

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний університет
науки і технологій

Кафедра «Технічної механіки»

В авторській редакції

МЕХАНІКА
РОЗДІЛ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Навчально-методичні рекомендації
для виконання контрольних робіт

Електронне видання

Дніпро
2025

УДК 531:621.1(076.1)

М 55

Упорядники:

Н. В. Каряченко, В. В. Поворотній

Електронне видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми

144 «Теплоенергетика»

Протокол № 6 від 18.03.2025 р.

М 55 **Механіка** : навчально-методичні рекомендації для виконання контрольних робіт, розділ «Теоретична механіка» для студентів спеціальності 144 – теплоенергетика заочної форми навчання (бакалаврський рівень) / упоряд. Н. В. Каряченко, В. В. Поворотній ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2025. – 36 с.

Навчально-методичні рекомендації для виконання контрольних робіт з дисципліни «Механіка», розділ «Теоретична механіка», містять 6 задач зі статички, кінематики та динаміки з прикладами розв'язання даних задач. Є список рекомендованої літератури, яким варто скористатися для поглибленого вивчення матеріалу.

Завдяки детальному розгляду й засвоєнню методики розв'язання задач видання сприяє розвитку навичок виконання інженерних розрахунків, допомагає скоротити час до підготовки контрольних робіт.

Призначені для здобувачів освіти заочної форми навчання спеціальності 144 – теплоенергетика (бакалаврський рівень).

Іл. 66. Бібліогр.: 6 найм.

© Каряченко Н. В. та ін., упорядкування, 2025

© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ.....	5
2. ЗМІСТ ЗАВДАНЬ, ВИБІР ВАРІАНТІВ, ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБІТ, ЗАГАЛЬНІ ПОЯСНЕННЯ ДО ТЕКСТУ	6
3. ЗАДАЧІ ДО КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	8
3.1. СТАТИКА	8
3.2. КІНЕМАТИКА	16
3.3. ДИНАМІКА	25
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	35

ВСТУП

Механіка є фундаментальною дисципліною фізико-математичного циклу, яка вивчає взаємодію тіл. Для якісної підготовки переважної більшості фахівців технічних напрямків необхідні базові знання в області механіки. Це є фундаментом, без якого не можливо повноцінно опанувати прикладні дисципліни, такі як, теорія машин і механізмів, деталі машин і т.п. У зв'язку з оновленням робочих програм і навчальних планів потребують корегування і домашні завдання, особливо для студентів безвідривної форми навчання. Самостійне вивчення дисципліни «Механіка», розділ «Теоретична механіка», неможливо без вирішення комплексних задач по всіх розділах, особливо для студентів-заочників. Наведені методичні вказівки та індивідуальні завдання призначені для студентів спеціальності 144 – теплоенергетика.

Індивідуальні завдання включають дві задачі з розділу «Статика» (С1, С2), дві комплексні задачі з розділу «Кінематика» (К1, К2), одна комплексна задача з розділу «Динаміка точки» (Д1) і одна комплексна задача з розділу «Динаміка механічної системи» (Д2). Для кожної із задач приведені приклади розв'язання найбільш типових випадків для конкретного розділу теоретичної механіки. Наводяться необхідні вказівки і нюанси при вирішенні задач.

Дані навчально-методичні рекомендації та індивідуальні завдання складені з використанням і на основі матеріалів видання «Теоретична механіка: Методичні вказівки та контрольні завдання для студентів-заочників енергетичних, гірничих, металургійних, електроприладобудування та автоматизації, технологічних спеціальностей, а також геологічних, електротехнічних, електронної техніки та автоматики, хіміко-технологічних та інженерно-економічних спеціальностей ВНЗ» / Л.І. Котова, Р.І. Надєєва, С.М. Тарг та ін. Під ред. С.М. Тарга// 4-е вид.: Вища шк., 1988. – 64 с.».

Викладені задачі за схемами і методами вирішення часто перегукуються із завданнями бакалаврів спеціальності «Теплоенергетика» у наступних дисциплінах, які базуються на основних представленнях теоретичної механіки.

Матеріали методичних вказівок можуть бути корисні не тільки студентам заочникам, а й викладачам, які читають курс теоретичної механіки студентам усіх спеціальностей та різних форм навчання, а також науковим співробітникам, що стикаються у своїй діяльності з вирішенням подібного роду задач.

1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

В курсі теоретичної механіки студенти вивчають три її розділи: статику, кінематику і динаміку.

1. Для вивчення курсу необхідно мати відповідну математичну підготовку. В усіх розділах курсу, починаючи зі статики, широко використовується векторна алгебра. Необхідно вміти обчислювати проекції векторів на координатні осі, знаходити геометрично (побудовою векторного трикутника або багатокутника) і аналітично (за проекціями на координатні осі) суму векторів, обчислювати скалярний і векторний добутки двох векторів і знати властивості цих добутків, а в кінематиці і динаміці – диференціювати вектори. Треба також вміти вільно користуватися системою прямокутних декартових координат на площині і в просторі, знати, що таке одиничні вектори (орти) цих осей і як виражаються складові вектора по координатних осях за допомогою ортів.

Для вивчення кінематики треба абсолютно вільно вміти диференціювати функції одного змінного, будувати графіки цих функцій, бути знайомим з поняттями про природний тригранник, кривизну кривої і радіус кривизни, знати основи теорії кривих 2-го порядку, що вивчається в аналітичній геометрії.

Для вивчення динаміки треба вміти знаходити інтеграли (невизначені і визначені) від найпростіших функцій, обчислювати частинні похідні і повний диференціал функцій декількох змінних, а також вміти інтегрувати диференціальні рівняння 1-го порядку зі змінними, що розділяються і лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

2. При вивченні матеріалу курсу за підручником потрібно насамперед усвідомити суть кожного викладеного там питання.

Вивчати матеріал рекомендується за темами або по главам (параграфам) підручника. Спочатку слід прочитати весь матеріал теми (параграфу), особливо не затримуючись на те, що здалося не зовсім зрозумілим: часто це стає зрозумілим з подальшого. Потім треба повернутися до місць, які викликали труднощі і уважно розібратися в тому, що було неясно.

Особливу увагу при повторному читанні зверніть на формулювання відповідних визначень, теорем і т.п. (вони зазвичай бувають набрані в підручнику курсивом); в точних формулюваннях, як правило, суттєве кожне слово і дуже корисно зрозуміти, чому це положення сформульовано саме так.

Однак не слід намагатися заучувати формулювання; важливо зрозуміти їх зміст і вміти викласти результат своїми словами.

При вивченні курсу особливу увагу слід приділити придбанню навичок розв'язання задач. Для цього, вивчивши матеріал даної теми, треба спочатку обов'язково розібратися в розв'язаннях відповідних задач, які наводяться в підручнику, звернувши особливу увагу на навчально-методичні рекомендації щодо їх вирішення. Потім постарайтеся вирішити самостійно кілька аналогічних задач зі збірника задач з теоретичної механіки і після цього вирішіть відповідну задачу з контрольного завдання.

Слід мати на увазі, що в різних підручниках матеріал може викладатися в різній послідовності. Тому відповідь на будь-яке питання може виявитися в іншій главі підручника, але на вивченні курсу в цілому це, звичайно, ніяк не позначиться.

Загальні рекомендації щодо виконання контрольних завдань наводяться нижче. Їх треба прочитати обов'язково і ними керуватися. Крім того, до кожної задачі даються конкретні навчально-методичні рекомендації щодо її вирішення і наводиться приклад розв'язання.

2. ЗМІСТ ЗАВДАННЯ, ВИБІР ВАРІАНТІВ, ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ, ЗАГАЛЬНІ ПОЯСНЕННЯ ДО ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенти виконують одне контрольне завдання, яке включає: задачі С1, С2 (розділ «Статика»), задачі К1, К2 (розділ «Кінематика»), задачі Д1, Д2 (розділ «Динаміка»).

До кожної задачі дається 10 рисунків і таблиця (з тим же номером, що і задача), що містить додаткові до тексту задачі умови. Нумерація рисунків подвійна, при цьому номером рисунка є цифра, що стоїть після крапки. Наприклад, рис. С1.4 – це рис. 4 до задачі С1 і т.д. (В тексті задачі при повторних посиланнях на рисунок пишеться просто рис. 4 і т.д.). Номери умов від 0 до 9 проставлені в 1-му стовпці (або в 1-му рядку) таблиці.

Студент у всіх задачах вибирає номер рисунка по передостанній цифрі шифру, а номер умови в таблиці – за останньою; наприклад, якщо шифр закінчується числом 46, то бере рис. 4 і умови № 6 з таблиці.

Креслення виконується з урахуванням умов вирішуваного варіанту задачі; на ньому всі кути, діючі сили, число тіл і їх розташування на кресленні повинні відповідати цим умовам. В результаті в цілому ряді задач креслення вийде більш простим, ніж загальне.

Креслення повинно бути акуратним і наочним, а його розміри повинні дозволяти ясно показати всі сили або вектори швидкості і прискорення та ін.; показувати всі ці вектори і координатні осі на кресленні, а також вказувати одиниці одержуваних величин потрібно обов'язково.

Рішення задач необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми застосовуються, звідки виходять ті чи інші результати і т.п.) і докладно викладати весь хід розрахунків.

При читанні тексту кожної задачі врахувати наступне. Більшість рисунків дано без дотримання масштабу. На рисунках до задач С1 – С2 і Д1 – Д2 всі лінії, паралельні рядкам, вважаються горизонтальними, а перпендикулярні рядкам – вертикальними і це в тексті задачі спеціально не зазначається. Також вважається, що всі нитки (мотузки, троси) є нерозтяжними і невагомими, нитки, перекинуті через блок, по блоку не ковзають, катки та колеса (в кінематиці і динаміці) котяться по площинах без ковзання. Всі в'язі вважаються ідеальними.

Коли тіла на рисунках пронумеровані, то в тексті задачі і в таблиці P_1, l_1, r_1 і т.п. означають вагу або розміри тіла 1, P_2, l_2, r_2 – тіла 2 і т.д. Аналогічно в кінематиці і динаміці v_B, a_B позначають швидкість і прискорення точки B , v_C, a_C – точки C ; ω_1, ε_1 – кутову швидкість і кутове прискорення тіла 1, ω_2, ε_2 – тіла 2 і т.д. У кожній задачі подібні позначення можуть теж спеціально не обмовлятися.

