МПС СССР — ГУУЗ
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Л. В. ВЕРГЕЙЧИК

РАСЧЕТ И РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЗАГРУЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

(Специальность № 022 — сопротивление материалов и строительная механика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, проф. В. И. МОССАКОВСКИЙ

ДНЕПРОПЕТРОВСК
1968

МПС СССР — ГУУЗ
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Л. В. ВЕРГЕЙЧИК

РАСЧЕТ И РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЗАГРУЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

(Специальность № 022 — сопротивление материалов и строительная механика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, проф. В. И. МОССАКОВСКИЙ.

ДНЕПРОПЕТРОВСК
1966

Работа выполнена на кафедре прикладной теории упругости Днепропетровского госуниверситета им. 300-летия воссоединения Украины с Россией.

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор В. И. МОССАКОВСКИЙ.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор Н. Г. БОНДАРЬ,
доктор технических наук, профессор Д. В. ВАЙНБЕРГ

Ведущее предприятие — институт Механики АН УССР.

Автореферат разослан 5 сентября 1968 г.

Защита диссертации состоится « 8 » октября 1968 г. на заседании ученого Совета Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта (г. Днепропетровск, 10, ул. Университетская, 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета, доцент Ю. А. РАДЗИХОВСКИЙ.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие оболочки, воспринимающие сосредоточенные нагрузки, обычно усиливаются фитингами, стрингерами, лонжеронами, накладками, шпангоутами и др. элементами. При постоянных жесткостных характеристиках подкрепляющих оболочку элементов внутренние усилия в них распределяются неравномерно. Если придать подкреплениям форму, при которой объем ненагруженного материала сведется до минимума, можно получить значительную экономию веса.

В предлагаемой диссертации рассмотрены вопросы, связанные с расчетом и рациональным распределением материала стрингеров тонкостенных цилиндрических оболочек, воспринимающих сосредоточенные продольные силы.

Рациональный выбор параметров подкрепляющих элементов предполагает решение прямой и обратной задач, т. е. определение характера распределения внутренних усилий в конструкции с нерегулярными жесткостными характеристиками и отыскание параметров подкреплений, отвечающих заданным требованиям.

Имеющиеся решения прямых задач относятся, главным образом, к нагружению оболочек радиальными усилиями. Загружения продольными силами изучены недостаточно полно. Рассмотрены в основном многострингерные симметрично нагруженные оболочки. Известные решения основаны на «разделении переменных». Искомые функции представляются в виде линейной комбинации произведений специально подобранных функций одной переменной. Коэффициенты этого представления отыскивают либо по методу Фурье, либо при помощи вариационных методов.

При анализе напряженно-деформированного состояния оболочек, имеющих усиливающие элементы переменной жесткости, а также обладающих геометрической или силовой асимметрией, возникают трудности, связанные с тем, что переменные не разделяются и приходится решать дифференциальные уравнения высокого порядка.

Решению подобных задач уделяется основное внимание в настоящей работе.

В практике часто встречаются оболочки, усиленные в одном месте, где приложена сосредоточенная сила (узлы подвески двигателей и опорных устройств современных летательных аппаратов, хребтовые балки железнодорожных цистерн и т. п.) Такой случай загружения рассмотрен в первой главе, где приводятся соотношения, полученные на основе вариационного метода В. З. Власова, для оболочки с одним стрингером постоянного и переменного по длине сечения. Интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений осуществляется численно на электронно-вычислительной машине М-20.

Оболочки, воспринимающие краевые сосредоточенные нагрузки, обычно усиливаются торцевыми шпангоутами. При анализе напряженно-деформированного состояния такой конструкции шпангоут отделяется от оболочки и усилия, возникающие по линии контакта, находятся из условий совместности деформации. При этом необходимо иметь соотношения, связывающие внутренние усилия в оболочке с усилиями в смежном сечении. Для оболочек с ребрами решение усложняется тем, что эти соотношения нельзя получить в замкнутом виде.

Во второй главе приведена методика расчета ребристой оболочки, нагруженной через торцевой шпангоут. Контактные усилия представляются в виде рядов, а для получения аналитических выражений внутренних усилий в оболочке используется метод тригонометрической интерполяции.

