

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО  
ТРАНСПОРТУ  
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. ЛАЗАРЯНА

Ю. Я. ПОПУДНЯК, А. Д. МАЛИЙ,  
А. В. КРАСНЮК, А. С. ЩЕРБАК

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

## **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК З КОНТРОЛЬНИМИ ТЕСТАМИ**

Навчальний посібник складено відповідно до розділів навчальних програм з інженерної графіки для студентів технічних і будівельних спеціальностей для самостійного виконання індивідуальних завдань з нарисної геометрії.

**УДК 744.4**  
**П58**

**Рецензенти:** **М. В. Шпирько**,  
ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», завідувач кафедри «Технологія будівельних матеріалів, виробів та конструкцій»,  
доктор технічних наук, професор;  
**В. Д. Петренко**,  
Дніпровський національний університет залізничного транспорту,  
професор кафедри «Мости та тунелі»,  
доктор технічних наук, професор  
**С. С. Тищенко**,  
Дніпровський аграрно-економічний університет, професор кафедри вищої математики,  
доктор технічних наук, професор

**Нарисна геометрія. Навчальний посібник з контрольними тестами** / Упорядники Ю. Я. Попудняк, А. Д. Малий, А. В. Краснюк, А. С. Щербак – Дніпро: ТОТЕМ, 2019. – 176 с.

В посібнику викладено основні теоретичні положення елементарної нарисної геометрії. Розглянуто комплексні рисунки точок, прямих, площин, многогранних та кривих поверхонь, способи перетворення проєкцій, розгортки поверхонь.

Після кожного розділу наведено велику кількість навчальних контрольних тестів, що сприятиме кращому засвоєнню теоретичного матеріалу при самостійному вивченню нарисної геометрії.

Призначений для студентів усіх спеціальностей очної та дистанційної форм навчання.

Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна (протокол № 4 від 05.11.18).

**УДК 744.4**  
**П58**

## П Е Р Е Д М О В А

Нинішній період розвитку вищої освіти характерний втіленням в життя нових технологій та стандартів навчання. Кредитно-модульна система навчання, дистанційна освіта передбачають збільшення, у процесі навчання, питомої ваги самостійної роботи, контролю і самоконтролю засвоєння знань. Важливу роль у цьому процесі відіграє тестовий контроль і самоконтроль ступеню оволодіння навчальним матеріалом, передбаченим стандартами освіти. Тому наявність навчального посібника з нарисної геометрії, у якому кожна тема закінчується численними тестами, є актуальною.

Даний посібник призначений для самостійної роботи студентів та підготовки до тестового контролю знань. Його структура складається з короткого викладу теоретичного матеріалу кожного розділу нарисної геометрії (довідкові відомості) та з численних тестових запитань, які дозволяють перевірити ступінь засвоєння теоретичного матеріалу, підготуватися до модульного контролю та сприяти розвитку просторової уяви.

При роботі з тестами будь-яких графічних побудов не потрібно. Достатньо лише проаналізувати тести та обрати правильну відповідь на поставлене запитання. Слід зазначити, що в тестах може бути як одна правильна відповідь так і декілька. Правильність відповідей студент може перевірити в останньому розділі посібника. Разом з тим, це не виключає виконання домашніх завдань з виконанням креслень (рисуноків).

## П О Р А Д И С Т У Д Е Н Т А М

Теоретичний матеріал перших розділів нарисної геометрії викликає у студентів, як правило, найбільші ускладнення. Вони виникають з двох основних причин. По-перше нарисна геометрія є першою інженерно-технічною навчальною дисципліною, яка вивчається у першому семестрі. По-друге, на початку її вивчення необхідно оволодіти новою для вас термінологією, символікою, умовними позначками, які ми домовляємося використовувати при вивченні нарисної геометрії. Чим швидше ви оволодієте цією «мовою», тим краще і легше будете оволодівати теоретичним і практичним матеріалом нарисної геометрії. Допоможе вам у цьому таблиця 1, яка наведена нижче.

Нарисну геометрію треба вивчати систематично, регулярно вивчати теоретичний матеріал. Не приступайте вивчати наступний розділ, чи параграф не засвоївши попереднього.

Приступайте до розв'язання задачі тільки після того, як добре усвідомили її умову і суть, склали план (алгоритм) розв'язання у просторі. Користуйтеся для просторового моделювання «підручними» засобами: олівець – пряма, косинець чи лист паперу – площина і т. д. Це сприятиме

розвитку просторової уяви і успішному розв'язанню просторових задач на плоских зображеннях.

## ПРИЙНЯТІ ТЕРМІНИ ТА ЇХ ПОЗНАЧЕННЯ

Основні геометричні образи позначаються: точки – великими латинськими літерами, або арабськими цифрами; прямі – малими літерами латинського алфавіту; площини – малими літерами грецького алфавіту (таблиця 1).

Таблиця 1

### Прийняті символи, їх назви та значення

Геометричні образи, знаки	Позначення (символу чи операції)	Назва символу, операції	Значення символу чи операції
1	2	3	4
Площини проєкцій	$P_1$ $P_2$ $P_3$	Пі один Пі два Пі три	Горизонтальна площина проєкцій Фронтальна площина проєкцій Профільна площина проєкцій
Точки у просторі та їхні проєкції	$A, B, C, D, E,$ $F, G, H, \dots$ або $1, 2, 3, 4, \dots$ $A_1, B_1, \dots I_1, 2_1$  $A_2, B_2, \dots I_2, 2_2$ $A_3, B_3, \dots I_3, 2_3$	Точка $A$ , Точка $F$ Точка $1$  А один, один один А два, один два А три, один три	Точка $A$ у просторі, Точка $F$ у просторі Точка $1$ у просторі Горизонтальна проєкція точки $A, I$  Фронтальна проєкція точки $A, I$ Профільна проєкція точки $A, I$
Прямі у просторі та їхні проєкції	$a, b, c, d, e, \dots$ $a_1, b_1, c_1, \dots$ $a_2, b_2, c_2, \dots$ $a_3, b_3, c_3, \dots$	Пряма $a$  а один а два а три	Пряма $a$ у просторі Горизонтальна проєкція прямої $a$ Фронтальна проєкція прямої $a$ Профільна проєкція прямої $a$
Площини у просторі та їхні сліди на площинах проєкцій. Проектуючі площини	$\alpha, \beta, \dots \sigma, \tau, \dots$ $\alpha_{п1}, \beta_{п2}, \dots$ $\alpha_{п2}, \beta_{п2}, \dots$ $\alpha_{п3}, \beta_{п3}, \dots$ $\alpha_1, \beta_1, \dots$  $\alpha_2, \beta_2, \dots$  $\alpha_3, \beta_3, \dots$	Площина альфа альфа пі один альфа пі два альфа пі три альфа один  альфа два  альфа три	Площина $\alpha$ у просторі Горизонтальний слід площини $\alpha$ Фронтальний слід площини $\alpha$ Профільний слід площини $\alpha$ Горизонтальна (вироджена) проєкція горизонтально-проектуючої площини  Фронтальна (вироджена) проєкція фронтально-проектуючої площини Профільна (вироджена) проєкція профільно-проектуючої площини
Ортогональна система координат	$O$ $x, y, z$  $O$	О ікс, ігрек, зет  Точка $O$	Три координатні площини $Oxy, Oxz,$ $Oyz$ , або три координатні осі $x, y, z$ Початок координат
Знак тотожності (співпадіння)	$\equiv$ $m \equiv n$ $A_j \equiv B_j$	$m$ співпадає з $n$ $A_1$ співпадає з $B_1$	Пряма $m$ співпадає з прямою $n$ Горизонтальна проєкція $A_1$ точки $A$ співпадає з горизонтальною проєкцією $B_1$ точки $B$

1	2	3	4
Знак перпендикулярності	$\perp$ $f \perp \sigma$	$f$ перпендикулярна до $\sigma$	Пряма $f$ перпендикулярна до площини $\sigma$
Знак паралельності	$\parallel$ $a \parallel b$	$a \parallel$ до $b$	Прямі $a$ та $b$ паралельні
Знак належності (включення)	$\supset \subset$ $a \subset \alpha$ $\alpha \supset a$	$a$ належить альфа альфа проходить через $a$	Пряма $a$ належить площині $\alpha$ (лежить на площині $\alpha$ ) Площина $\alpha$ проходить через пряму $a$ (відкритою стороною знак розташовують у бік геометричного образу більшої розмірності)
Знак перетину	$\cap$ $c \cap d$	$c$ перетинає $d$	Пряма $c$ перетинає пряму $d$ (прямі $c$ та $d$ перетинаються)
Знак результату геометричної побудови або окремої операції	$=$ $M = a \cap \varphi$ $a \cap \varphi = M$	$M$ є результат перетину $a$ з $\varphi$	Точка $M$ є точкою перетину прямої $a$ з площиною $\varphi$ Пряма $a$ перетинає площину $\varphi$ в точці $M$
Знак об'єднання (з'єднання двох геометричних образів)	$\cup$ $A \cup B$	$A$ з'єднано з $B$	Точки $A$ та $B$ з'єднані прямою лінією
Знак логічного висновку	$\rightarrow$ $A \subset b, b \subset \alpha \rightarrow A \subset \alpha$	Якщо $A$ належить $b$ , а $b$ належить $\alpha$ , то $A$ належить $\alpha$ .	Якщо точка $A$ лежить на прямій $b$ а пряма $b$ лежить на площині $\alpha$ , то точка $A$ належить площині $\alpha$ .

## 1. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ

Побудови зображень просторових предметів (об'єктів) на площині здійснюється методом проєкцій. В нарисній геометрії вивчаються центральні та паралельні (косокутні і прямокутні) проєкції.

**Метод центрального проєктування** полягає в наступному. У просторі обирають точку  $S$  – центр проєктування і площину проєкцій  $\Pi'$ , яка не проходить через  $S$  (рис. 1.1).

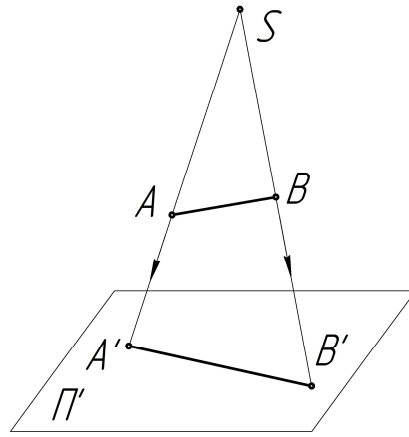


Рис. 1.1

Побудова зображення проекції об'єкту, полягає в проведенні через центр проєкцій  $S$  і будьякі точки  $A, B, \dots$  об'єкту прямих ліній (променів), які називаються проєктуючими прямими. Множина точок перетину проєктуючих прямих  $SA, SB, \dots$  з площиною проєкцій дасть зображення, яке називають **центральною проєкцією об'єкту**.

Основними властивостями центральних проєкцій є наступні:

- 1) проєкцією точки є точка;
- 2) проєкцією прямої, в загальному випадку, є пряма, проєкцією проєктуючої прямої є точка;
- 3) якщо точка належить прямій, то проєкція цієї точки належить проєкції прямої.

Якщо центр проєкцій віддалити в нескінченність, то проєктуючі прямі стануть паралельними між собою. Положення проєктуючих прямих щодо площини проєкцій визначається напрямом проєктування  $s$  (рис. 1.2).

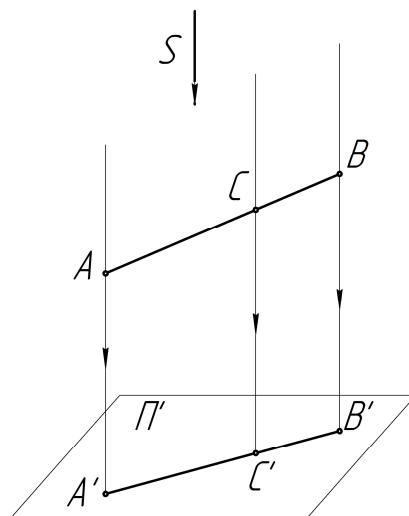


Рис. 1.2

В цьому випадку одержане зображення називають *паралельною* проекцією предмету.

Паралельні проекції розділяють на прямокутні (ортогональні), коли проектуючи прямі перпендикулярні площині проєкцій, і косокутні, коли напрям проектування утворює з площиною проєкцій не прямий кут.

При паралельному проектуванні зберігаються властивості 1, 2, 3 центрального проектування і додаються наступні:

- 4) проекції паралельних прямих паралельні між собою;
- 5) відношення довжин відрізків прямої – дорівнює відношенню довжин їх проєкцій;
- 6) відношення довжин відрізків двох паралельних прямих – дорівнює відношенню довжин їх проєкцій.

Для *ортогональних проєкцій* відзначимо таку властивість:

7) проєкція відрізка загального положення (не паралельного площині проєкцій) менше ніж сам відрізок.

Операція проектування дає можливість побудувати проєкційне зображення об'єкту, тобто розв'язати пряму задачу. Проте по одній центральній або паралельній проєкції об'єкту неможливо або складно відтворити просторову форму і розміри оригіналу. Тому креслення об'єкту повинне бути оборотним, а це значить, що пара точок зображення повинна визначати єдину точку оригіналу. Ця умова виконується ортогональним проектуванням об'єкту на дві площини проєкцій.

## **ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ**

1. Яка з наведених нижче властивостей проєкцій справедлива тільки для ортогональних проєкцій?

1. Проекції паралельних прямих взаємно паралельні.
2. Якщо точка лежить на прямій, то проєкція точки лежить на проєкції прямої.
3. Проекція відрізка прямої загального положення завжди менше самого відрізка.
4. Проекцією проектуючої площини є пряма.

2. Для якого виду проєкцій відповідає властивість: проєкцією прямої в загальному випадку є пряма, проєкцією проектуючої прямої є точка?

1. Центральних.
2. Паралельних.
3. Ортогональних.
4. Для всіх видів проєкцій.

3. Яка з наведених нижче властивостей проєкцій справедлива тільки для ортогональних проєкцій?

1. Якщо точка розділяє відрізок в даному відношенні, то проєкція цієї точки розділяє проєкцію відрізка в цьому відношенні.
2. Проекція відрізка прямої, яка паралельна площині проєкцій, паралельна самому відрізку.

3. Проекцією проєктуючої прямої є точка.
  4. Проекція відрізка прямої загального положення завжди менше самого відрізка.
4. Для яких видів проєкцій справедлива властивість: якщо точка лежить на прямій, то проєкція цієї точки лежить на проєкції прямої?
1. Центральних.
  2. Паралельних.
  3. Ортогональних.
  4. Для всіх видів проєкцій.
5. Які з наведених нижче властивостей проєкцій справедливі для всіх видів проєктування?
1. Проєкції паралельних прямих паралельні.
  2. Проєкцією прямої в загальному випадку є пряма.
  3. Проєкція відрізка прямої загального положення завжди менше самого відрізка.
  4. Проєкцією проєктуючої площини є пряма.
6. Які з наведених нижче властивостей проєкцій справедливі тільки для центрального проєктування?
1. Проєкції паралельних прямих паралельні.
  2. Проєкцією прямої в загальному випадку є пряма.
  3. Проєкція відрізка прямої загального положення завжди менше самого відрізка.
  4. Проєкцією проєктуючої площини є пряма.
7. Яка з наведених нижче властивостей проєкцій справедлива тільки для ортогональних проєкцій?
1. Якщо точка розділяє відрізок в даному відношенні, то проєкція цієї точки розділяє проєкцію відрізка в цьому відношенні.
  2. Проєкція відрізка прямої, яка паралельна площині проєкцій, паралельна самому відрізку.
  3. Проєкцією проєктуючої прямої є точка.
  4. Проєкція відрізка прямої загального положення завжди менше самого відрізка
8. Як називається пряма  $k$  ?

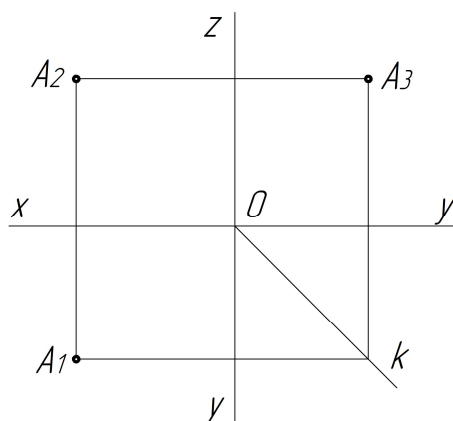


Рис. 1.3

1. Проєкційна пряма
2. Похила пряма
3. Лінія зв'язку
4. Постійна пряма комплексного рисунку (епюра)
- 5.

## 2. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ТОЧКИ

Побудова проекцій зображень просторових предметів на площині зводиться до побудови проекцій точок та ліній, які визначають просторову форму предмета. Тому вивчення способів побудови проекційних зображень просторових предметів починають з вивчення правил побудови проекцій точок. В цьому посібнику розглядаються способи побудови комплексних рисунків (епюрів) точок методом ортогонального (прямокутного) проектування точок на дві (три) взаємно перпендикулярні площини проекцій.

