

СВЯЗАННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ (идеи, методы и некоторые результаты исследований)

Аркадий Маневич, Сергей Ракша

Днепропетровский Национальный университет,

Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

1. Введение

Исследования связанной потери устойчивости тонкостенных конструкций, в частности, тонкостенных стержней, составляют в настоящее время одно из основных направлений развития теории статической и динамической устойчивости. Интерес к этой проблеме («coupled buckling», «interactive buckling») особенно возрос в 90-е годы. Ей посвящаются специальные международные конференции «Coupled Instabilities in Metal Structures» (Тимишоара, Румыния, 1992 г., Льеж, Бельгия, 1996г., Лиссабон, Португалия, 2000 г.), статьи по связанной неустойчивости составляют значительную часть публикаций по вопросам расчёта тонкостенных конструкций.

Обзоры исследований, выполненных в 60-е - 80-е годы (по состоянию примерно на 1988 г.) можно найти, например, в работах [1-4]. В данной работе кратко рассмотрены основные идеи, подходы к этой проблеме и некоторые результаты исследований применительно к тонкостенным стержням, выполненных в последнее десятилетие. Основное внимание уделяется тем направлениям исследований и результатам, которые связаны с работами авторов данной статьи.

2. Взаимодействие форм потери устойчивости в тонкостенных стержнях и теоретические модели

Основная идея теории связанного выпучивания конструкций, в частности, тонкостенных стержней, состоит в учёте взаимодействия различных форм потери устойчивости - общих (для которых контур поперечного сечения можно считать недеформируемым) и местных (для которых линии контакта отдельных пластин, образующих стержень, остаются неподвижными). Это взаимодействие является существенно нелинейным, поскольку в линейной теории все собственные формы, в частности, общие и местные, независимы (ортогональны). Рассмотрим физическую сторону взаимодействия форм и основные подходы к его учёту при конечных перемещениях.

Влияние предварительного местного выпучивания на общую потерю устойчивости

Тонкостенные стержни с достаточно высоким значением параметра тонкостенности b/t (b - ширина полки или высота стенки, t - толщина) могут терять местную устойчивость при нагрузках, значительно меньших нагрузок общего выпучивания. Однако хорошо известно, что местная потеря устойчивости пластинок, образующих стержень, как правило, не означает исчерпания несущей способности, поскольку их посткритическое поведение является устойчивым (т.е. равновесная ветвь местного прогиба оказывается восходящей). Для определения предельной нагрузки необходимо решить задачу об общей устойчивости стержня, у которого контур поперечного сечения деформирован вследствие местного выпучивания.

Эта задача впервые была поставлена, по-видимому, в работе Р. Р. Bijlaard, G. P. Fischer [5] и позже рассматривалась в работе Т. Р. Graves Smith [6], А. Neut [7] и ряде других работ (см. [1-4]). Один из наиболее простых и очевидных подходов к решению данной задачи - введение «эффективной» (редуцированной) изгибной жёсткости стержня после местного выпучивания. Однако известные эмпирические и полуэмпирические формулы для редуцированных коэффициентов и «эффективной» ширины пластин в данной задаче должны использоваться с известной осторожностью. Впервые, эти формулы получены, как правило, для пластин с определёнными граничными условиями -

с шарнирно опёртыми, защемлёнными или одним свободным краем. У пластин же, составляющих тонкостенный стержень, один или два края упруго закреплены. Во-вторых, редуционные коэффициенты пластин по отношению к изгибу и сжатию, вообще говоря, не совпадают, так как поведение догружаемых и разгружаемых при общем изгибе участков сечения различно: дополнительное сжатие увеличивает местные перемещения, а дополнительное растяжение - уменьшает.

Важно отметить, что указанный подход предполагает, что процесс выпучивания можно разделить на последовательные стадии - местное выпучивание, затем общее выпучивание с исчерпанием несущей способности. Такое предположение оправдано в случае, когда линейные критические напряжения общей и местной потери устойчивости σ_o , σ_{loc} существенно различны ($\sigma_o \gg \sigma_{loc}$). Для таких существенно неравноустойчивых стержней данный подход является, по-видимому, наиболее надёжным, несмотря на отмеченные выше трудности и связанную с ними приближённость решения.

В этой постановке задачи взаимодействие форм оказывается односторонним - местное выпучивание влияет на критическую нагрузку общей потери устойчивости, но обратное влияние общего прогиба на местное выпучивание отсутствует. Таким образом, здесь пока, по существу, не идёт речи о «связанных» формах потери устойчивости, о «связанном» выпучивании.

Влияние общего прогиба на местную устойчивость

В случае внецентренного сжатия стержня проявляется другая сторона взаимодействия форм - общий изгиб, приводя к перераспределению напряжений между элементами сечения, влияет на критические напряжения местной формы. Отметим, что и в случае центрального сжатия стержня с небольшими случайными несовершенствами (используемыми в нормах расчёта устойчивости) также может проявиться этот эффект, если различие между σ_o и σ_{loc} невелико (но $\sigma_o > \sigma_{loc}$).

