

УДК 539.001.5 Доц. А.Я. Куліченко, канд. техн. наук; магістр А.Р. Мілянчи –
Львівська філія Дніпропетровського НУ
залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО РУЙНУВАННЯ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Описано методи дослідження задачі пружнопластичного руйнування, що ґрунтуються на застосовуванні спеціальних прийомів кінцево-елементного аналізу; розглянуто процедуру формування матриці жорсткості у випадках застосування восьми-вузлових чотирикутних ізопараметричних елементів.

Механіка руйнування в останні роки стала самостійною дисципліною, яка дає змогу виявляти умови, за яких починається неконтрольований процес руйнування машин, конструкцій, їх елементів та матеріалів внаслідок виникнення і поширення тріщин. Знання механіки руйнування зможе допомогти інженеру або конструктору у справі запобігання небезпеці катастрофічного руйнування елементів конструкцій. Крім того, володіння теоретичними основами механіки тріщиноутворення дає змогу розробляти механізми і методи руйнування монолітності поверхневих відкладів і корозійних нашарувань, які не сприяють ефективній експлуатації механізмів і окремих конструкцій.

Два основні критерії руйнування, які відіграють фундаментальну роль в механіці руйнування, пов'язані із використанням принципу збереження енергії та коефіцієнтів інтенсивності напружень. Існуюча на сьогодні теорія тріщиноутворення ґрунтується на використанні принципу збереження енергії, відповідно до якого джерелами енергії, яка необхідна для утворення нової поверхні руйнування у твердому тілі, повинна бути енергія пружного деформування і робота зовнішніх навантажень.

Інший підхід до теорії виникнення тріщин розглянутий вітчизняними науковцями [1, 2], які обмежилися дослідженням околиць вершини тріщини, розміри якої є малими порівняно із характерними розмірами всього тіла, але, з іншого боку, достатньо великими порівняно з розмірами атомів, щоб можна було застосовувати лінійну теорію пружності. Було запропоновано теорію, що руйнування починається тоді, коли інтенсивність напружень в околицях вершини досягає якоїсь певної критичної величини. Основний зміст цієї статті становить дослідження задачі пружнопластичного руйнування. Далі ми будемо розглядати лише тип I деформування тріщини (тріщини нормального розриву).

Основне завдання проєктанта полягає у тому, щоб під час розроблення тієї чи іншої конструкції не допускати умов для виникнення крихкого руйнування. Для вирішення цієї задачі необхідно точно знати про напружено-деформований стан навколо вершини тріщини, у місці її можливого утворення. Загальноприйнятий підхід, відомий під назвою лінійно-пружної механіки руйнування, полягає у тому, що поведінка матеріалу в зоні вершини тріщини вважається лінійно-пружною. Відомо, що при вершині тріщини завжди виникають пластичні деформації [3], підхід, який ґрунтується на цій механіці, може привести до позитивних результатів лише для відносно крихких матеріалів, і для таких умов навантаження, за яких розміри пластичної зони при вершині

тріщини мінімальні порівнювано з довжиною самої тріщини та товщиною дослідного зразка. Оскільки більшість технічних матеріалів є відносно пластичними і товщини зразків не завжди є великими, в окремих випадках пластичними деформаціями при вершині тріщини неможливо просто нехтувати.

Пластичність при вершині тріщини. Під час проведення розрахунків найчастіше припускають, що матеріал поводить себе як ідеально пружний. На практиці ж, як тільки певний залежний від напруження вираз досягає своєї критичної величини, більшість матеріалів пластично деформуються. Внаслідок непружності у поведінці матеріалу можуть знадобитися видозміни певних положень лінійно-пружної механіки руйнування. Поширеними є два критерії текучості – Треска і Мізеса [4,5], відомі як, відповідно, гіпотези максимального дотичного напруження та питомої енергії формозміння.

