УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ

Нехай $L_0(T)$ *– множина дійснозначних періодичних вимірних функцій,* $\psi : R^+ \to R^+$ *- модуль неперервності (ψ ≠ 0),*
$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \| f \|_\psi := \int_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}.$$
Досліджуються наступні задачі:
1. *Зв'язок між швидкістю апроксимації f тригонометричними поліномами в* L_ψ *та гладкістю в* L_1;
2. *Співвідношення між модулями неперервності f в* L_ψ *і* L_1 *та теореми вкладення класів* $Lip(\alpha,\psi)$ *в* L_1;
3. *Структура функцій класу* $Lip(1,\psi)$.

1.Введение. Настоящая работа является продолжением статей [1-4]; все необходимые определения и обозначения можно найти в этих работах.

Пусть $L_0 \equiv L_0(\mathrm{T})$ – множество действительнозначных 1- периодических функций, измеримых и почти всюду конечных, $T = [0,1]$ – основной тор периодов;
Ω – множество функций $\psi : R^+ \to R^+$, являющихся модулем непрерывности ($\psi \neq 0$).

Среди метрических пространств
$$L_\psi \equiv L_\psi(T) := \left\{ f \in L_0(\mathrm{T}) : \| f \|_\psi := \int_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}$$
важнейшими представителями являются пространства $L_p, 0 < p < 1$ (случай $\psi(t) = t^p$), и L_0 с топологией сходимости по мере: $\| f \|_0 := \int_T \varphi(|f(x)|)dx$,
$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t}.$$

В работах [1-4] исследовались основные задачи теории приближений тригонометрическими полиномами в пространствах L_ψ: прямые и обратные теоремы Джексона и неравенства типа Бернштейна для полиномов. Ранее эти задачи были решены для пространств L_p [5,6,7]. Отметим, что в результате исследований оказалось, что как прямая (первая), так и обратная (в строго определенной форме) теоремы Джексона имеют место в L_ψ тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения γ_ψ функции ψ отличен от нуля. Это позволило, в частности, в таких L_ψ – пространствах получить при некоторых значениях α конструктивную характеристику липшицевых классов

$$Lip(\alpha,\psi) := \left\{ f \in L_\psi;\quad \exists C_f :\quad \omega(f,h) \le C_f h^\alpha \quad \forall h > 0 \right\},$$

в терминах приближения f тригонометрическими полиномами.

В данной статье рассмотрим некоторые задачи, связанные с исследованием гладкости (в различных терминах) функций из L_ψ.

В п.2 рассмотрена следующая задача, связанная с обратной теоремой Джексона. Пусть для заданной функции f $\in L_\psi$ нам известна скорость стремления к нулю последовательности ее наилучших приближений $\{E_\upsilon(f)_\psi; \upsilon = 0,1,2..\}$. Что можно сказать о гладкости f в случае $\gamma_\psi = 0$ (в этом случае обратной теоремы Джексона в L_ψ нет) ?

Показываем (см. теорему 1 и ее следствия), что для любой $\psi \in \Omega$ при определенных условиях на $\{ E_\upsilon(f)_\psi\}$ можно утверждать наличие некоторой гладкости f как элемента нормированного пространства L_1. Доказательство проводится стандартным методом теории приближений (см.[8]), основанным на “неравенствах разных метрик” для полиномов. Подчеркнем, что этот результат справедлив для любой $\psi \in \Omega$. В качестве следствий при условии $\gamma_\psi > 0$ получены соотношения между модулями непрерывности f в L_ψ и L_1, и некоторые теоремы вложения классов $Lip(\alpha,\psi)$ в L_1.

В частности, для классов $Lip(\alpha, p)$ при $\alpha \neq 1$ наши теоремы вложения совпали с известными [9]; однако при $\alpha = 1$ наш результат является слабее.

В связи с этим в п.3, в случае $\gamma_\psi > 0$, исследуем другим методом теоремы вложения $Lip(\alpha,\psi)$ в L_1. Для пространств L_p, $0 < p < 1$, основным результатом здесь является неравенство Э.А.Стороженко [9]:

$$\omega(f,h)_1 \le C_p \int_0^h \left(\frac{\omega(f,x)_p}{x} \right)^{\frac{1}{p}} dx \quad \left(0 < h < \tfrac{1}{3}\right). \tag{1}$$

В теореме 2 доказывается аналогичное (1) соотношение для функций из L_ψ, $\gamma_\psi > 0$. Метод доказательства – аппроксимация f из L_ψ кусочно-постоянными функциями с плавающими узлами – оказался полезным и при исследовании связи между модулями непрерывности в L_ψ и соответствующими К- функционалами (см. п.4).

В заключительном п.5 исследуются аналоги в пространствах L_ψ следующих двух результатов, полученных в пространствах $L_p, 0<p<1$:

1. ([5]): если $f\in AC$, $f\neq const$, то $f\in Lip(p,p)$;
2. ([10]): в случае $0<p<1$ следующие условия эквивалентны:
   1) $f\in Lip(1,p)$;
   2) f эквивалента функции ограниченной р – вариации;
   3) f эквивалента функции f_d вида

$$f_d=d_0+\sum_{x_k<x}d_k\,, \tag{2}$$

где $\{x_k\}$ – последовательность попарно различных точек из [0,1), и $\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^p<\infty.$

Напомним, что по известной теореме Харди – Литлвуда [11] при $p\in(1;\infty)$ $f\in Lip(1,L_p)$ тогда и только тогда, когда f эквивалентна функции из AC с производной из L_p, а при $p=1$ если $f\in AC$, то $f\in Lip(1,L_1)$.

Процитированные выше результаты показывают, что в L_p при $p\in(0,1)$ ситуация другая : класс AC принадлежит $Lip(p,p)$, а класс $Lip(1,p)$ становится достаточно «бедным» и состоит только из функций скачков (2).