Следующая глава посвящена анализу напряженного состояния оболочек с произвольным (один и более) числом стрингеров переменной жесткости на основе метода конечных элементов.

Результаты расчетов по формулам метода конечных элементов и вариационного сравниваются между собой и проверяются экспериментально. Описание порядка проведения эксперимента и его результатов составляет содержание четвертой главы.

Обратная задача решается в последней главе путем распределения заданного постоянного объема материала стрингера при обеспечении минимума потенциальной энергии деформации конструкции, что приводит к равнопрочному стрингеру.

Применение разработанных методов решения прямой и обратной задач иллюстрируется примерами расчетов, выполненных для ряда значений исходных параметров.

ГЛАВА 1

Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки со стрингером, воспринимающим сосредоточенную продольную силу

За расчетную модель принимается «полубезмоментная» оболочка при учете деформации сдвига срединной поверхности. Используется гипотеза о нерастяжимости оболочки в направлении контура поперечного сечения. Искомые продольные и поперечные перемещения представляются в следующем виде:

$$u(z,s) = \sum_i U_i(z)\varphi_i(s)$$
$$v(z,s) = V_1(z)\psi_1(s) \qquad (1)$$

Разрешающая система уравнений получена путем минимизации выражения для полной энергии деформации системы, представляющего функционал вида:

$$\Pi = \int_0^l \Phi(z, U_1, U_2, \ldots, U_n\ U_1', U_2', \ldots, U_n. V_1, V_1')dz$$

Упрощение разрешающей системы достигается путем задания аппроксимирующих функций продольного перемещения в виде взаимно ортогональных (с учетом стрингера) тригонометрических полиномов:

$$\varphi_n = \cos n\beta + \frac{f}{F+2(n-1)f}\left[\sum_{k=n-1}^{c}(-1)^{n-k-1}2\cos k\beta + (-1)^n\right] \qquad (2)$$

$$n = 1, 2, 3, \ \ldots, m$$

Задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\gamma a_{00} U_0'' = 0$$

$$\gamma a_{nn} U_n'' - \sum_i b_{ni} U_i - c_{n1} V_1' = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_i c_{1i} U_i' + r_{11} V_1'' = 0$$

$$n, i = 1, 2, 3, \ldots m$$

с двухточечными граничными условиями

$$z = 0 \qquad \int_s \sigma_z \varphi_j \delta ds = \int_s \bar{P}_z \varphi_j ds$$

$$z = \ell \qquad \int_s \tau \psi_1 \delta ds = 0 \qquad (4)$$

В выражениях (3) приняты обозначения:

$$a_{nn} = \oint \varphi_n^2 \delta ds = \frac{F+f}{2} + \eta_n^2 [F(2n-1) + 2fn(2n-3) + 2f] + 2\eta_n f(1-2n);$$

$$b_{nn} = \oint (\varphi_n')^2 \delta ds = \frac{F-f}{2} \left[n^2 + \frac{2}{3} \eta_n^2 (2n^3 - 3n^2 + n)\right];$$

$$b_{nk} = \oint \varphi_n' \varphi_k' \delta ds = (-1)^{n+k+1} \eta_n (F-f) k^2 + \frac{\eta_n \eta_k}{3} (-1)^{n+k} (F-f) k(k-1)(2k-1).$$

$$c_{n1} = \oint \varphi_n' \psi_1 \delta ds = (-1)^{n-1} \eta_n (F-f); \qquad (5)$$

$$c_{11} = \frac{F-f}{2} \qquad r_{11} = -c_{11}$$

$$\gamma_n = \frac{f}{F-2(n-1)f};$$

$$\gamma_k = \frac{f}{F+2(k-1)f};$$

$$F = 2\pi R\delta + f \qquad (5)$$

$$n, k = 1, 2, 3,$$

F — площадь поперечного сечения стрингера;

R и δ — радиус и толщина оболочки

В работе приведена блок-схема программы численного интегрирования уравнений (3) на ЭВМ М-20 с применением метода прогонки.

Примеры расчетов по выведенным формулам выполнены при удержании в ряду для u (z, s) 11 членов.

