

Уточнения к решению задач качения теоретической и прикладной механики

Бондаренко Л.Н., Колбун В.В., Жаковский А.Д.

Постановка задачи. До работ Герца Г. в области контактных напряжений и деформаций (1881 – 1882 г.) заставляло ученых выдвигать гипотезы более или менее удовлетворительно объясняющих причину появления сопротивления при качении. Не вдаваясь в ошибочную теорию Рейнальдса О., объяснявшего появление трения качения тем, что при взаимной деформации поверхностей качения появляется скольжение (1875 г.). Это было одной из дорогих ошибок ученого, поскольку получившие к тому времени широкое распространение подшипники качения начали смазывать как и подшипники скольжения, затрачивая больше смазочных материалов, чем это требовалось, что приводило к удорожанию эксплуатации всего узла качения. Только через 70 лет (1955 г.) Табор Д. доказал, что роль трения скольжения при качении незначительна и получил аналитические зависимости для определения коэффициента трения качения при линейном и точечном контактах. Однако, наличие в этих формулах теоретически не определяемой величины коэффициента гистерезисных потерь свели на нет их практическое применение [1,2]. В [3] получены экспериментально – аналитические зависимости, не содержащие этого коэффициента с практическим совпадением остальных величин.

Таким образом, отсутствие аналитических зависимостей для определения коэффициента трения качения заставляет при решении задач с качением принимать его величину ориентировочно или для каждого конкретного случая определять экспериментально.

Цель статьи. Уточнить расчеты за счет аналитических зависимостей для определения коэффициента трения качения некоторых задач теоретической и прикладной механики.

Основной материал исследований.

1. Влияние угла наклона плоскости на закон плоскопараллельного движения.

Без учета сопротивления качению эта задача приводится в [4], как пример решения второй основной задачи динамики плоскопараллельного движения.

Задача ставится так. По наклонной плоскости AB катится вниз круглое тело радиусом r , массой m (рис. 1). Определить закон движения тела и найти условие, при котором оно будет катиться без проскальзывания, если коэффициент скольжения равен f . Характерно, что в условии задачи даже не оговорено, что сопротивлением качению пренебрегается и очевидно, что для усвоения теории это допущение не существенно. Но в инженерной практике

пренебрежение сопротивлением качению может привести не только к количественным, но и к физическим погрешностям.