Утверждения теорем 4,5 п.5 показывают, что в L_ψ расположение класса AC в шкале Липшица для любой ψ из Ω зависит от показателей растяжения ψ; при $\gamma_\psi>0$ сохраняется аналог теоремы В.Г.Кротова; однако при $\gamma_\psi=0$ картина может измениться: например в пространстве L_0 класс AC «возвращается» в класс Липшица с показателем 1.

Заметим, что в работах [5,6,9,10] в пространствах $L_p, 0<p<1$, значения символа $\|f\|_p$ отличается от нашего; в этих работах $\|f\|_p:=\left(\int_T|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Мы при цитировании результатов этих работ вносим соответствующие изменения, следуя нашим обозначениям.

Исследуемые свойства пространств L_ψ существенно зависят от поведения соответствующей функции растяжения M_ψ. Напомним её определение и основные свойства [15, с. 75-78].

Если $\psi(t)$ - положительная всюду конечная на $(0,\infty)$ функция, то её функция растяжения M_ψ определенная равенством

$$M_\psi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} \qquad (0<s<\infty),$$

имеет следующие свойства:

1. $M_\psi(s_1 s_2) \le M_\psi(s_1) M_\psi(s_2)$.

2. Если $M_\psi(s)$ - всюду конечная, то для нее существуют два числа γ_ψ (нижний индекс растяжения) и δ_ψ (верхний индекс растяжения), $0 \le \gamma_\psi \le \delta_\psi < \infty$, такие что $M_\psi(s) \ge s^{\gamma_\psi}$ при $s<1$, $M_\psi(s) \ge s^{\delta_\psi}$ при $s>1$, и для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших s $M_\psi(s) \le s^{\delta_\psi+\varepsilon}$, а при достаточно малых s $M_\psi(s) \le s^{\gamma_\psi-\varepsilon}$.

Из этих свойств следует, что если $\psi \in \Omega$, то $0 \le \gamma_\psi \le \delta_\psi \le 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константы C'_ε, C''_ε такие, что

$M_\psi(s) \le C'_\varepsilon s^{\delta_\psi+\varepsilon}$ при всех $s \ge 1$,

$M_\psi(s) \le C''_\varepsilon s^{\gamma_\psi-\varepsilon}$ при всех $s \in (0,1]$.

2. Связь между приближением в L_ψ и гладкостью в L_1.

Будем использовать следующий вариант «неравенства разных метрик» для полиномов [3, Следствие 4]: пусть $\psi \in \Omega$, n∈ N, k,r = 0,1,…, h∈ $\left(0,\frac{1}{2}\right]$; тогда для любого полинома T_n выполняется неравенство :

$$\psi\left(\frac{\left\|\Delta_h^k T_n^{(r)}\right\|_1}{h^k}\right) \le Cn M_\psi\left(n^{r-1}\min\left(n^k, h^{-k}\right)\right) \left\|T_n\right\|_\psi \tag{3}$$

с некоторой константой $C = C_\psi(k,r)$.

Теорема 1. *Пусть $\psi \in \Omega$, f из L_ψ такова, что при некотором $r = 0,1,\ldots$ сходится ряд*

$$\sum_{\upsilon=1}^{\infty} M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right) E_{\upsilon-1}(f)_\psi < \infty. \tag{4}$$

Тогда, если $r>0$, то функция f эквивалентна функции, имеющей r-1 -ю абсолютную непрерывную производную, $f^{(r)} \in L_1$, и для любого h ∈ $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ и всех $k = 1,2,\ldots$ выполняются неравенства

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right)\le C_\psi(k,r)\sum_{\upsilon\le\frac{1}{h}}M_\psi\left(\upsilon^{r-1+k}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi+\sum_{\upsilon>\frac{1}{h}}M_\psi\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi. \quad (5)$$

Если же $r=0$*, то из (4) следует, что* $f\in L_1$*, и выполнено (5).*

Доказательство. Пусть r > 0, T_n – полином наилучшего L_ψ – приближения f, и $T_0=0$ (без ограничения общности). Рассмотрим ряды

$$\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right), \quad j = 0,1,..,r. \qquad (6)$$

Из (3) (при k = 0) и (4) следует, что эти ряды сходятся в L_1. Действительно, последовательности $S_n^{(j)}:=\sum_{\upsilon=0}^{n}\left(T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right)$ являются фундаментальными:

$$\psi\left(\left\|S^{(j)}_{n+q}-S^{(j)}_n\right\|_1\right)\le\sum_{\upsilon=n+1}^{n+q}\psi\left(\left\|T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right\|_1\right)\le C_1\sum_{\upsilon=n+1}^{n+q}2^{\upsilon+1}M_\psi\left(2^{(\upsilon+1)(j-1)}\right)E_{2^\upsilon-1}(f)_\psi\le$$

$$\le C_2\sum_{\upsilon=2^{n+1}}^{2^{n+q}}M_\psi\left(\upsilon^{j-1}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi.$$

Пусть функции g_j из L_1, $j=0,1,\dots r,$ являются суммами рядов (6). Покажем сначала, что почти всюду $g_0=f$.

Если $\overline{\psi}$ – наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции ψ из Ω, то (см. напр. [15, Гл. II, §1]) для всех $y>0$

$$\psi(y)\le\overline{\psi}(y)\le 2\psi(y).$$

Поэтому

$$\left\|g_0-S^{(0)}_n\right\|_\psi\le\overline{\psi}\left(\int_T\left|g_0(x)-S^{(0)}_n(x)\right|dx\right)\le 2\psi\left(\left\|g_0-S^{(0)}_n\right\|_1\right),$$

$$\|f-g_0\|_\psi\le\left\|f-S^{(0)}_n\right\|_\psi+\left\|g_0-S^{(0)}_n\right\|_\psi\le\left\|f-S^{(0)}_n\right\|_\psi+2\psi\left(\left\|g_0-S^{(0)}_n\right\|_1\right)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

а значит $g_0(x)=f(x)$ почти всюду.

