями.

Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним. Ці значення можуть бути перераховані, перенумеровані одне за іншим.

Неперервною називається випадкова величина, що може приймати всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку. Число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченно. [2].

1.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Розглянемо дискретну випадкову величину X з можливими значеннями x_1, x_2, \dots, x_n . У результаті випробування величина X прийме одне з цих значень, тобто відбудеться одне з повної групи несумісних подій $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$.

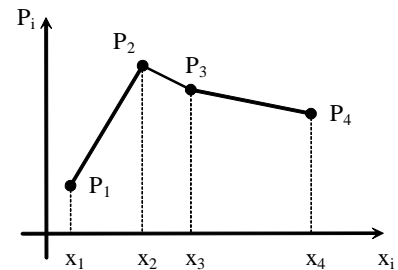
Позначимо ймовірності цих подій буквами p із відповідними індексами: $P(X = x_1) = p_1, \dots, P(X = x_n) = p_n$. Так як несумісні події утворюють повну групу,

то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Законом розподілу випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Встановимо форму, у якій може бути заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X . Простішою формою є таблиця, у якій наведені можливі значення випадкової величини і відповідні їм імовірності:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (1.1)$$



Таку таблицю будемо називати **рядом розподілу дискретної випадкової величини**.

Щоб додати ряду розподілу більш наочний вигляд часто надають до нього графічне зображення: по осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини, а по осі ординат – імовірності цих значень. Для наочності отримані точки з'єднуються відрізками прямих. Така фігура називається **многокутником розподілу**.

Функцією розподілу називається функція $F(x)$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення, менше за x , тобто $F(x) = P(X < x)$. Геометрично цю рівність можна тлумачити так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке зображується на числовій осі точкою, що лежить ліворуч від точки x .

Функцію розподілу $F(x)$ іноді називають також **інтегральною функцією розподілу**.

Функція розподілу – універсальна характеристика як для неперервної, так і для дискретної випадкової величини. Функція розподілу цілком характеризує випадкову величину з ймовірносної точки зору, тобто є однією з форм закону розподілу.

1.3. Загальні властивості функції розподілу

- 1) Значення функції розподілу належать відрізку $[0;1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2) Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією свого аргументу, тобто при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.
 - 1) X прийме значення менше x_1 з імовірністю $P(X < x_1)$,
 - 2) X прийме значення, що задовольняє нерівності $x_1 \leq X \leq x_2$, з імовірністю $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
- 3) На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює 0: $F(-\infty) = 0$.
- 4) На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює 1: $F(+\infty) = 1$.

1.4. Неперервні випадкові величини

Розглянемо випадкову величину X , можливі значення якої суцільно заповнюють інтервал (a, b) . Для неперервної випадкової величини зручно користуватися функцією розподілу випадкової величини X .

При розв'язанні практичних задач, пов'язаних із випадковими величинами, часто виникає потреба обчислювати ймовірність того, що значення випадкової величини лежать між a і b . Цю подію ми будемо називати «попаданням випадкової величини X на інтервал від a до b ».

Умовимося для визначеності лівий кінець a включати в інтервал (a, b) , а правий – не включати. Тоді попадання випадкової величини X на інтервал (a,b) рівносильно виконанню нерівності $a \leq X < b$.

$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, тобто **ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал** дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме одне певне значення, дорівнює 0: $P(X=a)=0$.

Використовуючи це положення, легко переконатися в вірності рівності:

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Відзначимо таку **властивість функції розподілу** неперервної випадкової величини: якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b) , то

$$1) F(x)=0 \text{ при } x \leq a ;$$

$$2) F(x)=1 \text{ при } x \geq b .$$

Наслідок. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини розташовані на всій числовій осі OX , то справедливі граничні співвідношення:

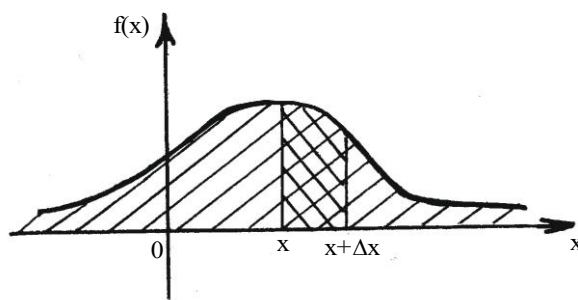
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 .$$

1.5. Щільність розподілу

Нехай маємо неперервну випадкову величину X з функцією розподілу $F(x)$, що є неперервною і диференційовною. Введемо позначення $f(x) = F'(x)$.