Відповідно до критерію Треска, текучість починається, коли найбільше критичне напруження досягає своєї критичної величини. Якщо записати критерій Треска, застосовуючи головні напруження σ_1 , σ_2 та σ_3 (припускаємо, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) і границя текучості перебуває у одновісному стані σ_{TP} , то отримуємо, що текучість матеріалу починається за умови

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_{TP}. \quad (1)$$

Відповідно до критерію Мізеса, потрібно, щоб критичної величини досягала питома енергія деформації зсуву. Відповідно до цього критерію, записаним із використанням головних напружень і границі текучості σ_{TP} , руйнування відбувається за виконання умови

$$\sigma_{TP} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2)$$

Критерій Мізеса краще узгоджується із результатами експериментів, однак в інженерних розрахунках простіше застосовувати критерій Треска.

Контур пластичної зони. Однією з основних задач технічного проектування є недопущення крихкого руйнування. З цієї причини дослідження форми та розміру пластичної зони, які залежать від властивостей матеріалу, геометрії, навантаження та граничних умов, стає однією з найважливіших задач механіки руйнування. Для того щоб використовувати відповідний критерій текучості, розподіл напружень навколо вершини тріщини можна описати за допомогою таких виразів для головних напружень через коефіцієнт інтенсивності напружень K_I [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \\ \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \\ \sigma_3 &= \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = 2\nu \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Крім того, σ_3 вказує на плоску деформацію, а за умови, що $\sigma_3 = 0$ – плоский напружений стан. Підставляючи наведені співвідношення в критерій

Мізеса, отримуємо рівняння границі пластичної зони θ (рис. 1), $r_p(\theta)$ у такому вигляді:

$$r_p(\theta) = \frac{K_I}{4\pi \cdot \sigma_{\text{гп}}^2} \left[1,5 \cdot \sin^2\theta + (1 - 2\nu)^2 \cdot (1 + \cos\theta) \right], \quad (4)$$

де r_p – радіус пластичної зони для випадку плоскої деформації

$$r_p(\theta) = \frac{K_I}{4\pi \cdot \sigma_{\text{гп}}^2} \left[1 + 1,5 \cdot \sin^2\theta + \cos\theta \right] \quad (5)$$

та для випадку плоского напруженого стану.

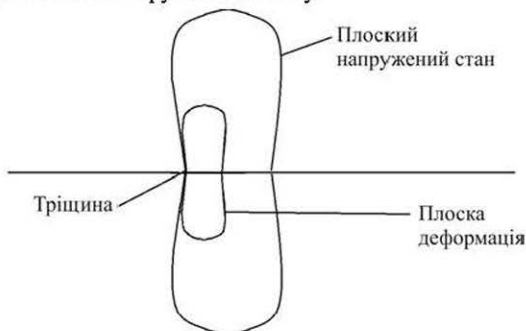


Рис. 1. Форма пластичної зони, згідно з критерієм Мізеса

Останнім часом в механіці пружнопластичного руйнування стали широко використовуватися спеціальні прийоми кінцево-елементного аналізу. Метою цієї роботи є розроблення методу рішення задач пружнопластичного руйнування за допомогою восьмивузлових чотирикутних ізопараметричних елементів.

Основні положення рішення методом кінцевих елементів. Основна ідея методу кінцевих елементів полягає у побудові дискретної моделі, яка складається із множини кусково-неперервних функцій, визначених на кінцевому числі замкнутих підобластей. Ці підобласті названі елементами, які з'єднуються одна з одною в спільних вузлах і які сукупно апроксимують цю область. Компоненти узагальнених переміщень цих вузлів є основними невідомими задачами про диференціювання суцільного середовища.

Нехай вектор-стовпець $\{q\}$ складається із компонент узагальнених переміщень у вузлах, а вектор-стовпець $\{U\}$ – із переміщень елемента. Ці величини пов'язані між собою матричним співвідношенням:

$$\{U\} = [N] \{q\}, \quad (6)$$

де $[N]$ – функції форми, які є функціями локальних координат і повинні бути заданими у кожній вузловій точці. Символи $\{ \}$ та $[]$ використані для позначення вектор-стовпця і матриці відповідно.