Теперь покажем, что функция g_0 имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, $g_0^{(r-1)}=g_{r-1}$, и $r-$ю производную из L_1, $g_0^{(r)}=g_r$.

Из сходимости частных сумм $S_n^{(j)}(x)$ в L_1 следует, что существует подпоследовательность $S^{(j)}_{n_m}(x)$, которая при всех j сходится к $g_j(x)$ почти всюду. Пусть x_0 одна из точек сходимости при всех $j=1,\dots r$. Рассмотрим разность

$$g_{j-1}(x)-g_{j-1}(x_0)-\int_{x_0}^{x} g_j(t)\,dt=\left(g_{j-1}(x)-S_{n_m}^{(j-1)}(x)\right)-\left(g_{j-1}(x_0)-S_{n_m}^{(j-1)}(x_0)\right)-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left(g_j(t)-S_{n_m}^{(j)}(t)\right)dt.$$

Так как

$$\left\|g_{j-1}(x)-g_{j-1}(x_0)-\int_{x_0}^{x} g_j(t)\,dt\right\|_1 \le \left\|g_{j-1}(x)-S_{n_m}^{(j-1)}(x)\right\|_1+\left|g_{j-1}(x_0)-S_{n_m}^{(j-1)}(x_0)\right|+$$

$$+\left\|g_j(x)-S_{n_m}^{(j)}(x)\right\|_1,$$

и правая часть при неограниченном увеличении m стремится к нулю, то почти при всех x и $j=1,2,...r$.

$$g_{j-1}(x)-g_{j-1}(x_0)=\int_{x_0}^{x} g_j(t)\,dt.$$

Таким образом, с точностью до значений на множестве меры нуль $f^{(r-1)}\in AC$ и $f^{(r)}\in L_1$.

Заметим, что мы сейчас по существу повторили рассуждения [12, с. 347] для аналогичного факта в шкале нормированных пространств L_p, $p\ge 1$.

Докажем (5). Так как $f^{(r)}=\sum_{\upsilon=0}^{\infty} D^r\left(T_{2^{\upsilon+1}-1}-T_{2^{\upsilon}-1}\right)$,где равенство в смысле L_1 то, используя (3), получаем:

$$\psi\left(\frac{\left\|\Delta_h^k f^{(r)}\right\|_1}{h^k}\right)\le\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\psi\left(\left\|\frac{\Delta_h^k}{h^k}D^r\left(T_{2^{\upsilon+1}-1}-T_{2^{\upsilon}-1}\right)\right\|_1\right)\le$$

$$\le c\sum_{\upsilon=0}^{\infty}2^{\upsilon}M_{\psi}\left(2^{\upsilon(r-1)}\min\left(2^{\upsilon k},h^{-k}\right)\right)\left\|T_{2^{\upsilon+1}-1}-T_{2^{\upsilon}-1}\right\|_{\psi}\le$$

$$\le 2c\left(\sum_{\upsilon:2^{\upsilon}\le\frac{1}{h}}2^{\upsilon}M_{\psi}\left(2^{\upsilon(r-1)}2^{\upsilon k}\right)E_{2^{\upsilon}-1}(f)_{\psi}+\sum_{\upsilon:2^{\upsilon}>\frac{1}{h}}2^{\upsilon}M_{\psi}\left(2^{\upsilon(r-1)}h^{-k}\right)E_{2^{\upsilon}-1}(f)_{\psi}\right)$$

Дальнейшие преобразования к виду (5) стандартные (см. например [4, теорема 1]).

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\psi\in\Omega$, δ_{ψ} – верхний показатель растяжения ψ . Если при некоторых $r = 0,1,\ldots$, $\varepsilon>0$ и $\alpha > 0$ для функции $f\in L_{\psi}$ выполняются неравенства*

$$E_{\upsilon-1}\left(f\right)_{\psi}\leq\frac{C_{f,\varepsilon}}{M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)\upsilon^{1+\alpha+\varepsilon}},\ \upsilon = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

то для этой функции справедливо утверждение теоремы 1, и для любого k = 1,2,…, при всех h ∈ $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right)\leq\begin{cases} C\left(\frac{1}{h}\right)^{k\delta_{\psi}-\alpha}, & k\delta_{\psi}-\alpha>0,\\ C\ln\frac{1}{h}, & k\delta_{\psi}-\alpha=0,\\ C, & k\delta_{\psi}-\alpha<0,\end{cases} \tag{8}$$

где константа C = C(r,k,α,f) не зависит от h.

Доказательство. Очевидно, что условие (4) теоремы 1 выполнено. Из (5) и (7) следует:

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right)\leq C_1\left(\sum_{1\leq\upsilon\leq\frac{1}{h}}\frac{M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1+k}\right)}{M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)\upsilon^{1+\alpha}}+\sum_{\upsilon>\frac{1}{h}}\frac{M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)}{M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)\upsilon^{1+\alpha}}\right)=:C_1\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right).$$

Так как

$$M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1+k}\right)\leq M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)M_{\psi}\left(\upsilon^{k}\right)\leq M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)C_{\varepsilon}\upsilon^{k\delta_{\psi}+\varepsilon},$$

то

$$\Sigma_1\leq C_{\varepsilon}\sum_{1\leq\upsilon\leq\frac{1}{h}}\upsilon^{k\delta_{\psi}-1-\alpha}.$$

Далее,

$$M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)\leq M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)M_{\psi}\left(h^{-k}\right)\leq M_{\psi}\left(\upsilon^{r-1}\right)C_{\varepsilon}h^{-k\delta_{\psi}-\varepsilon},$$

поэтому

$$\Sigma_2\leq C_{\varepsilon}h^{-k\delta_{\psi}-\varepsilon}\sum_{\upsilon>\frac{1}{h}}\upsilon^{-1-\alpha-\varepsilon}\leq C_2\left(\frac{1}{h}\right)^{k\delta_{\psi}-\alpha}.$$

Следовательно, при любом α > 0

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right)\leq C_3\left(\sum_{1\leq\upsilon\leq\frac{1}{h}}\upsilon^{k\delta_{\psi}-1-\alpha}+\left(\frac{1}{h}\right)^{k\delta_{\psi}-\alpha}\right).$$

Отсюда следует (8).