Функція $f(x)$ – похідна функції розподілу – характеризує **щільність**, із якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці. **Ця функція називається щільністю розподілу** (інакше – «щільністю ймовірності») неперервної випадкової величини. Іноді функцію $f(x)$ називають також диференціальною функцією розподілу величини X .

Крива, що зображує щільність розподілу випадкової величини, називається **кривою розподілу**. [3]



Щільність розподілу, так само як і функція розподілу, є однією із форм закону розподілу. На відміну від функції розподілу ця форма не є універсальною: вона існує тільки для неперервної випадкової величини.

Висловимо ймовірність попадання величини X на відрізок від a до b через щільність розподілу. Очевидно, вона дорівнює сумі елементів імовірностей на цьому інтервалі, тобто інтегралу:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (1.2)$$

1.6. Властивості щільності розподілу

1) Щільність розподілу є невід'ємна функція: $f(x) \geq 0$.

Доведення. Функція розподілу – неспадна функція; отже, її похідна $F'(x) = f(x)$ – функція невід'ємна. Геометрично це означає, що точки кривої розподілу розташовані або над віссю OX, або на ній.

2) Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$

дорівнює 1:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

В багатьох питаннях практики немає необхідності характеризувати випадкову величину цілком. Найчастіше буває достатньо зазначити тільки окремі числові параметри, що характеризують розподіл випадкової величини: наприклад, середнє значення, біля якого групуються можливі значення випадкової величини; число, що характеризує ступінь розкиданості цих значень щодо середнього і т.і. Такі характеристики, призначення яких – висловити в стисnutій формі найбільше істотні особливості розподілу, називаються **числовими характеристиками** випадкових величин.

Серед числових характеристик випадкової величини потрібно насамперед відзначити ті, що характеризують положення випадкової величини на числовій осі, тобто вказують деяке середнє, біля якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

2.1. Математичне сподівання

Нехай дано дискретну випадкову величину X , що має можливі значення x_1, x_2, \dots, x_n з імовірностями p_1, p_2, \dots, p_n .

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (2.1)$$

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, називається визначений інтеграл:

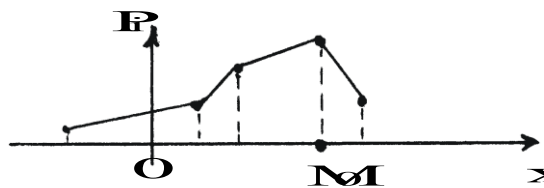
$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (2.2)$$

У механічній інтепретації математичне сподівання неперервної випадкової величини зберігає той самий зміст – абсциси центру ваги у випадку, коли маса розподілена по осі OX неперервно з щільністю $f(x)$.

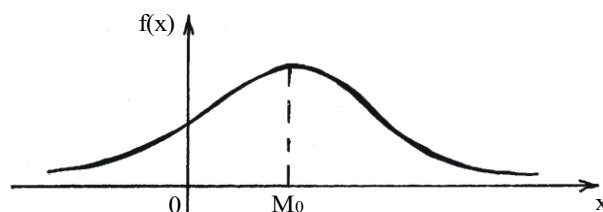
Крім найважливішої з характеристик положення – математичного сподівання на практиці іноді застосовуються й інші, зокрема, мода і медіана.

Модою випадкової величини називається її значення, що має найбільшу ймовірність.

Для дискретної випадкової величини



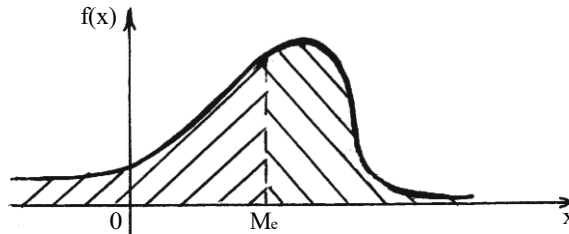
Для неперервної випадкової величини модою є те значення, у якому щільність ймовірності максимальна.



Мода і математичне сподівання, узагалі говорячи, не збігаються.

Медианою випадкової величини X називається таке її значення Me , для якого $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Геометрично медіана – це абсциса точки, у якій площа, обмежена кривою розподілю, ділиться навпіл.