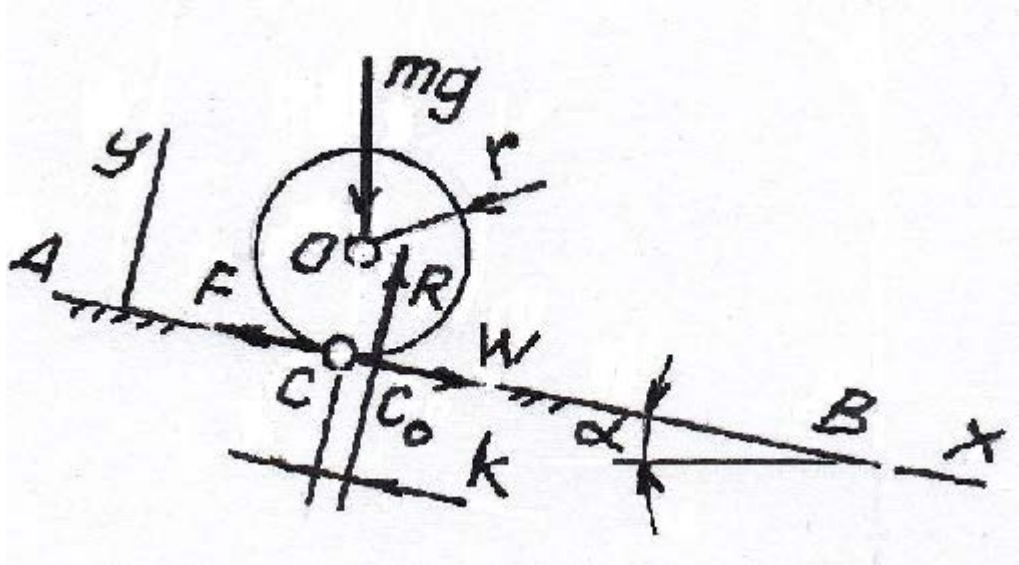


Рис. 1. Расчетная схема к условию задачи

Исходя из дифференциальных уравнений движения твердого тела, запишем

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_C &= m \cdot g \cdot \sin \alpha - F; \\ m \cdot \ddot{y}_C &= R - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0; \\ I_C \cdot \ddot{\varphi} &= -F \cdot r + k \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\ddot{x}_C$, $\ddot{\varphi}$, R - неизвестные величины; k - коэффициент трения качения.

Положим, что

$$x_C = -r \cdot \varphi. \quad (2)$$

В исходной задаче принято, что точка C тела качения контактирует с прямой AB и является мгновенным центром скоростей. Но в более точной постановке задачи за точку контакта необходимо принять точку C_0 , расположенную на расстоянии плеча трения качения k . Но учитывая незначительность величины k по сравнению с r такое допущение возможно.

С учетом выражения (2) сила трения

$$F = m \cdot \ddot{x}_C \cdot \frac{\rho_C^2}{r^2} + \frac{k \cdot m \cdot g}{r} \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

где ρ_C - радиус инерции тела качения, относительно оси проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Величину $\ddot{x}_C$ найдем с учетом k из выражения

$$\ddot{x}_C = \frac{g \cdot (\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha)}{1 + \frac{\rho_C^2}{r^2}}, \quad (4)$$

А силу трения из выражения

$$F = \frac{m \cdot g \cdot \rho_C^2}{r^2 + \rho_C^2} \cdot \left(\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha \right). \quad (5)$$

Тело будет катиться без проскальзывания, если сила трения скольжения при качении (5) будет меньше предельной величины силы трения скольжения, т.е.

$$\frac{\rho_C^2 \cdot \left(\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha \right)}{r^2 + \rho_C^2} \leq \mu \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

Сила трения скольжения будет равна нулю при $\operatorname{tg} \alpha = k/r$ или $\alpha \approx k/r$ и из выражения (6) можно сделать вывод о том, что качение без проскальзывания возможно только когда угол α наклона плоскости к горизонту будет

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \cdot \left(1 + \frac{r^2}{\rho_C^2} \right) + \frac{k}{\rho_C}. \quad (7)$$

При $\operatorname{tg} \alpha$ больше правой величины неравенства (7) тело будет скользить по наклонной плоскости.

Для определения численного влияния коэффициента трения качения при линейном и точечном контактах на ускорение тел качения, силы трения, угла, определяющего качение без скольжения, рассмотрим примеры.

1.1. Качение цилиндра длиной $B=r=900$ мм по плоскости из Стали 50 (ГОСТ 1050-74) с модулем упругости $E_1=2,2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu_1=0,3$.

Материал цилиндра будем варьировать:

1.1.1. Та же Сталь 50 с объемной массой $\gamma=7,81$ т/м³.

1.1.2. Бронза АЖ 9-4 (ГОСТ 493-75) с $E_2=1,12 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_2=0,29$, $\gamma=7,5$ т/м³.

Полуширина пятна контакта цилиндра из Стали 50 с плоскостью [5]

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r \cdot \cos \alpha}{B \cdot E}}, \quad (8)$$

где $P=\pi \cdot r^2 \cdot B \cdot \gamma \cdot g$ – вес цилиндра.

Коэффициент трения качения при первоначальном линейном контакте [3]

$$k = 0,225 \cdot b \cdot e^{-1,2 \cdot r}, \quad (9)$$

где r – в метрах.

При известной величине k находим $F(3)$, $\ddot{x}_C(4)$, $\operatorname{tg} \alpha(7)$.