3. Связь между модулями непрерывности в L_ψ и в $\mathbf{L_1}$

С помощью аппроксимации функций тригонометрическими полиномами из теоремы 1 получаем следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Если функция f из* L_ψ *такова, что сходится интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x}\frac{\omega(f,x)_\psi}{x}dx < \infty \ , \qquad (9)$$

то $f \in L_1$, *и для всех* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ *выполняется неравенство*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_{\psi,f}\left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2}dx + \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x}\frac{\omega(f,hx)_\psi}{x}dx\right) \qquad (10)$$

с некоторой константой $C_{\psi,f}$ *,не зависящей от* h.

Доказательство. В [2] доказано, что в случае $\gamma_\psi > 0$ (и только в этом случае) в пространстве L_ψ справедлива теорема Джексона:

$$\sup_{f\in L_\psi,\, f\ne const}\ \sup_{\upsilon\in N}\frac{E_{\upsilon-1}(f)_\psi}{\omega\left(f,\frac{1}{\upsilon}\right)_\psi} < \infty \ .$$

Отсюда и из (9) следует, что при r = 0 выполняется условие (4) теоремы 1. Используем утверждение (5) теоремы 1 (в случае r = 0, k = 1):

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_1\left(\sum_{\upsilon\le\frac{1}{h}}E_{\upsilon-1}(f)_\psi + \sum_{\upsilon>\frac{1}{h}}M_\psi\left(\frac{1}{h\upsilon}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi\right) \le$$

$$\le C_2\left(\sum_{\upsilon\le\frac{1}{h}}\omega\left(f,\frac{1}{\upsilon}\right)_\psi + \sum_{\upsilon>\frac{1}{h}}M_\psi\left(\frac{1}{h\upsilon}\right)\omega\left(f,\frac{1}{\upsilon}\right)_\psi\right) \le$$

$$\le C_3\left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2}dx + \int_0^h M_\psi\left(\frac{x}{h}\right)\frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2}dx\right) =$$

$$= C_3\left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2}dx + \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x}\frac{\omega(f,hx)_\psi}{x}dx\right) \ .$$

Доказанное утверждение позволяет, в частности, получить теоремы вложения классов Lip(α,ψ), $\alpha \in (0,1]$, в L_1.

Следствие 3. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, *$f \in$ Lip(α,ψ), и показатель α удовлетворяет условию* $1-\gamma_\psi < \alpha < 1$. *Тогда* $f \in L_1$, *и для ее* L_1 *– модуля непрерывности при всех* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ *выполняются неравенства*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_f \frac{1}{h^{1-\alpha}}, \qquad \alpha \in \left(1-\gamma_\psi, 1\right). \tag{11}$$

Для доказательства надо использовать (10) и тот факт, что при $x \in (0,1]$ $M_\psi(x) \le C_\varepsilon x^{\gamma_\psi - \varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что при α = 1 эти же рассуждения позволяют доказать неравенство $\psi\left(\omega(f,h)_1 h^{-1}\right) \le C_f \ln\left(\frac{1}{h}\right)$, которое, однако, уже не является «хорошим» даже в пространстве L_p (см.[9]). В дальнейшем (см. следствие 5) другим методом докажем для случая α = 1 более точный результат. Отметим еще следующий факт, вытекающий из теоремы 1 в случае r = 1.

Следствие 4. *Какова бы ни была функция ψ из Ω, из условия* $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} E_{\upsilon-1}(f)_\psi < \infty$ *вытекает, что функция f эквивалентна абсолютно непрерывной функции.*

Теперь мы для исследования связи между модулями непрерывности в L_ψ и в L_1 вместо аппроксимации полиномами используем приближение кусочно-постоянными функциями.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, *и* f *из* L_ψ *такова, что конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f,t)_\psi}{t} dt < \infty. \tag{12}$$

Тогда f *принадлежит* L_1, *и для всех* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ *выполняется неравенство*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_{\psi,f} \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f,ht)_\psi}{ht} dt \tag{13}$$

с некоторой константой $C_{\psi,f}$, *не зависящей от h.*

Заметим, что существование функций f ($f \ne$const), удовлетворяющих условию (12), гарантируется лишь в случае $\gamma_\psi > 0$. Действительно, если $\gamma_\psi = 0$, *то* $M_\psi(t) \equiv 1$ при $t \in (0,1]$, и (12) невозможно ни для какого нетривиального модуля непрерывности.

Доказательство. Принадлежность f пространству L_1 доказана в следствии 2; однако этот факт легко увидеть и в приводимом ниже доказательстве (13) (см. (17)). Будем использовать связь между модулями непрерывности и К- функционалами (см. напр.[13]) в L_1 :

$$\omega(f,h)_1 \approx K(f,h;L_1,V) := \inf_{f_1+f_2=f}\left(\|f_1\|_1 + hV(f_2)\right), \tag{14}$$

где $V(f_2)$- вариация функции f_2 на периоде.

Для оценки $K(f)$ сверху построим специальные сплайн-функции. Для каждого натурального k построим разбиение периода [0,1] равноотстоящими точками

$$x_{j,k} = j2^{-k}, \quad j = 0,1,\dots,2^k.$$

Снимем значения f в этих точках, и определим кусочно-постоянную функцию $S_{2^k}(f,x)$*: для* $j = 0,1,\dots,2^k-1$

$$S_{2^k}(f,x) := f(x_{j,k}) \quad \textit{при} \quad x \in [x_{j,k}, x_{j+1,k}) \,. \tag{15}$$

Если функция f непрерывна, то определение (15) интерполяционного сплайна $S_{2^k}(f,x)$ корректно; однако для эквивалентных в L_1 функций соответствующие сплайны (15) могут различаться как элементы пространства L_1. Для исправления этого недостатка используем тот факт, что неравенство (13) инвариантно относительно сдвигов функций f .