### 2.1 ПРОЕКЦІЇ ТОЧОК НА ДВІ І ТРИ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ

На рисунку 2.1 зображені дві площини проекцій – горизонтальна  $\Pi_1$  і перпендикулярна до неї – фронтальна  $\Pi_2$  та зв'язана з ними ортогональна декартова система координат  $Oxyz$ . Це зображення називається аксонометричною проекцією, або, образно кажучи, наочним зображенням. Уважно розглядаючи (читаючи) це зображення, відзначимо:

1.  $\Pi_1 \equiv xOy$  (горизонтальна площина проекцій  $\Pi_1$  співпадає з координатною площиною  $xOy$ );
2.  $\Pi_2 \equiv xOz$  (фронтальна площина проекцій  $\Pi_2$  співпадає з координатною площиною  $xOz$ );
3.  $\Pi_3 \equiv yOz$  (профільна площина проекцій  $\Pi_3$  співпадає з координатною площиною  $yOz$ ). Межі профільної площини проекцій на рисунку 2.1 не показано.

Побудова горизонтальної проекції довільної точки  $A$  простору здійснюється в такій послідовності:

1. Через точку  $A$  проводиться проектуюча пряма  $AA_1$  перпендикулярно до горизонтальної площини проекцій  $\Pi_1 - AA_1 \perp \Pi_1 // Oz$ .
2. Точка  $A_1$  перетину цієї прямої з площиною  $\Pi_1$  є горизонтальна проекція точки  $A$ .

Для побудови проекції цієї ж точки на площині  $\Pi_2$  проведемо через точку  $A$  пряму  $AA_2 \perp \Pi_2 (AA_2 // Oy)$ .  $AA_2 \cap \Pi_2 = A_2$ .  $A_2$  є фронтальна проекція точки  $A$ .

Площина  $AA_1 \cap AA_2$  перпендикулярна і до  $\Pi_1$  і до  $\Pi_2$ . Лінії  $A_1A_x$  і  $A_xA_2$  називаються лініями проекційного зв'язку. Ламана  $A_1A_xA_2$  зв'язує дві проекції точки  $A$  проекційним зв'язком.

Положення будь-якої точки в просторі можна визначити (задати) за допомогою прямокутних координат. Координатами точки називаються відрізки, якими вимірюються відстані від точки в просторі до площини проекцій. Ці відрізки можуть бути виміряні в будь-яких одиницях (мм, см, тощо) і координати точки набудуть числові значення. На рисунку 2.1 відрізок  $OA_x$  має числове значення  $x_A$  ( $x_A = OA_x$ ). Числом  $x_A$  вимірюється відстань від

просторової точки  $A$  до профільної площини проєкцій, тобто число  $x_A$  є координата  $x$  точки  $A$ . Аналогічно  $y_A = AA_2$  – координата  $y$  тієї ж точки, а  $z_A = AA_1$  – координата  $z$ . Отже. Будь-яка точка простору може бути задана трьома координатами  $x, y, z$ , що записується так:  $A(x, y, z)$ . Надаючи координатам будь-які числові значення, ми задаємо в просторі конкретну точку і можемо за цими значеннями координат побудувати її зображення.

Дві площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , як безмежні поверхні, поділяють простір на чотири частини. Їх називають чвертями, або квадрантами. Порядок нумерації квадрантів римськими цифрами наведено на рисунку 2.1.

**АксонOMETрична проєкція** – це наочне зображення. В цьому її перевага. Але вона має і суттєвий недолік – спотворення лінійних та кутових розмірів. Так чотирикутник  $AA_1A_xA_2$  у просторі є прямокутник, а проєкція його – паралелограм.

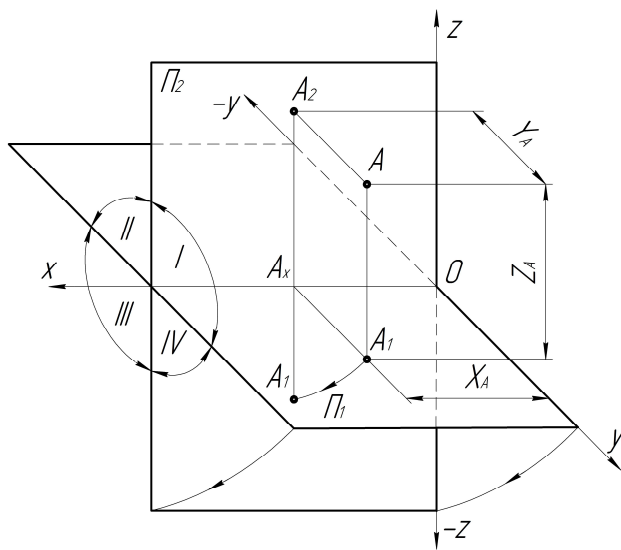


Рис. 2.1

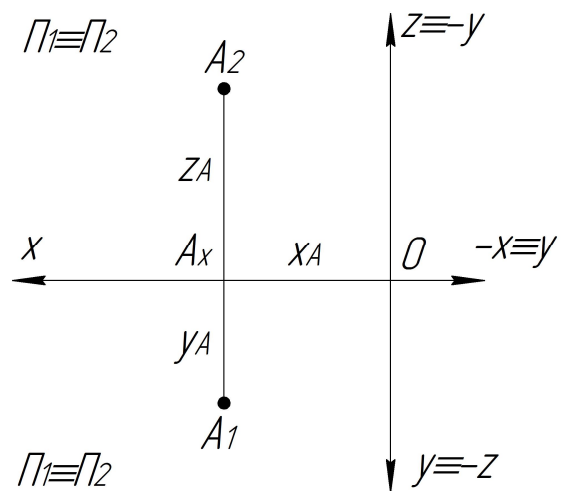


Рис 2.2

На практиці, при проектуванні споруд, машин, механізмів застосовують, в переважній більшості, комплексні рисунки, утворені по методу **Г. Монжа**. Фронтальну площину проєкцій вважаємо співпадаючою з площиною креслення. Горизонтальну –  $\Pi_1$ , суміщаємо з  $\Pi_2$  обертанням навколо осі  $Ox$  в напрямку показаному на рисунку 2.1 стрілками. На рисунку 2.2 зображені осі проєкцій та проєкції точки  $A$  після суміщення площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Ламана лінія зв'язку  $A_1A_xA_2$  вирівнялась в пряму  $A_1A_2 \perp Ox$ . На такому рисунку точка  $A$  простору зображується (задається) двома своїми проєкціями  $A_1$  та  $A_2$ . Утворений таким чином рисунок називається **комплексним рисунком**, або **епюром Монжа**. Його основні властивості:

1. Горизонтальна і фронтальна проєкції будь-якої точки простору лежать на лінії зв'язку, яка перпендикулярна до осі  $x$ .
2. Будь-яка пара символізованих (позначених як горизонтальна і фронтальна проєкції точки) точок, що лежать на прямій перпендикулярній до осі  $x$  ( $A_1A_2 \perp x$ ) визначають одну певну точку

простору. Тому висловлювання «*побудувати точку*» на комплексному рисунку означає, що треба побудувати дві проекції цієї точки. «*Задана точка*» – задано дві проекції цієї точки.

3. Горизонтальна проекція точки визначається координатами  $x$  і  $y$  –  $A_1(x_A, y_A)$ , а фронтальна координатами  $x$  і  $z$  –  $A_2(x_A, z_A)$ . Це означає, що коли точка задана трьома координатами, то можна побудувати дві її проекції (рис.2.2) і навпаки, якщо задано дві проекції точки, то можна виміряти і записати її координати.
4. Якщо точка задана двома проекціями на комплексному рисунку, то читаючи цей рисунок, не важко визначити відстані від точки в просторі до площин проекцій. Насправді відстань від горизонтальної проекції точки до осі  $x$  є координата  $y$  (рис 2.2), а це значить, що відрізок  $A_1A_x$  визначає відстань від точки  $A$  в просторі до фронтальної площини проекцій  $\Pi_2$ . Відстані від точки до інших площин проекцій визначаються аналогічно. Відстань від фронтальної проекції точки до осі  $x$ , відрізок  $A_2A_x=z_A$  визначає відстань від точки  $A$  в просторі до площини  $\Pi_1$ , а відрізок  $OA_x=x_A$  – до площини  $\Pi_3$ . Слід відзначити, що відстані вимірюються абсолютними значеннями координат. Тому з групи точок, заданих на комплексному рисунку, *найбільш віддаленою від площини проекцій буде точка, яка має найбільше абсолютне значення відповідної координати, незважаючи на її знак.*

На початковому етапі вивчення нарисної геометрії для розвитку просторової уяви та набуття навичок читання комплексних рисунків корисними є наступні вправи. На осі  $x$  комплексного рисунка (рис 2.3) призначимо довільні точки  $M_x$  і  $N_x$ . Через ці точки проведемо лінії

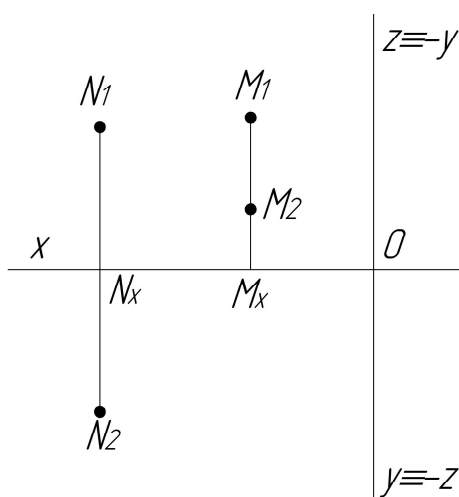


Рис. 2.3

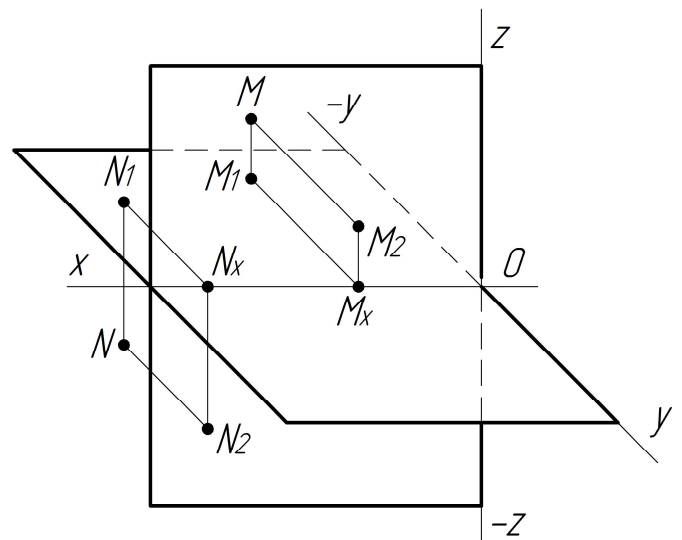


Рис. 2.4

проекційного зв'язку перпендикулярно до осі  $x$ . На кожній із цих ліній зв'язку призначимо довільно дві точки. Одну з призначених точок назовемо

горизонтальною проекцією точки, наприклад точки  $M$  чи  $N$  і відповідно позначимо  $M_1$  і  $N_1$ . Іншу точку позначимо  $M_2$  та  $N_2$  і це означає, що задано фронтальні проекції точок  $M$  та  $N$ . Кожна пара проекцій  $M_1, N_1$  та  $M_2, N_2$  визначає одну певну точку  $M$  і  $N$  простору. Читаючи комплексний рисунок цих точок, маємо:

$$\begin{aligned} OM_x = x_M, & \quad M_x M_1 = -y_M, & \quad M_x M_2 = z_M, \\ ON_x = x_N, & \quad N_x N_1 = -y_N, & \quad N_x N_2 = z_N. \end{aligned}$$

Тепер можна виміряти числові значення координат, визначити в якій чверті простору розташовані точки та побудувати їх наочні зображення (рис. 2.4).

Якщо розглянути частину простору, що розташована справа від профільної площини проекцій  $\Pi_3$  (від координатної площини  $yOz$ ), то площини проекцій поділять цю частину простору на інші чотири чверті в яких координати  $x$  будь-якої точки матимуть від'ємні значення. В сукупності три площини проекцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  поділяють простір на вісім тригранних кутів, які називають *октантами*.

На практиці просторовий предмет розташовують в першому октанті, в якому всі три координати точки мають додатні значення (рис. 2.5). Для утворення комплексного рисунку всі три площини суміщаються в одну площину обертанням їх навколо осей  $x$  та  $z$ , як це показано на рисунку 2.5.

Маючи горизонтальну  $A_1$  і фронтальну  $A_2$  проекції точки  $A$  можемо завжди побудувати профільну її проекцію  $A_3$ , або безпосереднім вимірюванням координати  $y_A = A_x A_1$  та відкладанням її на горизонтальній лінії проекційного зв'язку  $A_2 A_3$ .  $A_2 A_3 = A_x A_1 = y_A$ , або одним із графічних прийомів, показаних на рисунку 2.5.

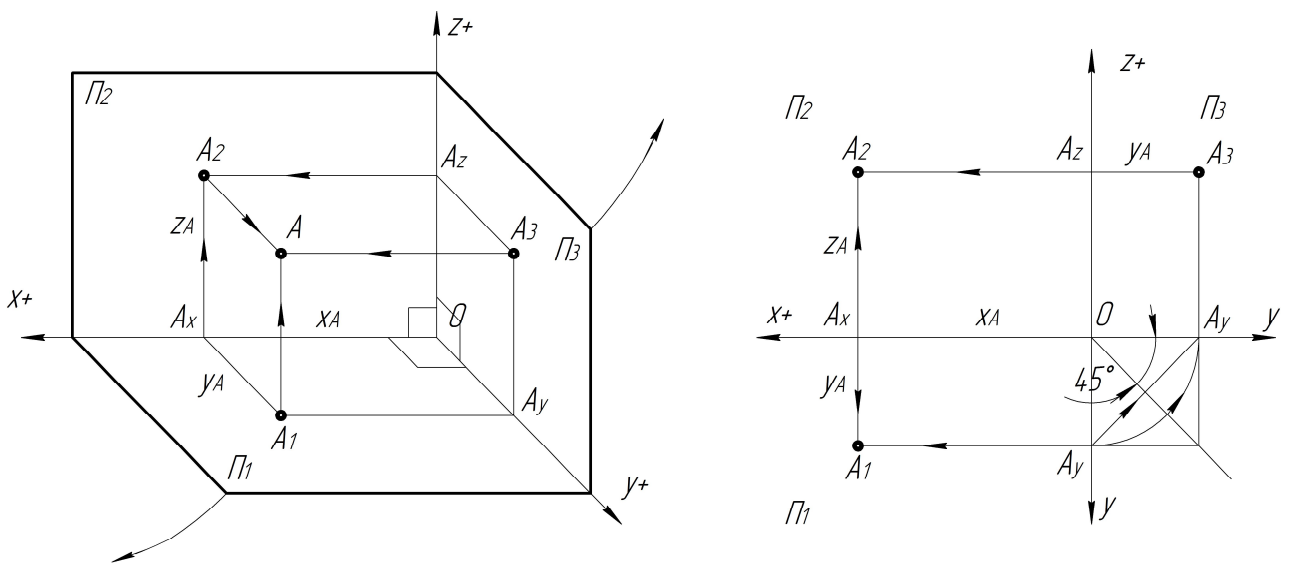


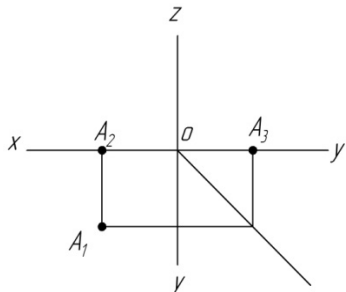
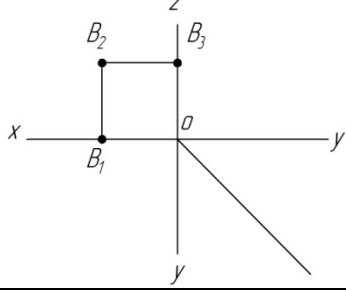
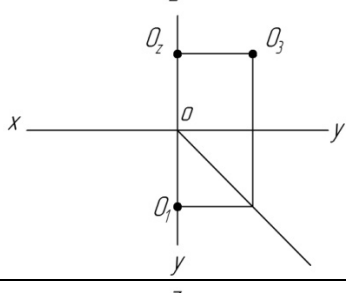
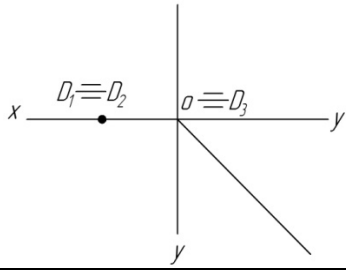
Рис. 2.5

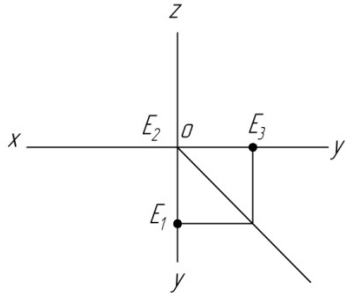
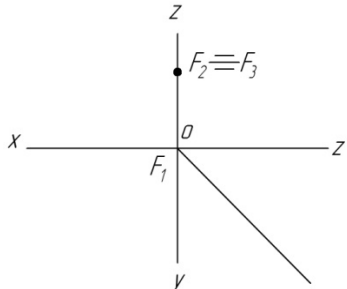
## 2.2 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧОК ПЛОЩИНАМ ПРОЕКЦІЙ

В таблиці 2 наведені ознаки належності точок площинам проекцій.