Для цилиндра из бронзы формула (8) имеет вид

$$b = 1,131 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r \cdot \cos \alpha}{B} \cdot \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (10)$$

Зависимости k , F , $\ddot{x}_C$ и $\operatorname{tg} \alpha$ от угла наклона плоскости с учетом и без учета трения качения показаны на рис. 2.

В случае качения стального шара по плоскости полуширина пятна контакта

$$b = 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot r \cdot \cos \alpha}{E}}, \quad (11)$$

где $P = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \gamma \cdot g / 3$ – вес шара.

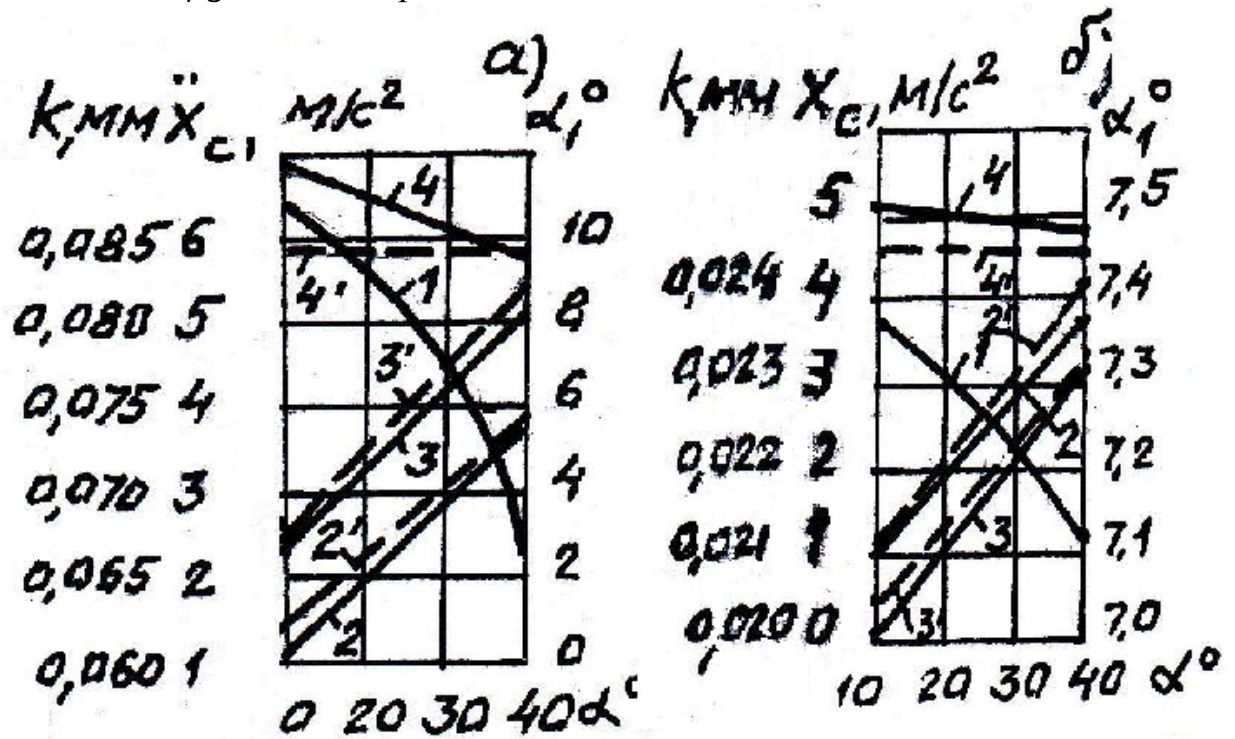


Рис. 2. Зависимости от угла наклона плоскости: 1 – коэффициента трения качения; 2 – ускорения цилиндра; 3 – силы трения; 4 – угла, определяющего качение без скольжения (а – стальной цилиндр, б – тоже для цилиндра из бронзы); штрихами обозначены зависимости без учета трения качения

При качении шара из бронзы

$$b = 0,91 \cdot \sqrt[3]{P \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (12)$$

Коэффициент трения качения при точечном контакте

$$k = 0,16 \cdot b \cdot e^{0,2 \cdot r}. \quad (13)$$

Отметим, что все зависимости для контакта шар – плоскость аналогичны зависимостям для контакта цилиндр – плоскость, отличаются только величиной.