ГЛАВА 2

Нагружение сосредоточенными продольными силами ребристой цилиндрической оболочки через торцевой шпангоут

Рассматривается оболочка с произвольным (один и более) числом стрингеров. Предполагается, что линия центров тяжести сечений шпангоута образует окружность, совпадающую со срединной поверхностью оболочки, а стрингер расположен симметрично относительно срединной поверхности, направление действия силы P_z совпадает с его осью.

Для оболочки используются соотношения, приведенные в главе 1. Расчетные зависимости для шпангоута получены при рассмотрении его как плоского бруса малой кривизны с массивным поперечным сечением, нагруженным перпендикулярно плоскости кривизны.

Шпангоут и оболочка отделяются друг от друга и силами их взаимодействия считаются, в первом приближении, нормальные погонные усилия T° (Для учета и касательных усилий S° в контактном сечении в ряду для перемещений v следует удерживать члены с порядковым номером $n \geqslant 2$, отражающие деформацию контура поперечного сечения).

Представим усилия T° в виде ряда:

$$T^{o} = t_0 + t_1 \cos\beta + \sum_{n=2} t_n \cos n\beta. \tag{6}$$

Амплитуды t_0 и t_1 определяются из условия равновесия шпангоута, находящегося под действием внешней нагрузки. Остальные гармоники, при произвольных значениях относящихся к ним амплитуд, самоуравновешены в сечении и находятся при использовании требования минимума потенциальной энергии деформации системы. Для этой цели внутренние усилия в шпангоуте и оболочке со стрингерами выражаются через подлежащие определению амплитудные значения усилий смежного сечения оболочки и шпангоута.

Внутренние усилия в шпангоуте представляются в виде тригонометрических рядов. Амплитудные значения их определяются из условий равновесия шпангоута.

Для выражения внутренних усилий оболочки через амплитудные значения усилий смежного сечения система (3) интегрируется при граничных условиях для каждой из гармоник $t_n \cos n\beta$:

$$U_m^{I}\Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & m < n \\ \dfrac{\pi R}{E a_{mm}} t_n & m = n \\ (-1)^{m+n+1} \dfrac{2\pi R}{E a_{mm}} \eta_m t_n & m > n \end{cases} \tag{7}$$

$$U_m\Big|_{z=l} = 0$$

Перемещения точек срединной поверхности оболочки определяются как суммы перемещений от отдельных гармоник:

$$u(z,s)=\sum_n\sum_m A_m^n \varphi_m t_n\,, \tag{8}$$

где: A_m^n — решение для n гармоники, найденное численным интегрированием системы (3)

В случае одностренгерной оболочки для функций φ_m используется выражение (2) и для перемещения u (z, s) получается выражение

$$\begin{aligned}
u(z,s)={}&t_0\Big[\big(A_0^0+A_1^0\zeta_1-A_2^0\zeta_2+A_3^0\zeta_3-\ldots\big)+\big(A_1^0+2A_2^0\zeta_2-\\
&-2A_3^0\zeta_3+\cdots\big)\cos\beta+\big(A_2^0+2A_3^0\zeta_3-\cdots\big)\cos 2\beta+\ldots+\Big(A_m^0+\\
&+2\sum_{j=m+1}^{m_0}(-1)^{j+m+1}A_j^0\Big)\cos m\beta\Big]+t_1\Big[\big(A_0^1+A_1^1\zeta_1-A_2^1\zeta_2+\ldots\big)+\big(A_1^1+\\
&+2A_2^1\zeta_2-2A_3^1\zeta_3+\cdots\big)\cos\beta+\big(A_2^1+2A_3^1\zeta_3-\cdots\big)\cos 2\beta+\cdots+\\
&+\Big(A_m^1+2\sum_{j=m+1}^{m_0}(-1)^{j+m+1}A_j^1\Big)\cos m\beta+\ldots+t_n\Big[\big(A_0^n+A_1^n\zeta_1-A_2^n\zeta_2+\\
&+A_3^n\zeta_3-\cdots\big)+\big(A_1^n+2A_2^n\zeta_2-2A_3^n\zeta_3+\ldots\big)\cos\beta+\big(A_2^n+\\
&+2A_3^n\zeta_3-\cdots\big)\cos 2\beta+\cdots+\Big(A_m^n+2\sum_{j=m+1}^{m_0}(-1)^{j+m+1}A_j^m\Big)\cos m\beta\Big]
\end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку величины в круглых скобках — коэффициенты при $\cos m\beta$ в (9) могут быть определены в любом числе точек на оси z, их можно представить в виде ряда по координате z. Вводятся обозначения