Для каждого фиксированного $t \in R$ обозначим через f_t сдвиг функции f на параметр t :

$$f_t(x) := f(x+t).$$

Так как $\omega(f,h)_1 = \omega(f_t,h)_1$, то из (14) следует, что

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) = \int_0^1 \psi\left(\frac{\omega(f_t,h)_1}{h}\right)dt \le C_1\int_0^1 \psi\left(h^{-1}K(f_t,h;L,V)\right)dt =$$

$$= C_1\int_0^1 \psi\left(\inf_{f_{1,t}+f_{2,t}=f_t}\left(h^{-1}\|f_{1,t}\|_1 + V(f_{2,t})\right)\right)dt \,. \tag{16}$$

В качестве функций $f_{1,t}$ и $f_{2,t}$ будем выбирать сплайны вида (15). Отметим, что если функции f и g эквивалентные, то сплайны $S_{2^k}(f_t)$ и $S_{2^k}(g_t)$ совпадают при почти всех t. Поэтому теперь их использование в (16) является корректным.

Пусть сначала h имеет вид $h = 2^{-n}$, $n \in N$. Положим в (16)

$$f_{2,t} := S_{2^n}(f_t).$$

Легко видеть, что имеет место равенство в смысле L_1

$$f_t = S_{2^n}(f_t) + \sum_{k>n}\left(S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t)\right), \tag{17}$$

поэтому

$$f_{1,t}=\sum_{k>n}\left(S_{2^k}(f_t)-S_{2^{k-1}}(f_t)\right).$$

Далее,

$$\left\|S_{2^k}(f_t)-S_{2^{k-1}}(f_t)\right\|_1=\sum_{j=0}^{2^k-1}\int_{x_{j,k}}^{x_{j+1,k}}\left|S_{2^k}(f_t,x)-S_{2^{k-1}}(f_t,x)\right|dx\le\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\left|f_t\left(x_{j+1,k}\right)-f_t\left(x_{j,k}\right)\right|,$$

$$\psi\left(2^n\left\|f_{1,t}\right\|_1\right)\le\psi\left(\sum_{k>n}2^n\left\|S_{2^k}(f_t)-S_{2^{k-1}}(f_t)\right\|_1\right)\le\sum_{k>n}\psi\left(2^n\left\|S_{2^k}(f_t)-S_{2^{k-1}}(f_t)\right\|_1\right)\le$$

$$\le\sum_{k>n}\psi\left(2^{n-k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\left|f_t\left(x_{j+1,k}\right)-f_t\left(x_{j,k}\right)\right|\right)\le$$

$$\le\sum_{k>n}M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{j=0}^{2^k-1}\psi\left(\left|f_t\left(x_{j+1,k}\right)-f_t\left(x_{j,k}\right)\right|\right),$$

$$\int_0^1\psi\left(2^n\left\|f_{1,t}\right\|_1\right)dt\le\sum_{k>n}M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{j=0}^{2^k-1}\int_0^1\psi\left(\left|f_t\left(x_{j+1,k}\right)-f_t\left(x_{j,k}\right)\right|\right)dt=$$

$$=\sum_{k>n}M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{j=0}^{2^k-1}\left\|\Delta_{\frac{1}{2^k}}f\right\|_\psi=\sum_{k>n}M_\psi\left(2^{n-k}\right)2^k\left\|\Delta_{\frac{1}{2^k}}f\right\|_\psi. \qquad (18)$$

Аналогичным образом

$$V\left(f_{2,t}\right)=V\left(S_{2^n}(f_t)\right)=\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|f_t\left(x_{j+1,n}\right)-f_t\left(x_{j,n}\right)\right|,$$

$$\psi\left(V\left(f_{2,t}\right)\right)\le\sum_{j=0}^{2^n-1}\psi\left(\left|f_t\left(x_{j+1,n}\right)-f_t\left(x_{j,n}\right)\right|\right),$$

$$\int_0^1\psi\left(V\left(f_{2,t}\right)\right)dt\le\sum_{j=0}^{2^n-1}\left\|\Delta_{\frac{1}{2^n}}f\right\|_\psi=2^n\left\|\Delta_{\frac{1}{2^n}}f\right\|_\psi. \qquad (19)$$

Теперь из (16) при $h=2^{-n}$, (18) и (19) следует, что

$$\psi\left(2^n\omega\left(f,2^{-n}\right)_1\right)\le C_1\int_0^1\psi\left(2^n\left\|f_{1,t}\right\|_1+V\left(f_{2,t}\right)\right)dt\le$$

$$\le C_1\left(\sum_{k>n}M_\psi\left(2^{n-k}\right)2^k\left\|\Delta_{\frac{1}{2^k}}f\right\|_\psi+2^n\left\|\Delta_{\frac{1}{2^n}}f\right\|_\psi\right)\le$$

$$\le C_1\sum_{k\ge n}M_\psi\left(2^n\frac{1}{2^k}\right)\frac{\omega\left(f,\frac{1}{2^k}\right)_\psi}{1/2^k}\le C_2\int_0^{1/2^n}M_\psi\left(2^ny\right)\frac{\omega(f,y)_\psi}{y}\frac{dy}{y}=$$

$$= C_2 \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, 2^{-n} t\right)_\psi}{2^{-n} t} dt .$$

Неравенство (13) доказано в случае h = 2^{-n} . Для произвольного $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ найдем n$\in N$ такое, что $2^{-n} \leq h < 2^{-(n-1)}$. Тогда

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leq \psi\left(\frac{\omega\left(f, 2\cdot 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq \psi\left(2\frac{\omega\left(f, 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq M_\psi(2)\psi\left(\frac{\omega\left(f, 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq$$

$$\leq M_\psi(2) C_2 \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, 2^{-n} t\right)_\psi}{2^{-n} t} dt \leq M_\psi(2) C_2 2 \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f, ht)_\psi}{ht} dt \quad .$$

Теорема 2 доказана.