Влияние общего прогиба на местное выпучивание стержней рассматривалось в ряде работ 70-х годов (А. С. Walker, Б.М. Броуде, В.И. Моисеев и др.). Эти решения позволяют уточнить местную критическую нагрузку. При этом взаимодействие форм снова оказывается односторонним, только теперь уже общий прогиб влияет на местную устойчивость, но не обратно.

Очевидно, что такой расчёт может оказаться недостаточным для расчёта несущей способности в случае большого запаса по общей устойчивости. Тогда местное выпучивание не приведёт к исчерпанию несущей способности, и возникнет необходимость последующего решения задачи в рассмотренной в предыдущем параграфе постановке. По существу, это означает, что рассматриваются две последовательных стадии выпучивания, на каждой из которых учитывается одностороннее влияние форм - вначале влияние общего прогиба на местную устойчивость, затем обратное влияние местного выпучивания на общую устойчивость.

Взаимное влияние общих и местных форм выпучивания

Отдельное рассмотрение влияния разных форм потери устойчивости друг на друга, основанное на предположении о разделении процесса выпучивания на последовательные стадии, не всегда оправдано. Очевидно, что это предположение не будет выполняться при близости критических напряжений для общей и местной форм (характерном для конструкций, близких к оптимальным). Тогда скачкообразное уменьшение жёсткости элементов стержня после местного выпучивания должно привести и к общей потере устойчивости. Экспериментальные и теоретические исследования показали, однако, что не только для равноустойчивых конструкций, а в значительно более широком диапазоне параметров обе стадии процесса выпучивания сливаются в одну.

С одной стороны, ещё в 1970 г. в экспериментальном исследовании устойчивости сжатых стержней коробчатого сечения М. Skaloud и М. Zornegowa [8] установили, что в широком диапазоне параметра гибкости стержня нельзя разделить стадии общего и местного выпучивания. В процессе нагружения развиваются как местные отклонения пластин, так и общий изгиб, взаимно влияющие друг на друга, и при достижении предельной нагрузки форма выпучивания оказывается весьма сложной, «связанной», включающей различные виды перемещений. Такой характер деформации, очевидно, обусловлен наличием у реальных стержней как общих, так и местных несовершенств формы. Интересно отметить, что в то же время, независимо от работы [8], вывод о необходимости

рассмотрения связанных форм выпучивания был сделан на основе экспериментального исследования потери устойчивости подкреплённых оболочек в работе [9] (посланной в печать в 1969 г.).

С другой стороны, в теоретическом исследовании модели стойки коробчатого сечения, состоящей из двух несущих полок, А. Neut [7] показал, что местное выпучивание приводит к катастрофическому прохлопыванию по общей форме, если только нет большого запаса по этой форме, вследствие резкого падения изгибной жёсткости. Диапазон неустойчивости равновесия по общей форме оказался достаточно широким: $1 < \sigma_0 / \sigma_{loc} < 1.725$. Послекритическая ветвь оказывается «связанной» даже для идеальной стойки (начало местного выпучивания приводит к одновременному развитию также общего прогиба с исчерпанием несущей способности).

Важно отметить, что хотя послекритическое поведение для каждой из линейных форм потери устойчивости по отдельности - общей и местной - является устойчивым, связанное выпучивание характеризуется неустойчивым поведением. Для реальной стойки с несовершенствами предельная нагрузка оказывается заметно ниже критических нагрузок как общего, так и местного выпучивания, полученных при расчёте каждой из этих форм отдельно. Очевидно, что тот подход, который был изложен выше для стержней с предварительным местным выпучиванием, в данном случае окажется недостаточным.

Теоретические подходы к описанию связанного выпучивания (в случае, когда нельзя ограничиться односторонним влиянием одной из форм на другую) могут быть различны. Первый путь состоит в расчёте критической нагрузки местного выпучивания (с учётом или без учёта общего изгиба, вызванного начальными несовершенствами или докритической моментностью) и последующем анализе характера полученной точки бифуркации, её устойчивости или неустойчивости (именно таким путём пошёл А. Neut [7]). Если точка местной бифуркации неустойчива, можно ожидать исчерпания несущей способности по типу связанного выпучивания, с высокой чувствительностью к несовершенствам. Для получения оценок предельной нагрузки реальных конструкций необходимо далее исследовать чувствительность к несовершенствам, общим и местным.

Более общий подход основан на асимптотической теории послекритического поведения консервативных систем, разработанной в работах В. Койтера (см., напр., [10]). В работах В. Койтера эта теория была изложена применительно к случаю простого (одномодалного) выпучивания, когда минимальному собственному значению линейной задачи соответствует одна собственная форма. Связанная потеря устойчивости соответствует случаю сложного (многомодалного) выпучивания при кратном минимальном собственном значении (две или более собственных форм отвечают одному собственному значению или близким собственным значениям). Изложение теории начального послекритического поведения применительно к случаю многомодалного выпучивания было дано в работе [11]. Позже в работе [12] В. Budiansky дал изложение этой теории в новой форме, с позиций функционального анализа, для общего случая нелинейного докритического состояния.

