

УДК 539.001.5

*Ст. викл. А.Р. Мілянч – Львівська філія
Дніпропетровського НУ залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна*

**ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОЇ ЖОРСТКОСТІ ПРИ ПРУЖНОМУ
КОНТАКТУВАННІ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ГОЛКОФРЕЗИ
І ПОВЕРХНЕЮ ЗАСТИГЛОГО ПЕКУ**

Розроблено наближений критерій оптимальності в задачі з вимоги жорсткості двох пружних тіл. Контактну задачу досліджено згідно з припущенням про неістотний вплив контакту на загальну потенціальну енергію системи. Поставлено та досліджено актуальну задачу встановлення жорсткості при контактуванні робочих елементів інструменту – голкофрези із поверхнею застиглого пеку про визначення такого закону розподілення заданої кількості матеріалу, при якому жорсткість конструктивної взаємодії буде максимальною.

Побудовано математичну модель, яка дає змогу оцінювати довговічність робочих інструментів, що використовуються під час очищення затверділих органічних вантажів залізничних цистерн.

Ключові слова: поверхня, взаємодія, деформація, жорсткість, енергія.

Пек – тверда або в'язка маса чорного кольору, яка залишається від перегонки кам'яного вугілля, торф'яного або деревного дьогтю, сірки, смоли тощо. Його застосовують для виготовлення покривельного гідроізоляційного матеріалу, графітових електродів тощо. Транспортування рідкого пеку здійснюється у більшості випадків залізничними цистернами, а вивантаження проводиться способом сифонування.

На цей час для органічних матеріалів (до яких і відноситься пек), яким властиві міцнісні та пружинисті характеристики, ще недостатньо розроблені, створені і впроваджені надійні методи, які дають змогу визначати умови руйнування таких матеріалів при складному напруженому стані. Потреби проектувальників задовольняли методи розрахунку умов пластичного руйнування при комбінованих навантаженнях.

Задачу про встановлення жорсткості при контактуванні робочих елементів інструменту – голкофрези із поверхнею застиглого пеку – можна сформулювати як задачу про визначення такого закону розподілення заданої кількості матеріалу, при якій жорсткість конструктивної взаємодії буде максимальною. Для лінійно-пружної конструкції із звичайними двосторонніми граничними умовами задача про найбільшу жорсткість є еквівалентною до задачі про мінімізацію піддатливості. Величина потенціальної енергії цієї конструкції приймається як мірило її жорсткості, а можлива робота зовнішніх сил – за мірило піддатливості. Наведений далі метод розрахунку є метою визначення єдиного розподільного параметра, від якого лінійно залежить жорсткість конструкції робочих елементів інструменту – поверхня застиглого пеку.

Поставлена задача є цікавою у випадку двосторонніх граничних умов, коли вона приймає форму, яка полегшує її вирішення. Мінімізація потенціальної енергії відносно переміщення приводить до встановлення дійсної (реальної) поведінки цієї конструкції, а максимізація потенціальної енергії відносно розрахункового параметра є метою задачі проектування. У такому випадку спряжені рівняння мають точно таку ж форму, як і рівняння рівноваги, завдяки чому вони автоматично розв'язуються при рішенні рівнянь рівноваги. Узагальнені методи розв'язку таких задач наведені у роботі [1]; розроблений в ній критерій оптимальності приводить до емпіричного правила, яке свідчить про те, що найбільшу жорсткість конструкція матиме в тому випадку, коли питома енергія деформації є сталою по всьому об'єму.

Контактна задача. Спершу ніж показувати методи розрахунку контактуючих тіл, розглянемо загальну контактну задачу. Ми обмежимося при цьому випадку контакту тіл, які підлягають малим деформаціям під впливом квазістатичних навантажень.

