УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой

У просторах $L_\psi(\mathrm{T})$ *періодичних функцій з метрикою* $\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{\mathrm{T}} \psi(|f(x)|)dx$, *де* ψ *- функція типу модуля неперервності, досліджуються аналоги класичних нерівностей Бернштейна для норм похідних та приростів тригонометричних поліномів.*

1.Введение. Данная статья является продолжением работ [1,2]. Все основные обозначения и понятия см. в [2].

Для действительнозначных функций $f(x)$, $x \in R^1$, имеющих период 1, $L_0 \equiv L_0(T)$ – множество измеримых и почти всюду конечных функций на торе периодов $T = [0,1]$; Ω - множество функций $\psi : R_+^1 \to R_+^1$, являющихся модулем непрерывности;

$$L_\psi = L_\psi(\mathrm{T}) = \left\{ f \in L_0(T) : \| f \|_\psi = \int\limits_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}$$

- метрические пространства (в случае $\psi \in \Omega$).

В этих пространствах рассмотрим подпространства $\tilde{T}^{2n+1}$ тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{i2\pi kx}$, $c_{-k} = \overline{c}_k$,

и линейные операторы A: $\tilde{T}^{2n+1} \to \tilde{T}^{2n+1}$. Мы будем изучать нормы этих полиномиальных операторов, то есть величины

$$\| A \|_{\psi,n} := \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\| AT_n \|_\psi}{\| T_n \|_\psi} . \qquad (1)$$

При этом нас в первую очередь интересуют аналоги классических неравенств типа Бернштейна для производных и приращений полиномов; этим диктуется выбор классов операторов A, которые мы изучаем.

Исследованию таких неравенств в нормированных пространствах посвящено много работ; см., например, монографии [3, 4]. Мы отметим только, что в метрических пространствах $|L_p$, $p \in (0,1)$, точные по порядку неравенства Бернштейна для производных $T_n'(x)$

$$\left\|T_n'(x)\right\|_p \le Cn^p \left\|T_n\right\|_p \ , \qquad (2)$$

и приращений $\Delta_h T_n(x) = T_n\left(x+\frac{h}{2}\right) - T_n\left(x-\frac{h}{2}\right)$

$$\left\|\Delta_h T_n\right\|_p \le C(nh)^p \left\|T_n\right\|_p, \quad 0 < nh \le \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

доказаны в [5,6],а в работе [7], в частности, найдена точная константа в (2).

В этой работе мы получим аналоги неравенств(2),(3) в пространствах L_ψ. Приложению этих результатов к исследованию обратных теорем Джексона в пространствах L_ψ будет посвящена отдельная статья.

2.Интерполяционная формула. Отметим сразу одно важное предположение относительно операторов А. Всюду в дальнейшем (и это не будет оговариваться отдельно) изучаются операторы А, которые определяются множителями $\{\lambda_k \in C; |k| \le n\}, \overline{\lambda_k} = \lambda_{-k}$, по формуле

$$A\left(\sum_{|k|\le n} c_k e^{i2\pi kx}\right) = \sum_{|k|\le n} \lambda_k c_k e^{i2\pi kx} \ .$$

Очевидно, что каждый такой оператор A перестановочен со сдвигом; это означает, что $\tau_t A = A\tau_t$ для всех операторов τ_t сдвига на параметр t.

Введём ещё аналоги классических полиномов (ядер) Валле-Пуссена (см.например [3]).

Обозначим через РΣ класс функций α:R→R таких, что:

1) α(s)=1 для s∈ [-1,1]; α(s)=0 для |s|≥2;
2) α(-s)= α(s);
3) α∈ C(R).

Каждая функция α этого класса порождает тригонометрический полином

$$V_n(x) \equiv V_n(x;\alpha) := \sum_{|k|<2n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{i2\pi kx}$$

(4) степени не выше 2n-1.

Для оператора А, первоначально заданного на полиномах степени n, мы будем использовать его продолжение на полиномы степени 2n по правилу: для k=1,…,n положим

$$\lambda_{n+k} := \lambda_{n-k}; \qquad \lambda_{-(n+k)} := \overline{\lambda_{n+k}} \ .$$

(5)

Для вновь полученного оператора с множителями $\{\lambda_k; |k| \le 2n\}$ сохраним прежнее обозначение А.

Наши оценки норм операторов A базируются на следующей интерполяционной формуле.

Теорема 1. *Для любого полинома $T_n \in \tilde{T}^{2n+1}$ и всех x,t∈ R справедливо соотношение*

$$AT_n(x+t) = \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(t+x_j) AV_n(x-x_j) \ ,$$

(6) *где* $x_j = \dfrac{j}{3n}$ *- система равноотстоящих точек на периоде T=[0,1],* V_n *определены в (4),* $\alpha \in P\Sigma$*, а значения* AV_n *определяются с помощью (5).*

Доказательство. Для полинома T_n справедливо интегральное представление

$$T_n(x) = \int_T T_n(u) \cdot V_n(x-u) du$$

(это следует из того, что α(s)=1 при |s|≤1). Подинтегральная функция есть полином степени не выше 3n-1. Для вычисления интеграла используем квадратурную формулу прямоугольников с 3n узлами, точную на полиномах степени 3n-1:

$$T_n(x) = \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(x_j) V_n(x-x_j) .$$

Так как это соотношение справедливо для любого полинома, применим его для $\tau_t T_n$:

$$\tau_t T_n(x) = \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(t+x_j) V_n(x-x_j) . \qquad (7)$$

Подействуем оператором A на обе части (7), и получим (6).