Поле перемещений в нелинейной задаче ищется в виде (по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$U \equiv (u, v, w) = \Lambda U_0 + \zeta_i U_i + \zeta_i \zeta_j U_{ij} + \dots \quad (1)$$

где U_0, U_i, U_{ij}, \dots - поля перемещений нулевого, первого, второго и т.д. порядков, ζ_i - «амплитуда» перемещения по i -ой собственной форме выпучивания, нормированной некоторым образом (проекция перемещения на i -ую форму), Λ - параметр нагрузки (в качестве которого можно принять, например, безразмерное среднее продольное напряжение $\sigma^* = (\sigma_x / E) \cdot 10^3$). В разложении (1) U_i - собственные формы, критические напряжения для которых близки к минимальному собственному значению. Поле начальных несовершенств \bar{U} принимается в виде линейной комбинации собственных форм с амплитудами ζ_i^* : $\bar{U} = \zeta_i^* U_i$.

Потенциальная энергия раскладывается в ряд по амплитудам линейных форм потери устойчивости в окрестности точки бифуркации:

$$\Pi = a_0 + \frac{1}{2} \sum_s a_s (1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_s}) \zeta_s^2 + \frac{1}{3} a_{ijk} \zeta_i \zeta_j \zeta_k + \frac{1}{4} a_{ijkl} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_l - \sum_s a_s \frac{\Lambda}{\Lambda_s} \zeta_s \zeta_s^* \quad (2)$$

где Λ_s - критическое значение параметра нагрузки для s -ой формы. Метод возмущений приводит к последовательной процедуре определения коэффициентов этого разложения, причём на каждом этапе решается линейная краевая задача для определения полей перемещений первого, второго и т.д. порядков (т.е. докритического перемещения, линейных форм выпучивания и последовательных поправок к линейным собственным формам). Отметим, что коэффициенты с тремя индексами a_{ijk} , определяющие главные нелинейные члены, определяются по линейным собственным формам (перемещениям первого порядка). Например, для сжатых пластин (элементов стержня) эти коэффициенты находятся по формулам:

$$a_{ijk} = \iint_S [N_x^{(i)} w_{,x}^j w_{,x}^k + N_y^{(i)} w_{,y}^j w_{,y}^k + N_{xy}^i (w_{,x}^j w_{,y}^k + w_{,y}^j w_{,x}^k)] dS \quad (3)$$

где N_x, N_y, N_{xy} - мембранные усилия, верхний индекс в скобках - номер собственной формы, интегрирование выполняется по срединным плоскостям пластин.

Пусть первый индекс « i » в (1)-(3) отвечает общей форме, остальные индексы - местным формам (ввиду коротковолнового характера местных форм может существовать несколько местных форм с близкими критическими напряжениями). Поскольку для местных форм в пластинах мембранные усилия (первого порядка) обращаются в нуль, отличными от нуля будут только коэффициенты a_{ijk} , для которых $i = 1$.

Из полученного выражения для потенциальной энергии вытекают следующие уравнения равновесия (по s суммирование не производится):

$$a_s (1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_s}) \zeta_s + a_{ijs} \zeta_i \zeta_j + a_{ijks} \zeta_i \zeta_j \zeta_k + \dots = a_s \zeta_s^* \frac{\Lambda}{\Lambda_s} \quad (s = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Если не все коэффициенты a_{ijk} обращаются в нуль, то можно ограничиться решением в первом асимптотическом приближении, оставляя в системе (4) лишь линейные и квадратичные члены. В этом наиболее простом случае нет необходимости решать громоздкую задачу определения полей перемещений второго порядка (поскольку a_{ijk} зависят лишь от собственных форм).

Решение системы (4) определяет равновесные ветви и предельные нагрузки в зависимости от начальных несовершенств (точки бифуркации и предельные точки находятся из условия равенства якобиана системы нулю $I = 0$).

3. Некоторые результаты решения задачи связанного выпучивания тонкостенных стержней

Тонкостенные стержни с предварительным местным выпучиванием

Рассмотрим некоторые результаты решения задачи о связанном выпучивании стержней первого типа при центральном сжатии (с некоторым общим несовершенством) и внецентренном сжатии, полученные в работе [13].

Критическая нагрузка местного выпучивания P_{cr} определялась с учётом общего докритического прогиба (который описывается известным уравнением, учитывающим общее

несовершенство $w_0(x)$ и эксцентриситет приложения нагрузки e). При этом стенки с линейно-переменными по ширине напряжениями разбивались на несколько полос, в пределах которых напряжения принимались постоянными. Решения уравнений устойчивости для каждой из полос сопрягались с использованием матриц состояния.