Позначаючи вектор узагальненої деформації символом $\{\varepsilon\}$ та виражаючи компоненти деформації через переміщення, можна записати

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\}, \quad (7)$$

де: $\{U\}$ – вектор переміщень; $[\bar{B}]$ – матричний оператор, який має вигляд

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення, які описують залежність напружень від деформацій, вектор узагальненого напруження $\{\sigma\}$ виражаємо через вектор узагальненої деформації $\{\varepsilon\}$ у вигляді

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (9)$$

де $[D]$ – матриця, яка характеризує властивості матеріалу, і яка дорівнює:

- для плоского напруженого стану

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де E – модуль Юнга;

- для плоскої деформації

$$[D] = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де: E та ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Чотирикутний ізопараметричний елемент. Побудова матриці восьмиузлового ізометричного елемента достатньо описана у праці [6]. За допомогою перетворення

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(R, S) x_i, \quad Y = \sum_{i=1}^8 N_i(R, S) y_i, \quad (12)$$

де N_i – функція форми, яка відповідає вузловій точці i із координатами (x_i, y_i) , побудова матриці жорсткості проводиться наведеним далі способом.

У системі координат $R - S$ значення координат вузлових точок R_i та S_i дорівнюють ± 1 , а у точках, розташованих на середині сторін, одна із координат дорівнює нулю (рис. 2).

Функція $N_i(R, S)$ має вигляд:

$$N_i(R, S) = \left[(1 + RR_i) \cdot (1 + SS_i) - (1 - R^2) \cdot (1 + SS_i) - (1 - S^2) \cdot (1 + RR_i) \right] \times \\ \times \frac{R_i^2 \cdot S_i^2}{4} + (1 - R^2) \cdot (1 + SS_i) \cdot (1 - R_i^2) \cdot \frac{S_i^2}{2} + (1 - S^2) \cdot (1 + RR_i) \cdot (1 - S_i^2) \cdot \frac{R_i^2}{2}. \quad (13)$$

Очевидно, що, оскільки координати системи $R - S$ на границі кожного елемента набуває значення ± 1 , доданки, які мають множники $(1 - R^2)$ та $(1 - S^2)$, не можуть одночасно бути відмінними від нуля ні на якій границі. Таким чином, інтерполяційні функції для восьмивузлового ізопараметричного елемента можна представити так:

$$\left. \begin{aligned} N_1(R, S) &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + R) \cdot (1 + S) \cdot (1 - R - S), \\ N_2(R, S) &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - R) \cdot (1 + S) \cdot (1 + R - S), \\ N_3(R, S) &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - R) \cdot (1 - S) \cdot (1 + R + S), \\ N_4(R, S) &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + R) \cdot (1 - S) \cdot (1 - R + S), \\ N_5(R, S) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + S) \cdot (1 - R^2), \\ N_6(R, S) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - R) \cdot (1 - S^2), \\ N_7(R, S) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - S) \cdot (1 - R^2), \\ N_8(R, S) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + R) \cdot (1 - S^2). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Переміщення при цьому визначаються згідно з інтерполяційними формулами

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(R, S) \cdot u_i \quad \text{та} \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i(R, S) \cdot v_i. \quad (15)$$

де u – переміщення в напрямі осі Z .

Деформації через переміщення виражаються за допомогою співвідношень

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

де $[B]$ – матриця залежності деформації від переміщень.

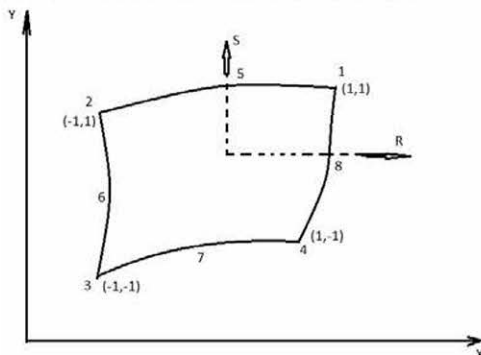


Рис. 2. Чотирикутний ізопараметричний елемент

Матриця $[B]$ матиме вигляд

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial S} \\ \frac{\partial N_i}{\partial S} \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