3.Оценки нормы фиксированного оператора. Для заданной функции типа модуля непрерывности ψ определим её функцию растяжения [8] $M_\psi(s)$, $s \in (0,\infty)$:

$$M_\psi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} .$$

Очевидно, что

$$\psi(st) \le \psi(s) M_\psi(t) . \qquad (8)$$

Теорема 2. *При любой* $\psi \in \Omega$ *в пространстве* L_ψ *для нормы оператора A имеют место двусторонние неравенства*

$$\frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})} M_\psi(\max_{k\le n} |\lambda_k|) \le \| A \|_{\psi,n} \le \inf_{\alpha\in P\Sigma} 3n \int_T M_\psi\left(\frac{1}{3n} | AV_n(x) |\right) dx . \qquad (9)$$

Доказательство. Для оценки сверху используем теорему 1.
Из полуаддитивности ψ, (6) и (8) следует:

$$\psi(|AT_n(x+t)|) \le \sum_{j=1}^{3n} \psi(|T_n(t+x_j)|) \cdot M_\psi(|\frac{1}{3n} AV_n(x-x_j)|).$$

Используя инвариантность по сдвигу ψ – метрики, отсюда получаем правую часть (9):

$$\|AT_n\|_\psi = \int_{x\in T}\int_{t\in T} \psi(|AT_n(x+t)|)dtdx \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{3n} \int_{t\in T} \psi(|T_n(t+x_j)|)dt \int_{x\in T} M_\psi(\frac{1}{3n}|AV_n(x-x_j)|)dx =$$

$$= \|T_n\|_\psi \, 3n \int_{x\in T} M_\psi(\frac{1}{3n}|AV_n(x)|)dx.$$

Для доказательства нижней оценки в (9) рассмотрим полином

$p_k(x)=\cos(2\pi kx)$, $k=0,1,\ldots,n$.

Пусть $k\neq 0$, $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\phi_k}$. Тогда

$$Ap_k(x) = \frac{1}{2}A(e^{2\pi ikx} + e^{-2\pi ikx}) = \frac{1}{2}(|\lambda_k| e^{i(2\pi kx+\phi_k)} + |\lambda_k| e^{-i(2\pi kx+\phi_k)}) =$$
$$= |\lambda_k| \cos(2\pi kx + \phi_k)$$

$$\|Ap_k\|_\psi = \int_0^1 \psi\left(|\lambda_k\|\sin 2\pi x|\right)dx \ge 2\int_{1/8}^{3/8} \psi\left(|\lambda_k\|\sin 2\pi x|\right)dx \ge \frac{1}{2}\psi\left(|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Если же k=0, то $\|Ap_k\|_\psi = \psi(|\lambda_0|) \ge \frac{1}{2}\psi\left(|\lambda_0|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Теперь в оценке снизу используем семейство полиномов

$\{\delta p_k(x);\ k=0,1,\ldots,n;\ \delta>0\}$:

$$\|A\|_{\psi,n} \ge \sup_{\{\delta p_k(x)\}} \frac{\|A\delta p_k\|_\psi}{\|\delta p_k\|_\psi} \ge \sup_{\delta>0}\max_{0\le k\le n} \frac{\frac{1}{2}\psi\left(\delta|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\psi(\delta)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{\delta>0} \frac{\psi\left(\delta \max\limits_{k\le n}|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\psi(\delta)} = \frac{1}{2}M_\psi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\max_{k\le n}|\lambda_k|\right) \ge \frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})} M_\psi\left(\max_{k\le n}|\lambda_k|\right).$$

На последнем этапе использовано свойство $M_\psi(xy) \le M_\psi(x)M_\psi(y)$. Теорема 2 доказана.

Так как оператор A однозначно определяется множителями $\{\lambda_k; |k|\le n\}$, то и оценки его норм желательно получить в терминах $\{\lambda_k\}$. В этом смысле правую оценку (9) ещё нельзя считать «хорошей». Мы продвинемся дальше в оценках сверху норм операторов, накладывая некоторые дополнительные ограничения как на операторы, так и на ψ – метрики.

4. Оценка норм последовательностей операторов. Напомним [8], что поведение функции растяжения M_ψ для $\psi \in \Omega$ в правой окрестности нуля характеризуется так называемым нижним показателем растяжения γ_ψ, обладающим свойствами:

а) $\gamma_\psi \in [0,1]$;

б) $M_\psi(s) \geq s^{\gamma_\psi}$, $\forall s \in (0,1]$;

в) $\forall \varepsilon > 0, \forall s \in (0,1]$ с некоторой константой C_ε $\quad M_\psi(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}$.