Таблиця 2

**Ознаки належності точок площинам проекцій**

Належність точок площинам проекцій		Ознака належності в координатах	Ескіз комплексного рисунка (епюра)	Ознака належності на комплексному рисунку
1		2	3	4
Належність одній площині проекцій	$A \in \Pi_1$ Точка $A$ лежить на горизонтальній площині проекцій	$z_A = 0$		$A_2 \in x$ $A_3 \in y$
	$B \in \Pi_2$ Точка $B$ лежить на фронтальній площині проекцій	$y_B = 0$		$B_1 \in x$ $B_3 \in z$
	$C \in \Pi_3$ Точка $C$ лежить на профільній площині проекцій	$x_C = 0$		$C_1 \in y$ $C_2 \in z$
Належність	$D \in \Pi_1 \text{ і } \Pi_2$ $D \in x$ Точка $D$ лежить на $\Pi_1$ і $\Pi_2$ , тобто на осі $x$	$y_D = 0$ $z_D = 0$		$D_1 \equiv D_2 \in x$ $D_3 \equiv 0$

	$E \in \Pi_1 \text{ і } \Pi_3$ $E \in y$ Точка $E$ лежить на $\Pi_1$ і $\Pi_3$ , тобто на осі $y$	$x_E = 0$ $z_E = 0$		$E_1 \in y$ $E_3 \in y$ $E_2 = 0$
	$F \in \Pi_2 \text{ і } \Pi_3$ $F \in z$ Точка $F$ лежить на $\Pi_2$ і $\Pi_3$ , тобто на осі $z$	$x_F = 0$ $y_F = 0$		$F_2 \equiv F_3 \in z$ $F_1 = 0$

### ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ

1. Як позначається горизонтальна проекція точки  $A$ ?

1.  $A$             2.  $A_3$             3.  $A_1$             4.  $A_2$

2. Як позначається фронтальна проекція точки  $A$ ?

1.  $A$             2.  $A_3$             3.  $A_1$             4.  $A_2$

3. Як позначається профільна проекція точки  $A$ ?

1.  $A$             2.  $A_3$             3.  $A_1$             4.  $A_2$

4. Які точки на рисунку 2.6 лежать на площині  $\Pi_2$ ?

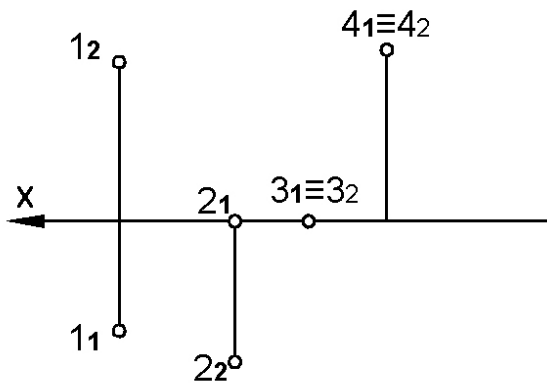


Рис. 2.6

1. 1            2. 2            3. 3            4. 4            5. Жодна не лежить

5. Яка точка на рисунку 2.6 лежить на осі  $x$ ?
1. *I*            2. *2*            3. *3*            4. *4*            5. Жодна не лежить
6. Яка точка на рисунку 2.6 лежить на площині  $\Pi_1$ ?
1. *I*            2. *2*            3. *3*            4. *4*            5. Жодна не лежить
7. Яка точка на рисунку 2.6 найбільш віддалена від фронтальної площини проєкцій?
1. *I*            2. *2*            3. *3*            4. *4*
8. Яка точка на рисунку 2.6 найбільш віддалена від горизонтальної площини проєкцій?
1. *I*            2. *2*            3. *3*            4. *4*
9. Яка точка на рисунку 2.6 найбільш віддалена від профільної площини проєкцій?
1. *I*            2. *2*            3. *3*            4. *4*
10. Яка точка найбільш віддалена від фронтальної площини проєкцій?
1. *A* (10, 50, 60)  
 2. *B* (30, 40, 50)  
 3. *C* (60, 10, 70)  
 4. *D* (40, 20, 40)
11. Яка точка найбільш віддалена від горизонтальної площини проєкцій?
1. *A* (10, 50, 60)  
 2. *B* (30, 40, 50)  
 3. *C* (60, 10, 70)  
 4. *D* (40, 20, 40)
12. Яка точка найбільш віддалена від профільної площини проєкцій?
1. *A* (10, 50, 60)  
 2. *B* (30, 40, 50)  
 3. *C* (60, 10, 70)  
 4. *D* (40, 20, 40)
13. Яка з точок розташована ближче до горизонтальної площини проєкцій?
1. *A* (10, 50, 60)  
 2. *B* (30, 40, 50)  
 3. *C* (60, 10, 70)  
 4. *D* (40, 20, 40)
14. Яка з точок розташована ближче до фронтальної площини проєкцій?
1. *A* (10, 50, 60)  
 2. *B* (30, 40, 50)  
 3. *C* (60, 10, 70)  
 4. *D* (40, 20, 40)

15. Яка з точок розташована ближче до профільної площини проєкцій?

1.  $A (10, 50, 60)$
2.  $B (30, 40, 50)$
3.  $C (60, 10, 70)$
4.  $D (40, 20, 40)$

16. Яка з точок розташована ближче до горизонтальної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

17. Яка з точок розташована ближче до фронтальної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

18. Яка з точок розташована ближче до профільної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

19. Яка точка найбільш віддалена від фронтальної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

20. Яка точка найбільш віддалена від горизонтальної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

21. Яка точка найбільш віддалена від профільної площини проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

22. Які точки знаходяться на однаковій відстані від одної з площин проєкцій?

1.  $A (-5, 88, -14)$
2.  $B (15, 70, -20)$
3.  $C (7, -40, 14)$
4.  $D (16, -50, 10)$

23. Як називається проєкція точки  $E$ , яка позначена символом  $E_2$ ?

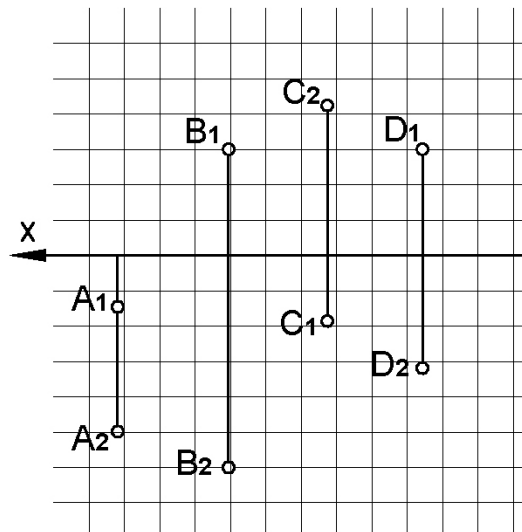
1. Горизонтальна.
2. Фронтальна.
3. Профільна.
4. Ортогональна.

24. Як називається проекція точки  $E$ , яка позначена символом  $E_1$ ?

1. Горизонтальна.
2. Фронтальна.
3. Профільна.
4. Ортогональна.

25. Яка з точок на рисунку 2.7 найбільш віддалена від площини  $\Pi_1$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D



26. Які з точок на рисунку 2.7 найбільш віддалені від площини  $\Pi_2$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D

27. Яка з точок на рисунку 2.7 найбільш віддалена від площини  $\Pi_3$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D

28. Яка з точок на рисунку 2.7 розташована ближче до площини  $\Pi_1$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D

29. Яка з точок рисунку 2.7 розташована ближче до площини  $\Pi_2$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D

30. Яка з точок рисунку 2.7 розташована ближче до площини  $\Pi_3$ ?

1. A
2. B
3. C
4. D

31. Що позначається символом  $\Pi_2$ ?

1. Фронтальна проекція точки.
2. Профільна проекція точки.
3. Фронтальна площина проекцій.
4. Профільна площина проекцій.

32. Що позначається символом  $\Pi_1$ ?

1. Горизонтальна проекція точки.
2. Профільна проекція точки.
3. Горизонтальна площина проекцій.
4. Профільна площина проекцій.

33. Що позначається символом  $\Pi_3$ ?

1. Фронтальна проекція точки.
2. Профільна проекція точки.
3. Фронтальна площина проекцій.
4. Профільна площина проекцій.

34. Якими координатами визначається положення профільної проекції точки?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

35. Якими координатами визначається положення горизонтальної проекції точки?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

36. Якими координатами визначається положення фронтальної проекції точки?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

37. Як називається проекція точки  $A$ , що позначається символом  $A_3$ ?

1. Горизонтальна.
2. Фронтальна.
3. Профільна.
4. Ортогональна.

38. Від якої площини проекцій точка  $A(60, 40, 30)$  знаходиться як далі?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

39. Від якої площини проєкцій точка  $E(20, 20, 20)$  знаходиться як далі?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

40. Як позначається на епюрі профільна проєкція точки  $M$ ?

1.  $M$
2.  $M_1$
3.  $M_2$
4.  $M_3$

41. Як позначається на епюрі фронтальна проєкція точки  $M$ ?

1.  $M$
2.  $M_1$
3.  $M_2$
4.  $M_3$

42. Як позначається на епюрі горизонтальна проєкція точки  $M$ ?

1.  $M$
2.  $M_1$
3.  $M_2$
4.  $M_3$

43. Яке взаємне розташування точок  $A(25, 40, 70)$  та  $B(25, 60, 70)$  в просторі?

1.  $A$  вище за  $B$
2.  $A$  нижче за  $B$
3.  $A$  перед  $B$
4.  $B$  перед  $A$

44. Яке взаємне розташування точок  $A(25, 40, 70)$  та  $B(25, 40, 80)$  в просторі?

1.  $A$  вище за  $B$
2.  $A$  нижче за  $B$
3.  $A$  перед  $B$
4.  $B$  перед  $A$

45. Яке взаємне розташування точок  $A(40, 50, 90)$  та  $B(40, 50, 60)$  в просторі?

1.  $A$  вище за  $B$
2.  $A$  нижче за  $B$
3.  $A$  перед  $B$
4.  $B$  перед  $A$

46. Яке взаємне розташування точок  $A(25, 60, 70)$  та  $B(25, 40, 70)$  в просторі?

1.  $A$  вище за  $B$
2.  $A$  нижче за  $B$
3.  $A$  перед  $B$
4.  $B$  перед  $A$

47. Від яких площин проєкцій точка  $A(20, 20, 10)$  знаходиться як далі?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4.  $\Pi_1, \Pi_2$  та  $\Pi_3$

48. Від яких площин проєкцій точка  $B(20, 45, 45)$  знаходиться як далі?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4.  $\Pi_1, \Pi_2$  та  $\Pi_3$

49. Від яких площин проєкцій точка  $C(15, 5, 15)$  знаходиться як далі?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

50. До яких площин проєкцій точка  $E(10, 10, 15)$  знаходиться ближче?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

51. До яких площин проєкцій точка  $F(20, 30, 20)$  знаходиться ближче?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

52. До яких площин проєкцій точка  $M(40, 25, 25)$  знаходиться ближче?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

53. До яких площин проєкцій точка  $N(10, 10, 10)$  знаходиться ближче?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Відстань до всіх площин однакова

54. Яка з точок лежить на осі  $Ox$ ?

1.  $A(0, 0, 30)$
2.  $B(0, 40, 0)$
3.  $C(20, 0, 10)$
4.  $D(20, 0, 0)$

55. Яка з точок лежить на осі  $Oy$ ?

1.  $A(0, 0, 30)$
2.  $B(20, 10, 0)$
3.  $C(0, 30, 0)$
4.  $D(20, 0, 0)$

56. Яка з точок лежить на осі  $Oz$ ?

1.  $A(0, 0, 30)$
2.  $B(20, 10, 0)$
3.  $C(0, 30, 0)$
4.  $D(20, 0, 0)$

57. Яка з точок  $A(25, 10, 15)$ ,  $B(25, 15, 20)$  і  $C(25, 10, 5)$  знаходиться ближче до площини проекцій  $\Pi_3$ ?

1.  $A$
2.  $B$
3.  $C$
4. Всі точки знаходяться на однаковій відстані від  $\Pi_3$

58. На якій з осей проекцій лежить точка  $A(0, 0, 30)$ ?

1.  $x$
2.  $y$
3.  $z$
4. не лежить на жодній з осей проекцій

59. На якій з осей проекцій лежить точка  $B(20, 0, 0)$ ?

1.  $x$
2.  $y$
3.  $z$
4. не лежить на жодній з осей проекцій

60. На якій з осей проекцій лежить точка  $C(0, 40, 0)$ ?

1.  $x$
2.  $y$
3.  $z$
4. не лежить на жодній з осей проекцій

61. На якій з осей проекцій лежить точка  $D(0, 10, 30)$ ?

1.  $x$
2.  $y$
3.  $z$
4. не лежить на жодній з осей проекцій

62. На якій площині проекцій лежить точка  $A(0, 20, 10)$ ?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. не лежить на жодній площині проекцій

63. На якій площині проєкцій лежить точка  $B(20, 10, 0)$ ?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. не лежить на жодній площині проєкцій

64. На якій площині проєкцій лежить точка  $C(10, 20, 10)$ ?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. не лежить на жодній площині проєкцій

65. На якій площині проєкцій лежить точка  $D(20, 0, 10)$ ?

1.  $\Pi_1$
2.  $\Pi_2$
3.  $\Pi_3$
4. не лежить на жодній площині проєкцій

66. В якому октанті знаходиться точка  $E(-20, -40, 30)$ ?

1. VI
2. VII
3. V
4. VIII

67. В якому октанті знаходиться точка  $F(-20, 40, -30)$ ?

1. VI
2. VII
3. V
4. VIII

68. В якому октанті знаходиться точка  $K(-20, -40, -30)$ ?

1. VI
2. VII
3. V
4. VIII

69. В якому октанті знаходиться точка  $M(-20, 40, 30)$ ?

1. VI
2. VII
3. V
4. VIII

70. В якому октанті знаходиться точка  $G(20, -40, -30)$ ?

1. VI
2. II
3. I
4. III

71. В якому октанті знаходиться точка  $H(20, -40, 30)$ ?

1. VI
2. II
3. I
4. III

72. В якому октанті знаходиться точка  $G(20, 40, -30)$ ?

1. VI
2. II
3. I
4. III

73. На якому рисунку точка  $A$  знаходиться на осі  $0z$ ?

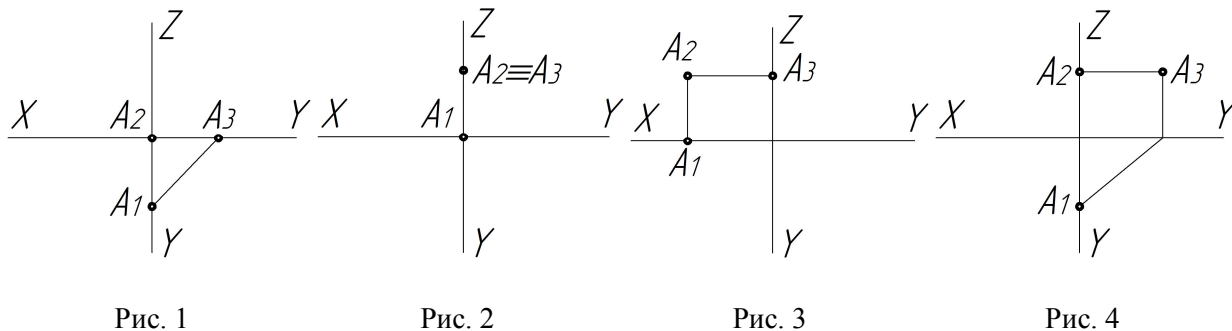


Рис. 2.8

74. На якому рисунку точка належить осі проекції  $0y$ ?

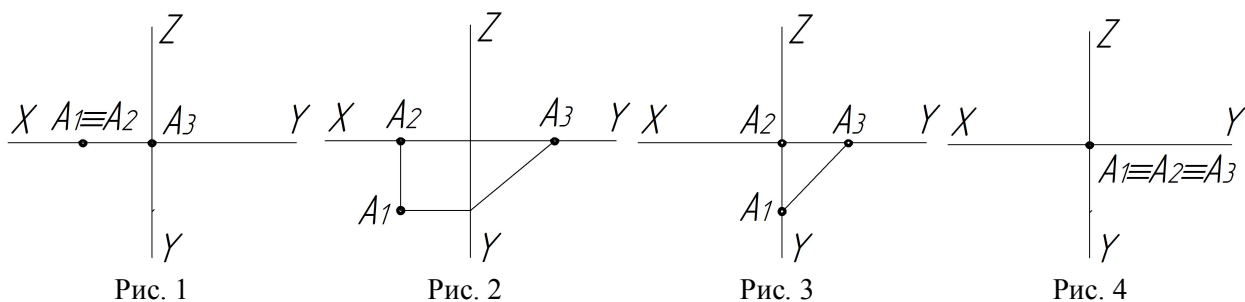


Рис. 2.9

75. На якому рисунку точка належить осі проекції  $0x$ ?