После начала местного выпучивания эффективная ширина пластин определялась при помощи выражений для редуцированного коэффициента (оценок снизу), предложенных в работе [14]:

$$\eta = 1 - \frac{\overline{g^2}}{g^4} \quad (5)$$

где $g(y)$ - поперечный профиль местной формы, а черта сверху обозначает среднее значение соответствующей величины:

$$\overline{g^2} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} g^2(y) dy, \quad \overline{g^4} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} g^4(y) dy \quad (6)$$

Редуцированный («эффективный») момент инерции I_* определялся с учётом смещения эффективного центра жёсткости e_{cr} (вследствие изменения эффективных ширин пластин). Внутренний изгибающий момент принимался равным $M = M_{cr} + EI_*(\chi - \chi_{cr})$, где M_{cr} и χ_{cr} - значения изгибающего момента и кривизны при $P = P_{cr}$. Соответственно дифференциальное уравнение общего изгиба после местного выпучивания было получено в виде

$$EI_* W_{,xx} + PW = (P_{cr} - P)(w_0 + w_{cr} + e + e_{cr}) \quad (7)$$

где W - дополнительный прогиб после местного выпучивания, w_{cr} - полный прогиб при $P = P_{cr}$. Решение уравнения (7) может быть записано в аналитическом виде, хотя и достаточно громоздко. В частном случае $w_0 = 0$ (внецентренное сжатие идеального стержня) максимальный прогиб (при $x = L/2$) равен

$$W_{\max} = e \frac{1 - \frac{P_{cr}}{P}}{1 - \frac{P_{cr}}{P} \frac{I_*}{I}} \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_*}}} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_{cr}}{P_e}}} \right] \quad (8)$$

где P_e - эйлерова сила, $P_* = \pi^2 EI_* / L^2$ - редуцированная эйлерова сила. В зависимости от соотношения между P_* и P_{cr} равновесная ветвь (8) может быть нисходящей ($P_* < P_{cr}$) или восходящей ($P_* > P_{cr}$). В первом случае (рис. 1, а) несущая способность определяется величиной P_{cr} , во втором случае (рис. 1, б) - образованием упруго-пластической зоны и достижением предельной нагрузки. Приблизительно (при не слишком большом эксцентриситете, в запас устойчивости) предельная нагрузка может определяться по достижению максимальными напряжениями (суммарными напряжениями сжатия и изгиба) предела текучести (предполагается, что эта предельная нагрузка не достигается на докритическом участке равновесной ветви).

Влияние общего докритического изгиба на местную устойчивость иллюстрирует рис. 2, на которой представлены зависимости безразмерной критической нагрузки местного выпучивания $P_{cr} \cdot 10^3 / EA$ (A - площадь поперечного сечения) от параметра эксцентриситета e/b_w для стержней прямоугольного (коробчатого) сечения с размерами $b_w = 2b_f$, $t_w = 2t_f$, $t_w/b_w = 0,0228$ при различных гибкостях (длинах). Для сравнения пунктирной линией показана кривая, рассчитанная без учёта

общего докритического изгиба (для $\lambda = 96$ критическое напряжение общей формы при $e = 0$ ниже критического напряжения для местной формы). Кривая для $\lambda = 64$ соответствует стойке, равноустойчивой по общей и местной формам при чистом сжатии. Снижение местных критических напряжений вследствие общего изгиба, незначительное для коротких стоек, становится весьма выраженным для стоек, близких к равноустойчивым.

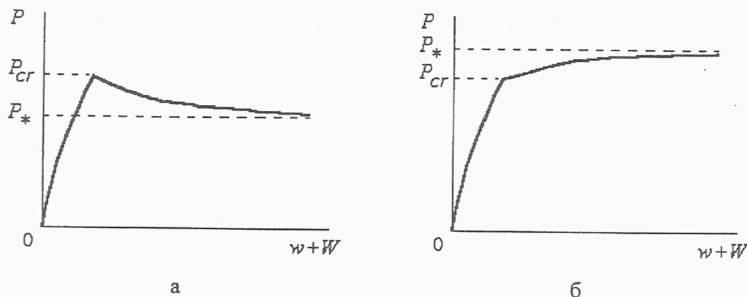


Рис. 1. Равновесные ветви сжатого тонкостенного стержня при различном соотношении между критической нагрузкой местного выпучивания и редуцированной эйлеровой нагрузкой: (а) $P_* < P_{cr}$; (б) $P_* > P_{cr}$

Соотношение между местной критической нагрузкой, эйлеровой, редуцированной эйлеровой и предельной нагрузками существенно зависит от гибкости стержня, как показано на рис. 3 для коробчатого квадратного сечения с одинаковыми толщинами стенок ($b/t = 80$) при эксцентриситете нагружения $e/b = 0,3$. Кривая 1 соответствует эйлеровой критической нагрузке, 2 - местному выпучиванию без учёта докритического изгиба, 3 - местному выпучиванию с учётом влияния докритического изгиба, 4 - редуцированной эйлеровой нагрузке. Пунктирная кривая 5 представляет безразмерные напряжения $\sigma^* = \sigma \cdot 10^3 / E$ в догружаемой стенке при нагрузке $P = P_{cr}$ и иллюстрирует различие между максимальными и средними (кривая 3) напряжениями в сечении. Кривой 6 показана предельная нагрузка для предела текучести, соответствующего $\sigma_y \cdot 10^3 / E = 3$.