$$
Z_m^n = \begin{cases} A_m^n + \sum\limits_{j=1} (-1)^{j+1} A_j^n \gamma_j & m = 0 \\ A_m^n + 2\sum\limits_{j=m+1} (-1)^{j+m-1} A_j^m \gamma_j & m \neq 0 \end{cases} \tag{10}
$$

и функции Z_m^n представляются в виде рядов

$$
Z_m^n = \sum_k{}' a_{km}^n \cos\frac{k\pi z}{l}, \tag{11}
$$

после чего (8) принимает вид

$$
u(z,s) = \sum_k{}'\sum_m\sum_n a_{km}^n t_n \cos\frac{k\pi z}{l}\cos m\beta \tag{12}
$$

Штрих у суммы по k означает, что первый и последний члены берутся с коэффициентом $^1/_2$, что объясняется особенностью разложения функций в ряд по косинусам.

Коэффициенты a_{km}^n определяются с помощью формул метода тригонометрической интерполяции.

Выполнение аналогичных преобразований для V_1' дает:

$$
V_1'(z,s) = \sum_n\sum_k{}' d_k^n t_n \cos\frac{k\pi z}{l}\sin\beta. \tag{13}
$$

Подставляя (12) и (13) в выражение для потенциальной энергии деформации оболочки

$$
\begin{aligned}
Э_{об} = \frac{1}{2}\int_0^l dz \Big| E\delta\int_s\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 ds + \\
+ G\delta\int_s\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 ds\Big| + \frac{1}{2}\int_0^l Ef\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Big|_{\beta=\pi} dz
\end{aligned} \tag{14}
$$

получим, опуская знаки Σ,

$$Э_{об}=t_n t_r \Big[\frac{E\pi^3 R\delta}{4l} k^2 {'a}^n_{km} {'a}^r_{km} + (-1)^m \frac{E\pi^2 f}{2l} k^2 {'a}^n_{km} {'a}^r_{kq} + \qquad (15)$$
$$+\frac{G\pi l\delta}{4}\Big(\frac{m^2}{R} {'a}^n_{km} {'a}^r_{km} + R {'d}^n_k {'d}^r_k + {'a}^r_{kl} {'d}^n_k + {'a}^n_{kl} {'d}^r_n\Big)\Big]$$

Потенциальная энергия деформации шпангоута

$$Э_{шп}=\Big(t_n^2+\bar{R}_2 t_n \frac{2}{\pi R}\Big)\Big(\frac{1}{E_ш I_2}+\frac{1}{G_ш I_к}\frac{1}{n^2}\Big)\frac{\pi R^5}{2(n^2-1)^2} \qquad (16)$$

где $E_ш$ и $G_ш$ — модули упругости первого и второго рода материала шпангоута;

I_2 и $I_к$ — моменты инерции поперечного сечения шпангоута при изгибе его из плоскости и при кручении,

записывается без учета энергии деформации, соответствующей состояниям $n=1$ и $n=0$ (исследуются гармоники порядка $n \geqslant 2$) и энергии деформации в плоскости шпангоута (в стыковом сечении учитываются лишь нормальные связи).