Слід також мати на увазі, що деякі з заданих в умовах задач величин (розмірів) при вирішенні тих чи інших варіантів можуть не знадобитися, вони потрібні для вирішення інших варіантів задач. З усіх пояснень в тексті задач звертайте увагу тільки на ті що відносяться до вашого варіанту, тобто до номера вашого рисунка або вашої умови в таблиці.

Навчально-методичні рекомендації щодо розв'язання задач, що входять в контрольне завдання, даються для кожної задачі після викладу її тексту під рубрикою "Рекомендації"; потім дається приклад розв'язання аналогічної задачі. Мета прикладу – роз'яснити хід вирішення, але не відтворити його повністю. Тому в ряді випадків проміжні розрахунки опускаються.

Але при виконанні задачі все перетворення і числові розрахунки

повинні бути обов'язково послідовно виконані з необхідними поясненнями; в кінці повинні бути дані відповіді.

3. ЗАДАЧІ ДО КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

3.1. СТАТИКА

ЗАДАЧА С1

Жорстка рама (рис. С1.0–С1.9 табл. С1) закріплена в точці A шарнірно, а в точці B прикріплена або до невагомому стержню BB_1 , або до шарнірної опори на катках; стержень прикріплений до рами і до нерухомої опори шарнірами.

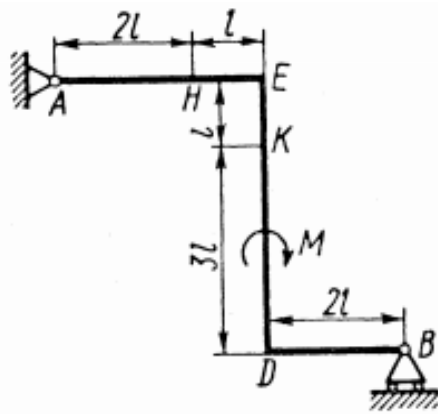


Рис. С1.0

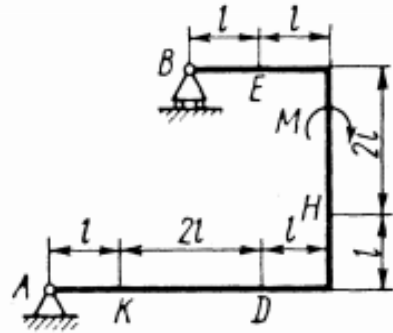


Рис. С1.1

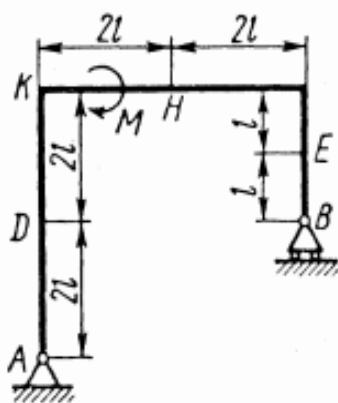


Рис. С1.2

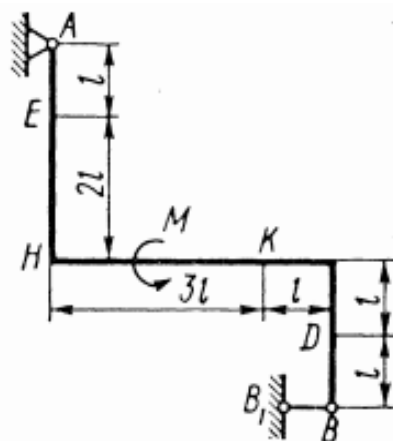


Рис. С1.3

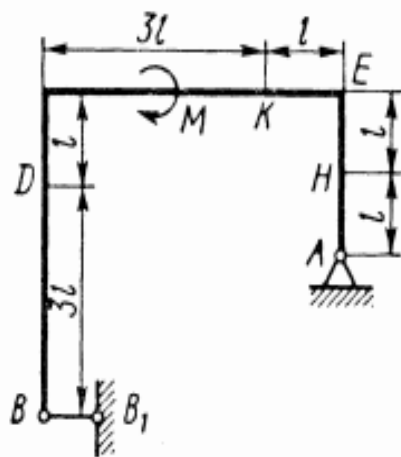


Рис. С1.4

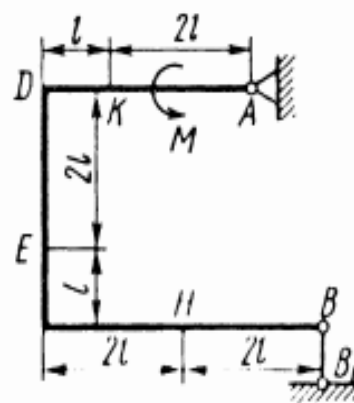


Рис. С1.5

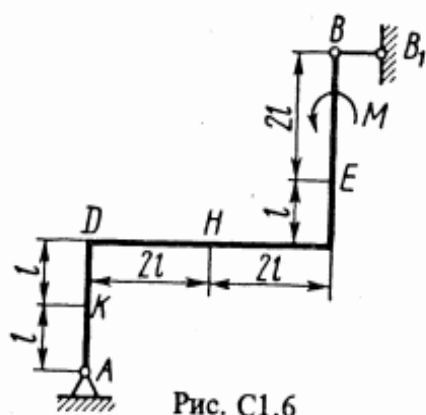


Рис. С1.6

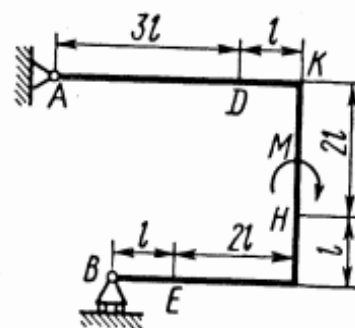


Рис. С1.7

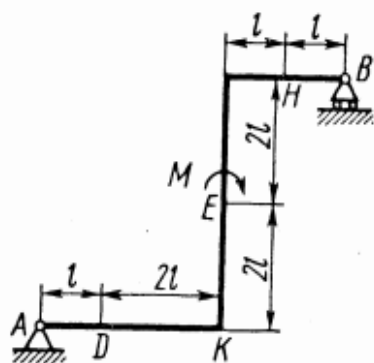


Рис. С1.8

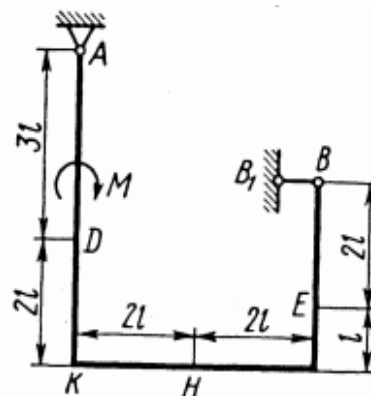
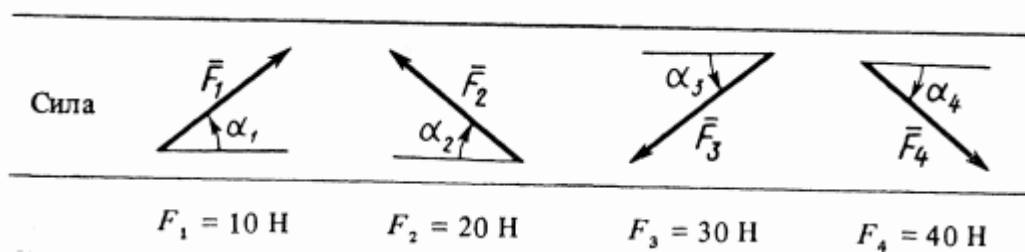


Рис. С1.9



Таблиця С1

Номер умови	Точка приклад.	α_1^0	Точка приклад.	α_2^0	Точка приклад.	α_3^0	Точка приклад.	α_4^0
0	–	–	<i>D</i>	60	<i>E</i>	45	–	–
1	<i>K</i>	30	–	–	–	–	<i>H</i>	60
2	–	–	<i>H</i>	45	<i>K</i>	30	–	–
3	<i>D</i>	60	–	–	–	–	<i>E</i>	30
4	–	–	<i>K</i>	30	<i>E</i>	60	–	–
5	<i>H</i>	60	–	–	<i>D</i>	30	–	–
6	–	–	<i>E</i>	30	–	–	<i>K</i>	45
7	<i>D</i>	45	–	–	<i>H</i>	60	–	–
8	–	–	<i>H</i>	60	–	–	<i>D</i>	30
9	<i>E</i>	30	–	–	–	–	<i>K</i>	60

На раму діють пара сил з моментом $M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ і дві сили, значення яких, напрямки та точки прикладання вказані в таблиці (наприклад, в умові №1 на раму діє сила $F_1 = 10 \text{ Н}$ під кутом 30° до горизонтальної осі, прикладена в точці *K*, і сила $F_4 = 40 \text{ Н}$ під кутом 60° до горизонтальної осі, прикладена в точці *H*).

Визначити реакції в'язів в точках *A* і *B*, що викликаються заданими навантаженнями. При остаточних підрахунках прийняти $l = 0,5 \text{ м}$.

Рекомендації. Задача С1 – на рівновагу тіла під дією плоскої системи сил [1, 5]. Складаючи рівняння рівноваги, врахувати, що рівняння моментів буде простішим (містити менше невідомих), якщо брати моменти відносно точки, де перетинаються лінії дії двох реакцій в'язів (в даному випадку відносно точки *A*). При обчисленні моменту сили \vec{F} часто зручно розкласти її на складові \vec{F}' і \vec{F}'' , для яких плечі легко обчислюються, зокрема на складові, паралельні координатним осям, і скористатися теоремою Варіньона; тоді $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}') + m_o(\vec{F}'')$.

Приклад С1. Жорстка пластина *ABCD* (рис. С1) має в точці *A* нерухому шарнірну опору, а в точці *B* – рухому шарнірну опору на катках. Всі діючі навантаження і розміри показані на рисунку.

Дано: $F = 25 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18 \text{ кН}$, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\beta = 30^\circ$, $l = 0,5 \text{ м}$.

Визначити: реакції в точках *A* і *B*, викликані діючими навантаженнями.