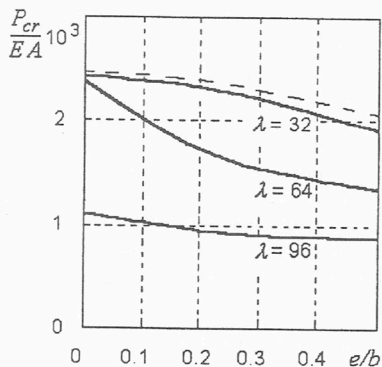


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки местного выпучивания от эксцентриситета нагружения при различных гибкостях

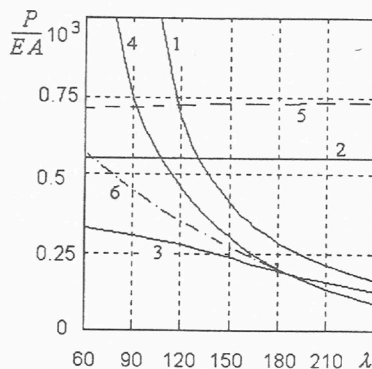


Рис. 3. Зависимость различных критических нагрузок и предельной нагрузки от гибкости (коробчатое квадратное сечение $b/t=80$, $e/b=0,3$)

Значение гибкости $\lambda = 190$ разделяет два диапазона гибкостей - с восходящей ($P_* > P_{cr}$) и ниспадающей ($P_* < P_{cr}$) равновесными ветвями после точки $P = P_{cr}$. При $\lambda < 190$ предельная нагрузка лежит между кривыми 3 и 4; при $\lambda > 190$ - совпадает с кривой 3 (при условии, что соответствующая точка кривой 5 лежит ниже предела текучести).

Таким образом, для больших значений гибкости предельная нагрузка определяется местным выпучиванием с учётом докритического изгиба, при малых и средних гибкостях исчерпание несущей способности наступает на послекритической ветви, предельная нагрузка зависит от предела текучести и лежит между критической нагрузкой местного выпучивания и редуцированной эйлеровой нагрузкой.

Тонкостенные стержни, близкие к равноустойчивым

Рассмотрим некоторые результаты анализа связанной неустойчивости стержней второго типа - близких к равноустойчивым. Следует различать стержни моносимметричного поперечного сечения и стержни с двумя осями симметрии.

В случае поперечного сечения с одной осью симметрии (например, швеллера) коэффициенты a_{1ii} ($i > 1$), отражающие взаимодействие общей изгибной формы с i -ой местной формой, не обращаются в нуль. Поэтому вполне достаточным оказывается решение в первом асимптотическом приближении. (Отметим, что взаимодействием изгибно-крутильной формы с местной формой, как правило, является более слабым [15] и здесь не рассматривается).

Второе существенное упрощение связано с возможностью рассматривать взаимодействие общей формы с каждой из местных форм отдельно, т.е., в конечном счёте, учитывать только взаимодействие с одной наиболее опасной местной формой, с некоторой эквивалентной местной погибью [16] (местные формы между собой не взаимодействуют, так как мембранные усилия первого порядка для них обращаются в нуль).

Типичные результаты такого решения для сжатого стержня швеллерного поперечного сечения представлены на рис. 4, 5. На рис. 4 показаны зависимости относительных предельных напряжений σ_u / σ_{lin} , где σ_u - предельное напряжение, $\sigma_{lin} = \min(\sigma_{loc}, \sigma_o)$, от отношения критических напряжений местного и общего выпучивания σ_{loc} / σ_o для двух комбинаций амплитуд общей и местной погибей, отнесенных к толщине: $(\zeta_1^*, \zeta_2^*) = (0,5; 0), (0,5; 0,1)$ (соответственно кривые 1, 2), при данном отношении ширины полки и стенки $b_f / b_w = 0,5$ и относительной толщине $t / b_w = 0,025$ ($t_f = t_w = t$) (варьировалась относительная длина L / b_w и тем самым менялось отношение σ_{loc} / σ_o). Снижение предельных напряжений по сравнению с линейными критическими напряжениями максимально для равноустойчивого стержня и составляет 20 - 35 % при реальных значениях погиби.

На рис. 5 представлены зависимости предельных напряжений связанного выпучивания $\sigma_u^* = \sigma_u \cdot 10^3 / E$ от гибкости для равноустойчивого стержня швеллерного сечения для тех же комбинаций амплитуд погибей (кривые 1, 2). Относительная толщина стенки и полки изменялась - в каждом случае подбирались из условия равноустойчивости по общей (изгибно-крутильной форме) и местной форме (по общей изгибной форме линейные критические напряжения оказывались несколько выше - на 12-24%). Кривыми 3, 4 показаны результаты расчёта предельных напряжений по нормативной методике (с использованием коэффициента φ для двух значений предела текучести $\sigma_y = 430$ МПа и 240 МПа).