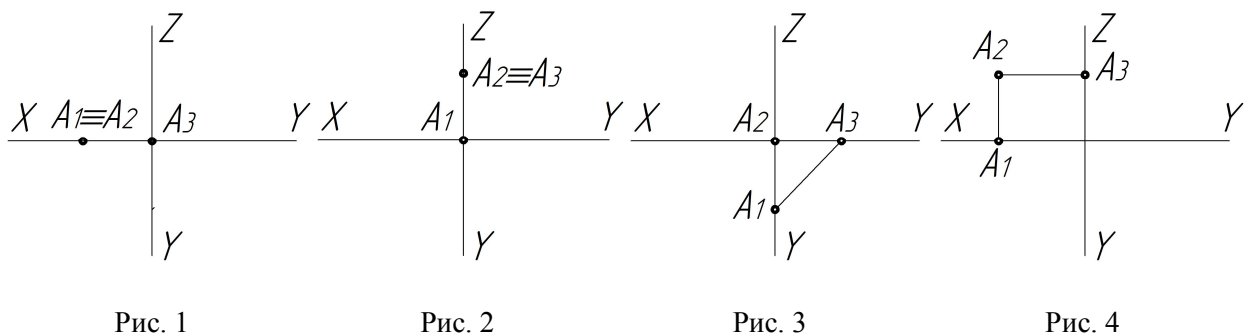


Рис. 2.10

76. На якому рисунку зображена точка, яка належить площині проекцій  $\Pi_1$ ?

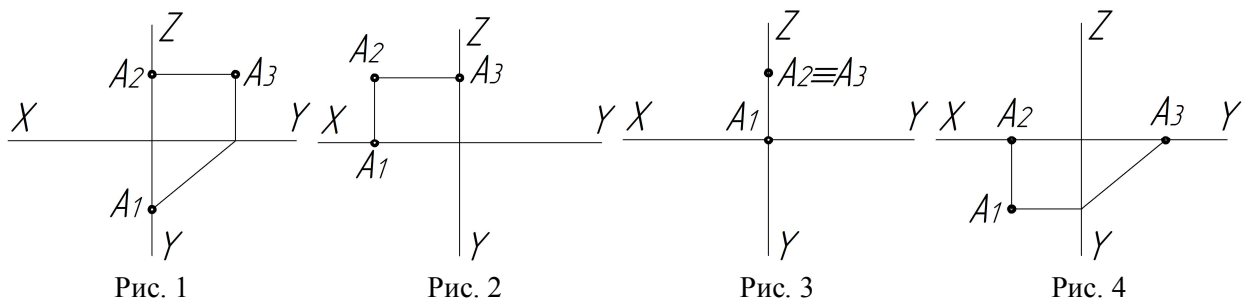


Рис. 2.11

77. На якому рисунку зображена точка, яка належить площині проєкцій  $\Pi_2$ ?

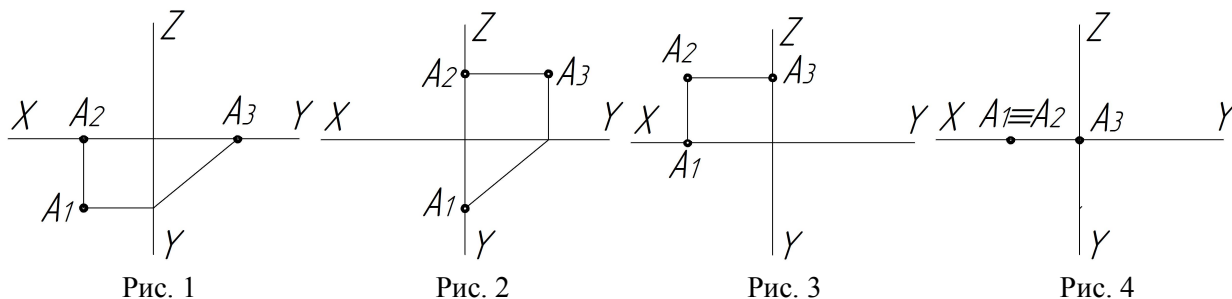


Рис. 2.12

78. На якому рисунку зображена точка, яка належить площині проєкцій  $\Pi_3$ ?

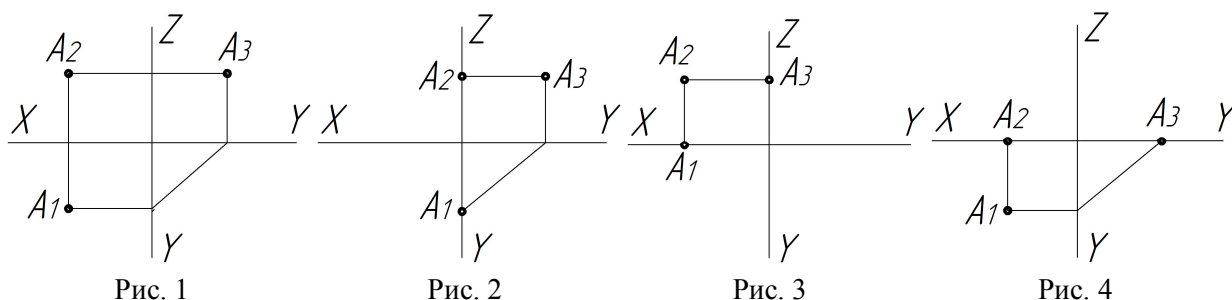


Рис. 2.13

79. На якому рисунку точка розташована ближче до площини проєкцій  $\Pi_2$ ?

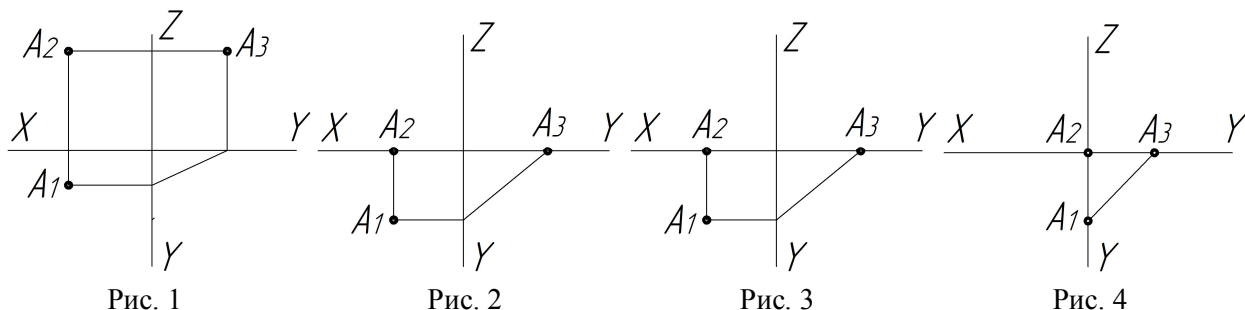


Рис. 2.14

80. На якому рисунку точка рівновіддалена від горизонтальної та профільної площин проєкцій?

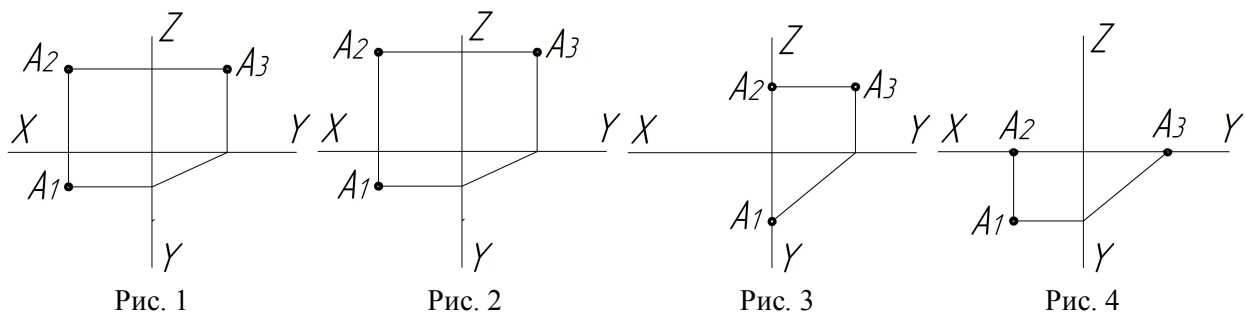


Рис. 2.15

81. На якому рисунку відстань від точки  $A$  до фронтальної площини проєкцій найменша?

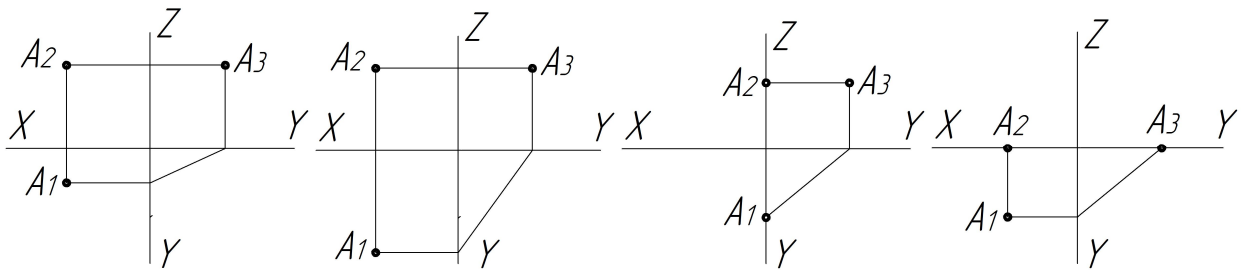


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 2.16

82. Яка точка рівновіддалена від фронтальної та профільної площин проєкцій?

1.  $A (34, 65, 10)$
2.  $B (45, 45, 35)$
3.  $C (45, 35, 35)$
4.  $D (45, 35, 45)$

83. Яка точка рівновіддалена від горизонтальної та профільної площин проєкцій?

1.  $A (34, 65, 10)$
2.  $B (45, 45, 35)$
3.  $C (45, 35, 35)$
4.  $D (45, 35, 45)$

84. Яка точка рівновіддалена від горизонтальної та фронтальної площин проєкцій?

1.  $A (34, 65, 10)$
2.  $B (45, 45, 35)$
3.  $C (45, 35, 35)$
4.  $D (45, 35, 45)$

85. Яка точка знаходиться на різних відстанях від всіх площин проєкцій?

1.  $A (34, 65, 10)$
2.  $B (45, 45, 35)$
3.  $C (45, 35, 35)$
4.  $D (45, 35, 45)$

86. Яка з точок на рисунку 2.15 розташована перед точкою  $E$ ?

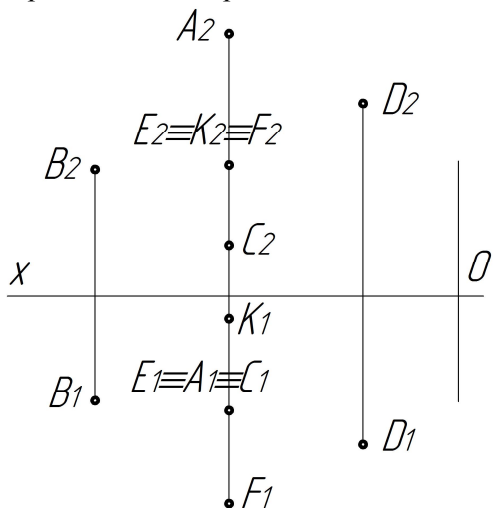


Рис. 2.17

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

87. Яка з точок на рисунку 2.17 розташована над точкою  $E$ ?

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

88. Яка з точок на рисунку 2.17 розташована за точкою  $E$ ?

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

89. Яка з точок на рисунку 2.17 розташована під точкою  $E$ ?

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

90. Яка з точок на рисунку 2.17 розташована зліва від точки  $E$ ?

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

91. Яка з точок на рисунку 2.17 розташована справа від точки  $E$ ?

1.  $A$             2.  $B$             3.  $C$             4.  $D$             5.  $F$             6.  $K$

92. Відстань між якою парою точок найбільша?

1.  $A (15, 34, 40)$ ,  $B (30, 34, 40)$ ;
2.  $C (60, 18, 32)$ ,  $D (60, 45, 32)$ ;
3.  $E (43, 60, 35)$ ,  $F (58, 60, 35)$ ;
4.  $G (45, 14, 70)$ ,  $H (45, 19, 70)$ .

93. Відстань між якою парою точок найменша?

1.  $A (15, 34, 40)$ ,  $B (30, 34, 40)$ ;
2.  $C (60, 18, 32)$ ,  $D (60, 45, 32)$ ;
3.  $E (43, 60, 35)$ ,  $F (58, 60, 35)$ ;
4.  $G (45, 14, 70)$ ,  $H (45, 19, 70)$ .

94. Відстань між якими парами точок однакова?

$A(15, 34, 40)$ ,  $B(30, 34, 40)$ ;  
 $C(60, 18, 32)$ ,  $D(60, 45, 32)$ ;  
 $E(43, 60, 35)$ ,  $F(58, 60, 35)$ ;  
 $G(45, 14, 70)$ ,  $H(45, 19, 70)$ .

1.  $AB$  та  $CD$     2.  $CD$  та  $GH$     3.  $AB$  та  $EF$     4.  $EF$  та  $GH$

95. Як називається лінія  $A_1A_2$ ?

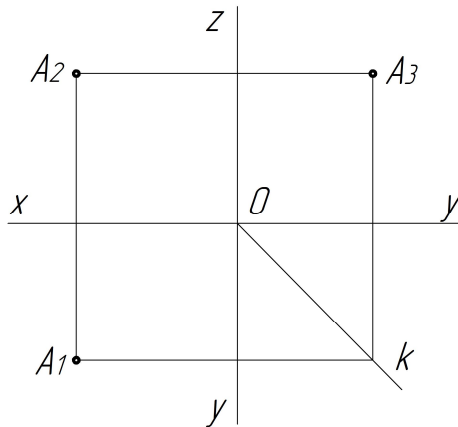


Рис. 2.18

1. Проекційна лінія
2. Лінія зв'язку
3. Постійна пряма
4. Похила пряма

96. Через які осі проходить фронтальна площина проекцій  $\Pi_2$ ?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

97. Через які осі проходить горизонтальна площина проекцій  $\Pi_1$ ?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

98. Через які осі проходить профільна площина проекцій  $\Pi_3$ ?

1.  $x, y, z$
2.  $x, y$
3.  $y, z$
4.  $x, z$

### 3. ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Для побудови комплексних рисунків (епюрів) прямих будемо користуватися наступними властивостями їх проекцій:

1. Проекція прямої простору на будь-яку площину проекцій в загальному випадку є пряма, яку будемо називати **прямою загального положення**. У випадку коли пряма перпендикулярна до площини проекцій, її проекцією буде точка. Таку проекцію називають **виродженою проекцією прямої**, з якою збігаються проекції всіх точок цієї прямої.
2. Якщо точка лежить на прямій у просторі, то проекція цієї точки лежить на проекції прямої.
3. Якщо пряма проходить через точку у просторі, то проекція цієї прямої проходить через проекцію точки.
4. Довжина ортогональної (прямокутної) проекції відрізка прямої загального положення завжди менша довжини відрізка у просторі. Довжину відрізка у просторі називають натуральною величиною відрізка і позначають ***НВ***.
5. Довжина проекції відрізка прямої паралельної до площини проекцій дорівнює його натуральній величині.

#### 3.1 КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ ПРЯМИХ ЛІНІЙ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

В прямокутній системі двох площин проекцій, горизонтальної  $\Pi_1$  і фронтальної  $\Pi_2$ , зображення будь-якої прямої простору складається з комплексу двох проекцій прямої. Таке зображення називають **комплексним рисунком або епюром прямої**.

Задамо на комплексному рисунку дві довільні прямі, розташовані під довільними кутами до осі  $x$  (рис.3.1). Одну з них назвемо горизонтальною проекцією просторової прямої  $l$  і позначимо  $l_1$ , іншу – фронтальною проекцією  $l_2$  тієї ж прямої  $l$ . Прямі лінії будемо позначати малими літерами латинського алфавіту, а їх проекції тими ж літерами з індексом відповідної площини проекцій. Запис  $l(l_1, l_2)$  треба читати так: на комплексному рисунку задано пряму  $l$  двома її проекціями  $l_1$  та  $l_2$ . Ці позначення відносяться до нескінченної прямої, а не до окремих її відрізків чи точок.

Дві проекції  $l_1$  і  $l_2$  визначають у просторі одну певну пряму  $l$ . Для побудови наочного зображення цієї прямої задамо на ній дві довільні точки  $A$  і  $B$ , користуючись властивістю: точка лежить на прямій у просторі, якщо її проекції лежать на однойменних проекціях прямої, тобто горизонтальна

проекція  $A_1$  точки  $A$  лежить на горизонтальній проекції  $l_1$  прямої  $l$ , а фронтальна  $A_2$  – на фронтальній проекції  $l_2$ .