2.2. Властивості математичного сподівання

Властивість 1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій: $M(C)=C$.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX)=CM(X)$.

Властивість 3. Математичне сподівання добутку двох незалежних величин дорівнює добутку математичних сподівань співмножників:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) \quad (2.3)$$

Наслідок. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань.

Властивість 4. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Наслідок. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$M(X + Y + Z) = M((X + Y) + Z) = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z) \quad (2.4)$$

2.3. Дисперсія випадкової величини

Дисперсією дискретної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилень можливих значень випадкової величини від її математичного сподівання: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Знаходження дисперсії по визначенню часто призводить до громіздких обчислень. Наведемо формулу більш зручну для обчислень:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (2.5)$$

2.4. Властивості дисперсії

Властивість 1. Дисперсія сталої величини дорівнює 0: $D(C)=0$.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії у другому степені: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.

Властивість 3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Наслідок 1. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

Наслідок 2. Дисперсія суми сталої величини і випадкової величини дорівнює дисперсії випадкової величини: $D(C+X)=D(X)$.

Властивість 4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

2.5. Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається квадратний корінь із дисперсії: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Звернемося тепер до неперервної випадкової величини. Дисперсією неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата її відхилення:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x) dx \quad (2.6)$$

Якщо можливі значення випадкової величини належать $[a;b]$, то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 \cdot f(x) dx \quad (2.7)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Легко одержати для обчислення дисперсії більш зручні формули:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(X); \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X) \quad (2.8)$$

3. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Біномний розподіл

Біномним називають розподіл ймовірностей, обумовлений формулою Бернуллі.

X	n	$n-1$	\dots	k	\dots	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	\dots	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	\dots	q^n

(3.1)

Біномний розподіл залежить від двох параметрів p і n . Математичне сподівання біномного розподілу з параметрами n і p дорівнює добутку np : $M(X) = np$.

Дисперсія біномного розподілу з параметрами n і p дорівнює добутку npq : $D(X) = npq$.

3.2. Розподіл Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad (3.2)$$

де $\lambda = np$

Ця формула виражає закон розподілу Пуассона ймовірностей масових (n велике) і рідкісних (p – мале) подій. Величина λ називається параметром закону Пуассона. Ряд розподілу випадкової величини X , розподіленої за законом Пуассона, має вигляд:

X	0	1	2	\dots	k
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	\dots	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(3.3)

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню.

3.3. Геометричний розподіл

Позначимо через X дискретну випадкову величину – число випробувань, що потрібно провести до першої появи події A . Очевидно, можливими значеннями X є натуральні числа: $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots$:

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p \quad (3.4)$$

Вважаючи в цій формулі $k=1, 2, \dots$, одержимо геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q ($0 < q < 1$): $p, pq, pq^2, \dots, pq^{k-1}, \dots$. З цієї причини розподіл називають **геометричним**. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}$ збігається і його сума дорівнює: $S = \frac{p}{(1-q)} = \frac{p}{p} = 1$.

3.4. Гіпергеометричний розподіл

Нехай у партії з N виробів M стандартних ($M < N$). З партії відбирають випадково n виробів (кожний виріб може бути витягнутий з однаковою ймовірністю), причому відібраний виріб, перед витягуванням другого, не повертається в партію (тому формула Бернуллі тут не може бути застосована).

Позначимо через X випадкову величину – число m стандартних виробів серед n відібраних. Очевидно, можливі значення X такі: $0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$.

Знайдемо ймовірність того, що $X = m$, тобто що серед n відібраних виробів рівно m стандартних. Використовуємо для цього класичне визначення ймовірності.

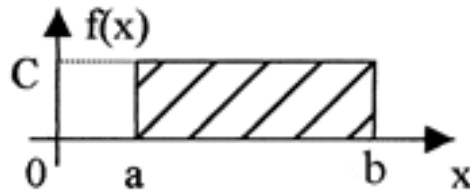
Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа подій, що сприяють події $X = m$, до числа всіх елементарних подій:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (3.5)$$

Формула визначає розподіл ймовірностей, що називається **гіпергеометричним**.