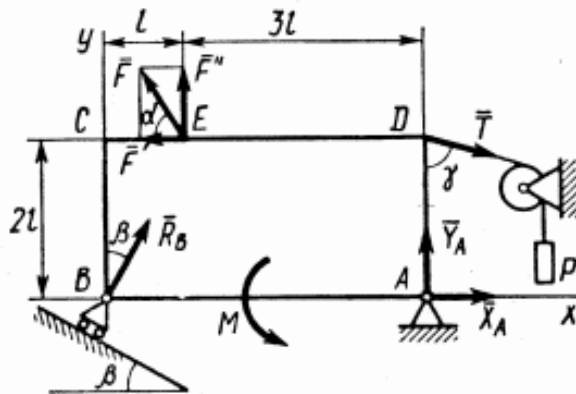


Рис. С1

Розв'язання.

1. Розглянемо рівновагу пластини. Проведемо координатні осі x і y і зобразимо діючі на пластину сили: силу \vec{F} , пару сил з моментом M , натяг троса \vec{T} (по модулю $T = P$) і реакції в'язів $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$. Реакцію нерухомої шарнірної опори A зображуємо двома її складовими, реакція шарнірної опори на катках спрямована перпендикулярно опорній площині.

2. Щоб визначити опорні реакції для отриманої довільної плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги.

При обчисленні моменту сили \vec{F} відносно точки A скористаємося теоремою Варіньона, тобто розкладемо силу \vec{F} на складові \vec{F}' , \vec{F}'' ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$) і врахуємо, що $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$.

Одержимо:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; M - R_B \cos \beta \cdot 4l + F \cos \alpha \cdot 2l - F \sin \alpha \cdot 3l - T \sin \gamma \cdot 2l = 0. \quad (3)$$

Підставивши в складені рівняння числові значення заданих величин і вирішивши ці рівняння, визначимо шукані реакції.

Відповідь: $X_A = -8,5$ кН, $Y_A = -23,3$ кН, $R_B = 7,3$ кН. Знаки вказують, що сили \vec{X}_A і \vec{Y}_A спрямовані протилежно показаним на рис. С1.

ЗАДАЧА С2

Однорідна прямокутна плита вагою $P = 5$ кН зі сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$, закріплена в точці A сферичним шарніром, а в точці B циліндричним шарніром (підшипником) і утримується в рівновазі невагомим стержнем CC' (Рис. С2.0–С2.9).

На плиту діють пара сил з моментом $M = 6$ кН·м, що лежить в площині плити, і дві сили. Значення цих сил, їх напрямки та точки прикладення вказані в табл. С2; при цьому сили \bar{F}_1 і \bar{F}_4 лежать в площинах, паралельних площині xu , сила \bar{F}_2 – в площині, паралельній xz , сила \bar{F}_3 – в площині, паралельній yz . Точки прикладення сил (D, E, H) знаходяться в серединах сторін плити.

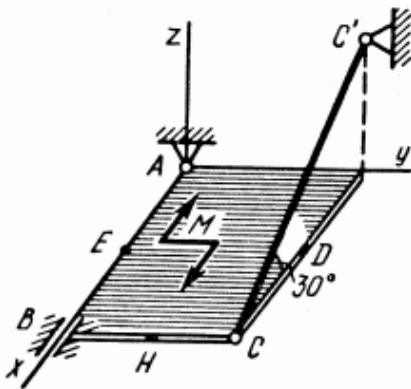


Рис. С2.0

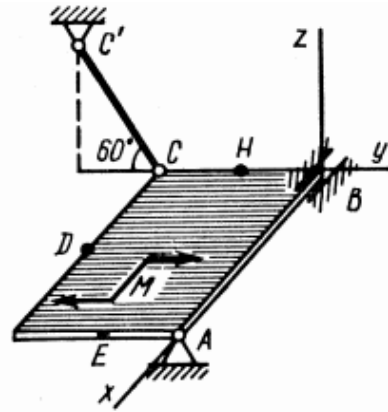


Рис. С2.1

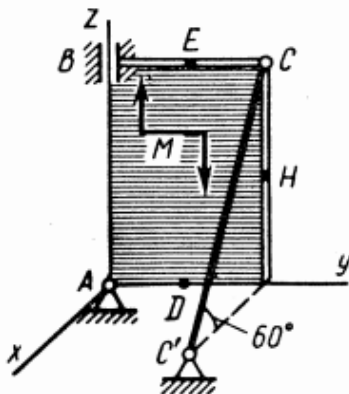


Рис. С2.2

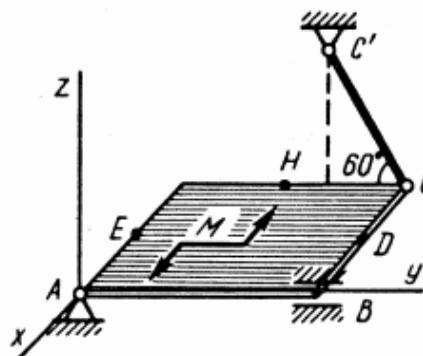


Рис. С2.3

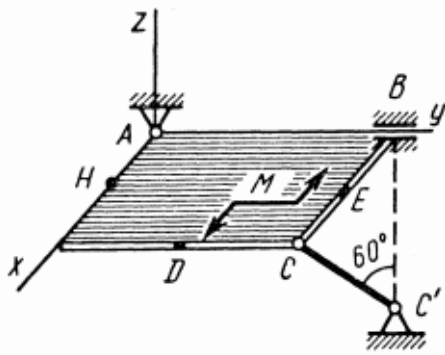


Рис. С2.4

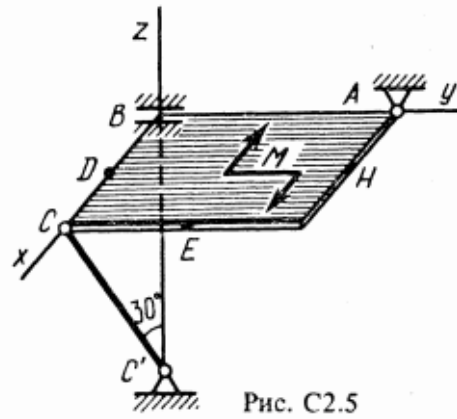


Рис. С2.5

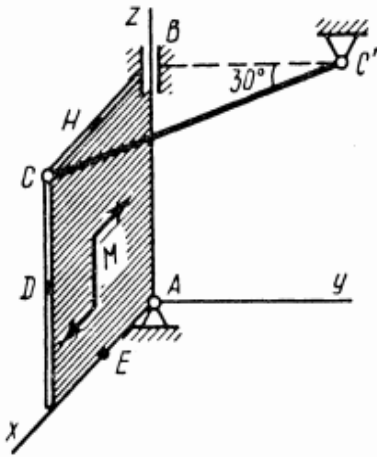


Рис. С2.6

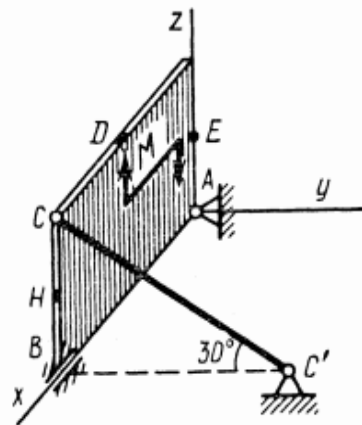


Рис. С2.7

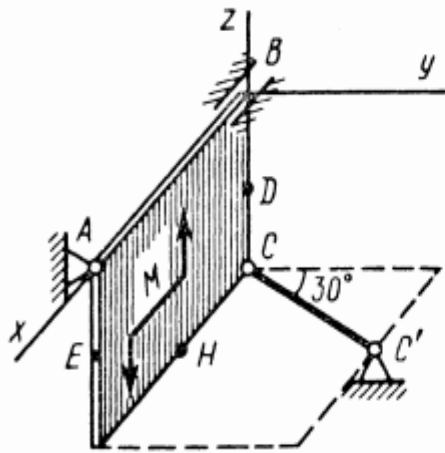


Рис. С2.8

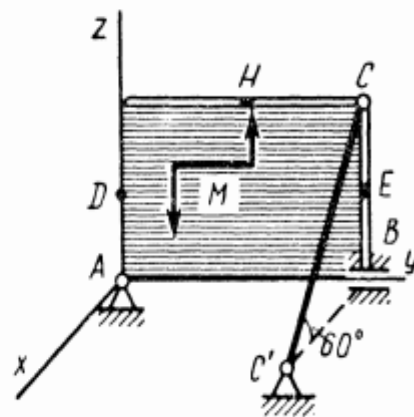
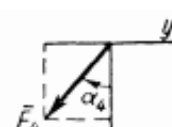
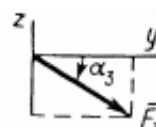
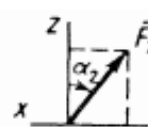
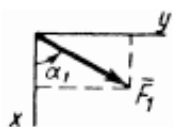


Рис. С2.9



сила

$$F_1 = 4 \text{ кН}$$

$$F_2 = 6 \text{ кН}$$

$$F_3 = 8 \text{ кН}$$

$$F_4 = 10 \text{ кН}$$

Таблиця С2

Номер умови	Точка приклад.	α_1°	Точка приклад.	α_2°	Точка приклад.	α_3°	Точка приклад.	α_4°
0	<i>D</i>	60	–	–	<i>E</i>	0	–	–
1	<i>H</i>	90	<i>D</i>	30	–	–	–	–
2	–	–	<i>E</i>	60	–	–	<i>D</i>	90
3	–	–	–	–	<i>E</i>	30	<i>H</i>	0
4	<i>E</i>	0	–	–	<i>H</i>	60	–	–
5	–	–	<i>D</i>	60	<i>H</i>	0	–	–
6	–	–	<i>H</i>	30	–	–	<i>D</i>	90
7	<i>E</i>	30	<i>H</i>	90	–	–	–	–
8	–	–	–	–	<i>D</i>	0	<i>E</i>	60
9	–	–	<i>E</i>	90	<i>D</i>	30	–	–

Визначити реакції в'язів в точках *A*, *B* і *C*. При підрахунках прийняти $l = 0,8$ м.