Отсюда следует, в частности, что в случае $\gamma_\psi=0$ $\quad M_\psi(s)\equiv 1$ для $s\in [0,1]$, а при $\gamma_\psi>0$ $\quad M_\psi(+0)=0$.

В этом пункте исследуем последовательности операторов $\{A_n;\ n=1,2,\dots\}$, образованные по следующему правилу: задана некоторая функция $\mu(s):R\to C$, $\mu(-s)=\overline{\mu(s)}$, и оператор A_n, $n=1,2,\dots$ действующей на $\tilde{T}^{2n+1}$, определяется множителями $\lambda_k:=\mu(k)$, $\quad |k|\leq n$.

Для последовательности таких операторов нет необходимости в процедуре их продолжения (5), и оценка сверху (9) принимает следующий вид:

$$\| A_n \|_{\psi,n} \leq \inf_{\alpha\in P\Sigma} 3n \int_T M_\psi \left(\frac{1}{3n} \left| \sum_{|k|<2n} \beta_n\left(\frac{k}{n}\right) e^{i2\pi kx} \right| \right) dx \ , \qquad (10)$$

где $\beta_n(s) := \mu(ns)\alpha(s)$.

В дальнейшем ограничимся гладкими функциями $\alpha \in P\Sigma \cap C^\infty(R)$, и локально интегрируемыми функциями μ. В этом случае преобразование Фурье функции β_n,

$$\hat{\beta}_n(x) = \int_R \beta_n(s) e^{-i2\pi sx} ds \ ,$$

является функцией, интегрируемой на оси.

Теорема 3. *Пусть $\gamma_\psi > 0$, а функция $\mu(s)$ такова, что для данного n найдутся $\alpha \in P\Sigma \cap C^\infty(R)$, $\delta > 0$, и константа $K(n,\delta)$ такие, что для $x\in R$ выполнено неравенство*

$$\left| \hat{\beta}_n(x) \right| \leq \frac{K(n,\delta)}{(1+|x|)^{\frac{1}{\gamma_\psi}+\delta}} \ . \qquad (11)$$

Тогда для нормы соответствующего оператора A_n справедлива оценка

$$\| A_n \|_{\psi,n} \leq 3M_\psi \left(\frac{1}{3}\right) \int_R M_\psi \left(|\hat{\beta}_n(x)| \right) dx \ . \qquad (12)$$

Доказательство. По формуле суммирования Пуассона (см. например [9])

$$\sum_{|k|\le 2n}\beta_n\left(\frac{k}{n}\right)e^{i2\pi kx}=\sum_{j\in Z}n\hat{\beta}_n(n(x-j))\ ,$$

при этом ряд справа равномерно сходится благодаря условию (11).

Так как $\gamma_\psi>0$, то из (11) и неравенства в) для функции растяжения при подходящем выборе ε следуют равномерная сходимость ряда

$$\sum_{j\in Z}M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right)$$

и сходимость интеграла

$$\int_R M_\psi(|\hat{\beta}_n(x)|)dx\,.$$

Так как ψ полуаддитивна, то из определения M_ψ видно, что функция M_ψ также полуаддитивна. Поэтому

$$M_\psi\left(\frac{1}{3n}\left|\sum_{|k|\le 2n}\beta_n\left(\frac{k}{n}\right)e^{i2\pi kx}\right|\right)\le\sum_{j\in Z}M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right). \tag{13}$$

Теперь из (10) и (13) следует, что

$$\|A_n\|_{\psi,n}\le 3n\sum_{j\in Z}\int_T M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right)dx=3\int_R M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right)dx\le$$

$$\le 3M_\psi\left(\frac{1}{3}\right)\int_R M_\psi(|\hat{\beta}_n(x)|)dx\,.$$

Теорема 3 доказана.

Хорошо известно (см. например [9]), что если функция *f* из $L_1(R)$ такова, что функции $f, f',\ldots, f^{(l-1)}$ абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале $(l\in N)$, а $f^{(l)}\in L_1(R)$, то для всех $x\in R$ выполняется неравенство

$$|\hat{f}(x)|\le\frac{K'}{(1+|x|)^l}\ .$$

Таким образом, благодаря тому, что α – бесконечно дифференцируемая функция с конечным носителем, для справедливости неравенства (11) можно указать достаточные условия в терминах гладкости функции μ.

Следствие 1. *Пусть $\gamma_\psi>0$, а функция μ на отрезке [-2n,2n] абсолютно непрерывна вместе со своими производными $\mu',\mu'',\ldots,\mu^{\left[\frac{1}{\gamma_\psi}\right]+1}$. Тогда для этого значения n выполняется неравенство (12).*

Из этого факта легко следует аналог неравенств Бернштейна.