3.5. Рівномірний розподіл

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{при } a < x \leq b, \\ 0, & \text{при } x \leq a \text{ и } x > b \end{cases}$$

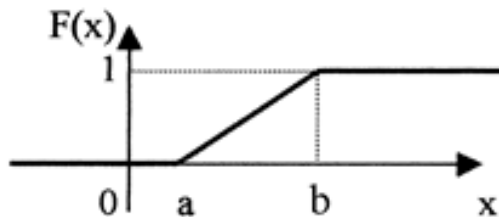


Тому що площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює 1, то $C \cdot (b - a) = 1$, відкіля $C = \frac{1}{b - a}$ і тому щільність розподілу має вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{при } a < x \leq b \\ 0, & \text{при } x \leq a \text{ и } x > b \end{cases} \quad (3.6)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{при } a < x \leq b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases} \quad (3.7)$$

Графік функції розподілу має вид:



Очевидно, вона дорівнює $P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, тобто відношення довжини відрізка $[\alpha, \beta]$ до всієї довжини інтервала $[a, b]$, на якому заданий рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл мають помилки грубих вимірів, коли обмірюване значення округляється до найближчого цілого (або до найближчого меншого, або до найближчого більшого).

3.6. Показниковий розподіл

Показниковим (експоненціальним) називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , що описується щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

де λ – стала додатня величина.

$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda$, тобто математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення показникового розподілу рівні між собою.

3.7. Нормальний розподіл

Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, що описується щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.9)$$

Ми бачимо, що нормальний розподіл визначається двома параметрами: a і σ . Достатньо знати ці параметри, щоб задати нормальний розподіл.

$M(X) = a$, тобто математичне сподівання нормального розподілу дорівнює параметру a . $D(X) = \sigma^2$, тоді середнє квадратичне відхилення нормального розподілу дорівнює параметру σ : $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma$

Зробимо декілька зауважень.

Зауваження 1 Загальним називають нормальний розподіл із довільними параметрами a і σ .

Нормованим називається нормальний розподіл із параметрами $a=0$ і $\sigma=1$. **Зауваження 2.** Функція нормованого розподілу $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ табульована. Легко перевірити, що $F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Зауваження 3. Ймовірність попадання нормованої нормальної величини X в інтервал $(0, x)$ можна знайти, використовуючи функцію Лапласа,

$$P(0 < X < x) = \int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

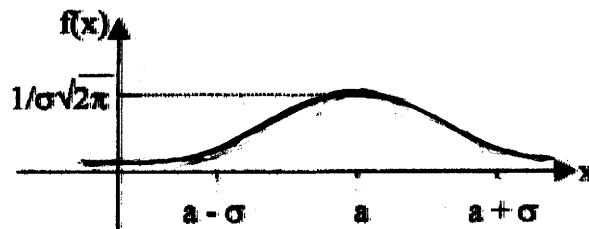
Зауваження 4. З огляду на те, що $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dx = 1$ і, отже, у силу симетрії $\varphi(x)$

відносно точки 0 $\int_{-\infty}^0 \varphi(t) dx = 0,5$, а значить і $P(-\infty < X < 0) = 0,5$.

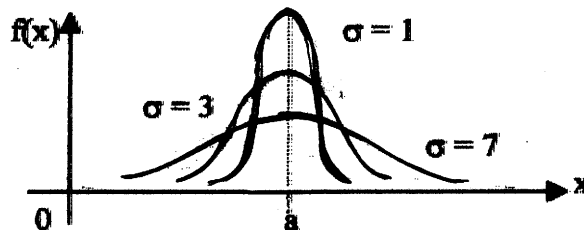
Тоді $F_0(x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x) = 0,5 + \Phi(x)$.

3.8. Нормальна крива

Графік щільності нормального розподілу називається **нормальною кривою** (кривою Гаусса).



Вплив параметрів нормального розподілу на форму нормальної кривої



При будь-яких значеннях параметрів a і σ площа, обмежена нормальною кривою і віссю x , залишається рівною 1. При $a = 0$, $\sigma = 1$ нормальну криву

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ називають нормованою.

4. ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЇ ДВОВИМІРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Функція розподілу щільності

Двовимірна випадкова величина позначається у вигляді (X, Y) , вона характеризується двома параметрами і є системою двох одномірних випадкових величин. Аналогічно задається тривимірна випадкова величина (X, Y, Z) як система трьох одновимірних випадкових величин. І n -мірна випадкова величина (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Законом розподілу дискретної випадкової величини (X, Y) називається відповідність між можливими значеннями, які може приймати ця випадкова величина і ймовірностями, з якими вона може їх приймати: (x_i, y_j) ; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ и $P(x_i, y_j)$.