Рекомендації. Задача С2 – на рівновагу тіла під дією просторової системи сил [1, 5]. При її розв'язанні врахувати, що реакція сферичного шарніра (або підп'ятника) має три складові, а реакція циліндричного шарніра (підшипника) – дві складові, що лежать в площині, перпендикулярній осі шарніра. При обчисленні моментів сили \vec{F} теж часто зручно розкласти її на складові \vec{F}' і \vec{F}'' , паралельні координатним осям; тоді, по теоремі Варіньона $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$ і т.д.

Приклад С2. Вертикальна прямокутна плита вагою P (рис. С2) закріплена сферичним шарніром в точці *A*, циліндричним (підшипником) в точці *B* і невагомим стержнем DD' , що лежить в площині, паралельній площині yz . На плиту діють сила \vec{F}_1 (в площині xz), сила \vec{F}_2 (паралельна осі y) і пара сил з моментом M (в площині плити).

Дано: $F = 5$ кН, $M = 3$ кН·м, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 7,5$ кН, $\alpha = 30^\circ$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $CE = 0,5 AB$, $BK = 0,5 BC$.

Визначити: реакції опор *A*, *B* і стержня DD' .

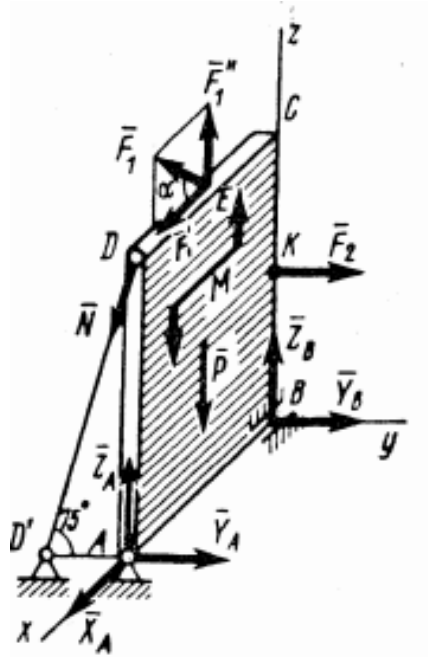


Рис. С2

Розв'язання.

1. Розглянемо рівновагу плити. На неї діють задані сили \bar{P} , \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , і пара сил з моментом M , а також реакції в'язів. Реакцію сферичного шарніра розкладемо на три складові \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , циліндричного (підшипника) – на дві складові \bar{Y}_B , \bar{Z}_B (в площині, перпендикулярній осі підшипника), реакцію \bar{N} стержня направимо уздовж стержня, припускаючи, що він розтягнутий.

2. Для визначення шести невідомих реакцій в'язів складемо шість рівнянь рівноваги діючої на плиту довільної просторової системи сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0, X_A + F_1 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, Y_A + Y_B + F_2 - N \cos 75^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0, Z_A + Z_B - P - N \sin 75^\circ + F_1 \sin \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0, -F_2 \cdot BK + N \cos 75^\circ \cdot BC = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0, P \cdot (AB/2) + F_1 \cos \alpha \cdot BC - F_1 \sin \alpha \cdot (AB/2) - Z_A \cdot AB + N \sin 75^\circ \cdot AB + M = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0, Y_A \cdot AB - N \cos 75^\circ \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для визначення моменту сили \bar{F}_1 відносно осі y розкладаємо \bar{F}_1 на складові \bar{F}'_1 і \bar{F}''_1 , паралельні осям x і z ($F'_1 = F_1 \cos \alpha$, $F''_1 = F_1 \sin \alpha$), і застосуємо теорему Варіньона (див. рекомендації). Аналогічно можна

поступити при визначенні моментів реакції \bar{N} .

Підставивши в складені рівняння числові значення всіх заданих величин і вирішивши потім ці рівняння, знайдемо, чому дорівнюють шукані реакції.

Відповідь: $X_A = -5,2$ кН, $Y_A = 3,8$ кН, $Z_A = 28,4$ кН, $Y_B = -7,5$ кН, $Z_B = -12,4$ кН, $N=14,5$ кН. Знаки вказують, що сили \bar{X}_A , \bar{Y}_B і \bar{Z}_B спрямовані протилежно показаним на рис. С2.

3.2. КІНЕМАТИКА

ЗАДАЧА К1

Точка B рухається в площині xu (рис. К1.0–К1.9, табл. К1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівняннями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, де x і y виражені в сантиметрах, t – у секундах.

Знайти рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити швидкість і прискорення точки, а також її дотичне і нормальне прискорення і радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Залежність $x = f_1(t)$ вказана безпосередньо на рисунках, а залежність $y = f_2(t)$, дана в табл. К1 (для рис. 0–2 в стовпці 2, для рис. 3–6 в стовпці 3, для рис. 7–9 в стовпці 4). Як і в задачах С1, С2, номер рисунка вибирається по передостанній цифрі шифру, а номер умови в табл. К1 – за останньою.

Рекомендації. Задача К1 відноситься до кінематики точки і вирішується за допомогою формул, за якими визначаються швидкість і прискорення точки в прямокутній декартовій системі координат (координатний спосіб завдання руху точки), а також формул, за якими визначаються дотичне і нормальне прискорення точки [2].

У цій задачі всі шукані величини потрібно визначити тільки для моменту часу $t_1=1$ с.

У деяких варіантах задач при визначенні траєкторії або при подальших розрахунках (для їх спрощення) слід врахувати відомі з тригонометрії формули: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Номер умови	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$4 - 9\cos(\pi t/6)$	$t^2 - 2$	$-4\cos(\pi t/3)$
1	$2 - 3\cos(\pi t/3)$	$8\cos(\pi t/4)$	$10\sin(\pi t/6)$
2	$4 - 6\cos^2(\pi t/6)$	$4 + 2t^2$	$12\sin^2(\pi t/6)$
3	$12\cos(\pi t/6)$	$2(t+1)^2$	$2 - 4\sin(\pi t/6)$
4	$9\cos(\pi t/3) + 5$	$2 + 2\sin(\pi t/4)$	$12\cos(\pi t/3) + 13$
5	$-10\cos(\pi t/6)$	$3t^2 - 2$	$3\sin(\pi t/6)$
6	$8\cos(\pi t/6) - 3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2(\pi t/6) - 14$
7	$-9\cos^2(\pi t/6)$	$3 - 4\cos(\pi t/4)$	$6\cos(\pi t/3)$
8	$6\cos(\pi t/3) - 4$	$2t^3$	$4 - 9\sin(\pi t/6)$
9	$2 - 2\cos(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/4)$	$8\cos(\pi t/3) + 6$

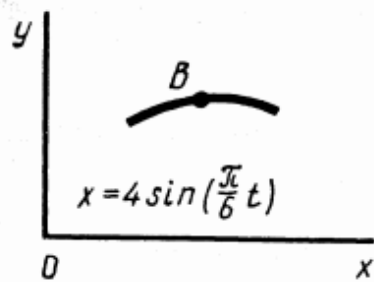


Рис. К1.0

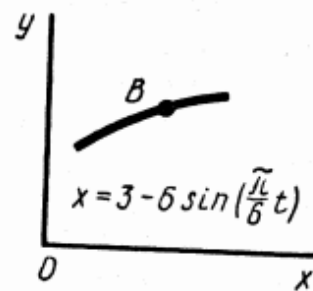


Рис. К1.1

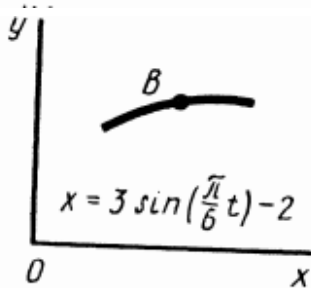


Рис. К1.2

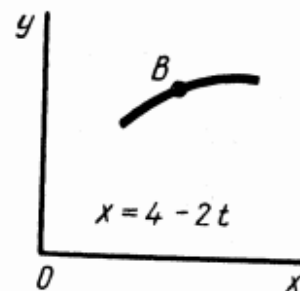


Рис. К1.3

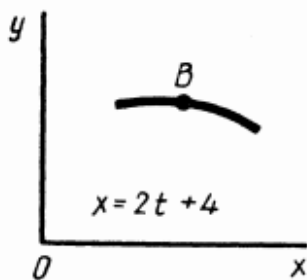


Рис. К1.4

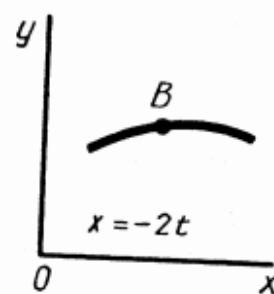


Рис. К1.5

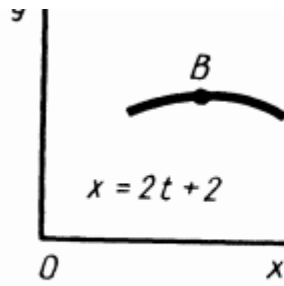


Рис. К1.6

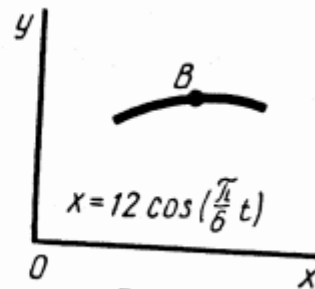


Рис. К1.7

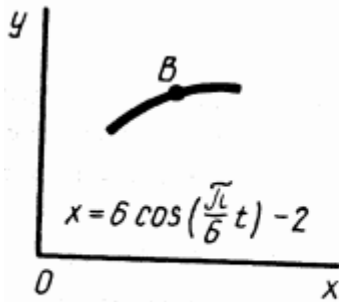


Рис. К1.8

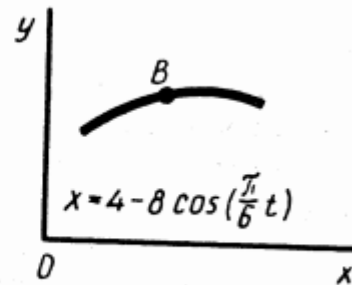


Рис. К1.9

Приклад К1. Дано рівняння руху точки в площині xOy :

$$x = -2\cos(\pi t/4) + 3, \quad y = 2\sin(\pi t/8) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Визначити рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 1$ с знайти швидкість і прискорення точки, а також її дотичне і нормальне прискорення і радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання.

1. Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо з заданих рівнянь руху час t . Оскільки t входить в аргументи тригонометричних функцій, де один аргумент вдвічі більше другого, використовуємо формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{або} \quad \cos(\pi t/4) = 1 - 2\sin^2(\pi t/8). \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вирази відповідних функцій і підставляємо в рівність (1). Отримаємо

$$\cos(\pi t/4) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin(\pi t/8) = \frac{y+1}{2};$$

отже,
$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

Звідси остаточно знаходимо рівняння траєкторії точки. Це парабола, (рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (2)$$

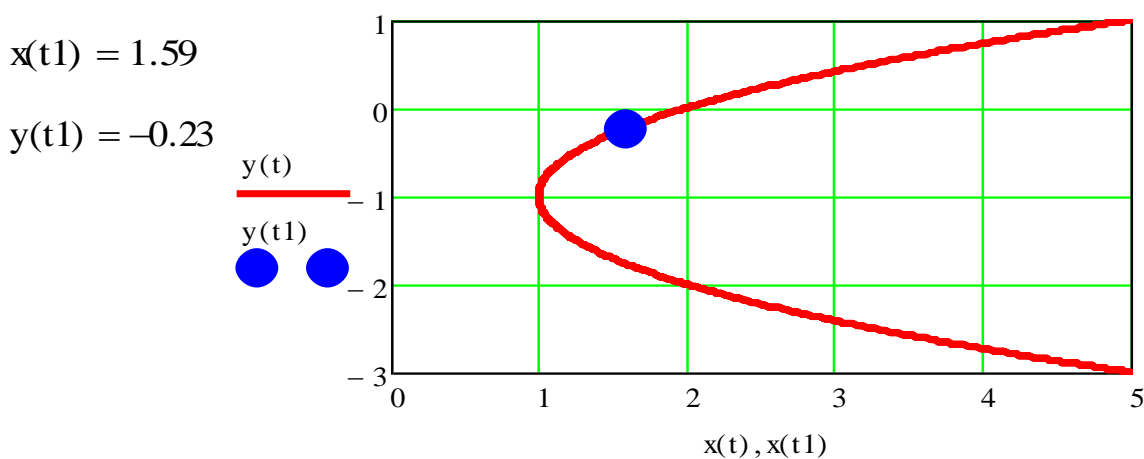


Рис. К1

1. Швидкість точки знайдемо по її проєкціям на координатні осі:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right),$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right),$$

$$v(t) = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2}$$

і при $t = 1$ с:

$$v_{Ix} = 1,11 \text{ см/с}; v_{Iy} = 0,73 \text{ см/с}; v_I = 1,33 \text{ см/с}. \quad (3)$$

2. Аналогічно знайдемо прискорення точки:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right),$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right),$$

$$a(t) = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2}$$

і при $t = 1$ с:

$$a_{Ix} = 0,87 \text{ см/с}^2; a_{Iy} = -0,12 \text{ см/с}^2; a_I = 0,88 \text{ см/с}^2. \quad (4)$$

4. Дотичне прискорення знайдемо, диференціюючи за часом рівність

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Отримаємо

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} \quad \text{і}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v}. \quad (5)$$

Числові значення всіх величин, що входять в праву частину виразу (5), визначені і даються рівностями (3) і (4). Підставивши в (5) ці числа, знайдемо відразу, що при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0,66$ см/с².

5. Нормальне прискорення точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Підставляючи сюди знайдені числові значення a_1 і $a_{1\tau}$, отримаємо, що при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0,58$ см/с².

6. Радіус кривизни траєкторії $\rho = \frac{v^2}{a_n}$. Підставляючи сюди числові значення v_1 і a_{1n} , знайдемо, що при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3,05$ см.

Відповідь: $v_1 = 1,33$ см/с, $a_1 = 0,88$ см/с², $a_{1\tau} = 0,66$ см/с², $a_{1n} = 0,58$ см/с², $\rho_1 = 3,05$ см.

ЗАДАЧА К2

Плоский механізм складається зі стержнів 1–4 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. К2.0–К2.9). Довжини стержнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,8$ м. Положення механізму визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$, які разом з іншими величинами задані в табл. К2. Точка D на всіх рисунках і точка K на рис. К2.7–К2.9 в середині відповідного стержня. Визначити величини, зазначені в таблиці в стовпці "Знайти". Знайти також прискорення a_A точки A стержня 1, якщо стержень 1 має в даний момент часу кутове прискорення $\varepsilon_1 = 10$ с⁻².

Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення повинні відкладатися відповідні кути, тобто **по ходу** або **проти ходу годинникової стрілки** (наприклад, кут γ на рис. 1 слід відкласти від стержня DE проти ходу годинникової стрілки, а на рис. 2 – від стержня AE по ходу годинникової стрілки).

Побудову креслення слід починати зі стержня, напрям якого визначається кутом α ; повзун B і його напрямні для більшої наочності зобразити, як в прикладі К2 (див. рис. К2). Задану кутову швидкість вважати спрямованою

проти ходу годинникової стрілки, а задану швидкість v_B – від точки B до b .

Рекомендації. Задача К2 – на дослідження плоского руху твердого тіла [2]. При її розв’язанні для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок слід скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи цю теорему (або це поняття) до кожної ланки механізму окремо.

Таблиця К2

Номер умови	Кути					Дано			Знайти
	α^0	β^0	γ^0	φ^0	θ^0	$\omega_1,$ 1/с	$\omega_4,$ 1/с	$v_B,$ м/с	
0	30	150	120	0	60	2	–	–	v_B, v_E, ω_2
1	60	60	60	90	120	–	3	–	v_A, v_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	–	–	10	v_A, v_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	3	–	–	v_B, v_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	–	4	–	v_B, v_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	–	–	8	v_A, v_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	5	–	–	v_B, v_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	–	5	–	v_A, v_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	–	–	6	v_A, v_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4	–	–	v_B, v_E, ω_3

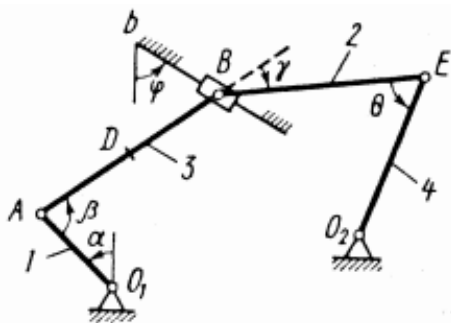


Рис. К2.0

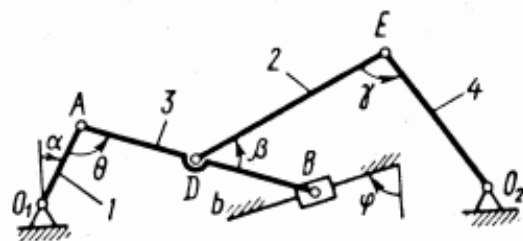


Рис. К2.1

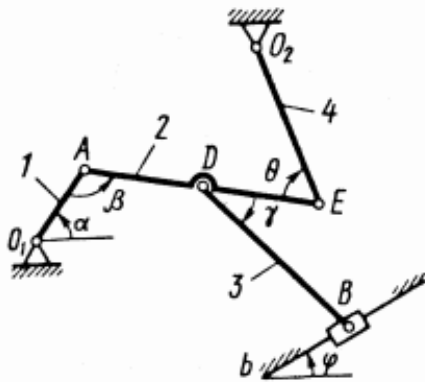


Рис. К2.2

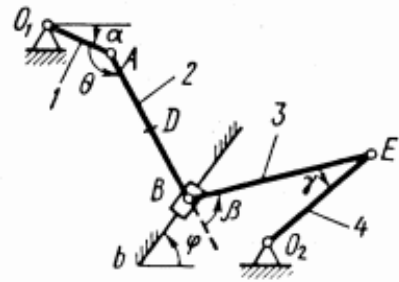


Рис. К2.3

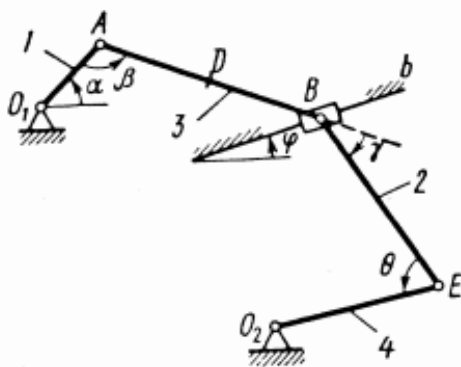


Рис. К2.4

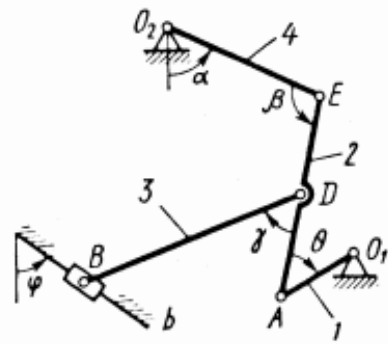


Рис. К2.5

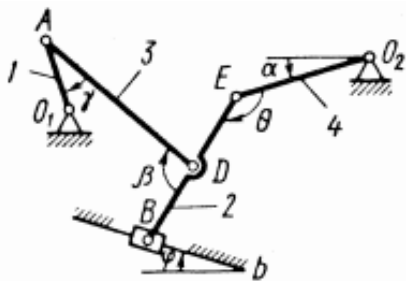


Рис. К2.6

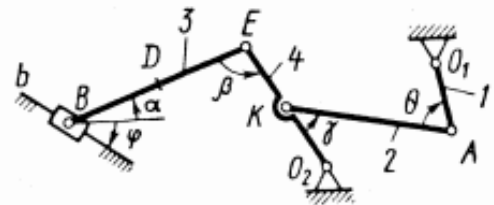


Рис. К2.7

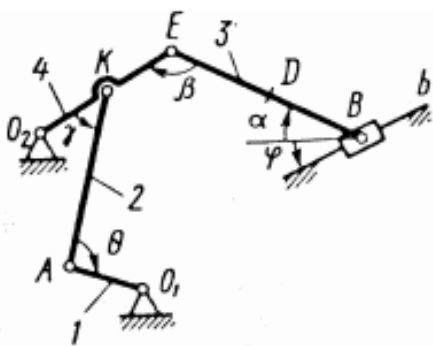


Рис. К2.8

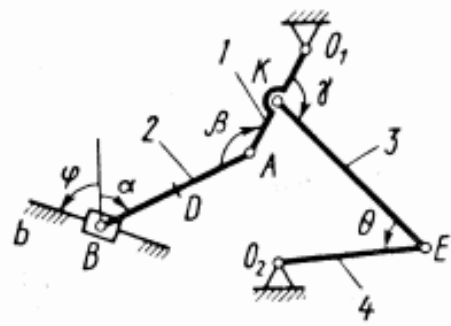


Рис. К2.9

Приклад К2. Механізм (рис. К2, а) складається зі стержнів 1, 2, 3, 4 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