2.С учетом сопротивлений качению рассмотрим задачу, имеющуюся в [6] конечная цель которой найти амплитуду колебаний тележки и динамические нагрузки в канате (рис. 3).

При решении задачи примем такие же допущения, как и в [6], учитывая сопротивление трению качения.

Выберем начало координат в точке O и направление оси x в сторону показанную на рисунке.

Уравнение движения тележки с учетом коэффициента сопротивления движению запишем в виде

$$\ddot{x} + p^2 \cdot x \pm \frac{g \cdot w}{1 + \gamma} = 0, \quad (14)$$

где γ – коэффициент, учитывающий вращательные массы; $p^2 = C/(1 + \gamma) \cdot G$; G – общая масса тележки. Особенностью уравнения (14) есть то, что перед третьим слагаемым может быть знак «плюс» так и «минус».

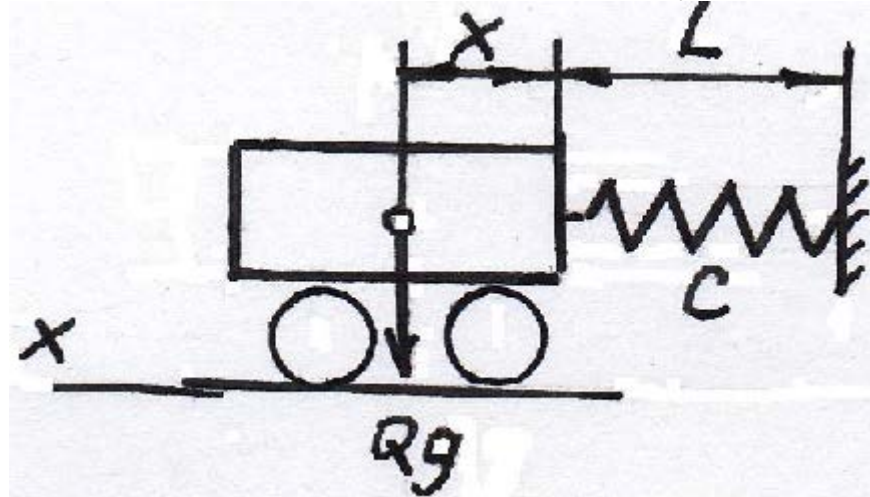


Рис. 3. Расчетная схема для определения амплитуд колебаний тележки с канатной откаткой

В первый интервал движения, начинающийся в момент $t=0$ и $x=A_0$, а $\dot{x}_0 = 0$ скорость отрицательная и необходимо поставить знак «минус». Тогда уравнение будет иметь вид

$$\ddot{x} + p^2 \cdot x - a \cdot p^2 = 0, \quad (15)$$

где $a = g \cdot G \cdot w / C$.

Решение этого уравнения при принятых начальных условиях

$$x = (A_0 - a) \cdot \cos(p \cdot t) + a; \quad (16)$$

скорость

$$V = \dot{x} = -(A_0 - a) \cdot p \cdot \sin p \cdot t. \quad (17)$$

Из (17) очевидно, что когда аргумент $p \cdot t$ становится равным π , скорость обращается в ноль, т.е. тележка достигает своего крайнего положения и это отклонение составляет

$$A_1 = (A_0 - a) \cdot \cos \pi + a = -A_0 + 2 \cdot a \quad (18)$$

и по абсолютной величине оно меньше начального на величину $2 \cdot a = 2 \cdot g \cdot G \cdot w / C$.

Если абсолютная величина A_1 удовлетворяет неравенству $|A_1| > a$, сила упругости каната больше силы трения и тележка начнет движение в сторону положительного направления оси x .