Таким чином, на прямій  $l$  задано довільний відрізок  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ . На рисунку 3.2. побудовано наочне зображення прямої  $l$  ( $l_1, l_2$ ). Напочатку побудовані наочні зображення точок  $A$  і  $B$ , так як це вивчалось у попередньому параграфі. З'єднавши однойменні проекції точок  $A_1, B_1$ , та  $A_2, B_2$  і наочні зображення цих точок  $A$  та  $B$ , отримуємо наочне зображення прямої  $l$ , зображеної на комплексному рисунку (рис. 3.1). З виконаних побудов зрозуміло, що будь яка пряма може бути задана двома точками, які належать цій прямій.

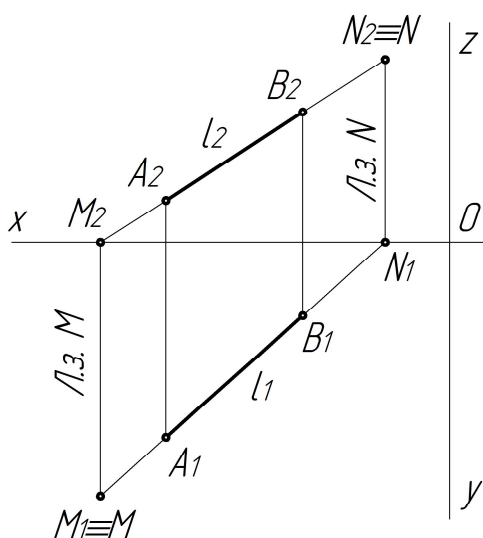


Рис. 3.1

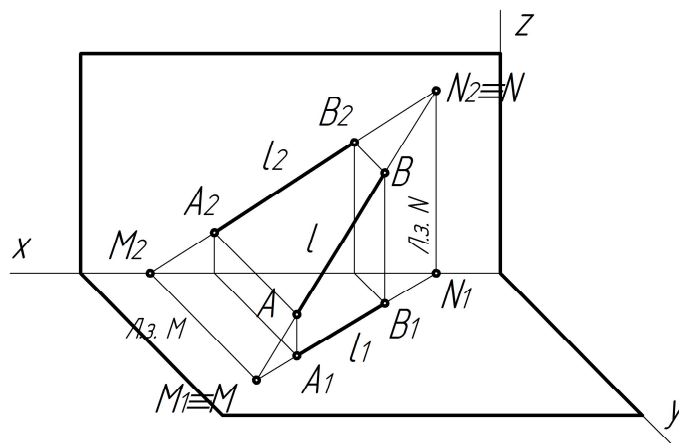


Рис. 3.2

Якщо на комплексному рисунку задати дві проекції прямої іншого напрямку, під іншими довільними кутами до осі  $x$  ніж для проекцій прямої  $l$ , то матимемо комплексний рисунок іншої довільної, але певної прямої простору.

Уміння зображати на комплексному рисунку прямі лінії дозволяє розв'язувати на такому плоскому рисунку просторові задачі, пов'язані з прямою лінією. Задачі нарисної геометрії поділяються на позиційні та метричні.

**Позиційними** називаються задачі на визначення взаємного розташування геометричних образів, їх взаємної належності, побудови перетину фігур тощо. **Метричні задачі** – це задачі на визначення (побудови) довжини відрізків прямих, кутів, площин фігур тощо. Розглянемо дві задачі, що стосуються прямих ліній.

**Задача 1.** Побудувати сліди прямої лінії (позиційна задача).

**Слідами прямої називаються точки перетину прямої з площинами проекцій.** В системі двох площин проекцій кожна пряма загального положення має два сліди. На рисунку 3.2 пряма  $l$  перетинає горизонтальну площину проекцій в точці  $M$ . Ця точка є горизонтальним слідом прямої  $l$  і як будь-яка точка зображується на комплексному рисунку двома проекціями  $M_1$

і  $M_2$ . Аналогічно точка  $N$  перетину прямої  $l$  з фронтальною площиною проєкцій  $\Pi_2$  є фронтальним слідом прямої. Рисунок 3.2 можна розглядати як графічний алгоритм побудови слідів прямої. «Перекладемо» його на іншу символічну «мову» і застосуємо цей алгоритм для побудови слідів прямої  $l$  на комплексному рисунку (рис. 3.1).

1.  $l_2 \cap x = M_2$  – фронтальна проєкція горизонтального сліду прямої  $l$ .
2.  $L.z.M \perp x$ ,  $L.z.M \cap l_1 = M_1$  – горизонтальна проєкція горизонтального сліду, вона співпадає з самим слідом  $M$ , бо точка  $M$  лежить на горизонтальній площині проєкцій –  $M_1 \equiv M$ .  
Аналогічно будується фронтальний слід прямої.
3.  $l_1 \cap x = N_2$  – горизонтальна проєкція фронтального сліду прямої  $l$ .
4.  $L.z.N \perp x$ ,  $L.z.N \cap l_2 = N_2 \equiv N$  – фронтальна проєкція фронтального сліду, яка співпадає з самим слідом.

Сліди прямої застосовуються для розв'язання різноманітних задач, наприклад при побудові тіней від геометричних фігур на площинах проєкцій, та для визначення розташування прямих відносно площин проєкцій.

**Задача 2.** Визначити (побудувати) натуральну величину відрізка прямої загального положення за його проєкціями та кути нахилу прямої, якій належить відрізок, до площин проєкцій (метрична задача).

На рисунку 3.3 задано комплексний рисунок відрізка  $AB$  прямої загального положення  $l$ . Довжина кожної з двох проєкцій  $A_1B_1$  та  $A_2B_2$  відрізка  $AB$  менше ніж натуральна величина відрізка у просторі. Як за проєкціями відрізка визначити його натуральну величину? Відповідь на це питання, скласти схему (алгоритм) розв'язання задачі 2, нам допоможе рисунок 3.4.

На цьому рисунку наочно зображений довільний відрізок  $AB$ , що належить прямій  $l$  загального положення та його горизонтальна проєкція  $A_1B_1$ . Розглянемо прямокутний трикутник  $ABB'$ , у якого катет  $AB' \parallel A_1B_1$ , а значить  $AB' = A_1B_1$ . Інший катет  $BB_1$  по довжині дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка до площини проєкції, у випадку, що розглядаємо, до площини  $\Pi_1$ , тобто різниці координат  $z_B - z_A = \Delta z$ . Гіпотенуза  $AB$  трикутника  $ABB'$  є натуральна величина відрізка  $AB$ , а кут  $BAB' = \angle \alpha^\circ$  є кутом нахилу прямої  $l$  до площини проєкцій.

Аналогічні міркування можна провести і відносно фронтальної площини проєкцій і дійти до висновку: для визначення натуральної величини відрізка треба побудувати прямокутний трикутник, у якого один катет дорівнює довжині проєкції відрізка на будь-яку площину проєкцій, а другий – різниці відстаней від кінців відрізка до цієї площини проєкцій, тобто різниці відповідних координат кінців відрізка (правило прямокутного трикутника).

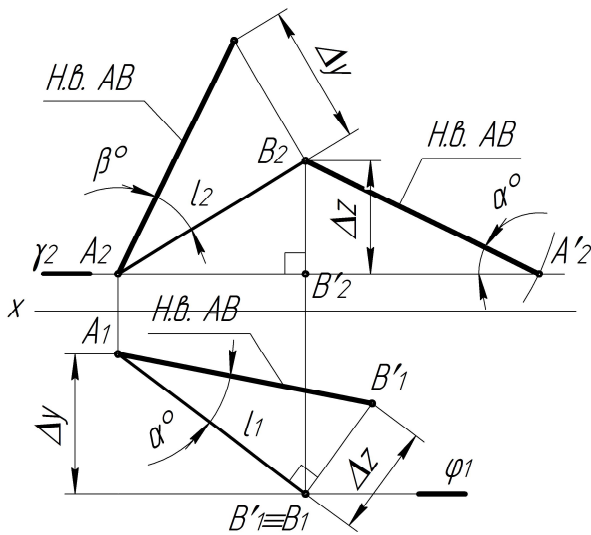


Рис. 3.3

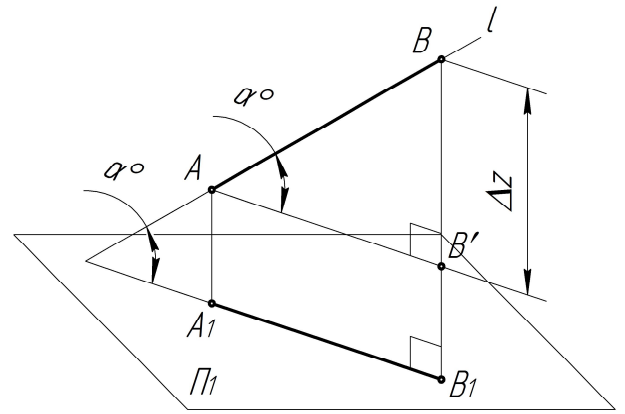


Рис. 3.4

Прийшовши до такого висновку, можемо розв'язати задачу 2 на комплексному рисунку (рис. 3.3). На ньому можемо виміряти катети прямокутного трикутника. Довжина одного з них дорівнює горизонтальній проекції  $A_1B_1$  відрізка  $AB$ , довжина другого  $\Delta z$  вимірюється на фронтальній проекції відрізка. За довжинами цих двох катетів можна побудувати прямокутний трикутник у будь-якому місті креслення. Для зменшення графічних операцій можна виконати його побудову за одним з двох варіантів.

За першим варіантом за один катет приймаємо горизонтальну проекцію  $A_1B_1$  відрізка, другий катет проведемо перпендикулярно їй, наприклад, з проекції  $B_1$  (можна із проекції  $A_1$ ). Відкладаємо довжину другого катету  $\Delta z$  і маємо прямокутний трикутник  $A_1B_1B'_1$ , у якого гіпотенуза  $A_1B'_1$ , є натуральна величина відрізка, а  $\angle \alpha^\circ$  дорівнює куту нахилу прямої  $l$  ( $l_1, l_2$ ) до площини  $\Pi_1$  у просторі.

За другим варіантом за один катет приймаємо відрізок  $B_2B'_2 = \Delta z$ , довжина другого  $B'_2A'_2 = A_1B_1$ . Довжина гіпотенузи  $B_2A'_2$  дорівнює натуральній величині відрізка  $AB$ , а  $\angle \alpha^\circ$  – куту нахилу прямої  $l$  ( $l_1, l_2$ ) до площини  $\Pi_1$  у просторі.

Для визначення  $\angle \beta^\circ$  нахилу прямої  $l$  до площини проєкцій  $\Pi_2$  треба побудувати прямокутний трикутник на фронтальній проєкції  $A_2B_2$ , як на катеті, другий катет  $\Delta y$  вимірюється на горизонтальній проєкції відрізка.

Наведеним побудовам можна надати іншу інтерпретацію. Прямокутний трикутник  $A_1B_1B'_1$  будується обертанням трикутника  $ABB'$  навколо прямої  $AB'$  до суміщення з горизонтальною площиною, а прямокутний трикутник  $B_2B'_2A'_2$  обертанням його навколо катета  $BB'$  до суміщення з фронтальною площиною  $\Pi_2$ . Більш змістовніше про це буде мова у одному з наступних параграфів.

Досі ми розглядали виключно прямі загального положення. Тепер розглянемо комплексні рисунки прямих, які розташовані паралельно та перпендикулярно до площин проєкцій.

### 3.2 КЛАСИФІКАЦІЯ ПРЯМИХ ЗА ЇХ ПОЛОЖЕННЯМ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Пряма лінія відносно площин проекцій може займати такі положення: пряма паралельна одній площині проекцій, пряма перпендикулярна одній площині проекцій, а значить паралельна до інших двох площин проекцій, пряма належить площині проекцій, пряма співпадає з віссю проекцій.

Прямі паралельні тільки одній площині проекцій називаються *прямими рівня*. Одна проекція таких прямих паралельна відповідній осі проекцій, бо відповідні координати її точок, що визначають відстань до площини проекцій, якій вона паралельна, мають однакові значення.

Прямі перпендикулярні до площин проекцій називаються *проектуючими прямими*. Одна проекція таких прямих, на площину, до якої вона перпендикулярна, є точка. Ця проекція проектуючої прямої називається виродженою проекцією прямої.

Характерні особливості та ознаки на комплексному рисунку таких прямих наведено в таблиці 2.

### 3.3 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ТОЧОК І ПРЯМИХ

Щоб визначити відносне положення точки і прямої в просторі за їх комплексним рисунком, треба з'ясувати, шляхом читання комплексного рисунка, чи лежать проекції точки на однойменних проекціях прямої. Якщо ця умова виконується, то точка, наприклад точка  $A$  (рис. 3.5) лежить на прямій  $d$  ( $d_1, d_2$ ). Інші точки  $B, C, D, E, F$  не лежать на прямій  $d$  у просторі, бо одна із проекцій кожної з цих точок не лежить на однойменній з нею проекції прямої. У цьому випадку положення точки відносно прямої у просторі визначається на тій площині проекцій на якій проекція точки не лежить на однойменній проекції прямої. Читаємо: проекція  $B_1$  точки  $B$  лежить перед проекцією  $d_1$  прямої  $d$ . Значить точка  $B$  у просторі розташована попереду прямої  $d$ . Аналогічні міркування дозволяють визначити, що точка  $C$  лежить позаду прямої  $d$ , точка  $D$  розташована над прямою  $d$ , точка  $E$  під прямою  $d$ , а точка  $F$  за і під прямою  $d$ .

Для визначення розташування точки відносно профільної прямої слід скористатися їх профільними проекціями.

Уміння визначити положення точки відносно прямої застосовується для визначення видимості проекцій точок. Так, фронтальна проекція  $B_2$  точки  $B$  видима, бо вона розташована перед прямою  $d$ , фронтальна проекція  $C_2$  точки  $C$  – невидима, бо розташована за прямою  $d$  (закривається цією прямою). Аналогічно горизонтальна проекція  $D_1$  точки  $D$  – видима,  $E_1$  – невидима.

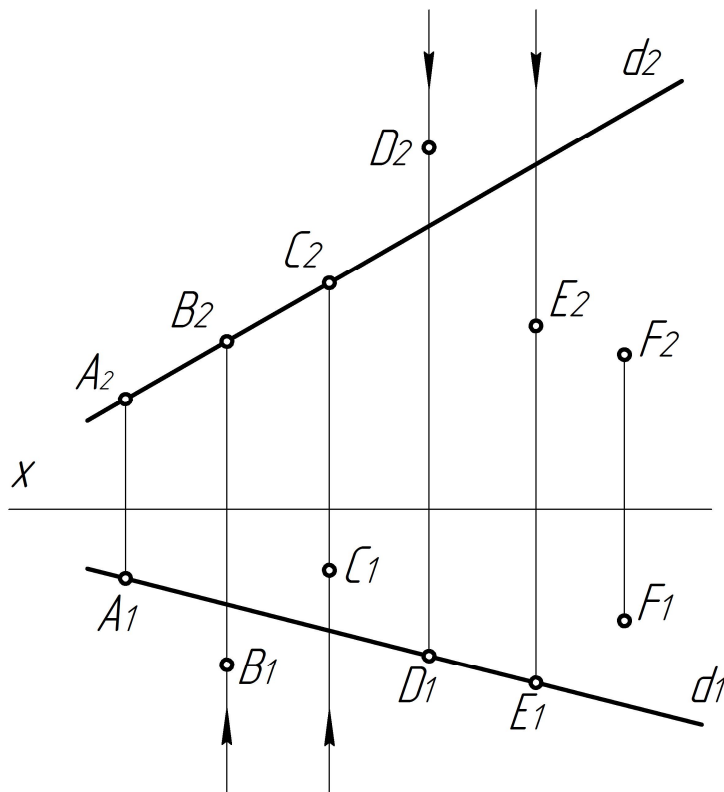


Рис. 3.5

### 3.4 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дві прямі у просторі можуть співпадати, перетинатися, бути паралельними, чи мимобіжними. **Мимобіжні прямі** – це такі прямі, які не перетинаються, тобто не мають спільної точки і не паралельні між собою. Розглянемо комплексні рисунки двох прямих та визначимо ознаки, за якими визначається їх взаємне положення у просторі.

Якщо прямі перетинаються, то вони мають спільну точку. У загальному випадку однойменні проекції таких прямих перетинаються, а точки перетину однойменних проекцій лежать на одній лінії проекційного зв'язку, бо вони є двома проекціями одної спільної точки цих прямих.

На рисунку 3.6а  $a_1 \cap b_1 = A_1$ ,  $a_2 \cap b_2 = A_2$ ,  $A_1 A_2 \perp X$ .

Це означає, що  $a$  ( $a_1, a_2$ ) та  $b$  ( $b_1, b_2$ ) у просторі перетинаються.

В окремих випадках одна пара однойменних проекцій може співпадати (рис. 3.6 б).

Для визначення точки перетину двох профільних прямих треба побудувати їх профільні проекції.

Однойменні проекції двох паралельних прямих, в загальному випадку, взаємно паралельні (рис. 3.7 а).