$Y \backslash X$	x_1	...	x_i	...	x_n
y_1	$P(x_1, y_1)$...	$P(x_i, y_1)$...	$P(x_n, y_1)$
\vdots
y_j	$P(x_1, y_j)$...	$P(x_i, y_j)$...	$P(x_n, y_j)$
\vdots
y_m	$P(x_1, y_m)$...	$P(x_i, y_m)$...	$P(x_n, y_m)$

Сума ймовірностей усіх величин дорівнює одиниці.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P(x_i, y_j) = 1 \quad (4.1)$$

Події $(X=x_1; Y=y_1) \dots (X=x_1; Y=y_j) \dots (X=x_1; Y=y_m)$ є несумісними, а ймовірність суми таких подій дорівнює сумі таких ймовірностей:

$$P(X = x_1) = \sum_{j=1}^m P(x_1, y_j). \quad (4.2)$$

Аналогічно знаходяться ймовірності того, що випадкова величина Y приймає значення y_j :

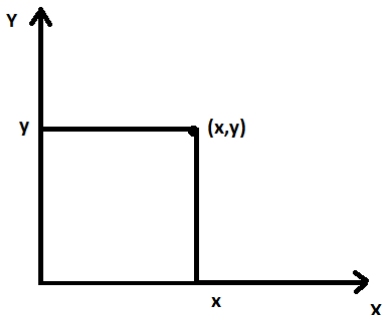
$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n P(x_i, y_j), \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.3)$$

Розглянемо безперервну випадкову величину (X, Y) . Нехай (x, y) – пара дійсних чисел. Будемо розглядати ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення менше x , а Y – менше y : $P(X < x, Y < y)$. Функцією розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини називають імовірність того, що випадкова величина X менше x , а Y менше y .

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (4.4)$$

Де x, y – довільна пара дійсних чисел.

4.2. Геометричне тлумачення функції розподілу двовимірної випадкової величини



Це ймовірність того, що випадкова величина (X, Y) потрапляє в нескінченний квадрат з вершиною в точці (x, y) , причому цей квадрат розташований лівіше і нижче цієї точки.

4.3. Властивості функцій розподілу

1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

2) Функція розподілу не спадна по кожному аргументу.

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y); \quad x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1); \quad y_2 > y_1;$$

3) $F(-\infty; -\infty) = 0$;

$$F(-\infty; y) = 0;$$

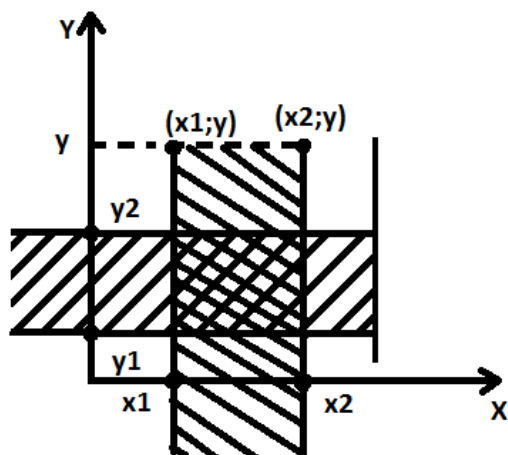
$$F(x; -\infty) = 0;$$

$$F(\infty; \infty) = 1;$$

4) $F(x; \infty) = F_1(x)$ при $y = \infty$ функція розподілу двовимірної випадкової величини стає функцією розподілу X .

$$F(\infty; y) = F_2(y).$$

4.4. Ймовірність попадання випадкової величини в півсмугу



$$x_1 < X < x_2; Y = y;$$

$$F(x_2, y) = P(X < x_2, Y < y);$$

$$F(x_1, y) = P(X < x_1, Y < y);$$

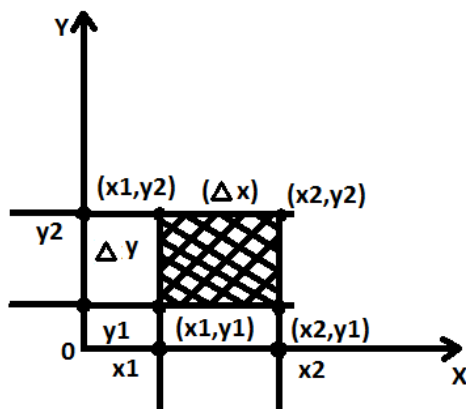
$$P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y). \quad (4.1)$$