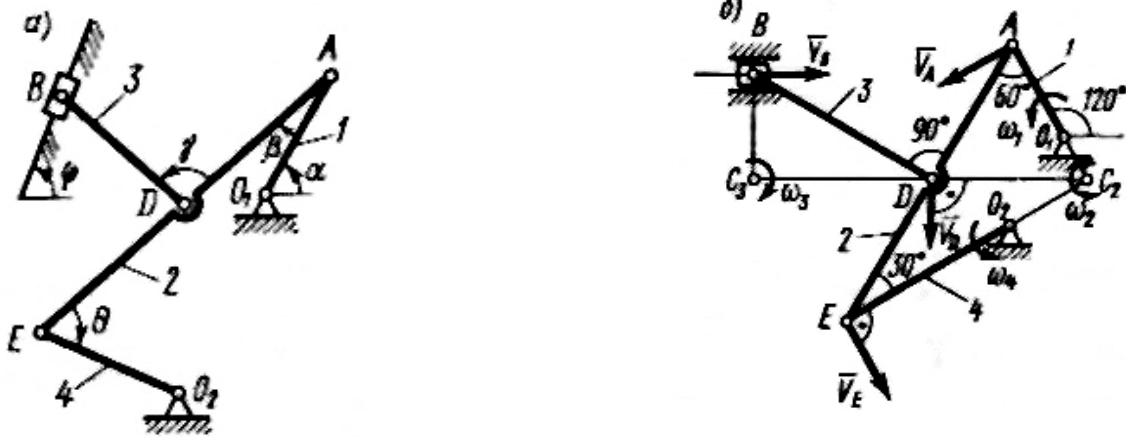


Рис. К2

Дано: $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ, \varphi = 0^\circ, \theta = 30^\circ, AD = DE, l_1 = 0,6 \text{ м},$
 $l_3 = 1,2 \text{ м}, \omega_1 = 5 \text{ с}^{-1}, \varepsilon_1 = 8 \text{ с}^{-2}.$

Визначити: v_B, v_E, ω_3 і $a_A.$

Розв'язання.

1. Будуємо положення механізму відповідно до заданих кутів (рис. К2, б).

2. Визначаємо швидкість точки E – v_E . Точка E належить стержню AE .

Щоб знайти v_E , треба знати швидкість будь-якої іншої точки цього стержня і напрямок v_E . За даними задачі можемо визначити швидкість точки A :

$$v_A = \omega_1 l_1 = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ м/с}; \bar{v}_A \perp O_1A. \quad (1)$$

Напрямок вектора \bar{v}_E знайдемо, врахувавши, що точка E належить одночасно стержню O_2E , який обертається навколо O_2 ; отже, $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тепер, знаючи \bar{v}_A і напрямок \bar{v}_E , скористаємося теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стержня AE) на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AE). Спочатку по цій теоремі встановлюємо, в який бік спрямований вектор \bar{v}_E (проекції швидкостей повинні мати однакові знаки). Потім, вираховуючи ці проекції, знаходимо

$$v_E \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ; v_E = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ м/с}. \quad (2)$$

3. Визначаємо v_B . Точка B належить стержню BD . Отже, за аналогією з попереднім, щоб визначити v_B , треба спочатку знайти швидкість точки D , що

належить одночасно стержню AE . Для цього, знаючи \bar{v}_A і \bar{v}_E , побудуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) стержня AE ; це точка C_2 , що лежить на перетині перпендикулярів до \bar{v}_A і \bar{v}_E , відновлених з точок A і E (до \bar{v}_A і \bar{v}_E перпендикулярні стержні 1 і 4).

По напрямку вектора \bar{v}_A визначаємо напрямок повороту стержня AE навколо МЦШ C_2 . Вектор \bar{v}_D буде перпендикулярний відрітку C_2D , що з'єднає точки D і C_2 , і спрямований в бік повороту. Величину v_D знайдемо з пропорції

$$\frac{v_D}{C_2D} = \frac{v_A}{C_2A}. \quad (3)$$

Щоб обчислити C_2D і C_2A , зауважимо, що $\triangle AC_2E$ – прямокутний, так як гострі кути в ньому дорівнюють 30° і 60° , і що $C_2A = AE \sin 30^\circ = 0,5 AE = AD$. Тоді $\triangle AC_2D$ є рівностороннім і $C_2A = C_2D$. В результаті рівність (3) дає

$$v_D = v_A = 3 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_D \perp C_2D. \quad (4)$$

Так як точка B належить одночасно повзуну, який рухається уздовж напрямних поступально, то напрямок \bar{v}_B відомий. Тоді, відновлюючи з точок B і D перпендикуляри до швидкостей \bar{v}_B і \bar{v}_D , побудуємо МЦШ C_3 стержня BD . За напрямком вектора \bar{v}_D визначаємо напрямок повороту стержня BD навколо центру C_3 .

Вектор \bar{v}_B буде направлений в сторону повороту стержня BD . З рис. К2,б видно, що $\angle C_3DB = 30^\circ$, а $\angle DC_3B = 90^\circ$, звідки $C_3B = l_3 \sin 30^\circ$, $C_3D = l_3 \cos 30^\circ$. Склавши тепер пропорцію, знайдемо, що

$$\frac{v_B}{C_3B} = \frac{v_D}{C_3D}; \quad v_B = v_D \operatorname{tg} 30^\circ = 1,7 \text{ м/с}. \quad (5)$$

4. Визначаємо кутову швидкість стержня 3 – ω_3 . Так як МЦШ стержня 3 відомий (точка C_3), то

$$\omega_3 = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_D}{l_3 \cos 30^\circ} = 2,9 \text{ с}^{-1}.$$

5. Визначаємо прискорення точки A – a_A . Так як ε_1 відомо, то $a_{A\tau} = l_1 \varepsilon_1$.

Далі $a_{An} = v_A^2 / l_1$ або $a_{An} = l_1 \omega_1^2$.

Тоді $a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2}$.

Провівши обчислення, отримаємо $a_A = 15,8 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: $v_E = 5,2 \text{ м/с}$, $v_B = 1,7 \text{ м/с}$, $\omega = 2,9 \text{ с}^{-1}$, $a_A = 15,8 \text{ м/с}^2$.

3.3. ДИНАМІКА

ЗАДАЧА Д1

Вантаж D масою m , отримавши в точці A початкову швидкість v_0 , рухається в зігнутій трубі ABC , розташованій у вертикальній площині; ділянки труби або обидві похилі, або одна горизонтальна, а друга похила (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1). На ділянці AB на вантаж крім сили тяжіння діють стала сила \bar{Q} (її напрямок показано на рисунках) і сила опору середовища \bar{R} , що залежить від швидкості \bar{v} вантажу (направлена проти руху).

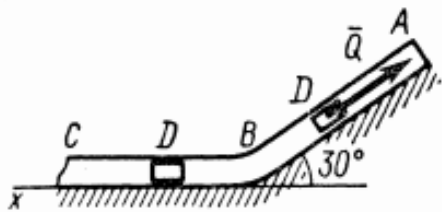


Рис. Д1.0

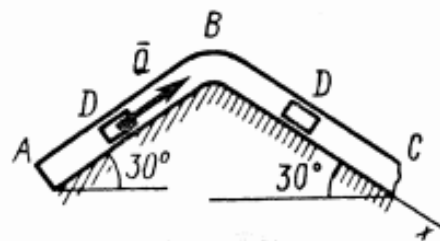


Рис. Д1.1

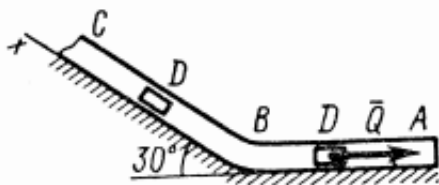


Рис. Д1.2

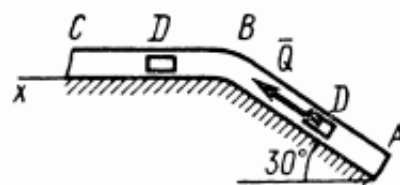


Рис. Д1.3

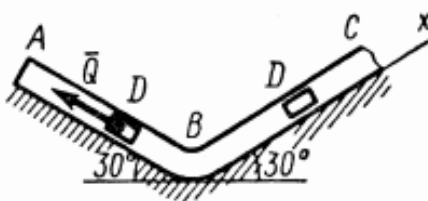


Рис. Д1.4

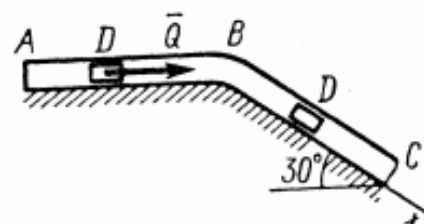


Рис. Д1.5

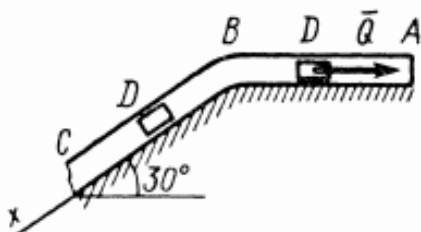


Рис. Д1.6

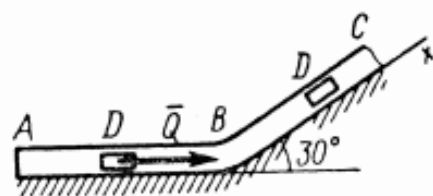


Рис. Д1.7

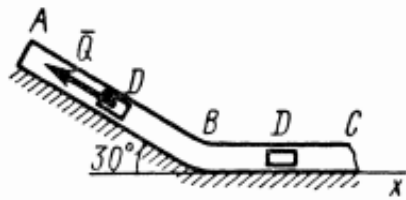


Рис. Д1.8

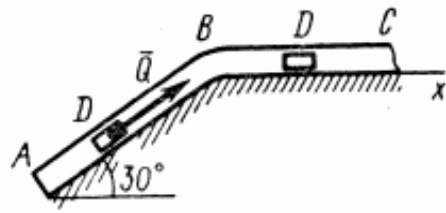


Рис. Д1.9

Таблиця Д1

Номер умови	m , кг	v_0 , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_1 , с	F_x , Н
0	2,4	12	5	$0,8 v^2$	1,5	–	$4 \sin (4t)$
1	2	20	6	$0,4 v$	–	2,5	$-5 \cos (4t)$
2	8	10	16	$0,5 v^2$	4	–	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0,3 v$	–	2	$-2 \cos (2t)$
4	6	15	12	$0,6 v^2$	5	–	$-5 \sin (2t)$
5	4,5	22	9	$0,5 v$	–	3	$3t$
6	4	12	10	$0,8 v^2$	2,5	–	$6 \cos (4t)$
7	1,6	18	4	$0,4 v$	–	2	$-3 \sin (4t)$
8	4,8	10	10	$0,2 v^2$	4	–	$4 \cos (2t)$
9	3	22	9	$0,5 v$	–	3	$4 \sin (2t)$