де: N_i – функція форми; $[J]$ – матриця Якобі, яка визначається:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial R} \\ \frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial y}{\partial S} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial R} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial R} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial S} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial S} y_i \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Диференціали поля переміщень можна визначати за допомогою оператора Якобі:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial S} \\ \frac{\partial u}{\partial S} \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial S} \\ \frac{\partial v}{\partial S} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Матриця, обернена матриці Якобі, матиме такий вигляд:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial S} & -\frac{\partial x}{\partial S} \\ -\frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial R} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial S} - \frac{\partial y}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial S}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial S} & -\frac{\partial y}{\partial R} \\ -\frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial x}{\partial R} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Напруження можна вирахувати згідно з таким співвідношенням:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (24)$$

де $[D]$ – матриця, елементи якої залежать від механічних характеристик матеріалу.

Матрицю жорсткості елемента $[K]$ визначають на основі формули:

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \det |J| dR dS. \quad (25)$$

Оскільки функції форми $N_i(R, S)$ для всіх елементів є многочленами, похідні $(\partial N_i / \partial R)$ та $(\partial N_i / \partial S)$ особливостей не мають. Застосовуючи співвідношення (21), (22) та (23), формулу для визначення деформацій можна записати у так

$$\{\varepsilon\} = [J]^{-1} \cdot [B'(R, S)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Отже, виходячи із останнього виразу, для отримання сингулярної деформації можна вимагати сингулярності матриці Якобі при вершині тріщини. Іншими словами, визначник матриці Якобі $\det |J|$ повинен дорівнювати нулю при вершині тріщини. Цього можна досягти, переміщуючи серединні вузли на сторонах елемента на чверть довжини сторони. Розглянемо це питання докладніше.

Для того щоб матриці елементів при вершині тріщини були сингулярними, потрібно сингулярними були вирази для $\{\varepsilon\}$ та $\{\sigma\}$. Як вже вказано, сингулярності можна досягти, переміщуючи серединні вузли на сторонах елемента на відстань, яка дорівнює чверті довжини сторони. На рис. 3 зображений двомірний восьми вузловий вузловий чотирикутний елемент, а на рис. 4 – шестивузловий трикутний елемент. Обидва вони є ізопереметричними елементами із зміщеними на чверть довжини сторони серединними вузлами на сторонах, які дотичні до вершини тріщини.

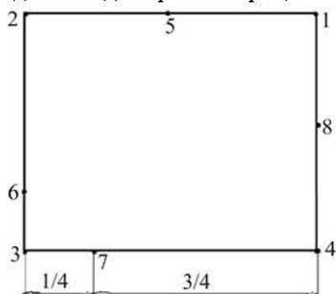


Рис. 3. Восьмивузловий чотири кутний елемент із зміщеними середніми вузлами

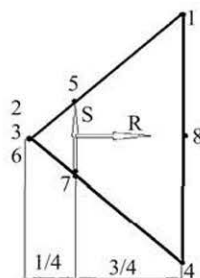


Рис. 4. Шестивузловий трикутний елемент із зміщеними середніми вузлами

Одна із важливих особливостей цих елементів полягає у тому, що вони задовольняють необхідні умови сходимості [6] як у сингулярному, так і в несингулярному варіантах. Ці елементи на відміну від багатьох інших спеціальних елементів, які використовують при вершині тріщини, допускають опис руху як жорсткого тіла за постійної деформації, а також задовольняють умову неперервності переміщення.

Кінцево-елементний метод початкових напружень. Потрібно зауважити, що останнім часом досягнення в наукових роботах з механіки руйнування пов'язані переважно із дослідженнями пружнопластичної поведінки матеріалу. Основною метою цієї публікації є розробка спрощеного методу складної задачі, який дасть змогу отримати сприйнятливі результати за найменшої складності програмування.