Следствие 2. *Пусть $\gamma_\psi>0$ и $r\in N$. Тогда имеют место неравенства*

$$C_1(r)M_\psi(n^r)\le \sup_{T_n\in\tilde T^{2n+1},T_n\ne 0}\frac{\|T_n^{(r)}\|_\psi}{\|T_n\|_\psi}\le C_2(r)M_\psi(n^r) \qquad (14)$$

с константами $C_1(r)$, $C_2(r)$, не зависящими от n.

Доказательство. Функция μ(s)=(i2πs)^r принадлежит $C^\infty(R)$, поэтому для оценки сверху можно использовать (12).

Далее, так как μ(s) – однородная функция степени r, то

$$\beta_n(s)=\mu(ns)\alpha(s)=n^r\mu(s)\alpha(s)\ ,$$

$$|\hat\beta_n(x)|=n^r\left|\widehat{(i2\pi x)^r\alpha(x)}\right|\ ,$$

$$\|T_n^{(r)}\|_\psi\le\|T_n\|_\psi\cdot 3M_\psi\left(\frac{1}{3}\right)\int_R M_\psi\left(\left|\widehat{(i2\pi x)^r\alpha(x)}\right|\right)dx\cdot M_\psi(n^r)\ .$$

Оценка снизу следует из (9).

Следствие 3. *Пусть γ_ψ >0 и nh ∈ (0,1/2]. Тогда для k∈ N имеют место неравенства*

$$C_1(k)\mathrm{M}_\psi((nh)^k)\le\sup_{T_n\in T^{2n+1},T_n\ne 0}\frac{\|\Delta_h^kT_n\|_\psi}{\|T_n\|_\psi}\le C_2(k)M_\psi((nh)^k) \qquad (15)$$

с константами $C_1(k)$,$C_2(k)$, не зависящими от n и h.

Доказательство. Для всех k∈ N рассуждения одинаковые, поэтому для простоты ограничимся случаем k=1.

Функция $\mu(s)=2i\sin(\pi hs)$ принадлежит $C^\infty(R)$, и по следствию 1

$$\|\Delta_hT_n\|_\psi\le\|T_n\|_\psi\cdot 3M_\psi\left(\frac{1}{3}\right)\int_R M_\psi(|\hat\beta_n(x)|)dx.$$

Так как $\hat\beta_n(x)=\widehat{(\mu(n\cdot)\alpha(\cdot))}(x)=\Delta_{nh}\hat\alpha(x)$, то

$$\int_R M_\psi(|\hat\beta_n(x)|)dx\le M_\psi(nh)\int_R M_\psi\left(\frac{|\Delta_{nh}\hat\alpha(x)|}{nh}\right)dx\quad ,$$

и для оценки сверху осталось показать, что функция

$$\Phi(y):=\int_R M_\psi\left(\frac{|\Delta_y\hat\alpha(x)|}{y}\right)dx$$

равномерно ограничена для y∈ [0,1/2]. Ввиду того, что $\Phi(y)$ непрерывна при y>0, достаточно доказать существование конечного предела $\Phi(y)$ при y→0.

Так как финитная функция (iy)^{2}α(y)∈ C$^\infty$, то её преобразование Фурье, равное $D^2\hat\alpha(x)$, убывает на бесконечности быстрее любой степени:

$$|D^2\hat{\alpha}(x)|\le \frac{C_N}{(1+|x|)^N}.$$

Тогда по формуле Тейлора для некоторой точки $\xi\in$ [x,x+y] имеем

$$\left|\frac{\Delta_y\hat{\alpha}(x)}{y}-D\hat{\alpha}(x)\right|=\frac{1}{2}y\cdot|D^2\hat{\alpha}(\xi)|\le \frac{C_N{}'y}{(1+|\xi|)^N}\le \frac{C_N{}'y}{(1+|x|)^N} ,$$

$$\int_R M_\psi\left(\left|\frac{\Delta_y\hat{\alpha}(x)}{y}-D\hat{\alpha}(x)\right|\right)dx\le M_\psi(C_N{}')M_\psi(y)\int_R M_\psi\left(\frac{1}{(1+|x|)^N}\right)dx. \tag{16}$$

Так как $\gamma_\psi>0$, то при достаточно больших N интеграл в правой части (16) конечен, а $M_\psi(y)\to 0$ при $y\to 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{y\to 0}\Phi(y)=\int_R M_\psi(|D\hat{\alpha}(x)|)dx<\infty ,$$

и оценка сверху в (15) доказана. Оценка снизу следует из (9).

Аналогично доказывается и следующий более общий факт.

Теорема 4. *Пусть* γ_ψ *>0, k=0,1,… , r=0,1,… ,n h*$\in$ *(0,1/2]. Тогда имеют место неравенства*

$$C_1(k,r)M_\psi(n^{r+k}h^k)\le \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1},T_n\ne 0}\frac{\|\Delta_h^kT_n^{(r)}\|_\psi}{\|T_n\|_\psi}\le C_2(k,r)M_\psi(n^{r+k}h^k) , \tag{17}$$

$$C_3M_\psi\left(\max_{|k|\le n}\left(|k|^r\left|\frac{\sin\pi kh}{k}-\pi k\right|\right)\right)\le \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1},T_n\ne 0}\frac{\left\|\left(\frac{\Delta_h}{h}-D\right)T_n^{(r)}\right\|_\psi}{\|T_n\|_\psi}\le$$
$$\le C_4M_\psi\left(\max_{|k|\le n}\left(|k|^r\left|\frac{\sin\pi kh}{k}-\pi k\right|\right)\right). \tag{18}$$

Заметим ещё, что правые оценки в (17),(18) справедливы при всех h$\in$ (0,1/2].