Из неравенства (13) для классов $Lip(\alpha,\psi)$ при α < 1 получаются те же теоремы вложения в L_1, что и в следствии 3. Однако в случае α = 1 теперь мы можем утверждать большее.

Следствие 5. *Если $\gamma_\psi > 0$,то из условия $f \in Lip(1,\psi)$ следует, что $f \in Lip(1,L_1)$.*

4. Модули непрерывности в L_ψ и К - функционалы.

При доказательстве теоремы 2 для оценки сверху К- функционала использовалась аппроксимация функций интерполяционными сплайнами нулевого порядка с плавающими узлами. Заметим, что теоремы Джексона (прямая и обратная) для такой аппроксимации в метрических пространствах доказаны в [14].

Сейчас используем ту же идею для доказательства аналога соотношения (14) в пространстве L_ψ.

Пусть $L_\psi^1 := Lip(1,\psi)$, $\|f\|_{\psi,1} \equiv \|f\|_{L_\psi^1} := \sup\limits_{s>0} \frac{\omega(f,s)_\psi}{s}$,

$K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right) := \inf\limits_{f_1+f_2=f}\left(\|f_1\|_\psi + h\|f_2\|_{\psi,1}\right)$,

$\overline{\omega}(f,h)_\psi$ - наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $\omega(f,h)_\psi$.

Напомним (см. например [15]), что

$$\omega(f,h)_\psi \leq \overline{\omega}(f,h)_\psi \leq 2\omega(f,h)_\psi . \tag{20}$$

Теорема 3. *Для любой $\psi \in \Omega$ и $\forall f \in L_\psi$ при всех $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ имеют место неравенства*

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}(f,2h)_\psi \le K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right) \le 2\omega(f,2h)_\psi \ . \tag{21}$$

Доказательство. Левое неравенство является простым следствием определений. Так как $\forall\ h>0$

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \le \|f\|_\psi\ , \quad \omega(g,h)_\psi \le \|g\|_{\psi,1}\cdot h, \quad \left(g\in L_\psi^1\right),$$

то $\forall g \in L_\psi^1$

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \le \frac{1}{2}\left(\omega(f-g,2h)_\psi+\omega(g,2h)_\psi\right) \le \frac{1}{2}\left(2\|f-g\|_\psi+\|g\|_{\psi,1}2h\right),$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \le \inf_{g\in L_\psi^1}\left(\|f-g\|_\psi+h\|g\|_{\psi,1}\right)=K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right).$$

Так как K(f,h) – выпуклая вверх функция аргумента h, то левое неравенство (21) доказано.

Для доказательства правой части (21) достаточно показать, что для всех $n\in N$

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right) \le 2\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi \ . \tag{22}$$

Действительно, если выполнено (22), то для произвольного $h\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$

найдем $n\in N$ такое, что $2^{-n}\le h<2^{-(n-1)}$, и тогда

$$K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right) \le K\left(f,2^{-(n-1)};L_\psi,L_\psi^1\right) \le 2\omega\left(f,2^{-(n-1)}\right)_\psi \le 2\omega(f,2h)_\psi \ .$$

Итак, для доказательства (22) зафиксируем n, и для каждого сдвига f_t функции f построим интерполяционный сплайн $S_n(f_t)$ (15) с n равноотстоящими узлами $y_{j,n} := jn^{-1}$, $j = 0,1,..,n$. Тогда

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right)=\int_0^1 K\left(f_t,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right)dt \le$$

$$\le \int_0^1\left(\|f_t-S_n(f_t)\|_\psi+\frac{1}{n}\|S_n(f_t)\|_{\psi,1}\right)dt\ , \tag{23}$$

$$\int_0^1\|f_t-S_n(f_t)\|_\psi dt=\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_{j,n}}^{y_{j+1,n}}\psi\left(\left|f_t(x)-f_t(y_{j,n})\right|\right)dxdt=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1\int_0^{1/n}\psi\left(\left|f_t(x+y_{j,n})-f_t(y_{j,n})\right|\right)dxdt=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1/n}\int_0^1\psi\left(\left|f\left(t+x+y_{j,n}\right)-f\left(t+y_{j,n}\right)\right|\right)dtdx=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1/n}\left\|\Delta_x f\right\|_\psi dx=n\int_0^{1/n}\left\|\Delta_x f\right\|_\psi dx\,. \tag{24}$$

Для оценки второго слагаемого в (23) вычислим $\omega\left(S_n\left(f_t\right),h\right)_\psi$. Пусть сначала $h\le 1/n$. Тогда для почти всех t

$$\left\|\Delta_h S_n\left(f_t\right)\right\|_\psi=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j,n}}^{y_{j,n}+h}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right)dx=h\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right),$$

а значит при $h\le 1/n$

$$\omega\left(S_n\left(f_t\right),h\right)_\psi=h\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right). \tag{25}$$

Если $h>1/n$, то найдем k ∈ N такое, что $h\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$. Тогда $h=\frac{k}{n}+h'$, где $h'<\frac{1}{n}$, и с помощью (25) получим, что

$$\omega\left(S_n\left(f_t\right),h\right)_\psi\le\omega\left(S_n\left(f_t\right),\frac{k}{n}\right)_\psi+\omega\left(S_n\left(f_t\right),h'\right)_\psi\le k\omega\left(S_n\left(f_t\right),\frac{1}{n}\right)_\psi+\omega\left(S_n\left(f_t\right),h'\right)_\psi=$$

$$=\left(k\frac{1}{n}+h'\right)\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right). \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что для почти всех t

$$\left\|S_n\left(f_t\right)\right\|_{\psi,1}=\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right),$$

поэтому

$$\int_0^1\left\|S_n\left(f_t\right)\right\|_{\psi,1}dt=n\left\|\Delta_{\frac{1}{n}}f\right\|_\psi\,. \tag{27}$$

Теперь из (23),(24) и (27) вытекает, что

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right)\le n\int_0^{1/n}\left\|\Delta_x f\right\|_\psi dx+\left\|\Delta_{\frac{1}{n}}f\right\|_\psi\,.$$

Отсюда следует (22). Теорема 3 доказана.