Естественно, что уравнение движения для этого случая будет иметь вид

$$\ddot{x} + p^2 \cdot x + a \cdot p^2 = 0, \quad (19)$$

Если сместить начало отсчета времени и начальные условия принять в виде $t=0$; $x=A_1$; $\dot{x} = 0$ то решение получим в виде

$$x = (A_0 + a) \cdot \cos(p \cdot t) - a; \quad (20)$$

Нетяжело убедиться, что $A_2 = -A_1 - 2 \cdot a$ или $A_2 = A_0 - 4 \cdot a$ из чего следует, что за один период колебаний амплитуда уменьшается на одну и ту же величину $4 \cdot a$ и последовательность амплитуд образует арифметическую прогрессию и огибающей будет прямая линия.

Таким образом, если известна амплитуда A_2 колебаний в конце первого периода, то можно записать, что $A_0 - A_2 = 4 \cdot a$ и

$$w = \frac{(A_0 - A_2) \cdot C}{4 \cdot g \cdot G}. \quad (22)$$

Имея теоретическую четкость, эта формула имеет существенный практический недостаток: затрата энергии на внутреннее трение в канате может существенно повлиять на точность определения величины w . Поэтому попытаемся использовать эту формулу с другой целью, а именно для определения коэффициента трения реборд k_P , воспользовавшись например формулой (9). Поскольку величина w находится из выражения [6]

$$w = \frac{\mu \cdot d + 2 \cdot k}{2 \cdot g} \cdot k_P,$$

то отсюда

$$k_P = \frac{(A_0 - A_2) \cdot C \cdot R}{4 \cdot g \cdot G \cdot (\mu \cdot \frac{d}{2} + 0,22 \cdot b \cdot e^{-1,2 \cdot R})} \quad (23)$$

При рельсе с плоской головкой, а при рельсе с закругленной головкой

$$k_P = \frac{(A_0 - A_2) \cdot C \cdot R}{4 \cdot g \cdot G \cdot (\mu \cdot \frac{d}{2} + 0,16 \cdot b \cdot e^{0,2 \cdot R})} \quad (24)$$

В этих формулах μ – коэффициент трения подшипников, приведенный к цапфе. Поскольку в механизмах передвижения в подшипнике качения может вращаться как внутреннее, так и наружное кольца, то неизвестно какую величину диаметра d цапфы в конкретном случае подставлять.

Если коэффициент трения качения шарика или ролика по внешней обойме k_{23} , а по внутренней k_{13} , то момент необходимый для вращения подшипника в случае вращения внутренней обоймы (внешняя обойма неподвижна)

$$M_1 = \frac{P \cdot (k_{13} + k_{23}) \cdot D_{ВН}}{d_{ш}}, \quad (25)$$

где $D_{ВН}$ – диаметр дорожки качения внутренней обоймы; $d_{ш}$ – диаметр шарика (ролиka).

При вращении внешней обоймы

$$M_2 = \frac{P \cdot (k_{13} + k_{23}) \cdot D_{ВШ}}{d_{ш}}, \quad (26)$$

В случае вращения, например, внутренней обоймы и диаметре колеса D сопротивление его вращению

$$w_1 = P \cdot (k_{13} + k_{23}) \cdot \frac{D_{BH}}{D \cdot d_{uu}} = P \cdot \frac{\mu \cdot d}{D}. \quad (27)$$

Из этого уравнения можно заключить, что коэффициент μ , приводимый в справочной литературе, есть не что иное как

$$\mu = \frac{k_{13} + k_{23}}{d_{uu}}, \quad (28)$$

А под термином «цапфа» при вращении внутренней обоймы необходимо понимать диаметр дорожки качения, т.е. $d=D_{BH}$, а при вращении наружной $d=D_{ВШ}$.

Поскольку величина коэффициента трения качения может быть найдена аналитически, то из формулы (23) можно определить μ

$$\mu = \left[\frac{(A_0 - A_2) \cdot C \cdot R}{4 \cdot g \cdot G \cdot k_p} - k \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot d}. \quad (29)$$

3. Количественная зависимость между коэффициентами трения качения и скольжения.