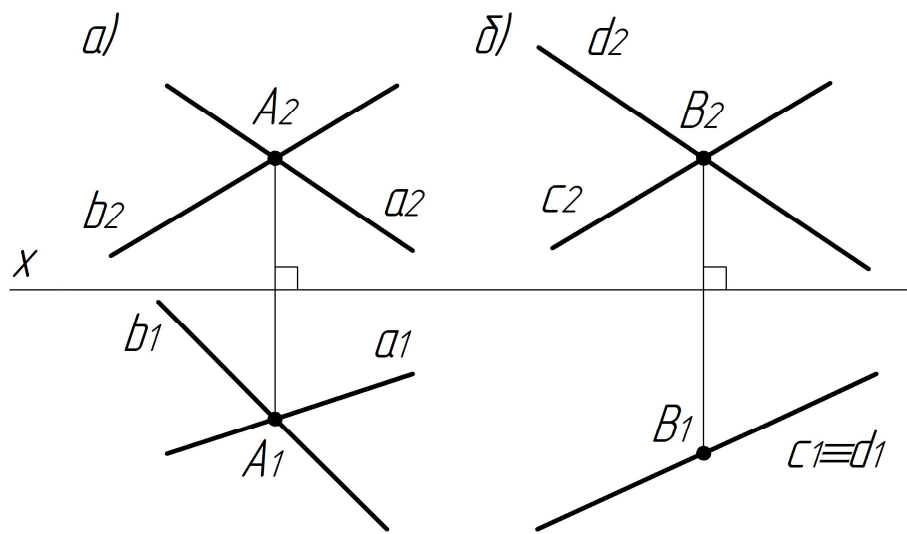


Рис. 3.6

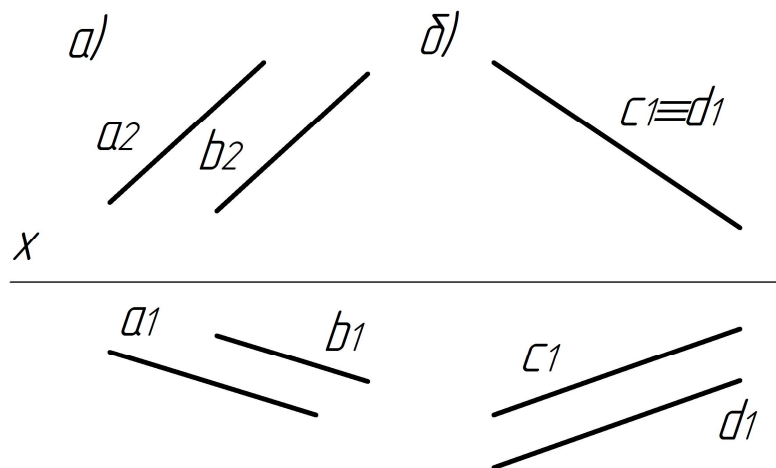


Рис. 3.7

$$a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2 \rightarrow a \parallel b.$$

В окремому випадку одна пара паралельних прямих співпадати (рис. 3.7 б).

Для визначення паралельності двох профільних прямих треба мати їх профільні проєкції.

Одноіменні проєкції мимобіжних прямих в загальному випадку перетинаються, але точки перетину не лежать на одній лінії проєкційного зв'язку (рис. 3.8). В точках перетину одноіменних проєкцій співпадають проєкції двох різних точок, одна з яких належить одній із заданих прямих  $a$  ( $a_1, a_2$ ), а інша – другій  $b$  ( $b_1, b_2$ ).

$$a_2 \cap b_2 = 1_2 \equiv 2_2. 1_2 \in a, \text{ бо } 1_2 \in a_2, 2_2 \in b, \text{ бо } 2_2 \in b_2.$$

$$a_1 \cap b_1 = 3_1 \equiv 4_1. 3_1 \in b, \text{ бо } 3_1 \in b_1, 4_1 \in a, \text{ бо } 4_1 \in a_1.$$

Прямі  $a$  та  $b$  не мають спільної точки, отже є мимобіжними.

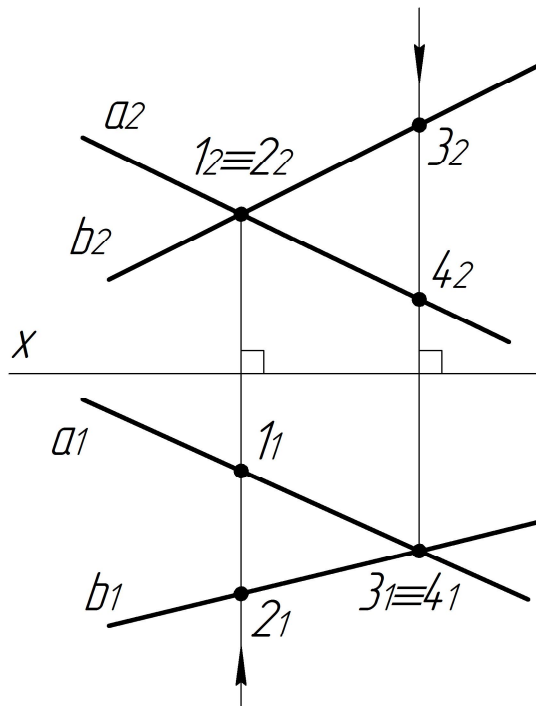


Рис. 3.8

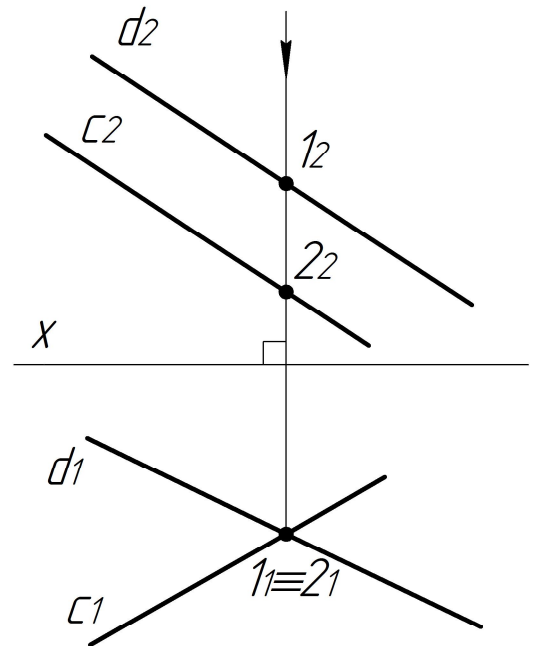


Рис. 3.9

Дві точки, одна пара однойменних проєкцій яких співпадає, називаються **конкуруючими**, вони конкурують в питанні видимості відносно площин проєкцій. На рисунку 3.8 точки  $1$  і  $2$  конкурують відносно  $\Pi_2$ , бо  $1_2 \equiv 2_2$ .

Фронтальна проєкція  $2_2$  точки  $2$  видима, бо точка  $2$  знаходиться перед точкою  $1$ , що впливає з розташування горизонтальних проєкцій  $1_1$  і  $2_1$  цих точок. Образно кажучи, пряма  $b$  «закриває» одну точку  $1$  прямої  $a$ . аналогічні міркування щодо точок  $3$  і  $4$  приводять до висновку: горизонтальна проєкція  $3_1$  – видима, пряма  $b$  «закриває» одну точку  $4$  прямої  $a$ .

Одна пара однойменних проєкцій мимобіжних прямих може бути взаємно паралельна (рис. 3.9).

Вище зазначалось, що для визначення взаємного положення профільних прямих треба побудувати їх профільні проєкції. Це проілюстровано на рисунку 3.10. Зображені на ньому прямі  $AB$  і  $CD$  є мимобіжними. Якби профільні проєкції таких прямих виявились би взаємно паралельними, або співпадали, то ці прямі у просторі були б взаємно паралельними.

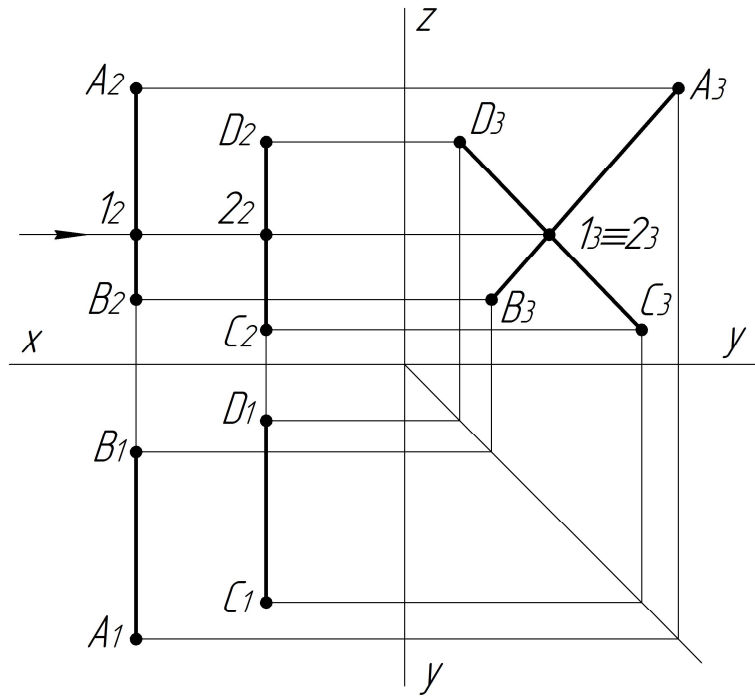


Рис. 3.10

Зупинимось ще на одному випадку прямих, що перетинаються під прямим кутом у просторі. Якщо однойменні проєкції двох прямих загального положення складають прямий кут, то в просторі такі прямі перетинаються не під прямим кутом. Чи може бути проєкція прямого кута теж прямим кутом?

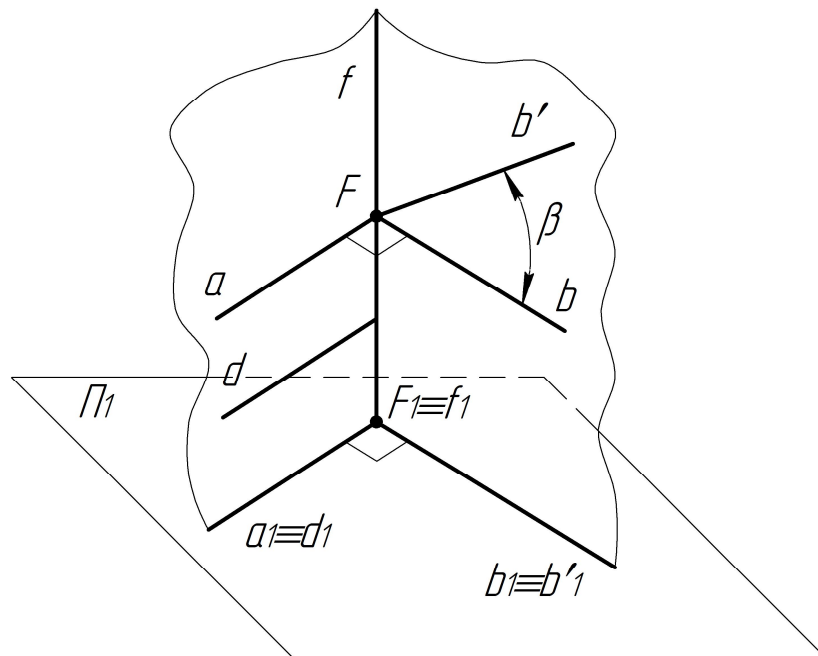


Рис. 3.11

Розглянемо прямий кут  $aFb$ , сторони якого паралельні площині проєкцій  $\Pi_1$  (рис. 3.11). Якщо  $a \parallel \Pi_1 \rightarrow a \parallel a_1$ ,  $b \parallel \Pi_1 \rightarrow b \parallel b_1$ . Отже проєкція

$a_1F_1b_1$  прямого кута  $aFb$  є також прямим кутом. Проведемо через сторони прямого кута дві площини, проектуючи ці сторони на площину  $\Pi_1$ ,  $\alpha \supset a$ ,  $\alpha \perp \Pi_1$ ;  $\beta \supset b$ ,  $\beta \perp \Pi_1$ . Ці площини утворюють прямий двогранний кут. Його ребро  $f = \alpha \cap \beta$  перпендикулярне до  $\Pi_1$  є проектуючою прямою вершини прямого кута  $F$ . Якщо сторону  $a$  зафіксувати в площині  $\alpha$  і навколо неї, як навколо осі, повернути сторону  $b$  на довільний кут в будь-якому напрямку, наприклад в напрямку показаному стрілкою, в положення  $b'$ , то сторона  $b$  в процесі обертання не вийде з площини  $\beta$ , бо  $a \perp \beta$ . Отже кут  $aFb'$  є прямим. Також прямим кутом є його проекція  $a_1F_1b'_1$ .

**Висновок:** якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга сторона є будь-якою прямою загального положення, то проєкція такого прямого кута буде теж прямий кут. Цей висновок називають теоремою про проєкцію прямого кута.

Перпендикулярність двох прямих будемо розглядати в широкому розумінні, дві прямі вважаються взаємно перпендикулярними, якщо вони навіть не перетинаються, наприклад прямі  $b$  і  $d$  –  $b \perp d$ ,  $b \not\propto d$ .

На комплексному рисунку (рис. 3.12) задано проєкції взаємно перпендикулярних прямих  $h \perp a$  і  $f \perp b$ . Прямі  $c$  ( $c_1, c_2$ ) та  $d$  ( $d_1, d_2$ ) у просторі не перпендикулярні між собою, бо жодна з них не паралельна ні до  $\Pi_1$  ні до  $\Pi_2$ , а значить не задовольняють теоремі про проєкції прямого кута.

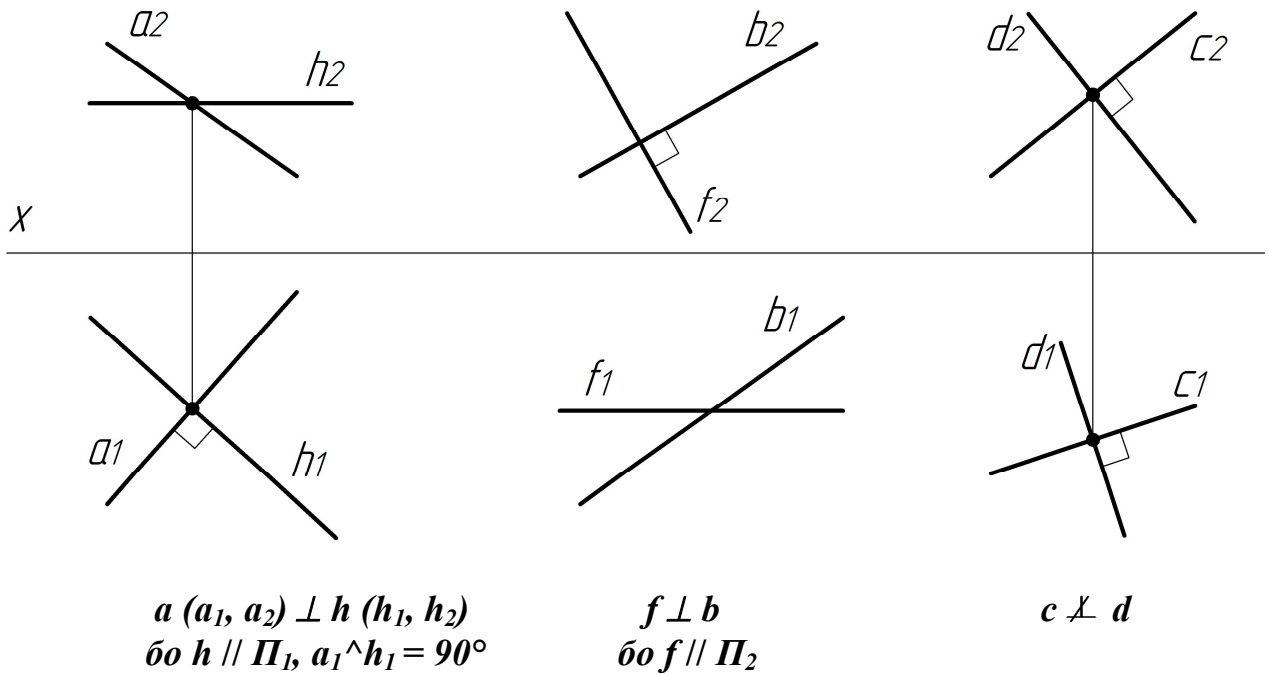
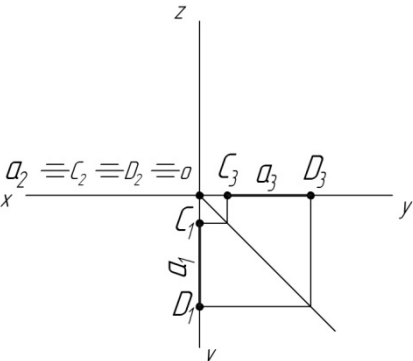
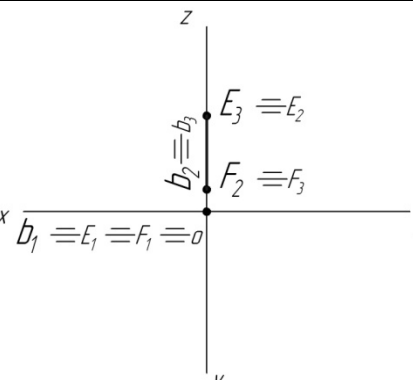