Припускаємо, що зовнішні поверхневі зусилля прикладені лише до тіла 1 – інструменту оброблення (рис.) у точках, які не належать областям контакту. Тоді потенціальну енергію системи можна представити в такому вигляді:

$$\pi(u) = U^1 - W^1 + U^2 - W^2, \quad (1)$$

де

$$U^1 = \int_{\Omega^1} 0,5 \cdot \tau_{ij}^1 \cdot \varepsilon_{ij}^1 dv, \quad U^2 = \int_{\Omega^2} 0,5 \cdot \tau_{ij}^2 \cdot \varepsilon_{ij}^2 dv,$$

$$W^1 = \int_{\Omega^1} X_i^1 \cdot u_i^1 dv + \int_{\Gamma_p^1} p_i \cdot u_i^1 ds, \quad W^2 = \int_{\Omega^2} X_i^2 \cdot u_i^2 dv,$$

де, своєю чергою: π – потенціальна енергія; u – переміщення точок тіла 1 і 2; $U = U^1 + U^2$ – енергія деформації двох тіл; $W = W^1 + W^2$ – піддатливість двох тіл; τ_{ij} – компоненти тензора напружень; ε_{ij} – компоненти тензора деформацій; Γ – область можливого контакту тіл.

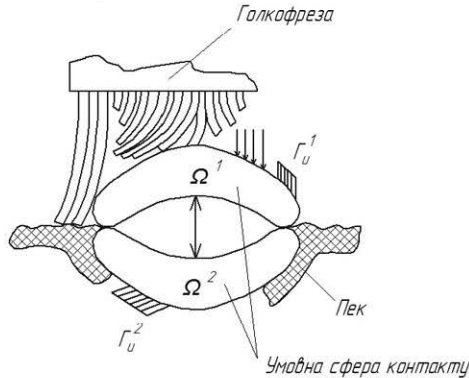


Рис. Схема контактування робочих елементів голкофрези з поверхнею оброблення

Позначимо, крім того, через Γ_c^1 та Γ_c^2 ті частини поверхонь тіл 1 і 2, по яким може відбутися їх контактування. Вони повинні бути достатньо значними і включати в себе фактичні, отримані внаслідок рішення задачі області контактування. При малих деформаціях початкова відстань α між двома тілами в невантаженому стані вважається настільки незначними, що області Γ_c^1 та Γ_c^2 майже не відрізняються між собою. Завдяки цьому ми зможемо враховувати лише одну можливу область контакту Γ_c . Умову взаємного непроникнення тіл визначасмо тепер за допомогою односторонньої функції Φ на ділянці Γ_c

$$\Phi(u) = u_n^1 + u_n^2 - \alpha, \quad (2)$$

де Φ – відстань між тілами після прикладення до них навантажень.

Із принципу мінімуму потенціальної енергії відомо, що переміщення u точок у контактній задачі задовольняють такі вимоги:

$$\min \pi(u) \text{ за умови } \Phi(u) \leq 0, \quad u \in K, \quad (3)$$

де K – множина переміщень, які задовольняють двосторонні кінематичні умови сумісності.

В останньому виразі K визначається звичайним способом як випукла множина безперервних функцій u_i^1 та u_i^2 , які задовольняються двосторонніми граничними умовами, накладеними на переміщення.

Умова (3) є найбільш загальною варіаційною формою контактних задач. Кінцево-елементна дискретизація задачі, яка наведена у цій формі, приводить до певної квадратичної функції при накладених зв'язках, що описані лінійними нерівностями; для розв'язку такої задачі існують ефективні числові методи. На жаль, через те, що кінематичні умови сумісності, накладені на переміщення точок, виражаються у формі нерівностей, необхідні умови рівноваги для задачі (3) є також системою нерівностей. Тому для одержання критерію оптимальності бажано надати нашій задачі таку форму, в яку не входили б умови рівноваги у вигляді нерівностей. Для того, щоб привести ці умови до виду рівностей, вводи-мо множник Лагранжа [2], який дає змогу підпорядкувати функціонал потенці-альної енергії, наведеної вище умови непроникності. Кінематична сумісність забезпечується при цьому за допомогою множини K , тобто множини безперер-вних переміщень, які задовольняються двосторонніми граничними умовами. Варіації переміщень тоді отримуються двосторонніми і приводять до співвідно-шення у вигляді рівності. Із врахуванням цього обмеження отримуємо функці-онал Лагранжа в такій формі:

$$L(u, \lambda) = \pi + \int_{\Gamma_c} \lambda \cdot \Phi ds. \quad (4)$$

Зв'язок між задачею, яка сформульована за допомогою $L(u, \lambda)$, початко-во поставленої задачі описується такими співвідношеннями:

$$\lambda \geq 0, u \in K$$

та

$$L(u^*, \lambda) \leq L(u^*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \quad (5)$$