Для материала с низким пределом текучести эффект взаимодействия форм практически во всём диапазоне гибкости перекрывается эффектом снижения предельных напряжений вследствие пластического деформирования, однако при повышении предела текучести появляется определённый диапазон значений гибкости, где взаимодействие форм определяет предельную нагрузку. Отсюда следует важный вывод: методы расчёта устойчивости стержней, регламентируемые нормами и не учитывающие эффекта связанности форм, приемлемы для материалов с низкими прочностными

характеристиками, но могут оказаться недостаточно надёжными при переходе к материалам с высоким пределом текучести

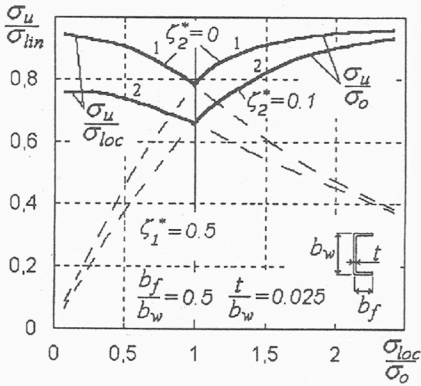


Рис. 4. Зависимости относительных предельных напряжений от σ_{loc}/σ_0 для стержня швеллерного сечения при двух комбинациях погибей: (0,5; 0), (0,5; 0,1) (кривые 1, 2)

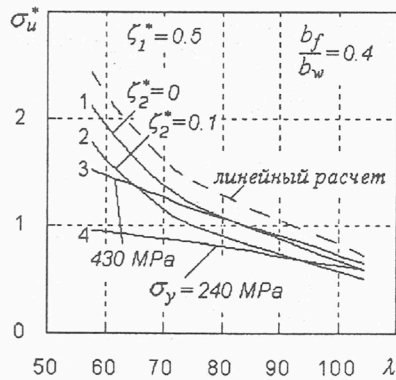


Рис. 5. Предельные напряжения связанного выпучивания швеллера для двух амплитуд местных несовершенств (кривые 1, 2) и расчёт по коэффициенту φ для двух значений предела текучести

Рассмотрим теперь поперечное сечение с двумя осями симметрии (коробчатое, двутавровое). В этом случае все кубические члены в энергии, отвечающие попарному взаимодействию общей формы с каждой из местных форм, обращаются в нуль. Поэтому при учёте только одной общей и одной местной формы их взаимодействие определяется членами четвёртой степени, связанными с т.н. «смешанными» полями перемещений второго порядка U_{11ii} (которые отражают асимметрию местной формы при конечных перемещениях, обусловленную общим прогибом стержня). Но задача определения смешанной формы второго порядка не только весьма громоздка, но и, зачастую, не вполне корректна ввиду плохой обусловленности [17].

В работе [18] был предложен более эффективный подход, основанный на учёте, наряду с основной местной формой, «вторичной» местной формы, имеющей ту же длину, но другой характер симметрии. Наложение двух форм приводит к несимметричности суммарного местного прогиба, и в потенциальной энергии появляется член третьей степени (с коэффициентом a_{123}), описывающий «тройное» взаимодействие форм. Таким образом, при учёте основной и вторичной местных форм связанная потеря устойчивости может быть описана в первом асимптотическом приближении. (Отметим, что вторичная местная форма, как показано в работе [17], практически совпадает со смешанной формой второго порядка, а дополнительный местный изгиб тонкостенного стержня, вызванный общим прогибом, имеет форму, подобную вторичной местной форме).

Связанное выпучивание стержней с двумя осями симметрии изучалось в работах [19-21], в которых рассматривалось преимущественно замкнутое коробчатое (прямоугольное) поперечное сечение. Рассмотрим некоторые результаты аналогичного решения для стержней двутаврового сечения. На рис. 6 и 7 даны зависимости для двутавра, подобные представленным на рис. 4 и 5 для швеллера. На рис. 6 показаны зависимости относительных предельных напряжений σ_u/σ_{lin} ($\sigma_{lin} = \min(\sigma_{loc}, \sigma_0)$), от σ_{loc}/σ_0 для двух комбинаций амплитуд общей и местной погибей, отнесенных к толщине: $(\zeta_1^*, \zeta_2^*) = (0,5; 0), (0,5; 0,1)$ (соответственно кривые 1, 2), при данном отношении ширины полки и стенки $b_f/b_w = 0,5$ и относительной толщине $t/b_w = 0,0375$ ($t_f = t_w = t$).

Снижение предельных напряжений по сравнению с линейными критическими напряжениями несколько меньше, чем для швеллера, но остаётся значительным, составляя примерно 15-25%.

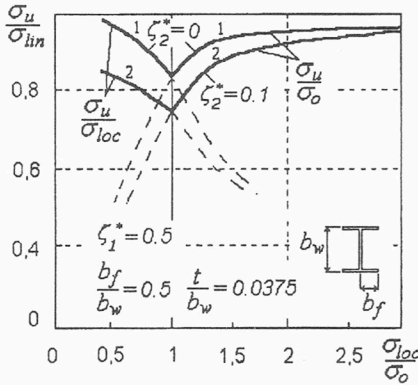


Рис. 6. Зависимости относительных предельных напряжений от σ_{loc}/σ_o для стержня двутаврового сечения при двух комбинациях погибей: (0,5; 0), (0,5; 0,1) (кривые 1, 2)