Рис. 3.12

## Положення прямих відносно площин проєкцій

Назва прямої та її положення у просторі		Ознака прямої за координатами її точок	Ескіз комплексного рисунка (епюру) прямої	Ознаки прямої за комплексним рисунком
Прямі рівня	Горизонтальна (горизонталь) $h$ , $h \parallel \Pi_1$	Координати $z$ кожної точки прямої мають одне і те ж значення $z_A = z_B = \dots = z_N$		$h_2 \parallel x, h_3 \parallel y$ $h_2, h_3 \perp z$ $A_1B_1 = AB = HB_{AB}$ $\beta^\circ =$ кут нахилу $h$ до $\Pi_2$ $\gamma^\circ =$ нахил $h$ до $\Pi_3$
	Фронтальна (фронталь) $f$ , $f \parallel \Pi_2$	Координати $y$ кожної точки прямої мають одне і те ж значення $y_C = y_D = \dots = y_N$		$f_1 \parallel x, f_3 \parallel z$ $f_1, f_3 \perp y$ $C_2D_2 = CD = HB_{CD}$ $\alpha^\circ =$ кут нахилу $f$ до $\Pi_1$ $\gamma^\circ =$ куту нахилу $f$ до $\Pi_3$
	Профільна $p$ , $p \parallel \Pi_3$	Координати $x$ кожної точки прямої мають одне і те ж значення $x_E = x_F = \dots = x_N$		$p_1 \parallel y, p_2 \parallel z$ $p_1, p_2 \perp x$ $E_3F_3 = EF = HB_{EF}$ $\alpha^\circ =$ куту нахилу $p$ до $\Pi_1$ $\beta^\circ =$ куту нахилу $p$ до $\Pi_2$
Прямі в площинах проєкцій	Горизонталь $h$ (нульового рівня) $h \subset \Pi_1$	Координати $z$ кожної точки прямої дорівнюють 0. $z_A = z_B = \dots = z_N = 0$		$h_2 \equiv x, h_3 \equiv y$ $A_1B_1 = AB = HB_{AB}$ $\beta^\circ$ та $\gamma^\circ$ дорівнюють кутам нахилу прямої $h$ до $\Pi_2$ і $\Pi_3$ відповідно
	Фронталь $f$ (нульового рівня) $f \subset \Pi_2$	Координати $y$ кожної точки прямої дорівнюють 0. $y_C = y_D = \dots = y_N = 0$		$f_1 \equiv x, f_3 \equiv z$ $C_2D_2 = CD = HB_{CD}$ $\alpha^\circ$ та $\gamma^\circ$ дорівнюють кутам нахилу прямої $f$ до $\Pi_1$ і $\Pi_3$ відповідно

	<p>Профільна <math>p</math> (нульового рівня) <math>p \subset \Pi_3</math></p>	<p>Координати <math>x</math> кожної точки прямої дорівнюють 0. <math>x_E = 0</math> <math>x_F = \dots = x_N = 0</math></p>		<p><math>p_1 \equiv y, p_2 \equiv z</math> <math>E_3F_3 = EF = HB_{EF}</math> <math>\alpha^\circ</math> та <math>\beta^\circ</math> дорівнюють кутам нахилу прямої <math>p</math> до <math>\Pi_1</math> і <math>\Pi_2</math> відповідно</p>
Пряма, які лежать на	<p>Горизонтально-проектуюча пряма <math>b</math>. <math>b \perp \Pi_1</math> <math>b \parallel z</math> <math>b \parallel \Pi_2</math> та <math>\Pi_3</math></p>	<p>Координати <math>x</math> та <math>y</math> кожної точки прямої мають однакові значення. <math>x_A = x_B = \dots = x_N</math> <math>y_A = y_B = \dots = y_N</math></p>		<p><math>b_1 \equiv A_1 \equiv B_1</math> – точка (вироджена проекція прямої <math>b</math>). <math>A_2B_2 = A_3B_3 = HB_{AB}</math> <math>b_2 \parallel b_3, b_2, b_3 \parallel z</math> <math>b_2 \perp x, b_3 \perp y</math></p>
	<p>Фронтально-проектуюча пряма <math>a</math>. <math>a \perp \Pi_2</math> <math>a \parallel y</math> <math>a \parallel \Pi_1</math> та <math>\Pi_3</math></p>	<p>Координати <math>x</math> та <math>z</math> кожної точки прямої мають однакові значення. <math>x_C = x_D = \dots = x_N</math> <math>z_C = z_D = \dots = z_N</math></p>		<p><math>a_2 \equiv C_2 \equiv D_2</math> – точка (вироджена проекція прямої <math>a</math>). <math>C_1D_1 = C_3D_3 = HB_{CD}</math> <math>a_1 \parallel y, a_3 \parallel y</math> <math>a_1 \perp x, a_3 \perp z</math></p>
	<p>Профільно-проектуюча пряма <math>d</math>. <math>d \perp \Pi_3</math> <math>d \parallel x</math> <math>d \parallel \Pi_1</math> та <math>\Pi_2</math></p>	<p>Координати <math>y</math> та <math>z</math> кожної точки прямої мають однакові значення. <math>y_E = y_F = \dots = y_N</math> <math>z_E = z_F = \dots = z_N</math></p>		<p><math>d_3 \equiv E_3 \equiv F_3</math> – точка (вироджена проекція прямої <math>d</math>). <math>E_1F_1 \parallel x, E_1F_1 \parallel \Pi_1</math> та <math>E_1F_1 = E_2F_2 = HB_{EF}</math></p>
	<p>Пряма <math>p \equiv x</math> <math>p \subset \Pi_1</math> і <math>\Pi_2</math></p>	<p>Координати <math>y</math> та <math>z</math> кожної точки прямої дорівнюють 0. <math>y_A = y_B = \dots = y_N = 0</math> <math>z_A = z_B = \dots = z_N = 0</math></p>		<p><math>p_3 \equiv A_3 \equiv B_3</math> – точка (початок координат <math>O</math>). <math>A_1B_1 = A_2B_2 = HB_{AB}</math></p>

<p>Пряма <math>a \equiv y</math>  <math>a \subset \Pi_1 \text{ і } \Pi_3</math></p>	<p>Координати <math>x</math>  та <math>z</math> кожної  точки прямої  дорівнюють 0.  <math>x_C = x_D = \dots = x_N = 0</math>  <math>z_C = z_D = \dots = z_N = 0</math></p>		<p><math>a_2 \equiv c_2 \equiv d_2</math> – точка  (початок  координат O).  <math>c_1 d_1 = c_3 d_3 = HB_{CD}</math></p>
<p>Пряма <math>b \equiv z</math>  <math>b \subset \Pi_2 \text{ і } \Pi_3</math></p>	<p>Координати <math>x</math>  та <math>y</math> кожної  точки прямої  дорівнюють 0.  <math>x_E = x_F = \dots = x_N = 0</math>  <math>y_E = y_F = \dots = y_N = 0</math></p>		<p><math>b_1 \equiv e_1 \equiv f_1</math> – точка  (початок  координат O).  <math>e_2 f_2 = e_3 f_3 = HB_{EF}</math></p>

### **ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ**

1. Як називається пряма, фронтальна і профільна проекції якої паралельні осі  $z$ ?
  1. Профільна пряма.
  2. Профільно-проектуюча пряма.
  3. Фронтально-проектуюча пряма.
  4. Горизонтально-проектуюча пряма.
  
2. Які прямі називаються проектуючими прямими?
  1. Не паралельні до жодної площини проекцій.
  2. Паралельні до одної площини проекцій.
  3. Паралельні до двох площин проекцій.
  4. Паралельні до трьох площин проекцій.
  
3. Як називається пряма, фронтальна і горизонтальна проекції якої перпендикулярні до осі  $x$ ?
  1. Фронтально-проектуюча пряма.
  2. Горизонтальна пряма.
  3. Профільна пряма.
  4. Профільно-проектуюча пряма.

4. Як називається пряма, горизонтальна проекція якої перпендикулярна до осі  $x$ , а профільна перпендикулярна до осі  $z$ ?

1. Профільно-проектуюча пряма.
2. Фронтально-проектуюча пряма.
3. Горизонтально-проектуюча пряма.
4. Фронтальна пряма.

5. Як називається пряма, фронтальна і горизонтальна проекції якої паралельні до осі  $x$ ?

1. Фронтально-проектуюча пряма.
2. Горизонтально-проектуюча пряма.
3. Фронтальна пряма.
4. Профільно-проектуюча пряма.

6. Які прямі називаються прямими загального положення?

1. Не паралельні до жодної площини проекцій.
2. Паралельні до однієї площини проекцій.
3. Паралельні до двох площин проекцій.
4. Перпендикулярні до однієї площини проекцій.

7. Які прямі називаються прямими рівня?

1. Не паралельні до жодної площини проекцій.
2. Паралельні до однієї площини проекцій.
3. Паралельні до двох площин проекцій.
4. Перпендикулярні до однієї площини проекцій.

8. Як називається пряма, у котрій горизонтальна і фронтальна проекції розташовано під довільними кутами до осі  $x$  (кути не дорівнюють  $0^\circ$  та  $90^\circ$ )?

1. Пряма загального положення.
2. Горизонтальна пряма.
3. Фронтальна пряма.
4. Профільна пряма.

9. Як називається пряма, у котрій горизонтальна проекція паралельна до осі  $x$ , а фронтальна нахилена до осі  $x$  під кутом, який не дорівнює  $0^\circ$  та  $90^\circ$ ?

1. Пряма загального положення.
2. Фронтальна пряма.
3. Горизонтальна пряма.
4. Горизонтально-проектуюча пряма.

10. Як називається пряма, у котрій фронтальна проекція паралельна до осі  $x$ , а горизонтальна нахилена до осі  $x$  під кутом, який не дорівнює  $0^\circ$  та  $90^\circ$ ?

1. Пряма загального положення.
2. Фронтальна пряма.
3. Горизонтальна пряма.
4. Горизонтально-проектуюча пряма.

11. Яка пара точок лежить на горизонтальній прямій?

1.  $A(10, 20, 40)$ ;  $B(10, 30, 50)$
2.  $C(20, 10, 40)$ ;  $D(30, 40, 40)$
3.  $E(10, 20, 70)$ ;  $F(30, 20, 80)$
4.  $M(20, 40, 30)$ ;  $N(60, 15, 20)$

12. Яка пара точок лежить на прямій загального положення?

1.  $A(10, 20, 40)$ ;  $B(10, 30, 50)$
2.  $C(20, 10, 40)$ ;  $D(30, 40, 40)$
3.  $E(10, 20, 70)$ ;  $F(30, 20, 80)$
4.  $M(20, 40, 30)$ ;  $N(60, 15, 20)$

13. Яка пара точок лежить на фронтальній прямій?

1.  $A(10, 20, 40)$ ;  $B(10, 30, 50)$
2.  $C(20, 10, 40)$ ;  $D(30, 40, 40)$
3.  $E(10, 20, 70)$ ;  $F(30, 20, 80)$
4.  $M(20, 40, 30)$ ;  $N(60, 15, 20)$

14. Яка пара точок лежить на профільній прямій?

1.  $A(10, 20, 40)$ ;  $B(10, 30, 50)$
2.  $C(20, 10, 40)$ ;  $D(30, 40, 40)$
3.  $E(10, 20, 70)$ ;  $F(30, 20, 80)$
4.  $M(20, 40, 30)$ ;  $N(60, 15, 20)$

15. Яка пара точок лежить на горизонтально-проектуючій прямій?

1.  $A(20, 30, 20)$ ;  $B(20, 40, 20)$
2.  $C(10, 40, 40)$ ;  $D(10, 40, 30)$
3.  $E(20, 50, 10)$ ;  $F(30, 50, 10)$
4.  $M(40, 30, 16)$ ;  $N(30, 30, 60)$

16. Яка пара точок лежить на профільно-проектуючій прямій?

1.  $A(20, 30, 20)$ ;  $B(20, 40, 20)$
2.  $C(10, 40, 40)$ ;  $D(10, 40, 30)$
3.  $E(20, 50, 10)$ ;  $F(30, 50, 10)$
4.  $M(40, 30, 16)$ ;  $N(30, 30, 60)$

17. Яка пара точок лежить на фронтально-проектуючій прямій?

1.  $A(20, 30, 20)$ ;  $B(20, 40, 20)$
2.  $C(10, 40, 40)$ ;  $D(10, 40, 30)$
3.  $E(20, 50, 10)$ ;  $F(30, 50, 10)$
4.  $M(40, 30, 16)$ ;  $N(30, 30, 60)$

18. Через які октанти проходить горизонтально-проектуюча пряма, якщо дві її точки знаходяться в першій?

1.  $I$  та  $II$       2.  $I$  та  $V$       3.  $I$  та  $IV$       4.  $I$  та  $III$

19. Через які октанти проходить пряма, зображена на рисунку?

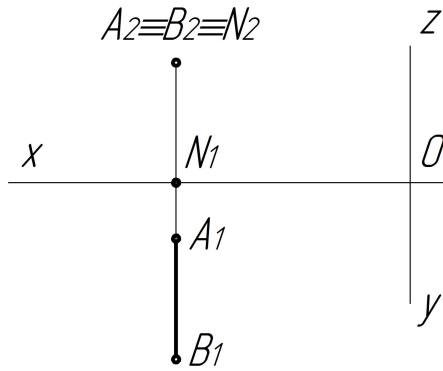


Рис. 3.13

1. II та IV    2. I та II    3. I та IV    4. II та III

20. Через які октанти проходить пряма, зображена на рисунку?

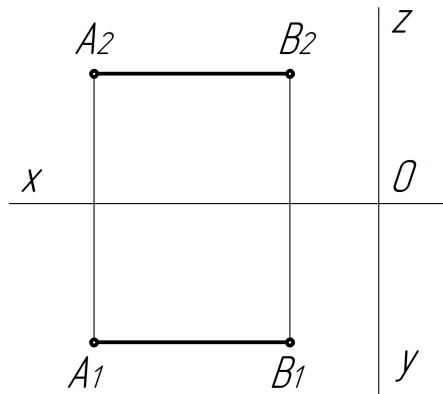


Рис. 3.14

1. I та II    2. I та V    3. I та IV    4. I та III

21. Через які октанти проходить пряма, зображена на рисунку?

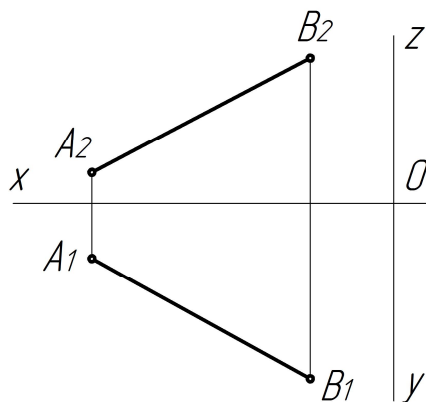


Рис. 3.15

1. I    2. II    3. III    4. IV    5. V    6. VI

22. Через які октанти проходить пряма, зображена на рисунку?

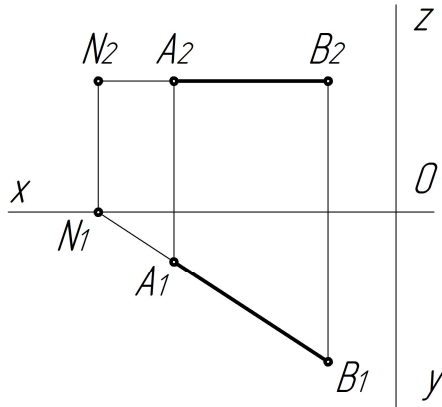


Рис. 3.16

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*      6. *VI*

23. Через які октанти проходить пряма, зображена на рисунку?

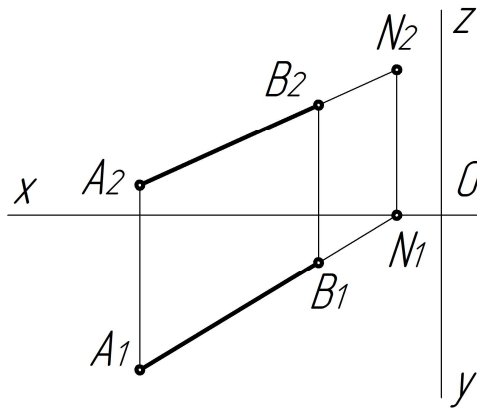


Рис. 3.17

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*      6. *VI*      7. *VII*

24. Яка проекція горизонтальної прямої паралельна осі *Ox*?

1. Профільна
2. Горизонтальна
3. Фронтальна
4. Жодна проекція не паралельна до осі *Ox*

25. Яка проекція фронтальної прямої паралельна осі *Ox*?

1. Профільна
2. Горизонтальна
3. Фронтальна
4. Жодна проекція не паралельна до осі *Ox*

26. Яка проекція профільної прямої паралельна осі  $Ox$ ?

1. Профільна
2. Горизонтальна
3. Фронтальна
4. Жодна проекція не паралельна до осі  $Ox$

27. На якому рисунку побудований горизонтальний слід прямої  $AB$ ?