то $u^* = \text{Arg}[\min \prod(u) / u \in K; \Phi(u) \leq 0]$, де $L(u, \lambda)|_{u^*, \lambda^*}$ – стаціонарна функція від-носно u . Тобто рішення початково поставленої задачі співпадає із сідловою точ-кою функціонала Лагранжа. Множник Лагранжа λ можна прийняти в такому випадку за певну мірку контактного напруження, тобто сили, яка задовольняє накладене обмеження [3]. Узагальнені необхідні умови Куна – Таккера [4] ма-тимуть такий вигляд:

$$\int_{\Gamma_c} \lambda \cdot \Phi ds = 0, \lambda \geq 0. \quad (6)$$

Стаціонарність функції $L(u, \lambda)$ відносно u є еквівалентною умовам рів-новаги двох тіл. Множник λ входить у вираз для напружень на поверхні Γ_c кожного із тіл. Додатне значення λ означає, що напруження на площинці Γ_c не може бути безперервним. Оскільки $\lambda \geq 0$, то умова (6) дає

$$\lambda \Phi = 0, S \in \Gamma_c. \quad (7)$$

Наведена умова (7) вказує на дві можливості: торкання обох тіл ($\Phi = 0$) або прирівнювання до нуля контактного напруження ($\lambda = 0$).

Для контактних задач корисною є теорема Клапейрона ($2U - W = 0$). Помноживши обидві частини рівняння на переміщення та інтегруючи по всьо-му об'єму двох тіл, отримуємо:

$$2U - W + \tilde{W} = 0, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad \bar{W} = \int_{\Gamma_c} \lambda \cdot (u_n^1 + u_n^2) ds.$$

Оскільки $\lambda \neq 0$ тільки тоді, коли задовольняється умова непроникненості, тобто коли $\Phi = 0$, то величина W може бути представлена у вигляді

$$\int_{\Gamma_c} \lambda \cdot \alpha ds.$$

Зрозуміло, що ця величина є додатною.

Функція \bar{W} характеризує тип даної задачі і можна назвати ту чи іншу задачу задачею про звужуюче або розширююче контактування. У першому випадку $\bar{W} = 0$, і задача виходить лінійною. Якщо ж $\lambda > 0$ та $\alpha > 0$ по всій площинці Γ_c , то приходимо до задачі другого типу, яка виявляється нелінійною, причому \bar{W} представляє собою мірку жорсткості всієї системи.

Визначення жорсткості. Задача полягає у пошуках такого узагальнюючого розміру робочої (контактуючої) поверхні голкофрези (тіла 1), при якому жорсткість системи інструмент – поверхня оброблення виявляється найбільшою, порівняно з будь-яким іншим параметром, який має такі самі характеристики відносно цього навантаження. Тісно пов'язаною із цією задачею є інша, в якій мінімізується піддатливість цієї системи за тих же умов. Під узагальнюючим параметром тіла варто розуміти тут деякий параметр, від якого лінійно залежить жорсткість всієї системи. Протягом всього процесу оптимізації конфігурація тіла 2 (поверхні застиглого пеку в області контакту з інструментом) і початкова відстань між обома тілами є незмінною.

Питома потенціальна енергія деформації η є енергією деформації, що відноситься до одиниці довжини (або площі) та одиниці жорсткості; вона залежить лише від переміщення точок. Питома жорсткість S залежить від варіюваного параметра $d(x)$. Маючи на увазі наведені визначення, ми можемо таким чином виразити енергію деформації:

$$U^1 = \int_{\Omega} s(x) \cdot \eta(x) dx, \quad (9)$$

де dx – елемент довжини у випадку одномірної конструкції та елемент площинки у випадку двомірної конструкції. Для задачі: $S(d) = C_0 + C_1 d(x)$, де C_0 і C_1 – сталі величини.