Аналогічно знайдемо ймовірність попадання випадкової величини (X, Y) в

інтервал $[y_1, y_2]$.

$$P(X < x, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

4.5. Ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник



$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \quad (4.2)$$

Крім функції розподілу безперервна випадкова величина (X, Y) характеризується і щільністю розподілу $F(x, y)$, яка знаходиться за формулою:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y};$$

– геометрично цю функцію можна розтлумачити як

поверхневий розподіл.

За щільністю розподілу можна знайти функцію розподілу:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy. \quad (4.3)$$

4.6. Імовірнісний зміст двовимірної щільності ймовірності

Скористаємося формулою (6), причому візьмемо такі значення:

$$x_2 = x_1 + \Delta x; y_2 = y_1 + \Delta y; x = x_1, y = y_1.$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x_1 \leq X < x_1 + \Delta x, y_1 \leq Y < y_1 + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = f(x, y) \quad (4.4)$$

Властивості двовимірної щільності

1) Щільність невід'ємна: $f(x, y) \geq 0$;

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

Якщо задана двовимірна щільність $f(x, y)$, то можна знайти щільність випадкової величини X та Y :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy; \quad (4.5)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (4.6)$$

4.7. Умовні закони розподілу складових системи дискретних випадкових величин

Імовірність $P(A \cdot B) = P(A) P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} - \text{Якщо події } A \text{ та } B \text{ залежні.} \quad (4.7)$$

Будемо розглядати умову ймовірності $P(x_i / y_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Умовним розподілом складової X називається сукупність ймовірностей: $P(x_1 / y_j), \dots, P(x_n / y_j)$, $j = \overline{1, m}$. В загальному випадку умовні ймовірності обчислюються за формулою:

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}. \quad (4.8)$$

Аналогічно умовні ймовірності складової Y обчислюються за формулою:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}. \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i / y_j) = \sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) = 1. \quad (4.10)$$

4.8. Умовні закони розподілу складових системи безперервних випадкових величин

Нехай задана система безперервних випадкових величин. Умовна щільність складової X обчислюється за формулою:

$$\varphi(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (4.11)$$

Аналогічно знаходиться умовна щільність складової Y :

$$\psi(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}; \quad (4.12)$$

$$f(x, y) = \varphi(x / y) \cdot f_2(y);$$

$$f(x, y) = \psi(y / x) \cdot f_1(x).$$

Умовні щільності підпорядковуються наступним формулам:

$$\varphi(x / y) \geq 0; \quad \psi(y / x) \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x / y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y / x) dy = 1. \quad (4.13)$$

4.9. Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини Y

Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини Y , за умови, що $X = x$ обчислюється за формулою:

$$M(Y / X = x) = \sum_{j=1}^m y_j \cdot p(y_j / x). \quad (4.14)$$

Для безперервного розподілу умовної випадкової величини математичне сподівання записується у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \psi(y / x) dy = M(Y / X = x). \quad (4.15)$$

Математичне сподівання – це функція від x , $M(Y / X = x) = f(x)$, яку називають функцією регресії Y на X .

4.10. Залежні та незалежні випадкові величини

Теорема: Для того щоб дві випадкові величини X , Y були незалежні необхідно і достатньо виконання рівності:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (4.16)$$

Наслідок: Для незалежності випадкових величин X , Y необхідно і достатньо виконання наступного рівності:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (4.17)$$

4.11. Числові характеристики системи двох випадкових величин.

Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції

Кореляційний момент величин X , Y – це математичне сподівання добутку відхилень цих величин:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(x)) \cdot (Y - M(y))] \quad (4.18)$$

Для дискретного розподілу кореляційний момент обчислюється за формулою:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot P(x_i \cdot y_j) \quad (4.19)$$

Для безперервної випадкової величини:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X)) \cdot (y - M(Y)) \cdot f(x, y) dx dy \quad (4.20)$$

Кореляційний момент служить для визначення зв'язку між величинами X і Y , він буде рівним нулю, якщо величини незалежні і не дорівнює нулю, якщо залежні.