5. Неравенства для производных и приращений в случае $\gamma_\psi=0$.

Заметим, что оценки снизу в (14),(15),(17) остаются справедливыми и в случае $\gamma_\psi=0$. С другой стороны, очевидно, что $\|\Delta_h^kT_n\|_\psi\le 2^k\|T_n\|_\psi$.

Ввиду того, что при $\gamma_\psi=0$ $M_\psi(y)\ge 1$ для всех y > 0, из оценки снизу в (15) сразу вытекает следующий факт.

Утверждение1. *В любом пространстве L_ψ при γ_ψ =0 найдутся константы C_k>0 такие, что для всех n=1,2,… справедливы соотношения*

$$2^k \geq \varliminf_{h\to 0} \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \frac{\|\Delta_h^k T_n\|_\psi}{\|T_n\|_\psi} \geq C_k > 0. \qquad (19)$$

Таким образом, утверждение1 означает, что неравенств Бернштейна для приращений в форме, аналогичной (3), в пространствах L_ψ в случае γ_ψ =0 нет.

А вот ситуация с неравенствами для производных иная: условие γ_ψ =0 ещё не исключает наличия неравенств типа (2). Отметим работу [7], в которой в частности доказаны точные неравенства

$$\sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \frac{\int_T \psi(|T_n'(t)|)dt}{\int_T \psi(|T_n(t)|)dt} = \frac{\int_T \psi(2\pi n|\sin(2\pi t)|)dt}{\int_T \psi(|\sin(2\pi t)|)dt} \qquad (20)$$

для всех функций ψ из класса Φ функций, неубывающих на (0,∞), абсолютно непрерывных на каждом отрезке [a,b]⊂(0,∞), и таких, что функция $x\psi'(x)$ не убывает на (0,∞).

В частности, функция ψ(x)=ln(1+x), определяющая пространство ln(1+L), принадлежит классу Φ∩Ω, и для неё γ_ψ =0.

Мы не смогли найти точные по порядку неравенства Бернштейна для производных во всех пространствах L_ψ с условием γ_ψ =0. Однако, мы ниже укажем класс пространств L_ψ, в которых удалось доказать неравенства для производных даже с точными константами. Этому классу, в частности, принадлежит наряду с пространством ln(1+L) ещё и важное пространство L_0 с метрикой

$$\|f\|_0 := \int_T \phi(|f(x)|)dx, \quad \phi(x) = \frac{x}{1+x}, \ x > 0,$$

порождающей сходимость по мере. Отметим, что $\gamma_\varphi = 0$.

Но сначала приведём одну общую оценку норм операторов в произвольных пространствах L_ψ.

Обозначим $I_n := \sup\limits_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \dfrac{\|T_n\|_C}{\|T_n\|_{L_1}}$.

Известно [10], что n+1 ≤I_n≤ 2n+1.

Пусть, как и ранее, для фиксированного n A : $\tilde{T}^{2n+1} \to \tilde{T}^{2n+1}$, - оператор с множителями {λ_k; |k|≤n}, и $\|A\|_{1\to 1} := \sup\limits_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \dfrac{\|AT_n\|_1}{\|T_n\|_1}$.

Обозначим ещё через $\overline{\Omega}$ класс всех выпуклых вверх модулей непрерывности $\psi: R^+ \to R^+$.

Теорема 5. *Пусть* $\psi \in \overline{\Omega}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})} M_\psi\left(\max_{|k|\le n} |\lambda_k|\right) \le \| A\|_{\psi,n} \le I_n M_\psi\left(\frac{\| A\|_{1\to 1}}{I_n}\right). \qquad (21)$$

Доказательство. Оценка снизу получена в теореме 2. Для оценки сверху используем неравенство Йенсена для ψ:

$$\| AT_n \|_\psi = \int_T \psi(| AT_n(x)|)dx \le \psi\left(\int_T | AT_n(x)| dx\right) =$$

$$= \psi(\| AT_n \|_1) \le \psi(\| A\|_{1\to 1} \| T_n \|_1). \qquad (22)$$

Из выпуклости вверх ψ следует, что функция $\frac{\psi(x)}{x}$ - убывающая. Поэтому

$$\frac{\psi(| T_n(x)|)}{| T_n(x)|} \ge \frac{\psi(\| T_n \|_C)}{\| T_n \|_C} \ge \frac{\psi(I_n \| T_n \|_1)}{I_n \| T_n \|_1},$$

$$\| T_n \|_\psi = \int_T \psi(| T_n(x)|)dx \ge \int_T | T_n(x)| \frac{\psi(I_n \| T_n \|_1)}{I_n \| T_n \|_1} dx = I_n^{-1}\psi(I_n \| T_n \|_1). \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует (21):

$$\frac{\| AT_n \|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \le \frac{\psi(\| A\|_{1\to 1} \| T_n \|_1)}{I_n^{-1}\psi(I_n \| T_n \|_1)},$$

$$\| A\|_{\psi,n} \le I_n \sup_{0<s<\infty} \frac{\psi(\| A\|_{1\to 1}\, s)}{\psi(I_n s)} = I_n M_\psi\left(\frac{\| A\|_{1\to 1}}{I_n}\right).$$

Теорема 5 доказана.