Поскольку вертикальная составляющая реакции тела качения смещена на величину k (рис.4) от направления прижимающей силы Q , то из условия равновесия равномерно движущегося катка силу P , которую необходимо приложить на расстоянии Y от точки качения

$$P = \frac{k}{Y} \cdot Q \quad (30)$$

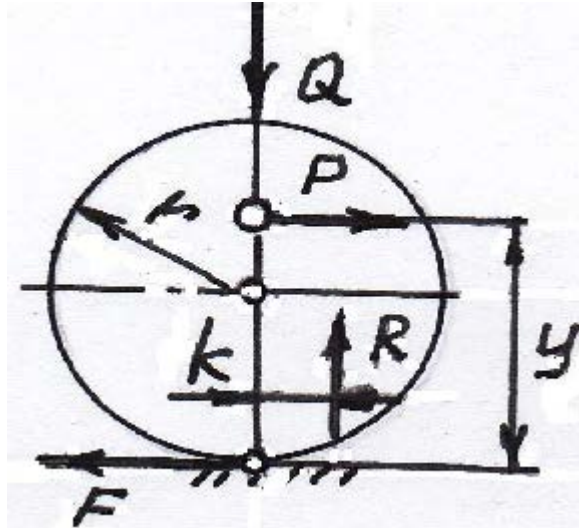


Рис. 4. К определению отношения между коэффициентом трения качения и расстоянием приложения движущей силы

Отсюда следует, что величина силы P зависит от ее точки приложения. В месте касания возникает сила трения $F=f \cdot Q$, называемая силой сцепления. Если $P < fQ$, то каток в точке касания не проскальзывает и происходит качение. Если наоборот, то качение невозможно и каток будет скользить потому, что движение происходит в направлении меньшего сопротивления.

Таким образом, условием качения будет

$$P < F \text{ или } f > \frac{k}{Y}. \quad (31)$$

если

$$Y < \frac{k}{f} \quad (32)$$

то сопротивление при качении больше, чем при скольжении, т.е. относительным движением будет скольжение.

Обычно силу P в (30) прикладывают в центре катка, и тогда эта формула принимает более известный вид

$$P = \frac{k}{r} \cdot Q \quad (33)$$

Исходя из которой в [7] утверждается, что с уменьшением радиуса катка сила, необходимая для перекачивания увеличивается. С математической точки зрения это утверждение не вызывает сомнения. Однако, надо иметь в виду, что величина радиуса не берется произвольно, а определяется исходя из допускаемых контактных напряжений, а величина коэффициента трения качения k зависит от полуширины пятна контакта, определяемой из теории контактных деформаций Герца.

Силу P в (33) можно найти без обязательного присутствия радиуса r .

3.1. Сила необходимая для перекачивания цилиндра по плоскости с учетом допущений принятых в первой задаче

$$\sigma = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot E}{B \cdot r}}. \quad (34)$$

Полуширина пятна контакта найдется из формулы (8) при $\alpha=0$, а величину коэффициента трения качения найдем без учета коэффициента гистерезисных потерь [8], поскольку в [3] показано, что при $r \leq 50$ мм его величина близка к единице

$$k = \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot b. \quad (35)$$

Определив радиус из формулы (34) и подставив в формулу (8) будем иметь

$$P = \frac{2,43}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot Q \quad (36)$$

в которой явно отсутствует радиус.

Найдем величину P по формулам (33) и (36) при величине допускаемых контактных напряжений $\sigma=800$ МПа; $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа и $Q=5; 10; 15; 20$ кН.

Величины k , r , P в зависимости от Q представлены в виде графиков на рис. 5.

Исследуем формулу (31). При скольжении стали по стали минимальная величина трения скольжения принимается $\mu=0,04$ (жидкая смазка в масляной ванне [9]) и при величине $Y < k/f$ относительным движением будет скольжение. В рассматриваемом примере при $Y=r$ величина k/f на порядок меньше и только при $Y < 0,1r$ будет скольжение.