Введемо центровані випадкові величини. $\dot{X} = X - M(X)$, $\dot{Y} = Y - M(Y)$.

$$\mu_{xy} = M(\dot{X} \cdot \dot{Y}) \quad (4.21)$$

Має місце рівність: $\mu_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$. (4.22)

Теорема: Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин дорівнює нулю (доводиться з формули 22). Кореляційний момент – це коефіцієнт коваріації.

Для того щоб визначити зв'язок безрозмірних величин вводять коефіцієнт кореляції, який вираховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4.23)$$

Якщо $\mu_{xy} = 0$, то і $r_{xy} = 0$, тобто коефіцієнт кореляції визначає зв'язок між величинами.

4.12. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Нехай задана система випадкових величин у вигляді таблиці.

$X \backslash Y$		1	2	3
	1	1/18	1/12	1/36
	2	1/9	1/6	1/18
	3	1/6	1/4	1/12

Знайти: математичне сподівання X , Y , $n=3$, $m=3$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij};$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij};$$

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3};$$

$$M(Y) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}.$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Складемо безумовний закон розподілу для складової X .

$$p_1 = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$p_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3};$$

$$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

X	1	2	3
P	1/6	1/3	1/2

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3};$$

Складемо безумовний закон розподілу для складової Y .

$$p_1 = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3};$$

$$p_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};$$

$$p_3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Y	1	2	3
P	1/3	1/2	1/6

$$M(Y) = \sum_{j=1}^m y_j p_j = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}.$$

По таблиці знайти дисперсію.

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} \cdot (X_i - M(X))^2;$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} \cdot (Y_j - M(Y))^2.$$

$$D(X) = \frac{1}{18} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{36} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{18} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9};$$

$$D(Y) = \frac{1}{18} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

Приклад 2. знайти коефіцієнт коваріації та кореляції системи випадкових величин X, Y розподілених як в першому прикладі.

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot P(x_i \cdot y_j)$$

$$\begin{aligned} \mu_{xy} = & \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{9} + \\ & + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{12} = 0; \end{aligned}$$

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0}{(\sqrt{5}/3) \cdot (\sqrt{17}/6)} = 0 \text{ – Незалежна випадкова величина, якщо}$$

$$\mu_{xy} = 0.$$

Приклад 3. Дискретна двовимірна випадкова величина задана таблицею.

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Знайти умовний закон розподілу складової X за умови, що складова Y прийняла значення y_1 .

Шуканий закон визначається сукупністю наступних умовних ймовірностей $P(x_1 / y_1)$, $P(x_2 / y_1)$, $P(x_3 / y_1)$.

Скориставшись формулою (11) і прийнявши до уваги, що $P(y_1) = 0,60$, маємо:

$$P(x_1 / y_1) = p(x_1, y_1) / p(y_1) = 0,10 / 0,60 = 1/6;$$

$$P(x_2 / y_1) = p(x_2, y_1) / p(y_1) = 0,30 / 0,60 = 1/2;$$

$$P(x_3 / y_1) = p(x_3, y_1) / p(y_1) = 0,20 / 0,60 = 1/3.$$

Склавши для контролю знайдені умовні ймовірності, переконаємося, що їх сума дорівнює одиниці, як і повинно бути, відповідно до зауваження, зазначеного вище $1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$.

4.13. Семестрове завдання

Задана дискретна двовимірна випадкова величина. Знайти: а) безумовні закони розподілу складових; б) умовний закон розподілу складової X при умові, що $Y = y_1$; в) умовний закон розподілу Y за умови, що $X = x_2$, г) умовне математичне сподівання складової Y при умові, що $X = x_3$;

Y	X		
	X ₁	X ₂	X ₃
Y ₁	P(x ₁ ,y ₁) P(x ₃ ,y ₁)		P(x ₂ ,y ₁)
Y ₂	P(x ₁ ,y ₂) P(x ₃ ,y ₂)		P(x ₂ ,y ₂)