Сумма выражений (15) и (16) представляет собой энергию деформации системы, в результате минимизации которой определяются t_n

$$\frac{\partial}{\partial t_n}(Э_{об}+Э_{шп})=0 ;$$

$$2\sum_{r=0} t_r \Big\{\frac{E\pi^2 R\delta}{4l} k^2 {'a}^r_{km} {'a}^n_{km} + (-1)^{mq} \frac{E\pi^2 f}{2l} k^2 \big({'a}^r_{km} {'a}^n_{kq} + \qquad (17)$$

$$+ {'a}^n_{km} {'a}^r_{kq}\big) + \frac{G\pi l\delta}{4}\Big(\frac{m^2}{R} {'a}^r_{km} {'a}^n_{km} + R {'d}^r_k {'d}^n_k +$$

$$+2\left.\left.\left(a_{k1}^{\prime r} d_{k}^{\prime n}+a_{k1}^{\prime n} d_{k}^{\prime r}\right)\right)\right\}+2 t_{n} c_{n}+\bar{P}_{z} \frac{2}{\pi R} c_{n}=0 ;$$

$$c_{n}=\frac{\pi R^{5}}{2\left(n^{2}-1\right)}\left(\frac{1}{E_{ш} I_{2}}+\frac{1}{G_{ш} \bar{I}_{к}} \cdot \frac{1}{n^{2}}\right)$$

В качестве примера рассмотрена оболочка с торцевым шпангоутом и m равностоящими друг от друга стрингерами. При задании перемещений в виде

$$\begin{aligned} & v=0 ; \\ & u=U_{0} \varphi_{0}+U_{2} \varphi_{2} \end{aligned} \tag{18}$$

получено решение в замкнутом виде. Аналогичное представление функций φ_0 и φ_2 использовалось И. Ф. Образцовым при рассмотрении им оболочки без шпангоута с 4 стрингерами (Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций, М., Машиностроение, 1966, стр. 206—217).

Функция φ_0 в уравнении (18) соответствует растяжению — сжатию оболочки, а φ_2 учитывает депланацию поперечных сечений.

Усилие взаимодействия шпангоута и оболочки в стыковом сечении принимается равным

$$T^{0}=t_{0}+t_{2} \cos 2 \beta \tag{19}$$

Уравнение минимума потенциальной энергии системы, из которого определяется t_2, в этом случае

$$A t_{0}\left[\frac{2 \pi^{3} R^{3} \delta f}{a_{00}^{2}}-\frac{2 \pi R a_{1} m f}{a_{00}}\right]+2\left(A^{2} t_{2}+A B t_{0}\right)\left\{\left(-\frac{m E \delta k}{6}\left[\left(a_{1}-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\pi R}{m}\right)^{3}-a_{1}^{3}\right]+\frac{m E a_{1}^{2} k f}{4}+\frac{G \delta \pi R}{2 k}\right\}+2 t_{2} c_{2}+\bar{P}_{z} \frac{2 c_{2}}{\pi R}=0 \tag{20}$$

В уравнении (20) введены обозначения:

$$a_{00} = 2\pi R\delta + mf;$$

$$a_{22} = \frac{2}{3} m\delta\left[a_1^3 + \left(\frac{\pi R}{m} - a_1\right)^3\right] + mfa_1^2$$

$$a_1 = \frac{\pi^2 R^2 \delta}{m(2\pi R\delta + mf)}$$

$$A = \frac{mR^2}{2Ea_{22}k}\left[\frac{\pi}{ma_{00}}(a_{00} + mf)\sin\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{2\pi}{m} - 1\right]$$

$$B = \frac{\pi^2 R^2 f}{E a_{00} a_{22} k} \tag{21}$$

$$k = \sqrt{\frac{b_{22}}{\gamma a_{22}}};$$

$$b_{22} = 2\pi R\delta$$

$$\gamma = \frac{E}{G}$$

$$c_2 = \frac{\pi R^5}{18}\left(\frac{1}{E_ш I_2} + \frac{1}{G_ш I_k} \cdot \frac{1}{4}\right)$$

Выведенные формулы применяются для расчета гладкой оболочки, нагруженной двумя силами P_z, оболочки с торцевым шпангоутом при аналогичном нагружении и для оболочки с двумя стрингерами и торцевым шпангоутом.