За допомогою формули (9) можемо виразити величину U^1 у вигляді функції, яка явно залежить від розміру d . Тоді нашу задачу можна сформулювати таким чином:

$$\text{знайти} \quad \max_d \pi(d, u^{*1}, u^{*2}) \quad (10)$$

$$\text{за умови} \quad \int_{\Omega} d dx = V,$$

де V – об'єм матеріалу.

Зображена у формулі (10) зірочка (*) вказує на переміщення точок, яке відбувається внаслідок рішення конкретної задачі при заданому розмірі d . Для нашої контактної задачі формулювання виразу (10) можна записати у такому вигляді:

$$\max_d \max_{\lambda} \min_u L(d, u^1, u^2, \lambda) \quad (11)$$

за умови

$$\int_{\Omega} d dx = V, \quad u \in K.$$

Приєднавши до функціоналу L ізопериметричне обмеження, отримуємо новий функціонал

$$F = L - \Lambda \cdot \left(\int_{\Omega} d dx - V \right), \quad (12)$$

де Λ – постійний множник Лагранжа.

Згідно з виразом (12) початкова задача отримує такий вигляд:

$$\max_d \max_{\lambda} \min_u F(d, u^1, u^2, \lambda, \Lambda), \quad u \in K. \quad (13)$$

Оскільки придане обмеження немає в собі переміщення точок або множника λ , то умова стаціонарності функціонала F тотожна умові для функціоналу L із додатковими обмеженнями

$$\delta_d F = C_1 \cdot \eta - \Lambda = 0, \quad (14)$$

$$\delta_{\Lambda} F = \int_{\Omega} d dx - V = 0. \quad (15)$$

Умова (14) вимагає, щоб питома потенціальна енергія була сталою по всьому об'єму тіла, тобто еквівалентною умові оптимальності, отриманої нами у випадку двосторонніх граничних умов. Але у цьому односторонньому випадку можна показати, що критерій оптимальності виявляється достатнім для максимізації жорсткості всієї системи, а не лише одного тіла 1.

Достатність умови (14) для максимізації жорсткості системи можна показати шляхом безпосереднього порівнювання результатів розрахунку. Розглянемо розмір d_0 , який задовольняє умови (14) та (15), і деякий інший розмір d , який задовольняє лише умову (15). Позначимо через u_0 , λ_0 та u , λ величини, які відповідають рішенню контактної задачі у цих двох випадках. За допомогою принципу мінімуму потенціальної енергії одержуємо

$$\pi(d, u_0) \geq \pi(d, u), \quad (16)$$

де: π – потенціальна енергія; d – параметр, що характеризує розподілення матеріалу, і який ми можемо представити в наступному вигляді:

$$d = d_0 + d.$$

Ізопериметричне обмеження вимагає, щоб

$$\int_{\Omega^1} (C_0 + C_1 d_0) \cdot \eta_0^1 dx + \int_{\Omega^2} C_1 d \eta_0^2 dx + U_0^2 - W_0 \geq \pi(d, u).$$

Використовуючи критерій оптимальності (14), отримуємо

$$\int_{\Omega^1} C_1 d \eta_0^2 dx = \int_{\Omega^1} C_1 d \Lambda dx = C_1 \Lambda \int_{\Omega^1} d dx = 0.$$

Таким чином, початкова нерівність (16) приймає наступний вигляд:

$$\pi(d_0, u_0) \geq \pi(d, u), \quad (17)$$

де величини в обох його частинах представляють значення потенціальної енергії, отриманої внаслідок розв'язку задачі при відповідних розмірах. Оскільки d є певним іншим розміром, що задовольняє ізопараметричне обмеження, то звідси виходить, що розмір d_0 , який задовольняє критерій оптимальності (14), максимізує жорсткість системи, порівняно з усіма іншими розмірами.