Если ψ из Ω не является выпуклой вверх, то для наименьшей выпуклой вверх мажоранты $\overline{\psi}$ по лемме Стечкина (см. напр.[11])

$$\psi(x) \le \overline{\psi}(x) \le 2\psi(x).$$

Тогда после очевидных изменений в доказательстве получим для случая произвольной ψ из Ω следующую оценку сверху:

$$\| A\|_{\psi,n} \le 4 I_n M_\psi\left(\frac{\| A\|_{1\to 1}}{I_n}\right). \qquad (24)$$

Введём класс пространств, для которого мы сможем уточнить неравенства (21).

Определение Будем говорить, что ψ принадлежит классу $\overline{\Omega}_1$, если $\psi: R^+ \to R^+$ - выпуклый вверх модуль непрерывности, и выполняется асимптотическое равенство

$$\psi(x) \approx x \quad \text{при } x \to 0. \qquad (25)$$

Теорема 6. *Если* $\psi \in \overline{\Omega}_1$, *то выполняются неравенства*

$$\max_{|k|\le n} |\lambda_k| \le \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\ne 0} \frac{\| AT_n \|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \le \max\{I_n; \| A \|_{1\to 1}\} . \tag{26}$$

В частности, для любого r≥1 (не обязательно целого) при всех n≥1

$$\sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\ne 0} \frac{\| T_n^{(r)} \|_\psi}{\| T_n \|_\psi} = (2\pi n)^r . \tag{27}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу. Так как $\frac{\psi(x)}{x}\downarrow$, то $\frac{\psi(x)}{x} \le \lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x} = 1$, то есть $\psi(x)\le x$. Поэтому $\| T_n \|_\psi \le \| T_n \|_1$.
Рассмотрим полиномы $\delta p_k(x) = \delta\cos(2\pi kx), \quad k = 0,1,...,n, \quad \delta > 0$.
Тогда

$$\frac{\| A(\delta p_k) \|_\psi}{\| \delta p_k \|_\psi} \ge \| \cos(2\pi x) \|_1^{-1} \int_T \frac{\psi(\delta |\lambda_k| |\cos(2\pi x)|)dx}{\delta},$$

$$\| A \|_{\psi,n} \ge \| \cos(2\pi x) \|_1^{-1} \lim_{\delta\to 0} \int_T \frac{\psi(\delta |\lambda_k| |\cos(2\pi x)|)dx}{\delta}.$$

Используя теорему Лебега о мажорированной сходимости, осуществим предельный переход под знаком интеграла. Учитывая (25), получим оценку снизу.

Теперь покажем, что для любой ψ из $\overline{\Omega}_1$

$$M_\psi(y) = y \quad \forall y \ge 1. \tag{28}$$

Тогда оценка сверху будет следовать из (21). Из (25) следует, что

$$M_\psi(y) = \sup_{s>0}\frac{\psi(sy)}{\psi(s)} \ge \lim_{s\to 0}\frac{\psi(sy)}{\psi(s)} = y . \tag{29}$$

С другой стороны, так как $\frac{\psi(x)}{x}\downarrow$, то при y≥1

$$\frac{\psi(sy)}{\psi(s)} = y\frac{\psi(sy)/sy}{\psi(s)/s} \le y,$$

поэтому $M_\psi(y) \le y$. Отсюда и из (29) следует (28).

Теорема 6 доказана.

6. Неравенства для полиномов в разных метриках. Порядок роста величины

$$C(n;r;X,Y) := \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\ne 0} \frac{\| T_n^{(r)} \|_X}{\| T_n \|_Y}$$

при заданном r = 0,1,… и $n\to\infty$, в случае $X=L_p(T)$, $Y=L_q(T)$, $\infty\geq p>q\geq 1$, исследовал С.М. Никольский [10]. Дальнейшие результаты см. в [12]. Мы рассмотрим аналогичную задачу в случае $X=L_1(T)$, $Y=L_\psi(T)$, $\psi\in\Omega$.

Теорема 7. *1. Для любой* $\psi\in\Omega$ *найдётся константа* C_ψ *такая, что справедливы неравенства*

$$\psi(n\|T_n\|_1)\leq C_\psi n\|T_n\|_\psi \tag{30}$$

при всех n *и* T_n.