ГЛАВА 3

Применение метода конечных элементов к определению напряженного состояния цилиндрической оболочки со стрингерами, воспринимающими сосредоточенные осевые силы

Действительное напряженное состояние системы оболочка-стрингеры представляется в виде суммы статически возможного и самоуравновешенного. В основном состоянии оболочка рассматривается как тонкостенный стержень кольцевого сечения. При исследовании распределения сил самоуравновешенного состояния оболочка расчленяется на некоторое количество кольцевых отсеков длиной Δz и по сечениям стрингера вводятся силы P_j, через которые выражаются все внутренние усилия в конструкции. Величины сил P_j определяются по методу Кастильяно из условия отсутствия зазоров в сечениях под действием всех силовых факторов. Это условие для n-ого сечения в предположении недеформируемости контура поперечного сечения оболочки записывается в виде

$$P_{n+1}\,\delta_{n,\,n+1} + P_n\,\delta_{n,\,n} + P_{n-1}\,\delta_{n,\,n-1} = 0 \tag{22}$$

Если представить силы P_j на каждом из участков изменяющимися по линейному закону, для коэффициентов $\delta_{n,\,k}$ (k может принимать значения $n+1$, n и $n-1$) получается выражение

$$\delta_{n,k} = \int_0^{\Delta z}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_n^{\omega}\,\sigma_k^{\omega}}{E} R\delta\, d\varphi\, d\xi + \int_0^{\Delta z} \frac{N_n^{\omega} N_k^{\omega}}{Ef}\, d\xi + \int_0^{\Delta z}\int_0^{2\pi} \frac{q_n^{\omega} q_k^{\omega}}{G\,\delta} R\, d\varphi\, d\xi \tag{23}$$

где: ξ — текущая координата отсека длиной Δz;

φ — угол, отсчитываемый от оси стрингера;

σ_k^{ω}, q_k^{ω}, N_k^{ω} — нормальные напряжения в поперечных сечениях оболочки, погонные сдвигающие усилия в обшивке и продольные усилия в стрингере в самоуравновешенном состоянии;

R и δ — радиус и толщина оболочки;

$f = \dfrac{f_n + f_k}{2}$ — усредненная площадь стрингера на участке $n, n+1$ $(n, n-1)$.

Формулы для случая оболочки с одним стрингером переменного поперечного сечения имеют вид:

$$\sigma_\kappa^\omega = -\frac{P_\kappa \xi}{\bar{\zeta}\,\Delta z}\left(2\cos\varphi - 1\right)$$

$$N_\kappa^\omega = \frac{P_\kappa \xi}{\Delta z}\left(1 - \frac{3f}{\bar{\zeta}}\right)$$

$$q_\kappa^\omega = \frac{P_\kappa}{\zeta_\kappa\,\Delta z}\left[\frac{\zeta_\kappa}{2} - \frac{3}{2} f_\kappa \quad 2R\delta\left(\sin\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

где $\qquad \zeta_\kappa = F_\kappa + 2 f_\kappa \qquad\qquad (24)$

f_κ – площадь поперечного сечения стрингера

в к-ом сечении участка Δz;

$$F_\kappa = 2\pi R\delta + f_\kappa$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta_n + \zeta_\kappa}{2}$$

Уравнение (22) после подстановки в него интегралов (23), вычисленных с учетом (24), в этом случае запишется следующим образом:

$$P_{n-1}\left(\lambda_{n,n-1} - \gamma_{n,n-1}\right) + 2P_n\left(\lambda_{n,n-1} + \gamma_{n,n} + \right.$$

$$\left. + \lambda_{n,n+1}\right) + P_{n+1}\left(\lambda_{n,n+1} - \gamma_{n,n+1}\right) = 0 \qquad (25)$$

где

$$\lambda_{n,k}=\frac{\Delta z^{*}}{3\bar{\eta}^{*2}}\left(\frac{\bar{F}^{*2}}{2\bar{f}^{*}}+\frac{\bar{F}^{*}}{2}-3\bar{f}^{*}\right);$$

(26)

$$\gamma_{n,k}=\frac{5{,}2}{\eta_{n}^{*}\,\eta_{k}^{*}\,\Delta z^{*}}\left(\frac{\pi^{3}}{3}-2\pi\right)$$

Звездочкой обозначены безразмерные величины:

$$\Delta z^{*}=\frac{\Delta z}{R}\qquad f^{*}=\frac{f}{R\delta}\qquad F^{*}=\frac{F}{R\delta};\qquad \eta^{*}=\frac{\eta}{R\delta}$$