У точці B вантаж, не змінюючи значення своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби, де на нього крім сили тяжіння діє змінна сила \bar{F} , проекція якої F_x на вісь x задана в таблиці.

Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи відстань $AB = l$ або час t_1 руху вантажу від точки A до точки B , знайти закон руху вантажу на ділянці BC , тобто $x = f(t)$, де $x = BD$. Тертям вантажу об трубу знехтувати.

Рекомендації. Задача Д1 – на інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (розв'язання основної задачі динаміки) [3]. Розв'язання задачі розбивається на дві частини. Спочатку потрібно скласти і проінтегрувати методом розділення змінних диференціальне рівняння руху точки (вантаж) на ділянці AB , врахувавши початкові умови. Потім, знаючи час руху на ділянці AB

або його довжину, визначити, яку швидкість матиме вантаж в точці B . Ця швидкість буде початковою для руху вантажу на ділянці BC . Після цього необхідно скласти і проінтегрувати диференціальне рівняння руху вантажу на ділянці BC теж з урахуванням початкових умов, ведучи відлік часу від моменту, коли вантаж знаходиться в точці B , і вважаючи, що в цей момент часу $t = 0$. При інтегруванні рівняння руху на ділянці AB в разі, коли задана довжина l ділянки, доцільно перейти в рівнянні до змінної x , врахувавши, що

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Приклад Д1. На вертикальній ділянці AB труби (рис. Д1) на вантаж D масою m діють сила тяжіння і сила опору \bar{R} ; відстань від точки A , де $v = v_0$, до точки B дорівнює l . На похилій ділянці BC на вантаж діють сила тяжіння і змінна сила $F = F(t)$, яка задана в ньютонках.

Дано: $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, де $\mu = 0,4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2,5$ м, $F_x = 16 \sin(4t)$.

Визначити: $x = f(t)$ – закон руху вантажу на ділянці BC .

Розв'язання.

1. Розглянемо рух вантажу на ділянці AB , вважаючи вантаж матеріальною точкою. Зображуємо вантаж (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\bar{P} = m\bar{g}$ і \bar{R} . Проводимо вісь Az і складаємо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на цю вісь:

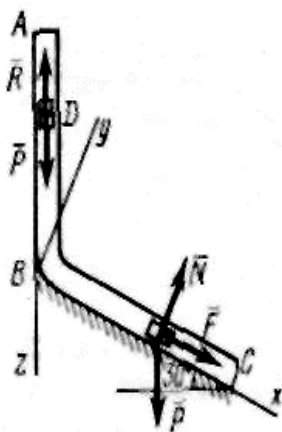


Рис. Д1

або

$$m \frac{dv_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}$$

$$mv_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (1)$$

Далі знаходимо: $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; підкреслюємо, що в рівнянні **всі змінні сили треба обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать**. Врахувавши ще, що $v_z = v$, отримаємо

$$mv \frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2$$

або

$$v \frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (2)$$

Введемо для скорочення записів позначення

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (3)$$

де при підрахунку прийнято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тоді рівняння (2) можна представити у вигляді

$$2v \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \quad (4)$$

Розділяючи в рівнянні (4) змінні, а потім беручи від обох частин інтеграл, отримаємо

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz$$

та
$$\ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \quad (5)$$

За початковими умовами при $z = 0$ $v = v_0$, що дає $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$, і з рівності (5) знаходимо

$$\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$$

або

$$\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz.$$

Звідси

$$\ln \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz$$

та

$$\frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результаті знаходимо

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}. \quad (6)$$

Вважаючи в рівності (6) $z=l=2,5$ м і замінюючи k і n їх значеннями (3), визначимо швидкість v_B вантажу в точці B ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2,7$):

$$v_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40,7$$

та

$$v_B = 6,4 \text{ м/с}. \quad (7)$$

2. Тепер розглянемо рух вантажу на ділянці BC ; знайдена швидкість v_B буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($v_0 = v_B$). Зображуємо вантаж (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\bar{P} = m\bar{g}$, \bar{N} і \bar{F} .

Проведемо з точки B вісь Bx і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на цю вісь:

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_x \quad (8)$$

Оскільки $P_x = P \sin 30^\circ = 0,5 mg$, $N_x = 0$, $F_x = 16 \sin(4t)$, то рівняння (8) набуде вигляду

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0,5mg + 16 \sin(4t). \quad (9)$$

Розділивши обидві частини рівності на $m=2\text{кг}$ і вважаючи знову $g \approx 10\text{м/с}^2$, отримаємо

$$\frac{dv_x}{dt} = 5 + 8 \sin(4t). \quad (10)$$

Помноживши обидві частини рівняння (10) на dt і інтегруючи, знайдемо

$$v_x = 5t - 2 \cos(4t) + C_2. \quad (11)$$

Будемо тепер відраховувати час від моменту, коли вантаж знаходиться в точці B , вважаючи в цей момент $t = 0$. Тоді при $t = 0$ $v_x = v_0 = v_B$, де v_B дається рівністю (7). Підставляючи ці величини в (11), отримаємо

$$C_2 = v_B + 2 \cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$$

При знайденому значенні C_2 рівняння (11) дає

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 2 \cos(4t) + 8,4. \quad (12)$$

Помноживши тут обидві частини на dt і знову інтегруючи, знайдемо

$$x = 2,5t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t + C_3. \quad (13)$$

Так як при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ і остаточно шуканий закон руху вантажу буде

$$x = 2,5t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t \quad (14)$$

де x – в метрах, t – в секундах.

ЗАДАЧА Д2

Механічна система складається з вантажів 1 і 2 (коефіцієнт тертя вантажів о площину $f = 0,1$), циліндричного суцільного однорідного катка 3 і східчастих шківів 4 і 5 з радіусами ступенів $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,1$ м, $R_5 = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м (масу кожного шківа вважати рівномірно розподіленою по його зовнішньому ободу)

(рис. Д2.0–Д2.9, табл. Д2). Тіла системи з'єднані один з одним нитками, намотаними на шківів; ділянки ниток паралельні відповідним площинам.

Таблиця Д2

Номер умови	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	M_4 , Нм	M_5 , Нм	$F = f(s)$, Н	s_1 , м	Знайти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2 + 3s)$	1,0	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5 + 2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3 + 4s)$	0,8	v_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4 + 5s)$	0,6	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3 + 2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3 + 5s)$	1,6	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2 + 5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8 + 3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2 + 5s)$	1,6	v_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3 + 2s)$	1,4	v_2