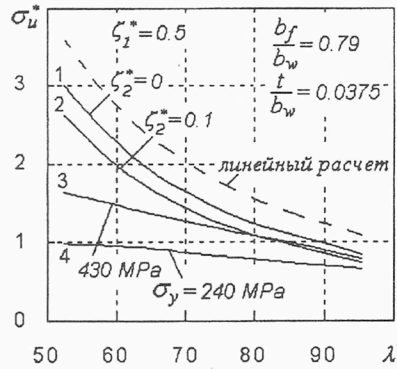


Рис. 7. Предельные напряжения связанного выпучивания двутавра для двух амплитуд местных несовершенств (кривые 1, 2) и расчёт по коэффициенту φ для двух значений предела текучести

Зависимости безразмерных предельных напряжений от гибкости, представленные на рис. 7 для двутавра с параметрами, близкими к оптимальным (полученными с использованием линейной теории устойчивости), подтверждают выводы, сделанные выше для стержня швеллерного сечения - при достаточно высоком пределе текучести появляется диапазон гибкости, в котором учёт пластических свойств материала по нормативным методикам не перекрывает эффекта связанности форм. В целом взаимодействие форм в сжатых стержнях с двумя осями симметрии менее опасно, чем в стержнях моносимметричного сечения.

4. Сравнение с экспериментальными данными

Ниже приведены некоторые результаты сравнения расчетных данных с экспериментальными для стержней швеллерного сечения, испытания которых описаны в работе [23]. Испытывались сварные швеллеры из стали с высоким пределом текучести (более 350 МПа), на центральное сжатие (со случайным эксцентриситетом), а также на эксцентричное сжатие. Было испытано несколько серий стержней, отличавшихся шириной полки и стенки (длина варьировалась внутри каждой серии). Серия 1 включала стержни с номинальной толщиной стенки и полок $t_w = t_f = 5$ мм, шириной стенки $b_w = 250$ мм и шириной полки $b_f = 110$ мм, в серии 2 при той же толщине была увеличена ширина: $b_w = 360$ мм, $b_f = 160$ мм. Для расчетов были выбраны стержни, близкие к равноустойчивым по общей и местной формам - № 3, 6, 7, 9 серии 1 (длина $L = 2727 - 2754$ мм), №5, 8, 11, 14 серии 2 ($L = 6289 - 6293$ мм), №5, 8, 11, 14 серии 3.

Результаты расчетов представлены на рис. 8, а, б, в, соответственно для серий 1, 2, 3. Показаны критические нагрузки для общей изгибной формы (для изгибно-крутильной она значительно выше) и для местной формы, результаты расчёта по нормативной методике с использованием коэффициента φ , а также предельные нагрузки связанной потери устойчивости при общей погиби, равной $L/750$, и двух значениях местной погиби - $\zeta_2^* = 0$ и $\zeta_2^* = 0,1$. Кружками показаны экспериментальные точки.

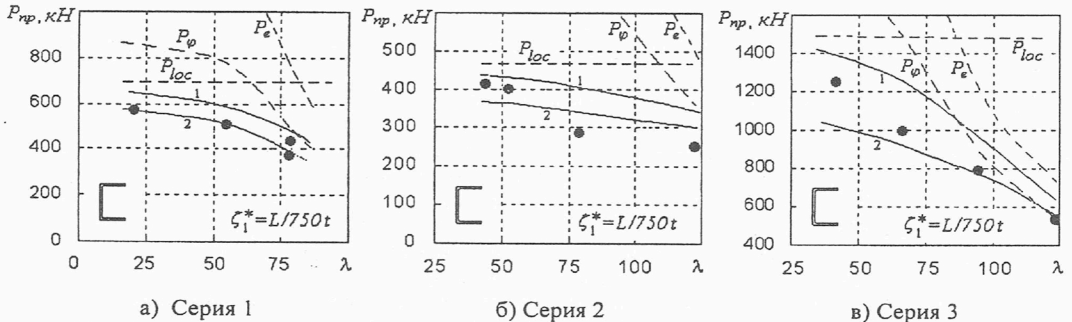


Рис. 8. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными [23]

Пунктирными линиями показаны критические нагрузки в линейном расчёте - нагрузки общего (изгибного) и местного выпучивания (P_e , P_{loc}) и кривая, полученная по нормативной методике с использованием коэффициента φ (P_ϕ). Кривые 1, 2 - нагрузки связанного выпучивания при общей погиби, равной $L/750$, и местной погиби $\zeta_2^* = 0$ (кривая 1) и $\zeta_2^* = 0,1$ (кривая 2).

Соответствие расчётных и экспериментальных значений предельных нагрузок можно считать хорошим. Линейный расчёт, как правило, даёт неудовлетворительные результаты. Расчёт по нормативной методике согласуется с экспериментом лишь в той области, где критические нагрузки для общего выпучивания ниже, чем для местного.

Однако нельзя не отметить чувствительность расчётной предельной нагрузки к выбранным значениям амплитуд начальных несовершенств, особенно местных. Для корректного сопоставления расчётных и экспериментальных результатов необходимы обоснованные методы определения эффективных параметров погиби (задаваемых в теоретических расчётах) по реальным (случайным) полям несовершенств.