5. Классы Липшица и абсолютно непрерывные функции в L_ψ.

Теорема 4. *Если $f \in AC$, $f \neq const$, то для любой $\psi \in \Omega$ найдутся константы $C_1 = C_1(\psi, f)$ и $C_2 = C_2(\psi, f)$ такие, что при всех $h \in [0,1)$ выполняются неравенства*

$$\frac{C_1}{M_\psi\left(\frac{1}{h}\right)} \le \omega(f,h)_\psi \le C_2\psi(h). \tag{28}$$

Доказательство. Правое неравенство есть следствие (20) и неравенства Йенсена:

$$\|\Delta_h f\|_\psi = \int_0^1 \psi\left(|\Delta_h f(x)|\right)dx \le \int_0^1 \overline{\psi}\left(|\Delta_h f(x)|\right)dx \le \overline{\psi}\left(\|\Delta_h f\|_1\right) \le 2\psi\left(\|\Delta_h f\|_1\right) \le$$

$$\le 2\psi\left(V(f)h\right) \le 2M_\psi\left(V(f)\right)\psi(h).$$

Для доказательства левого неравенства используем следующую лемму.

Лемма 1. *Если для $f \in AC$ найдется бесконечная последовательность попарно различных* $\{h_i\}\downarrow 0$ *такая, что*

$$\left\|\frac{\Delta_{h_i} f}{h_i}\right\|_\psi \to 0 \ \text{ при } i \to \infty, \ \text{ то } \ f \equiv const.$$

Для пространств L_p, $0 < p < 1$, это утверждение доказано в [5; лемма 1.5], и доказательство остается справедливым для всех L_ψ.

Из леммы вытекает, что если $f \in AC$, $f \neq const$, то найдется константа $K > 0$ такая, что для всех достаточно малых $h > 0$

$$\left\|\tfrac{\Delta_h f}{h}\right\|_\psi \ge K > 0. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\left\|\frac{\Delta_h f}{h}\right\|_\psi \le M_\psi\left(\frac{1}{h}\right)\|\Delta_h f\|_\psi \le M_\psi\left(\frac{1}{h}\right)\omega(f,h)_\psi. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует левая часть (28). Теорема 4 доказана.

Заметим, что $\psi(1) = \psi\left(\frac{1}{h}h\right) \le M_\psi\left(\frac{1}{h}\right)\psi(h)$, то есть

$$\frac{\psi(1)}{M_\psi\left(\frac{1}{h}\right)} \le \psi(h), \tag{31}$$

однако в (31) возможен и знак строгого неравенства.

Нам не известно, можно ли усилить нижнюю оценку в (28) для произвольной $\psi \in \Omega$. А вот верхняя оценка в (28) неулучшаемая для каждой ψ. Действительно, пример функции $g \in AC$,

$$g(x)=\begin{cases} x & ,x\in\left[0,\frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{2}-x, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \end{cases}, \quad g\left(x+\frac{1}{2}\right)=-g(x) \ ,$$

показывает, что оценка $\omega(f,h)_\psi = 0(\psi(h))$, $h\to 0$, на классе $f\in AC$, $f\neq const$, невозможна.

Пусть $\overline{\Omega}$ - класс выпуклых вверх функций ψ из Ω,

$$\overline{\Omega}_1=\left\{\psi\in\overline{\Omega}:\ \lim_{s\to 0}\frac{\psi(s)}{s}=1\right\}. \qquad (32)$$

Легко видеть (см.[3]), что для $\psi\in\overline{\Omega}_1$ $\quad M_\psi(s)=s \quad \forall s\geq 1$.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 6. *Если $\psi\in\overline{\Omega}_1$, то все абсолютно непрерывные функции f (f≠const) принадлежат классу Lip(1,ψ).*

Это справедливо, например, в пространствах L_0, ln(1+L), для которых $\gamma_\psi=0$. Если же $\psi(t):=\min\left(t,t^\alpha\right)$, $0<\alpha<1$, то $\psi\in\overline{\Omega}_1$ и $\gamma_\psi=\alpha$. Таким образом, для функций ψ из $\overline{\Omega}_1$ γ_ψ может принимать любое значение из [0,1].

Однако, как мы сейчас покажем, если изменить условие (32) на (33), то в случае $\gamma_\psi>0$ ситуация резко меняется: класс $Lip(1,\psi)$ уже не содержит абсолютно непрерывных функций.

Для заданной $\psi\in\Omega$ скажем, что функция f имеет ограниченную ψ-вариацию ($f\in V_\psi$), если $V_\psi(f):=\sup\limits_{0=x_0<\ldots<x_n=1}\sum\limits_{k=1}^{n}\psi\left(\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\right)<\infty$.

Следующая теорема об описании классов $Lip(1,\psi)$ в случае пространств $L_p, 0<p<1$, доказана В.Г. Кротовым [10]. При доказательстве мы по существу повторяем рассуждения из [10], внося лишь необходимые технические изменения.

Теорема 5. *Пусть ψ∈ Ω такова, что* $\gamma_\psi>0$ *и*

$$\overline{\lim_{s\to 0}}\frac{\psi(s)}{s}=\infty . \qquad (33)$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) *f∈ Lip(1,ψ);*
2) *f эквивалентна функции класса* V_ψ*;*
3) *f эквивалентна функции вида*

$$f_d(x) = d_0 + \sum_{x_k < x} d_k \ , \qquad (34)$$

где $\{x_k\}$ *последовательность попарно различных точек из* [0,1), и $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(|d_k|) < \infty$.