В-1

Y	X		
	2		4
7			
0,3	0,18		0,25
	0,05		
0,8	0,25		0,07
	0,2		

В-2

Y	X		
	3		6
7			
0,5	0,09		0,12
	0,3		
0,9	0,22		0,17
	0,1		

В-3

Y	X		
	3		5
6			
0,4	0,4		0,1
	0,15		
0,9	0,03		0,21
	0,11		

В-4

Y	X		
	3		5
6			
0,3	0,16		0,24
	0,04		
0,5	0,08		0,31
	0,17		

B-5

Y	X	
	3	5
0,2	0,17	0,05
	0,2	
0,5	0,21	0,13
	0,24	

B-6

Y	X	
	2	7
0,5	0,05	0,13
	0,07	
0,9	0,15	0,35
	0,25	

B-7

Y	X	
	2	7
0,6	0,11	0,32
	0,08	
0,8	0,05	0,17
	0,27	

B-8

Y	X	
	2	6
0,4	0,30	0,11
	0,07	
0,7	0,21	0,21
	0,1	

B-9

Y	X	
	5	7
0,1	0,2	0,11
	0,35	
0,6	0,09	0,17
	0,08	

B-10

Y	X	
	1	3
0,2	0,1	0,25
	0,18	
0,6	0,33	0,12
	0,02	

B-11

Y	X	
	2	4
7		
0,4	0,17	0,13
	0,21	
0,7	0,08	0,31
	0,1	

B-12

Y	X	
	1	2
5		
0,3	0,12	0,34
	0,17	
0,8	0,23	0,08
	0,06	

B-13

Y	X	
	2	5
6		
0,3	0,11	0,09
	0,27	
0,9	0,31	0,1
	0,12	

B-14

Y	X	
	3	4
9		
0,6	0,23	0,04
	0,13	
0,9	0,08	0,32
	0,2	

B-15

Y	X	
	1	4
8		
0,3	0,07	0,21
	0,12	
0,8	0,18	0,13
	0,29	

B-16

Y	X	
	2	5
9		
0,7	0,14	0,09
	0,27	
0,1	0,21	0,19
	0,1	

B-17

Y	X	
	1	4
6		
0,2	0,31	0,1
	0,04	
0,5	0,12	0,08
	0,35	

B-18

Y	X	
	1	7
8		
0,3	0,14	0,22
	0,33	
0,8	0,12	0,07
	0,12	

B-19

Y	X	
	3	6
8		
0,4	0,15	0,09
	0,1	
0,7	0,25	0,21
	0,2	

B-20

Y	X	
	2	4
6		
0,4	0,13	0,2
	0,27	
0,6	0,2	0,11
	0,09	

B-21

Y	X	
	2	5
8		
0,6	0,12	0,03
	0,33	
0,9	0,17	0,25
	0,1	

B-22

Y	X	
	3	5
9		
0,2	0,26	0,04
	0,32	
0,5	0,14	0,16
	0,08	

B-23

Y	X	
	3	5
9		
0,4	0,02	0,14
	0,2	
0,8	0,36	0,2
	0,08	

B-24

Y	X	
	3	5
6		
0,1	0,21	0,3
	0,1	
0,9	0,11	0,18
	0,1	

B-25

Y	X	
	2	7
8		
0,2	0,17	0,09
	0,21	
0,5	0,1	0,13
	0,3	

B-26

Y	X	
	1	3
8		
0,1	0,3	0,05
	0,2	
0,6	0,05	0,37
	0,03	

B-27

Y	X	
	2	7
9		
0,4	0,19	0,15
	0,3	
0,7	0,05	0,21
	0,1	

B-28

Y	X	
	2	4
4		
0,2	0,17	0,09
	0,31	
0,5	0,05	0,22
	0,16	

B-29

Y	X	
	1	2
4		
0,3	0,1	0,18
	0,25	
0,6	0,33	0,02
	0,12	

B-30

Y	X	
	2	4
6		
0,2	0,21	0,3
	0,1	
0,8	0,1	0,18
	0,11	

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навч. Посібник, 2020. –424с.

2. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв'язком типових варіантів: навч. посібн. / - К.: Алерта, 2017. - 440 с.

3. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язання задач: Навч. Посібник.- К: Центр учбової літератури, 2017.- 576с.

Навчально-методичне видання

Левкович Ольга Олексіївна,
Романенко Тетяна Євгенівна

Вища математика.

Розділ «Теорія ймовірностей. Випадкові величини».

Навчально-методичні рекомендації до виконання самостійних робіт
для студентів всіх спеціальностей
Електронне видання

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.875 від 26.05.2026)

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка Т. Є. Романенко

АніщенкоФормат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,02. Обл.- вид. арк. 2,05.
Зам. № 57.

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010