2. Если $\gamma_\psi>0$, *то найдётся константа* $C_{\psi,1}>0$ *такая, что при всех* n *справедливы неравенства*

$$C_{\psi,1}nM_\psi\left(\frac{1}{n}\right)\leq \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1},T_n\neq 0}\frac{\psi(\|T_n\|_1)}{\|T_n\|_\psi}\leq C_\psi nM_\psi\left(\frac{1}{n}\right)$$

(31)

(здесь C_ψ *– таже, что и в (30)).*

Доказательство. Используем формулу (7):

$$|T_n(x+t)|\leq\frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n}|T_n(t+x_j)||V_n(x-x_j)|$$

Проинтегрируем обе части по переменой x:

$$n\|T_n\|_1\leq\frac{1}{3}\|V_n\|_1\sum_{j=1}^{3n}|T_n(t+x_j)|\ .$$

Отсюда получаем:

$$\psi(n\|T_n\|_1)\leq M_\psi\left(\frac{1}{3}\|V_n\|_1\right)\sum_{j=1}^{3n}\psi(|T_n(t+x_j)|)\ .$$

Теперь проинтегрируем по переменой t, и получим неравенство

$$\psi(n\|T_n\|_1)\leq M_\psi\left(\frac{1}{3}\|V_n\|_1\right)3n\|T_n\|_\psi\ , \tag{32}$$

справедливое для любого ядра V_n вида (4). В частности, пусть V_n – классическое ядро Валле-Пуссена. Известно [3], что $\sup\{\|V_n\|_1;\ n\in N\}=K<\infty$. Тогда из (32) получаем (30) с константой $C_\psi:=3M_\psi(\frac{1}{3}K)$.

Из (30) следует верхняя оценка в (31):

$$\psi(\|T_n\|_1)=\psi\left(n\left\|\frac{1}{n}T_n\right\|_1\right)\leq C_\psi n\left\|\frac{1}{n}T_n\right\|_\psi\leq C_\psi nM_\psi\left(\frac{1}{n}\right)\|T_n\|_\psi\ .$$

Таким образом верхняя оценка в (31) справедлива и в случае $\gamma_\psi=0$.

Пусть теперь $\gamma_\psi>0$, и ядра V_m определяются функцией α из $P\Sigma\cap C^\infty(R)$. Тогда для любого c>0 с помощью формулы суммирования Пуассона получаем:

$$\| cV_m \|_\psi \le \int_R \psi(cm\,|\,\hat{\alpha}(my)\,|)dy = \frac{1}{m}\int_R \psi(cm\,|\,\hat{\alpha}(y)\,|)dy \le$$
$$\le \frac{1}{m}\psi(cm)\int_R M_\psi(|\,\hat{\alpha}(y)\,|)dy = K_1\frac{1}{m}\psi(cm),$$

(33)

где $K_1 := \int_R M_\psi(|\,\hat{\alpha}(y)\,|)dy < \infty$.

Для оценки снизу в (31) достаточно ограничиться случаем n≥3. Положим $T_n = cV_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, используем (33) и тот факт, что $\|V_m\|_1>1$:

$$\sup_{T_n\in T^{2n+1}, T_n\ne 0}\frac{\psi(\|T_n\|_1)}{\|T_n\|_\psi} \ge \sup_{c>0}\frac{\psi\left(c\left\|V_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\|_1\right)}{\left\|cV_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\|_\psi} \ge \sup_{c>0}\frac{\psi(c)}{K_1\left[\frac{n}{2}\right]^{-1}\psi(c\left[\frac{n}{2}\right])} \ge$$
$$\ge \frac{n}{3K_1}\sup_{c>0}\frac{\psi(c)}{\psi(c\frac{n}{2})} = \frac{n}{3K_1}M_\psi\left(\frac{2}{n}\right) \ge \frac{1}{3K_1}nM_\psi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *1. Найдутся константы $C_\psi<\infty$ и $C_{\psi,2}>0$ такие, что для любого оператора A с множителями $\{\lambda_k\,;|k|\le n\}$ справедливы неравенства*

$$C_{\psi,2}nM_\psi\left(\frac{1}{n}\max_{|k|\le\frac{n}{2}}|\,\lambda_k\,|\right) \le \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\ne 0}\frac{\psi(\|AT_n\|_1)}{\|T_n\|_\psi} \le C_\psi nM_\psi\left(\frac{1}{n}\|A\|_{1\to 1}\right).$$

(34)

При этом правое неравенство выполняется $\forall\psi\in\Omega$, а левое – при условии $\gamma_\psi>0$.