(27)

$$\bar{F}^{*}=\frac{\bar{F}}{R\delta};\qquad \bar{f}^{*}=\frac{\bar{f}}{R\delta}\qquad \bar{\eta}^{*}=\frac{\bar{\eta}}{R\delta}$$

Получены также формулы для случаев растяжения-сжатия (предполагается, что элементы конструкции не теряют устойчивости и работают в упругой области) и изгиба точечного стыка двух цилиндрических оболочек с m симметрично расположенными стрингерами. Из формул этой главы, как частный случай, при m=4 получаются соотношения, приведенные А. Ф. Феофановым для случая изгиба четырехстрингерного стыка двух цилиндрических оболочек (Феофанов А. Ф. Строительная механика авиационных конструкций. М., Машиностроение, 1964, стр. 131—143)

ГЛАВА 4

Экспериментальные исследования

Испытывались оболочки трех типов. Оболочки № 1 и № 2 имели по одному стрингеру (первая — постоянного, вторая — переменного поперечного сечения), оболочка № 3 — четыре симметрично расположенных стрингера постоянного поперечного сечения. Длина всех оболочек $l=26$ см, толщина $\delta=0,05$ см, радиус $R=7,15$ см, площадь поперечного сечения стрингеров оболочек № 1 и № 3 $f=0,3$ см^2, площадь поперечного сечения стрингера оболочки № 2 изменяется по линейному закону от 0,3 до 0,5 см^2 на длине $l=16$ см. Материал оболочек: сталь Х18Н9, стрингеров — сталь 45.

Нагружаемый силами P_z край оболочки был свободным, на другом торце устанавливался шпангоут, через который струбцинами конструкция крепилась к плите испытательной машины Р-5.

Замеры производились проволочными тензодатчиками при нагрузках, не вызывающих пластических деформаций.

Хорошее совпадение результатов расчета (как вариационным, так и методом конечных элементов) и эксперимента подтверждает возможность использования приведенных соотношений в практике.

ГЛАВА 5

Рациональное распределение материала стрингера

При определении рационального закона изменения площадей поперечных сечений стрингера строится система с минимальной энергией деформации при заданном постоянном объеме материала стрингера V_0 и толщине оболочки δ, т. е. решается изопериметрическая задача вариационного исчисления. Эта задача сводится к задаче на условный экстремум путем составления вспомогательного функционала

$$v^{**}=\int_0^l\left(\frac{N_0^2}{2Ef}+\lambda f\right)dz, \tag{28}$$

уравнение Эйлера для которого дает

$$-\frac{N_0^2}{2Ef^2}+\lambda=0 \tag{29}$$

N_0 — усилие в стрингере.

При учете ограничения $\int_0^l f\,dz = V_0$,

находится выражение для площади стрингера, минимизирующее потенциальную энергию деформации системы:

$$f = \frac{N_0 V_0}{\int_0^l N_0\,dz} \qquad (30)$$

При усилиях исходного состояния и площадях, определенных по формуле (30), получается энергия $Э_{1-0} < Э_0$. ($Э_0$ — энергия исходного состояния). Определяя усилия, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций при площадях (30), получим, согласно принципу минимума потенциальной энергии деформации, $Э_1 < Э_{1-0}$. Последовательное применение алгоритма (30) дает монотонно убывающую последовательность.

$$Э_0 > Э_{1-0} > Э_1 > Э_{2-1} > \qquad (31)$$

Поскольку элемент, выполненный из заданного постоянного объема материала, обладает минимумом потенциальной энергии при равенстве во всех точках его удельной потенциальной энергии (Wasiutynski Z. On the Congruency of the Forming according to the Minimum Potential Energy with that according to the Equal Strength. Bull Acad. Polon. Sci, Vol 8, No 6. 1960, p. 259—268), последовательность (31) сходится. Для стрингера, находящегося в одноосном напряженном состоянии, последнее требование равносильно условию равнопрочности.

Из последовательности (31) можно выделить неравенства

$G_1 > G_2 > G_3 >$ где $G_r = \int_0^l N_z l\,dz$ — силовой вес стрингера

Следовательно, на каждом шаге расчета силовой вес убывает и в стационарном решении достигает минимума.