Показавши, що розмір d_0 максимізує жорсткість системи, ми показуємо також, що розмір d_0 приводить до екстремальних значень. Якщо записати узагальнену теорему Клайперона [5] у вигляді

$$U^1 + U^2 = \frac{\tilde{W} - W}{2}, \quad (18)$$

то загальну потенціальну енергію можна представити як

$$\pi = -\frac{\tilde{W} + W}{2}. \quad (19)$$

Таким чином, нерівність (17) набуде вигляду

$$W_0 + \tilde{W}_0 \leq W + \tilde{W}. \quad (20)$$

Остання нерівність показує, що розмір d_0 мінімізує піддатливість системи, якщо включимо у визначення поняття піддатливості не лише ефект від прикладання зовнішніх сил, але й ефект від контактних сил. Відзначимо, що у випадку виникнення задачі про звужуючий контакт величина W буде дорівнювати нулю, і поняття піддатливості збігається з його звичайним визначенням. Формула (18) показує також, що загальна енергія деформації мінімізується у випадках звужуючих контактів.

Приєднавши ці обмеження до функціоналу (12) при додатних множниках Лагранжа [2] γ^l та γ^u , можемо знайти верхню і нижню межу цього розміру. Необхідна умова (14) приймає при цьому вигляд:

$$C_1 \eta = \Lambda + \gamma^u - \gamma^l.$$

Висновок. Звичайний постійний критерій оптимальності питомої енергії деформації, який застосовується для пошуку найбільшої жорсткості конструкції, може поширюватись і на задачі контактних взаємодій твердих тіл. Але в таких випадках проблеми максимуму жорсткості конструкції та мінімуму її піддатливості є не еквівалентними одна одній, якщо контактна задача не є задачею про звужуючий контакт. Такий критерій оптимальності можна застосовувати при в'ясненні питання, чи є заданий розмір конструкції оптимальним, чи лише наближеним до оптимального.

Для деяких (неконтактних) задач із двосторонніми граничними умовами в роботі [1] показано, що задача про максимум жорсткості є еквівалентною задачі про максимум міцності, якщо умова руйнування матеріалу записана за допомогою питомої енергії деформації.

Література

1. Прагер, Тэйлор. Задачи оптимального проектирования конструкций / Тэйлор Прагер // Прикладная механика. – М. : Изд-во "Мир". – 1986. – № 1. – С. 102.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М. : Изд-во "Наука", 1980. – 974 с.
3. Lanczos C. Variational Principles in Mechanics / C. Lanczos. – Toronto Press, 1988. – 346 p.
4. Luenberger D.C. Optimization by Vector Space Methodes / D.C. Luenberger. – Wiley, 1984. – 284 p.
5. Зубарев В.Н. и др. Практикум по технической термодинамике : учебн. пособ. / В.Н. Зубарев и др. – Изд. 3-е, [перераб. и доп.]. – М. : Изд-во "Энергоатомиздат", 1986. – 304 с.

Милянч А.Р. Определение максимальной жесткости при упругом контактировании между элементами голкофрезы и поверхностью застывшего пека

Разработан приближенный критерий оптимальности в задаче по требованию жесткости двух упругих тел. Контактная задача исследована согласно предположению о незначительном влиянии контакта на общую потенциальную энергию системы. Поставлена и исследована актуальная задача установления жесткости при контактировании рабочих элементов инструмента – голкофрезы с поверхностью застывшего пека об определении такого закона распределения заданного количества материала, при котором жесткость конструктивного взаимодействия будет максимальной.

Построена математическая модель, которая позволяет оценивать долговечность рабочих инструментов, используемых при очистке затвердевших органических грузов железнодорожных цистерн.

Ключевые слова: поверхность, взаимодействие, деформация, жесткость, энергия.

Milyanych A.R. The Determination of the Maximum Stiffness in an Elastic Contact between the Elements of a Needle Milling Cutter and the Surface of a Congealed Pitch

An approximate optimality criterion in the problem on rigidity requirements of two elastic bodies is designed. A contact problem is studied under the assumption of insignificant influence of the contact for a total potential energy of the system. The problem on the urgent establishment of rigidity in contacting elements of a working tool such as a needle milling cutter surface of frozen pitch on the definition of the law in a given distribution of material where the stiffness of constructive engagement is maximized, is solved. The aim of this work is to develop a mathematical model that allows to estimate the longevity of working tools used in the cleaning of organic loads hardened rail tankers.

Key words: surface, interaction, deformation, stiffness, energy.