Практичний інтерес для рішення задачі пружнопластичного руйнування становлять розрахунки перемішень, напружень і деформацій на різних етапах навантаження, визначення розмірів пластичної зони і оцінка можливості її зростання. Далі описано кінцево-елементний метод початкових напружень, який дає змогу одержати необхідні результати.

Припускаємо, що у цьому випадку є справедливим критерій текучості Мізеса та закони текучості. Відповідно до цього, застосовують таке припущення. Нехай $\delta\{\varepsilon\}_p$ означає приріст пластичної деформації, тоді

$$\delta\{\varepsilon\} = \lambda \frac{\partial F}{\partial(\sigma)}. \quad (27)$$

У цьому співвідношенні λ – коефіцієнт пропорційності, а F – функція напруження. Для відомої поверхні текучості Мізеса функція F має такий вигляд:

$$F = \sqrt{0,5 \cdot (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 0,5 \cdot (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 0,5 \cdot (\sigma_Z - \sigma_X)^2 + 3\tau_{XY}^2 + 3\tau_{YX}^2 + 3\tau_{ZX}^2} - \bar{\sigma}, \quad (28)$$

де $\bar{\sigma}$ – границя текучості в одновісному стані. Можна припустити, що приріст деформації у процесі нескінченно малого приросту напруження складається із пружної та пластичної частини, тобто

$$\delta\{\varepsilon\} = \delta\{\varepsilon\}_e + \delta\{\varepsilon\}_p. \quad (29)$$

Прирости пружної деформації пов'язані із приростом напруження наступним співвідношенням

$$\delta\{\varepsilon\}_e = [D]^{-1} \cdot \delta\{\sigma\}. \quad (30)$$

де $\{\sigma\}$ – вектор напруження. Отже, приріст деформації можна записати у вигляді

$$\delta\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \delta\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} \lambda. \quad (31)$$

Зручно розв'язувати наведене співвідношення та виразити приріст напруження через задані прирости деформації [7]:

$$\delta\{\sigma\} = [D]_{eP} \delta\{\varepsilon\}, \quad (32)$$

де $[D]_{eP}$ – матриця, яка характеризує пружнопластичні властивості матеріалу. Ця матриця є симетричною та позитивно визначається:

$$[D]_{eP} = [D] - [D] \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \right\}^T [D] \cdot \frac{1}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} \right\}^T [D] \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} \right\}}. \quad (33)$$

У цьому виразі стала величина A – це параметр зміцнення. Для ідеально пластичного матеріалу без зміцнення величина A дорівнює нулю. У загальному випадку присутності явища зміцнення величину A можна визначити, знаючи нахил кривої залежності напруження від пластичної деформації за заданого значення пластичної деформації.

Під час вирішення пружнопластичної задачі розрахунок за приростах навантажень проводять так:

- a) задають приріст навантаження і вираховують приріст пружних напружень $\{\Delta\sigma\}_1$ та відповідні їм прирости деформацій $\{\Delta\varepsilon\}_1$;
- b) приріст напружень $\{\Delta\sigma\}_1$ додають до напружень $\{\sigma_0\}$, які існують до початку приросту навантаження, внаслідок чого визначають напруження $\{\sigma\}$;
- c) перевіряють умову $F\{\sigma\} < 0$. Якщо ця умова витримується, то продовжується розв'язування задачі про пружне деформування;
- d) якщо $F\{\sigma\} \geq 0$ та $F\{\sigma_0\} = 0$, в елементі процес текучості почався на початку приросту навантаження. При цьому величину $\{\Delta\sigma\}_1$ визначають згідно з такою формулою

$$\{\Delta\sigma\}_1 = [D]_{eP} \cdot \{\Delta\varepsilon\}_1;$$

- e) вираховують напруження, причиною виникнення яких повинні бути об'ємні сили:

$$\{\Delta\sigma''\}_1 = \{\Delta\sigma\}_1 - \{\Delta\sigma\}_1;$$

- f) запам'ятовують поточні значення напружень і деформацій:

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} - \{\Delta\sigma''\}_1,$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon'\} + \{\Delta\varepsilon\}_1;$$

- g) якщо $F\{\sigma\} > 0$, але $F\{\sigma_0\} < 0$, знаходять проміжне значення напруження, за якого починається текучість, і вираховують прирости напружень $\{\Delta\sigma\}$. Далі виконують дії, наведені у пункті d;
- h) вираховують вузлові зусилля для цього елемента, тобто вектор пластичного навантаження, який відповідає зрівноважуючим об'ємним силам, згідно з формулою

$$\{P\}_1^e = \iint [B]^T \{\Delta\sigma''\}_1 d(vol),$$

де vol (volume) – функціонал об'єму узагальнених поверхонь у багатомірному просторі;

- i) розраховують значення $\{\Delta\sigma\}_2$ та $\{\Delta\varepsilon\}_2$ згідно з початковими значеннями пружних характеристик матеріалу і навантаження;
- f) визначають поточні значення $\{\sigma\}$ і повторюються дії, наведені у пунктах b... i.

Цикл розрахунків переривають лише тоді, коли вузлові зусилля, які визначають відповідності до пункту h, стануть достатньо малими за величиною.

Висновки. За результатами рішення пружнопластичних задач про поширення тріщин можна зробити такі висновки.

1. Розроблено метод визначення розмірів і форми пластичної зони біля вершини тріщини. Задачу розв'язували кінцево-елементним методом початкових напружень. Під час рішення застосовували восьмивузлові чотирикутні ізопараметричні елементи.
2. Застосування восьмивузлових елементів із зміщеними на чверть довжини сторони середніми вузлами дає змогу за правильного розбиття на кінцеві елементи отримати позитивні результати. Застосуванню такого сингулярного елемента у поєднанні із використанням методу рухомих елементів надають перевагу під час дослідження задачі за умови швидкого руйнування.

Дослідження критерію росту тріщин і визначення розмірів пластичної зони дають змогу істотно просунутись у вирішенні задачі оцінення довговічності деталей машин і транспортних засобів.

Література

1. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде / Г.П. Черепанов. – М. : Изд-во "Мир", 1979. – 232 с.
2. Борисов В.С. Решение задачи о маломасштабном пластическом течении в вершине трещины методом конечных элементов / В.С. Борисов, С.А. Айвазян // Теоретические основы инженерных расчетов. – М. : Изд-во "Мир". – 1986. – № 2. – 58 с.
3. Чжань Лу. Моделирование процесса распространения трещины при динамическом нагружении с помощью метода конечных элементов / Лу Чжань // Конструирование и технология машиностроения. – М. : Изд-во "Мир", 1983. – № 2. – 63 с.
4. Von Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung der Krystallen. Z. Angew. Math. Mech, 1948. – Vol. 8. – Pp. 151-185.
5. Chan K.W. The Study of Dynamic Fracture Problems Using Finite Element Method / K.W. Chan. Ph. D. dissertation, Clarkson College of Technology, Potsdam. – N. Y., May 1982.
6. Панасюк В.В. Разрушение элементов конструкций с несквозными трещинами / В.В. Панасюк, А.И. Сушинский, К.Б. Кацов. – К. : Изд-во "Наук. думка", 1991. – 172 с.
7. Мизес Р. Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии / Р. Мизес // В кн.: Теория пластичности. – М. : Изд-во "Иностранная литература", 1958. – С. 48-56.

Kulichenko A.Y., Milyanich A.R. Исследование упругопластических разрушений методом конечных элементов

Описаны методы исследования задачи упругопластического разрушения, основанные на использовании специальных приемов конечно-элементного анализа; рассмотрена процедура формирования матрицы жесткости в случаях использования восьмивузловых четырехугольных изопараметрических элементов.

Kulichenko A. Ya., Milyanich A.R. Research elastoplastic destruction finite element

Described methods elastoplastic fracture problem, based on the use of special methods of finite-element analysis is considered the procedure of forming the matrix stiffness in cases of eighth-knots isoparametric quadrangular elements.