2. Если $\psi\in\overline{\Omega}_1$, то

$$C_{\psi,2}\max_{|k|\le\frac{n}{2}}|\,\lambda_k\,| \le \sup_{T_n\in\tilde{T}^{2n+1}, T_n\ne 0}\frac{\psi(\|AT_n\|_1)}{\|T_n\|_\psi} \le C_\psi\max\{n;\|A\|_{1\to 1}\}\ .$$

(35)

Доказательство. Правое неравенство в (34) следует из (30) (с той же константой C_ψ):

$$\psi(\| AT_n \|_1) \le \psi(\| A\|_{1\to 1} \| T_n \|_1) = \psi\left(\left(\frac{1}{n}\| A\|_{1\to 1}\right)(n\| T_n \|_1)\right) \le$$

$$\le M_\psi\left(\frac{1}{n}\| A\|_{1\to 1}\right)\psi(n\| T_n \|_1) \le M_\psi\left(\frac{1}{n}\| A\|_{1\to 1}\right)C_\psi n\| T_n \|_\psi .$$

Для оценки снизу в (34) достаточно ограничиться случаем n≥3. Положим $T_n = cV_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, c>0, и учтём, что при $|k| \le \left[\frac{n}{2}\right]$

$$\left\| AV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_1 \ge \left| \int_T AV_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x) e^{i2\pi kx} dx \right| = |\lambda_k| \ .$$

Кроме того, если γ_ψ >0, то можно использовать (33). В результате получим левую часть (34):

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi(\| AT_n \|_1)}{\| T_n \|_\psi} \ge \sup_{c>0} \frac{\psi\left(\left\| AcV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_1\right)}{\left\| cV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_1} \ge$$

$$\ge \sup_{c>0} \frac{\psi\left(c \max_{|k| \le \left[\frac{n}{2}\right]} |\lambda_k|\right)}{K_1 \left[\frac{n}{2}\right]^{-1} \psi\left(c\left[\frac{n}{2}\right]\right)} \ge C_\psi n M_\psi\left(\frac{1}{n} \max_{|k| \le \left[\frac{n}{2}\right]} |\lambda_k|\right).$$

Если же $\psi \in \overline{\Omega}_1$, то $\psi(x) \le x$, поэтому

$$\left\| cV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_{\psi} \le \left\| cV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_{1} \le cK,$$

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi(\| AT_n \|_1)}{\| T_n \|_{\psi}} \ge \sup_{c} \frac{\psi\left(\left\| AcV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_1 \right)}{\left\| cV_{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\|_1} \ge$$

$$\ge \lim_{c \to 0} \frac{\psi\left(c \max\limits_{|k| \le \left[\frac{n}{2}\right]} |\lambda_k| \right)}{cK} = \frac{1}{K} \max_{|k| \le \frac{n}{2}} |\lambda_k|.$$

Правая часть (35) следует из того, что $M_{\psi}(y) \le \max(1; y)$.

Теорема 8 доказана.

Следствие 4.

1. Если $\gamma_{\psi}>0$, то для $r\in [0,\infty)$

$$C'_{\psi,2}(r) n M_{\psi}(n^{r-1}) \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi(\| T_n^{(r)} \|_1)}{\| T_n \|_{\psi}} \le C'_{\psi}(r) n M_{\psi}(n^{r-1}) .$$

2.Если $\psi \in \overline{\Omega}_1$, то для $r\in [1,\infty)$

$$C'_{\psi,2}(r) n^r \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi(\| T_n^{(r)} \|_1)}{\| T_n \|_{\psi}} \le C'_{\psi}(r) n^r .$$

3. Для любой $\psi \in \Omega$ при всех $k,r = 0,1,2,\ldots$, и всех $h\in (0,1]$, $n\in N$

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi\left(h^{-k} \| \Delta_h^k T_n^{(r)} \|_1 \right)}{\| T_n \|_{\psi}} \le C_{\psi}(r,k) n M_{\psi}(n^{r-1} \min(n^k, h^{-k})) .$$

[1] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой. // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №1. – С.122-133.

[2] *Пичугов С.А*. О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн.- в печати.

[3] *Тиман А.Ф*. Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. -624с.

[4] *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А*. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. –Киев: Наукова думка, 1992. -304с.

[5] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1975.-98, №3. – С.395-415.

[6] *Иванов В.И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках. // Мат. заметки. – 1975. – 18, №4. – С.489-498.

[7] *Арестов В.В*. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. // Известия АН СССР. Серия мат. – 1982. – 45, №1. – С.3-22.

[8] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М*. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978.-400с.

[9] *Стейн И., Вейс Г*. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.-330с.

[10] *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций многих переменных. // Труды Мат. института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1951. – 38. – С.244-278.

[11] *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. -М.: Наука, 1987.-424с.

[12] *Арестов В.В*. О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов. // Мат. заметки. – 1980. – 27, №4. – С.539-547.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой

В пространствах $L_{\psi}(\mathrm{T})$ периодических функций с метрикой $\rho(f,0)_{\psi}=\int_{\mathrm{T}}\psi(|f(x)|)dx$, где ψ - функция типа модуля непрерывности, исследуются аналоги классических неравенств Бернштейна для норм производных и приращений тригонометрических полиномов.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой

In the $L_{\psi}(\mathrm{T})$ space of periodic functions with metrics $\rho(f,0)_{\psi}=\int_{T}\psi(|f(x)|)dx$, where ψ is the function of the continuity modulus type, classical analogs of inequality ,worked out by Bernstein, for rate of derivatives and trigonometrical polynomial increments are analysed.