Таким образом последовательное применение алгоритма (31) приводит к равнопрочному стрингеру с минимальным значением силового веса. Построение рационального стрингера осуществляется следующим образом.

1 Оболочка разделяется на m отсеков длиной Δz, в пределах каждого из которых площадь стрингера предполагается постоянной. Формула (30) переписывается в виде

$$f_m = V_0 \left(\sum_{m-1}^{n} N_{m-1} \Delta z\right)^{-1} N_{m-1} \tag{32}$$

(Такой алгоритм получен В. А. Комаровым при анализе напряженного состояния панели на основе дискретной схемы — Комаров В. А., О рациональном распределении материала в конструкциях, Известия АН СССР «Механика», № 5, 1965, стр. 85—87).

Исходные площади поперечных сечений стрингера принимаются за нулевое приближение.

2. По заданной нагрузке P_z с помощью вариационного либо метода конечных элементов определяются усилия N_{m-1}, соответствующие нулевому приближению.

3. Площади поперечных сечений следующего приближения определяются из (32).

Процесс продолжается до тех пор, пока разница между значениями потенциальных энергий деформаций $Э_{r-1} — Э_r$ двух приближений не станет меньше некоторой заданной малой величины.

На конкретном примере показано, что рациональное размещение заданного объема материала стрингера значительно увеличивает несущую способность конструкции (в 1,77 раза).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Использование вариационного метода В. З. Власова позволило получить формулы для определения напряженно-деформированного состояния оболочки с одним и произволь-

ным числом симметрично расположенных стрингеров. Разрешающая система упрощается при предлагаемом выборе аппроксимирующих функций.

2. Полученные результаты в сочетании с методом тригонометрической интерполяции сделали возможным решение задачи об оболочке с одним стрингером и торцевым шпангоутом.

3. Получено приближенное решение, позволяющее проследить влияние различного рода подкреплений на распределение напряжений в конструкции, что представляет интерес при проектировании.

4. Методом конечных элементов решены задачи расчета точечных стыков цилиндрических оболочек при растяжении, сжатии и изгибе. Полученные формулы можно использовать при оценке прочности соединений отсеков современных летательных аппаратов.

5. Сравнение экспериментальных и расчетных данных позволяет сделать вывод об удовлетворительной точности разработанных методик и рекомендовать при оценочных, проектных расчетах метод конечных элементов, в качестве уточненного — вариационный при выборе аппроксимирующих функций в виде тригонометрических полиномов и учете, наряду с депланацией, деформации поперечных сечений оболочки.

6. В результате исследования закона рационального распределения материала стрингера при постоянном объеме его получен алгоритм построения равнопрочного стрингера с минимальным силовым весом, обеспечивающим наиболее эффективную работу. В применении к проектированию это решение дает также возможность установить критерий выгодности любого заданного распределения материала по сечениям стрингера.

Основные положения диссертации опубликованы в (1–3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бинкевич Е. В., Вергейчик Л. В., Моссаковский В. И. Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек, усиленных в месте приложения локальных нагрузок. Третий Всесоюзный Съезд по Теоретической и Прикладной Механике, М., Аннотации докладов, 1968, стр. 41.

2. Бинкевич Е. В., Вергейчик Л. В. К расчету цилиндрической оболочки со шпангоутом переменной жесткости на поперечные нагрузки, «Самолетостроение и техника воздушного флота». Сб. статей. Ред. коллегия: Ю. А. Алексеев (отв. ред.) и др., Харьков, Харьковский университет, вып. 12, 1967, стр. 56—66.

3. Моссаковский В. И., Вергейчик Л. В., Бинкевич Е. В. О рациональном распределении материала в элементах продольного набора оболочки, «Гидроаэромеханика и теория упругости», Сб. статей, Ред. коллегия: Ю. А. Шевляков (отв. редактор) и др., Харьков, Харьковский университет, вып. 8, 1968, стр. 47-52

БТ 01742. Подписано к печати 28.VI. 1968 г. Бумага 60 x $84^1/_{16}$.
Печ. л. 1,5. Зак. № 5479. Тираж 200 экз.
Газетное издательство и типография, г. Днепропетровск, Ленинградская, 56.