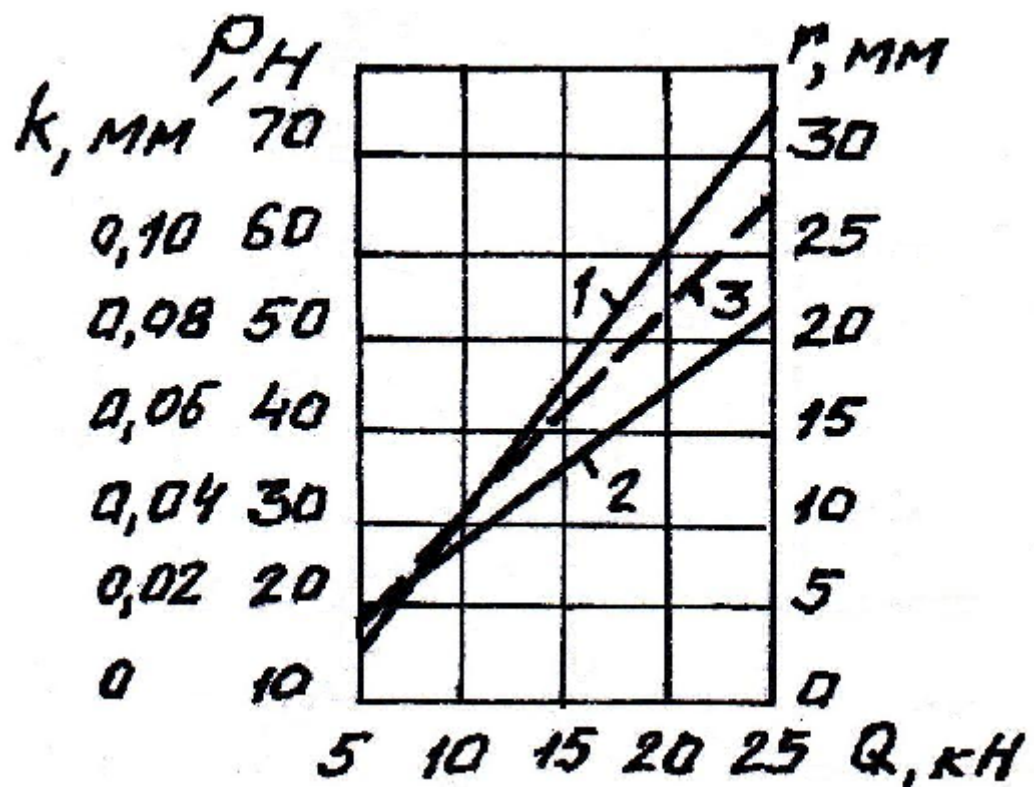


Рис. 5. Зависимость от силы Q : 1 – силы сопротивления качению; 2 – коэффициента трения качения; 3 – радиуса катка

3.2. Сила необходимая для перекачивания шара по плоскости.

Формулы (34), (35) и (36) для схемы касания сферическое тело – плоскость имеет вид

$$\sigma = 0,388 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q \cdot E}{r^2}}; \quad (37)$$

$$k = \frac{3}{16} \cdot b; \quad (38)$$

$$P = 0,54 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot Q. \quad (39)$$

С использованием формулы (11), $\sigma=1000$ МПа получим зависимости k , r и P от Q (рис. 6).