Таким образом, при указанных условиях на ψ класс $Lip(1,\psi)$ состоит только из функций скачков (34).

Ясно, что от условия (33) избавиться нельзя; достаточно положить $L_\psi = L_1$.

Доказательство. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 3).Так как $\gamma_\psi > 0$, то по следствию 5 $f \in Lip(1, L_1)$, а значит $f \in V$ (после изменения ее значений на множестве меры нуль). Пусть ее разложение Лебега

$$f = f_a + f_s + f_d , \qquad (35)$$

где f_a – абсолютно непрерывная составляющая, f_s – сингулярная часть, f_d – функция скачков вида (34).

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(|d_k|) < \infty . \qquad (36)$$

Следуя [10], для фиксированного n ∈ N выберем h > 0 настолько малым, что

$$(x_k - h, x_k) \cap (x_i - h, x_i) = \varnothing \quad (i \neq k;\ i,k = 1,..,n),$$

$$|d_k| \le 2 |f(x+h) - f(x)| \quad (x \in (x_k - h, x_k), k = 1,..,n).$$

Тогда в силу того, что $\|\Delta_h f\|_\psi \le C_f h$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(|d_k|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h} \int_{x_k - h}^{x_k} \psi(|f(x+h) - f(x)|) dx \le$$

$$\le M_\psi(2) \frac{1}{h} \int_0^h \psi(|\Delta_h f(x)|) dx \le M_\psi(2) C_f$$

для всех n $\in$ N. Отсюда следует (36), а значит наряду с $f \in Lip(1,\psi)$ и $f_d \in Lip(1,\psi)$.

Следовательно (см. (35)), функция $g := f_a + f_s$ тоже принадлежит $Lip(1,\psi)$. Кроме того $g \in C$. Выведем отсюда, что $g \equiv const$. Тогда из (35) будет следовать наше утверждение.

Оценим приращение g в L_1:

$$\left\|\Delta_h g\right\|_1 := \int_0^1 \left|\Delta_h g(x)\right| dx = \int_0^1 \psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)\left(\frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)}\right) dx \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le 1} \frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)} \left\|\Delta_h g\right\|_\psi \le C_f h \sup_{0\le x\le 1} \frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)}. \qquad (37)$$

Так как

$$\psi(y) \le \overline{\psi}(y) \le 2\psi(y), \quad \frac{\overline{\psi}(y)}{y}\downarrow,$$

то

$$\sup_{0\le y\le b} \frac{y}{\psi(y)} \le 2 \sup_{0\le y\le b} \frac{y}{\overline{\psi}(y)} = 2\frac{b}{\overline{\psi}(b)} \le 2\frac{b}{\psi(b)},$$

поэтому

$$\sup_{0\le x\le 1} \frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)} \le 2\frac{\left\|\Delta_h g\right\|_C}{\psi\left(\left\|\Delta_h g\right\|_C\right)} \le 2\frac{\omega(g,h)_C}{\psi\left(\omega(g,h)_C\right)}.$$

Ввиду условия (33)

$$\frac{\omega(g,h)_C}{\psi\left(\omega(g,h)_C\right)} = o(1) \quad (h \to 0). \qquad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что $\left\|\Delta_h g\right\|_1 =$ *o(h),* и g ≡ *const*. Таким образом $f = f_d + const$.

Остальные утверждения теоремы достаточно очевидны.

[1] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000.- 52, №1. - С.122-133.

[2] *Пичугов С.А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №11. С. 1524-1533.

[3] *Пичугов С.А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №12. – С. 1657-1671.

[4] *Пичугов С.А.* Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2012. – 64, №3.

[5] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$// Матем. сб. – 1975.-98,№3. –С.395-415.

[6] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки-1975.-18,№5. –С.641-658.

[7] *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Известия АН СССР. Серия мат. – 1982. -45, №1. –С. 3-22.

[8] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.:Наука, 1977. - 342 с.

[9] *Стороженко Э.А.* О некоторых теоремах вложения // Матем. заметки- 1976. -19, №2.-с.187-200.

[10] *Кротов В.Г.* О дифференцируемости функций из L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб.-1982.-117,№1.-С.95-113.

[11] *Hardy G.H., Littlewood J.* Some properties of functional integrals. I. // Math. Z.-1928.-B.27-P.565-606.

[12] *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. -624 с.

[13] *Bennett C.., Sparsley R.* Interpolation of operators. – New York: Acad. Press, 1988.-469 p.

[14] *Пичугов С.А.* Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочно постоянными функциями // Укр. мат. журн. -1996.-48, № 5. С.711-715.

[15] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. –М.: Наука, 1978.-400 с.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ

Let $L_0(T)$ is the set of real-valued periodic measurable function, $\psi : R^+ \to R^+$ is the function of module of continuity ($\psi \neq 0$),

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \| f \|_\psi := \int_T \psi(|f(x)|) dx < \infty \right\}.$$

The following problems are being investigated:

1. Connection between the speed of approximation f by trigonometric polynomials in L_ψ and smoothness in L_1;

2. Correlation between functions of module of continuity f in L_ψ and L_1, and embedding theorems $Lip(\alpha,\psi)$ in L_1;

3. Structure of functions form $Lip(1,\psi)$.

УДК 517.5

С. А. Пичугов
(Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, Днепропетровск)

Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ

Пусть $L_0(T)$ – множество действительнозначных периодических измеримых функций, $\psi : R^+ \to R^+$ - модуль непрерывности ($\psi \neq 0$),

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \|f\|_\psi := \int_T \psi\left(\left|f(x)\right|\right) dx < \infty \right\}.$$

Исследуются следующие задачи:

1. Связь между скоростью аппроксимации f тригонометрическими полиномами в L_ψ и гладкостью в L_1;
2. Соотношение между модулями непрерывности f в L_ψ и L_1 и теоремы вложения классов $Lip(\alpha,\psi)$ в L_1;
3. Структура функций класса $Lip(1,\psi)$.