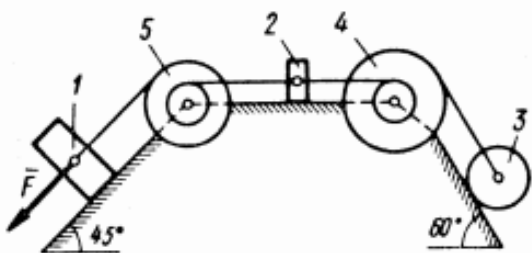


Рис.Д2.0

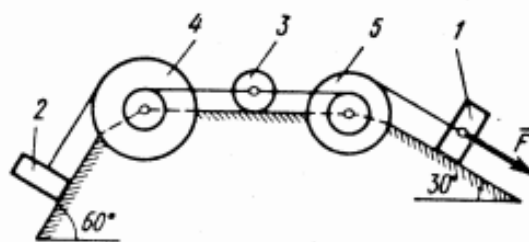


Рис.Д2.1

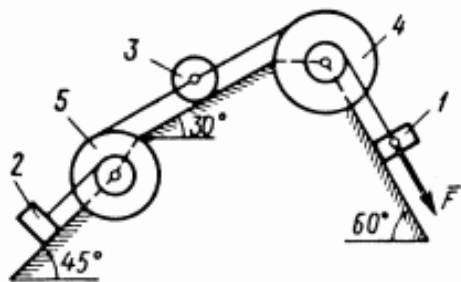


Рис.Д2.2

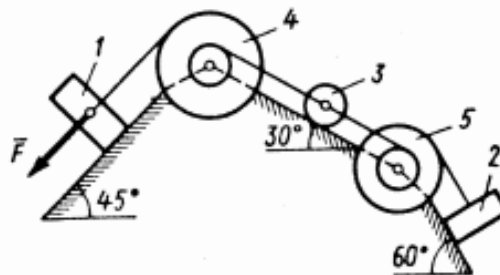


Рис.Д2.3

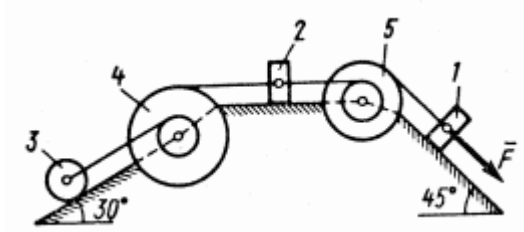


Рис.Д2.4

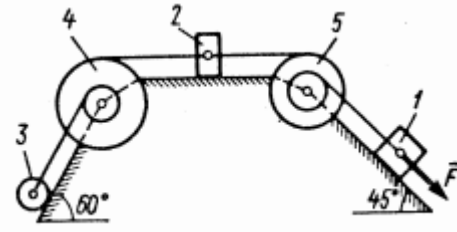


Рис.Д2.5

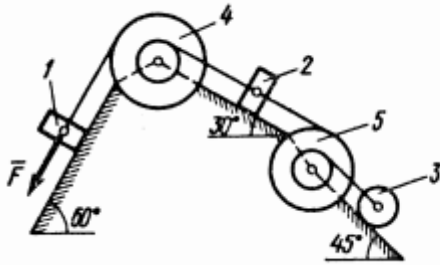


Рис.Д2.6

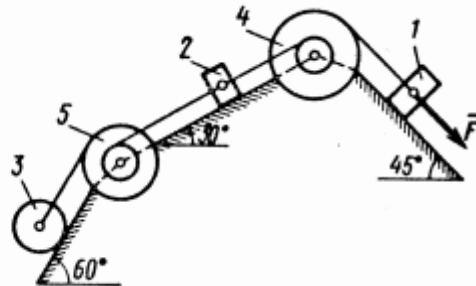


Рис.Д2.7

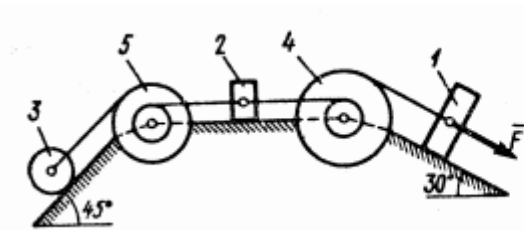


Рис.Д2.8

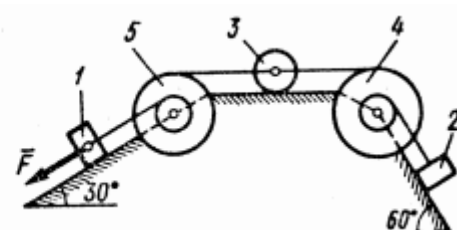


Рис.Д2.9

Під дією сили $F = f(s)$, що залежить від переміщення точки прикладення сили, система починає рухатися зі стану спокою. При русі системи на шківів 4 і 5 діють сталі моменти сил опорів, які дорівнюють відповідно M_4 і M_5 .

Визначити значення шуканої величини в той момент часу, коли переміщення точки прикладання сили \bar{F} дорівнює s_1 . Шукана величина вказана в стовпці "Знайти" таблиці, де позначено: v_1 – швидкість вантажу 1, v_{C3} – швидкість центру мас катка 3, ω_4 – кутова швидкість тіла 4 і т.д.

Рекомендації. Задача Д2 – на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи [4]. При розв'язанні задачі врахувати, що кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять в систему: цю енергію необхідно виразити через ту швидкість (лінійну або кутову), яку в задачі треба визначити. При обчисленні кінетичної енергії катка, що рухається плоскопаралельно, для встановлення залежності між його кутовою швидкістю і

швидкістю його центру мас скористатися поняттям про миттєвий центр швидкостей (кінематика). При визначенні роботи всі переміщення слід виразити через задане переміщення s_1 , врахувавши, що залежність між переміщеннями тут буде такою же, як між відповідними швидкостями.

Коли за даними таблиці $m_2 = 0$, вантаж 2 на кресленні не зображати; шків 4 і 5 завжди входять в систему.

Приклад Д2. Механічна система (рис. Д2) складається з суцільного циліндричного катка 1, ступеневого шків 2 з радіусами ступенів R_2 і r_2 (маса шків рівномірно розподілена по його зовнішньому ободі) і вантажу 3 (коефіцієнт тертя вантажу об площину дорівнює f). Тіла системи з'єднані один з одним нитками, намотаними на шків 2.

Під дією сили $F = f(s)$, яка залежить від переміщення s точки її прикладення, система приходить в рух зі стану спокою. При русі на шків 2 діє сталий момент M_2 сил опору.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_2 = 0,2$ м, $r_2 = 0,1$ м, $f = 0,2$, $M_2 = 0,6$ Н·м, $F = 2(1 + 2s)$ Н, $s_1 = 2$ м.

Визначити: швидкість v_{C1} центру мас катка, коли $s = s_1$.

Розв'язання.

1. Розглянемо рух незмінної механічної системи, що складається з тіл 1, 2, 3, з'єднаних нитками. Зобразимо всі діючі на систему зовнішні сили: активні \vec{F} , \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 , момент опору M_2 , реакції \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 і сили тертя \vec{F}_1^{TP} і \vec{F}_3^{TP} .

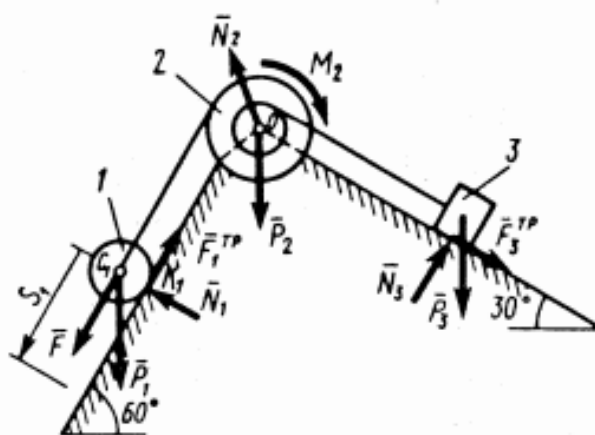


Рис. Д2

Для визначення v_{C1} скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \tag{1}$$

2. Визначаємо T_0 і T . Так як в початковий момент система знаходилась в стані спокою, то $T_0 = 0$. Величина T дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2)$$

З огляду на те, що тіло 1 рухається плоскопаралельно, тіло 3 – поступально, а тіло 2 обертається навколо нерухомої осі, отримаємо

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \quad (3)$$

Усі швидкості, які входять в формули (3) необхідно виразити через шукану швидкість v_{C1} центру мас катка. Взявши до уваги, що точка K_I миттєвий центр швидкостей катка 1, і позначивши радіус катка через r_1 , отримаємо

$$\omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_{C1}}{R_2}, \quad v_3 = \omega_2 r_2 = v_{C1} \frac{r_2}{R_2}. \quad (4)$$

Крім того, моменти інерції, що входять в формули (3) мають значення

$$I_{C1} = 0,5 m_1 r_1^2, \quad I_2 = m_2 R_2^2. \quad (5)$$

Підставивши всі величини (4) і (5) в рівності (3), а потім використовуючи рівність (2), отримаємо остаточно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v_{C1}^2. \quad (6)$$

3. Тепер знайдемо суму робіт всіх діючих зовнішніх сил при тому переміщенні, яке буде мати система, коли точка C_1 пройде шлях s_1 . Одночасно все переміщення необхідно виразити через задану величину s_1 , для чого врахуємо, що тут залежність між переміщеннями буде такою ж, як і між відповідними швидкостями в рівностях (4), тобто $\varphi_2 = s_1/R_2$, $s_3 = s_1(r_2/R_2)$. В результаті отримаємо:

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 2(1 + 2s) ds = 2(s_1 + s_1^2).$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ, \quad A(M_2) = -M_2 \varphi_2 = -M_2 \frac{s_1}{R_2}.$$

$$A(\bar{P}_3) = -P_3 s_3 \sin 30^\circ = -P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ.$$

$$A(\bar{F}_3^{mp}) = -F_3^{mp} s_3 = -f N_3 s_3 = -f P_3 \cos 30^\circ s_1 \frac{r_2}{R_2}.$$

Робота інших сил дорівнює нулю, тому що точка K_I , де прикладені \bar{N}_1 і $\bar{F}_1^{\text{тп}}$ – миттєвий центр швидкостей, точка O , де прикладені \bar{P}_2 і \bar{N}_2 , нерухома, а реакція \bar{N}_3 перпендикулярна переміщенню вантажу 3. Тоді остаточно

$$\sum A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ). \quad (7)$$

4. Підставивши вирази (6) і (7) в рівняння (1) і з огляду на, що $T_0 = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v_{C1}^2 = \\ & = 2(s_1 + s_1^2) + P_2 s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ) \end{aligned} \quad (8)$$

При числових значеннях, які мають задані величини, остання рівність (8) дає

$$9v_{C1}^2 = 21,1.$$

Звідси знаходимо шукану швидкість

$$v_{C1} = 1,53 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $v_{C1} = 1,53 \text{ м/с.}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретична механіка: підручник / І. В Кузько та ін. Харків: Фолія, 2017. – 576 с.
2. Теоретична механіка: Методичні вказівки та контрольні завдання для студентів-заочників енергетичних, гірничих, металургійних, електроприладобудування та автоматизації, технологічних спеціальностей, а також геологічних, електротехнічних, електронної техніки та автоматики, хіміко-технологічних та інженерно-економічних спеціальностей ВНЗ» / Л.І. Котова, Р.І. Надєєва, С.М. Тарг та ін. Під ред. С.М. Тарга// 4-е вид.: Вища шк., 1988. – 64 с.
3. Каряченко Н. В. Теоретична механіка. Розділ «Кінематика».: Навч. посібник. Дніпро: НМетАУ, 2021. – 56 с.
4. Каряченко Н. В. Теоретична механіка. Розділ «Динаміка». Частина I.: Навч. посібник. Дніпро: НМетАУ, 2019. – 54 с.
5. Каряченко Н. В. Теоретична механіка. Розділ «Динаміка». Частина II.: Навч. посібник. Дніпро: НМетАУ, 2021. – 56 с.
6. Булгаков В.М., Яременко В.В., Черниш О.М., Березовий М.Г. Теоретична механіка: Підручник: – Київ: Центр навч. літ., 2019. – 705 с.

Навчально-методичне видання

Каряченко Наталія Василівна,
Поворотній Віктор Володимирович

Механіка
розділ «Теоретична механіка»
Навчально-методичні рекомендації
для виконання контрольних робіт

Експертний висновок склав канд. техн. наук, доц. Лариса Недужа

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.839 від 20.10.2025)

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка Н. В. Каряченко

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 2,11.

Зам. № 116.

Видавець: Український державний університет науки і технологій

вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:

вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010