Литература

- [1]. Hutchinson J.W., Koiter W.T. Post-buckling theory. Appl. Mech. Revs.- 23, 1970, p. 1363 - 1366.
- [2]. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев-Донецк: Выща школа, 1979, 150 с.
- [3]. Твергард В. Поведение пластинок и оболочек при выпучивании. В сб. «Теоретическая и прикладная механика. Труды XIV междунар. конгр. IUTAM. Москва, Мир, 1979, с. 495 - 527.
- [4]. Stany zakrytyczne i nosnosc graniczna cienkosciennych dzwigarow o scianach plaskich. Praca zbiorowa pod redakcia M. Krolaka. PWN, Warszawa - Lodz, 1990, p. 247 - 358.
- [5]. Bijlaard P.P., Fischer G.P. Column strength of H-section and square tube in postbuckling range of component plates. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1954, 58, № 518, 152 (see also NACA TN-2994, 1954).
- [6]. Graves Smith T. R. The ultimate strength of locally buckled columns of arbitrary length. In: Thin-Walled Structures (ed. By K. C. Roakey and H. V. Hill), London, 1969.
- [7]. Neut A. van der. The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members // Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech. (1968), Springer-Verlag, 1969, p. 389 - 399.
- [8]. Skaloud M., Zomerowa M. Experimental investigation into the interaction of the buckling of compressed thin-walled columns with the buckling of their plate elements // Acta technica, CSAV. 1970, № 4, p. 389 - 424.
- [9]. Маневич А.И., Демешко М.Ф., Красовский В.Л., Кучеренко В.М. Экспериментальное исследование устойчивости продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. В сб. «Расчет пространств. конструкций», Москва, Стройиздат. 1971, вып.14, с.87 - 102.
- [10]. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Период сб.

- перев. иностр. статей. 1960, № 5, с. 99 - 110.
- [11]. Byskov E., Hutchinson J. W. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. *AIAA J.*, **15**, №7, 1977, p. 941 - 948.
- [12]. Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. In: *Advances in Applied Mechanics*. **14**, Acad. Press, 1974, p. 1 - 65.
- [13]. Маневич А.И., Ракша С.В. Связанная потеря устойчивости тонкостенных стоек прямоугольного сечения при внецентренном сжатии. *Известия вузов. Строительство*, 1995, № 1, с. 21 - 27.
- [14]. Koiter W.T., Pignataro M. A general theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels. *WTHD* № 83. 1976, 49 p.
- [15]. Pignataro M., Luongo A., Rizzi N. On the effect of the local and overall interaction on the postbuckling of uniformly compressed channels. *Thin-Walled Structures*? 1985, 3, № 4. p. 283 - 321.
- [16]. Маневич А.И. К теории связанной потери устойчивости подкреплённых тонкостенных конструкций. *Прикладная математика и механика*. 1982, т. 46, №2, с. 337 - 345.
- [17]. Sridharan S., Ali M.A. An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections. *Int. J. Solids and Structures*. 1986, № 4, p. 429 - 443.
- [18]. Koiter W.T., Neut A. van der. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels. *Thin-Walled Structures*, 1980: part.1, p. 51 - 66; part 2, p. 66 - 86.
- [19]. Маневич А. И., Ракша С. В. Связанная потеря устойчивости сжатых тонкостенных стержней закрытого поперечного сечения. *Прикл. механика.*, 1993, т. 29, № 2, с. 62 - 68.
- [20]. Маневич А.И., Ракша С.В. Нелинейная задача связанного выпучивания сжатых тонкостенных стержней прямоугольного сечения. *Известия вузов. Строительство*, 1994, № 5-6, с. 125 - 129.
- [21]. Ракша С.В. Весовая оптимизация центрально-сжатых тонкостенных стержней прямоугольного профиля с учетом взаимодействия форм потери устойчивости. *Известия вузов. Строительство*, 1994, № 7-8, с. 16 - 21.
- [22]. Маневич А.И., Ракша С.В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях. In: «*Theoretical Foundations of Civil Engineering*» (Polish-Ukrainian Transactions), 4, v.1, Part 2, Warsaw-Dnepropetrovsk, 1996, с. 270 - 275.
- [23]. Rasmussen H.J.R., Hancock G.J. Compression tests of welded channel section columns. *J. Struct. Engng. ASCE*, **115**, № 4, 1988, p. 789 - 808.

COUPLED INSTABILITY OF THIN-WALLED BARS (approaches, methods and some results of investigations)

Arkadiy Manevich, Sergey Raksha
Dnepropetrovsk National University
Dnepropetrovsk State Technical University of Railway Transport

The main ideas, approaches and some results of investigations of the interactive buckling of thin-walled bars, obtained in the last years, are briefly outlined. Two types of thin-walled members are considered: 1) bars with preliminary local buckling of the constituent plates; 2) bars with close critical stresses for the overall and local buckling modes. The main attention is paid to those directions of investigations and results which are connected with the works of the authors.