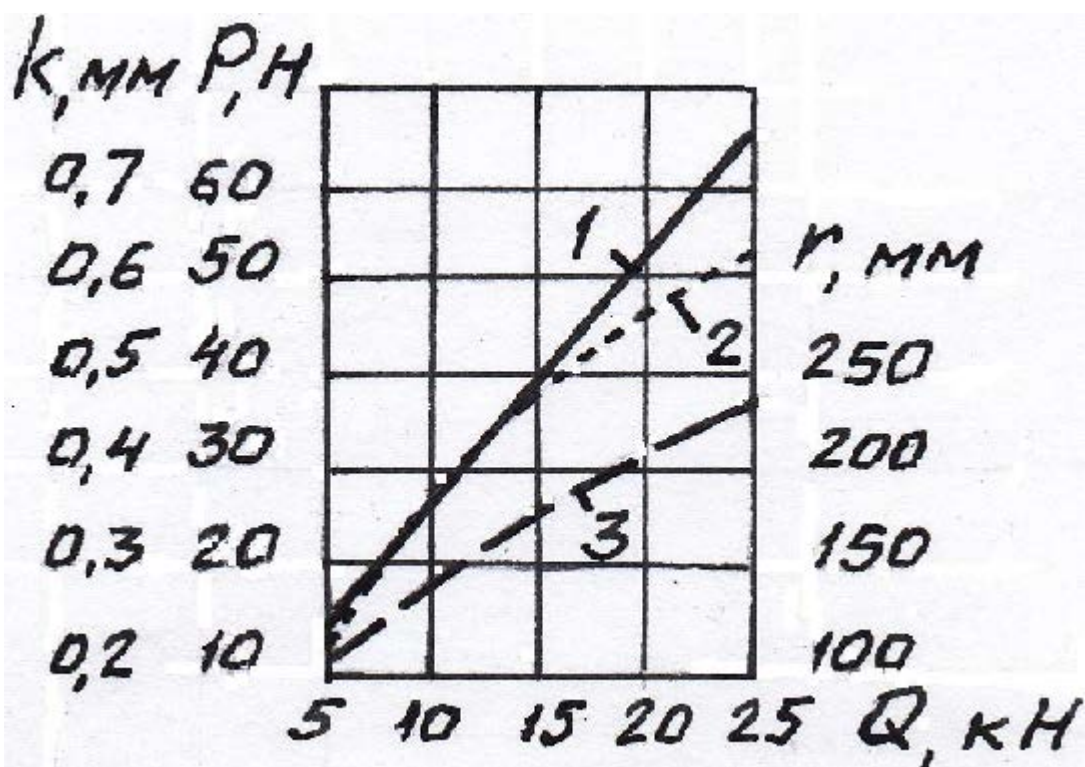


Рис. 6. Зависимости от силы Q : 1 – силы сопротивления качению; 2 – коэффициента трения качения; 3 – радиуса шара

Приняв, как и в предыдущем примере, $\mu=0,04$ получим, что при $Y=r$ величина k/f примерно в 15 раз меньше r и только при $Y<0,06r$ будет скольжение.

Анализ полученных зависимостей и графиков позволяет сделать следующие выводы:

- угол наклона поверхности, по которой катится круглое тело существенно влияет на величину коэффициента трения качения, уменьшаясь с увеличением угла наклона (разница около 20% при $\alpha=10^\circ$ и $\alpha=40^\circ$) в то время как сила трения качения с учетом и без учета коэффициента трения качения отличается незначительно, это же относится и к ускорению, как цилиндра, так и шара;

- влияние трения в ходовых частях резко уменьшает амплитуду свободных колебаний;

- с уменьшением радиуса тела качения сила, необходимая для перекачивания уменьшается;

- сопротивление при качении в случае приложения сдвигающей силы к центру катка для реальных материалов всегда меньше сопротивления при скольжении.

Литература

- 1.Reynolds O. On rolling friction. – Philos. Trans. Ray. Soc., 1875. – P. 155.
- 2.Tabor D. The mechanism of rolling friction: the elastic range. – Proc. Ray. Soc., 1955. – P. 198.

3.Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкін В.С. Деформаційні опори в машинах. – Дніпропетровськ: Дніпро – VAL, 2002. – 200 с.

4.Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

5.Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка. – 1988. – 736 с.

6.Расчет и конструирование горных транспортных машин и комплексов/ Штокман И.Г., Кондрахин П.М., Маценко В.Н. и др. – М.: Недра, 1975. – 464 с.

7.Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1969. – 584 с.

8.Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

9. Справочник по кранам: В 2 т. Т. 2 /Александров М.П., Гохберг М.М., Ковин А.А. и др. – Л.: Машиностроение, 1988. – 559 с.