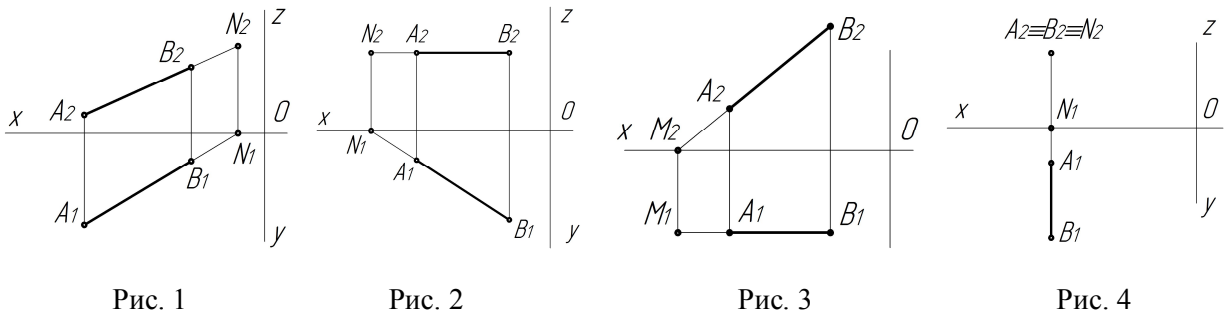


Рис. 3.18

28. Який слід має горизонтально-проектуюча пряма?

1. Горизонтальний
2. Фронтальний
3. Профільний
4. Горизонтальний і профільний

29. Який слід має фронтально-проектуюча пряма?

1. Горизонтальний
2. Фронтальний
3. Профільний
4. Горизонтальний і профільний

30. Які площини проекцій перетинає пряма загального положення?

1. Тільки  $\Pi_1$
2. Тільки  $\Pi_2$
3. Перетинає всі площини проекцій
4.  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$

31. На якому рисунку пряма нахилена під кутом  $45^\circ$  до фронтальної площини проекцій?

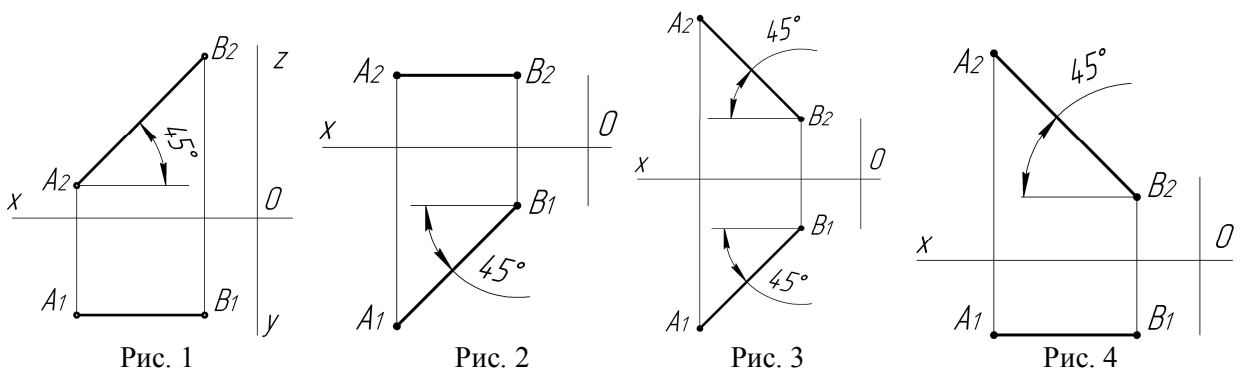


Рис. 3.19

32. На якому рисунку зображена профільно-проектуюча пряма?

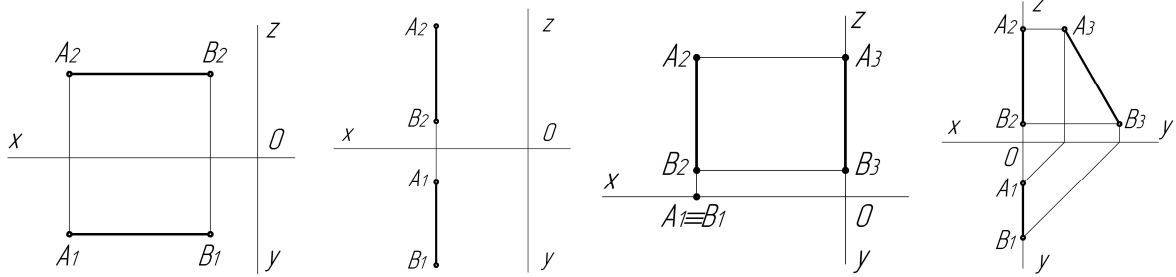


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3.20

33. Якого сліду не має горизонтальна пряма?

1. Горизонтального
2. Фронтального
3. Профільного

34. Якого сліду не має фронтальна пряма?

1. Горизонтального
2. Фронтального
3. Профільного

35. На якому рисунку зображена пряма загального положення?

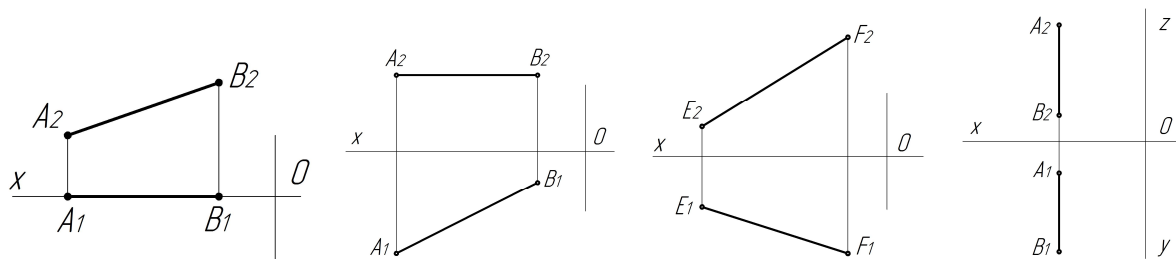


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3.21

36. На якому рисунку зображені мимобіжні прямі?

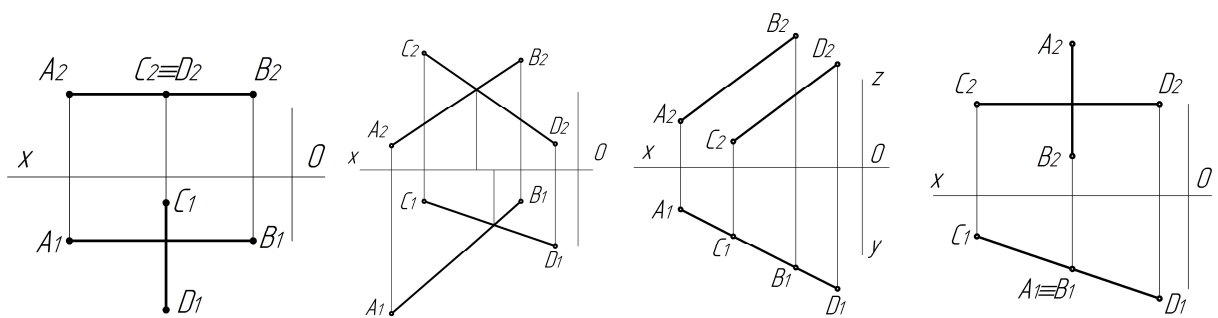


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3.22

37. На якому рисунку одна з проєкцій прямої дорівнює натуральній величині АВ?

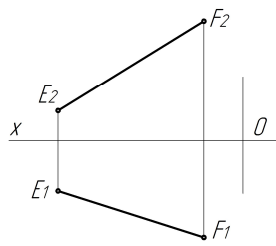


Рис. 1

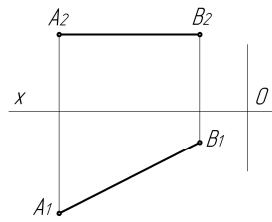


Рис. 2

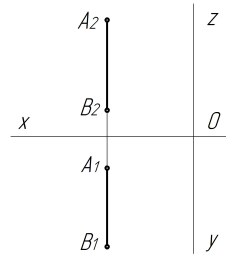


Рис. 3

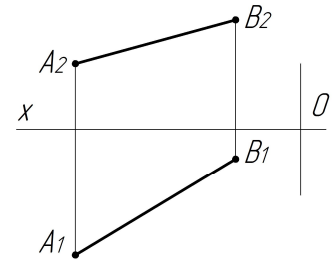


Рис. 4

Рис. 3.23

38. На якому рисунку зображені паралельні прямі?

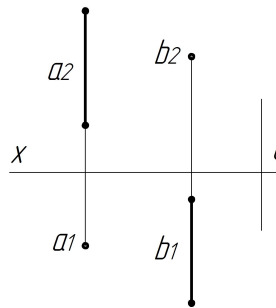


Рис. 1

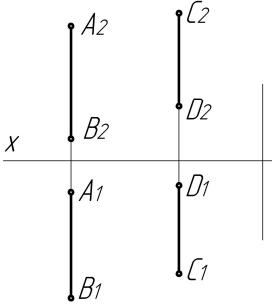


Рис. 2

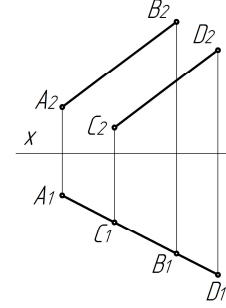


Рис. 3

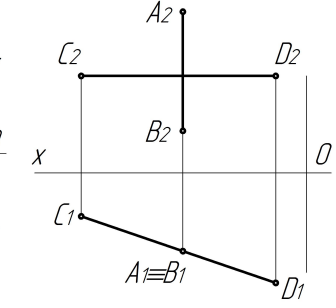


Рис. 4

Рис. 3.24

39. На якому рисунку зображена горизонтальна пряма?

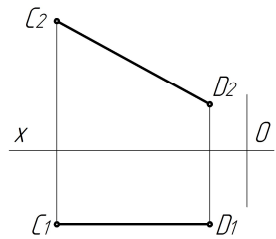


Рис. 1

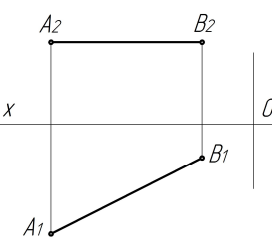


Рис. 2

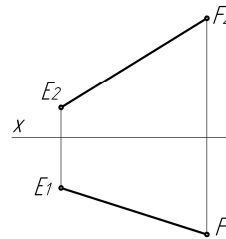


Рис. 3

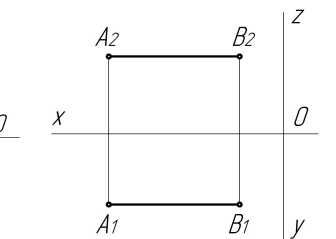


Рис. 4

Рис. 3.25

40. Визначити взаємне положення прямих зображених на рисунку.

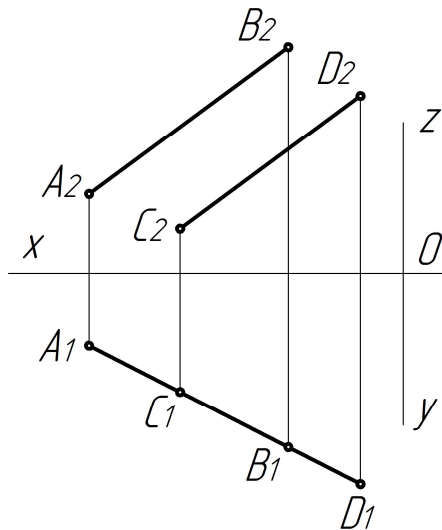


Рис. 3.26

1. Мимобіжні
2. Перпендикулярні
3. Паралельні
4. Перетинаються під довільним кутом

41. Визначити взаємне положення прямих зображених на рисунку.

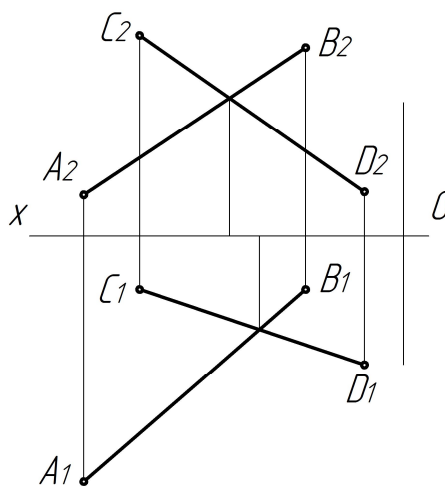


Рис.3.27

1. Мимобіжні
2. Перпендикулярні
3. Паралельні
4. Перетинаються під довільним кутом

42. Визначити взаємне положення прямих зображених на рисунку.

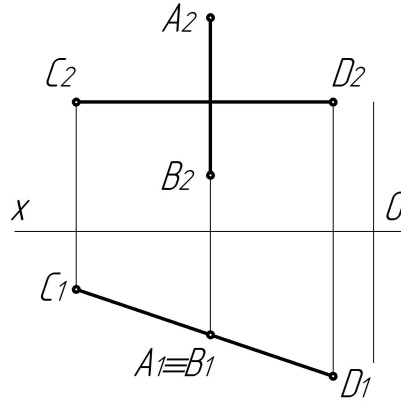


Рис. 3.28

1. Мимобіжні
2. Перпендикулярні
3. Паралельні
4. Перетинаються під довільним кутом

43. Визначити взаємне положення прямих зображених на рисунку.

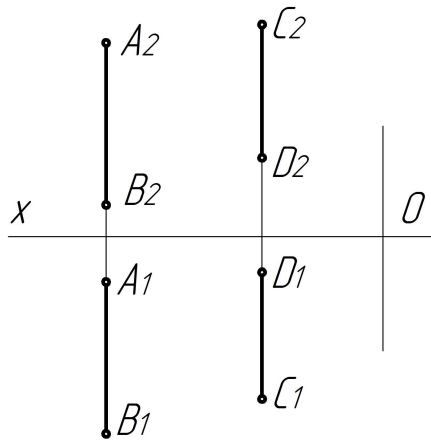


Рис. 3.29

1. Мимобіжні
2. Перпендикулярні
3. Паралельні
4. Перетинаються під довільним кутом

44. Яка пряма зображена на рисунку?

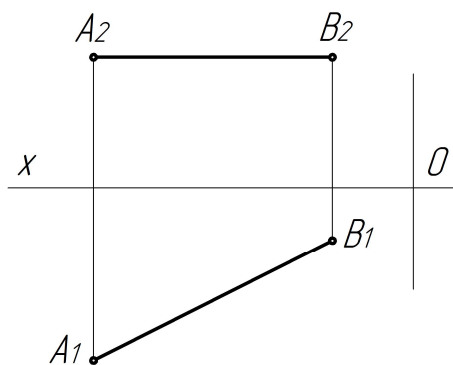


Рис. 3.30

1. Загального положення
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Горизонтальна

45. Яка пряма зображена на рисунку?

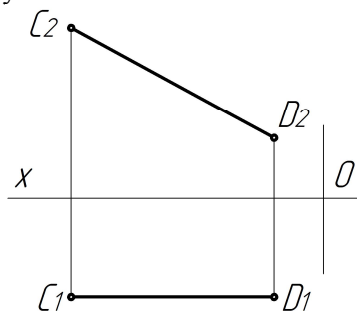


Рис. 3.31

1. Загального положення
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Горизонтальна

46. Яка пряма зображена на рисунку?

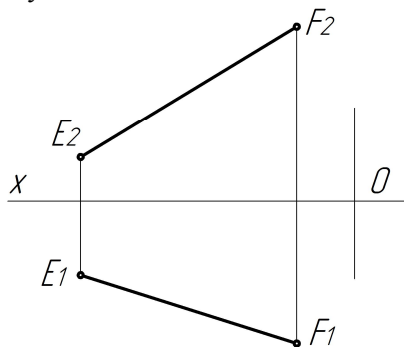


Рис. 3.32

1. Загального положення
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Горизонтальна

47. Яка пряма зображена на рисунку?

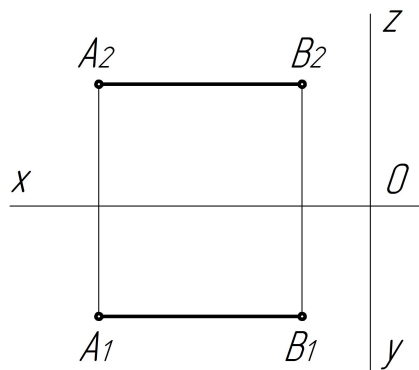


Рис. 3.33

1. Загального положення
2. Фронтально-проектуюча
3. Горизонтально-проектуюча
4. Профільно-проектуюча

48. Яка пряма зображена на рисунку?

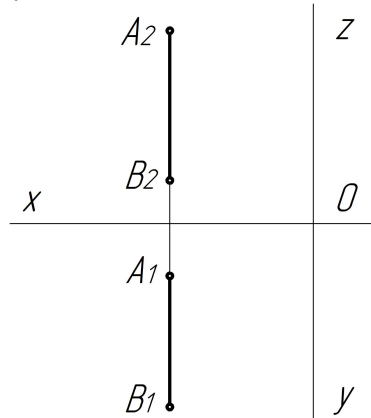


Рис. 3.34

1. Загального положення
2. Горизонтальна
3. Профільна
4. Фронтальна

49. Під яким кутом пряма  $AB$  нахилена до площини  $\Pi_2$ ?

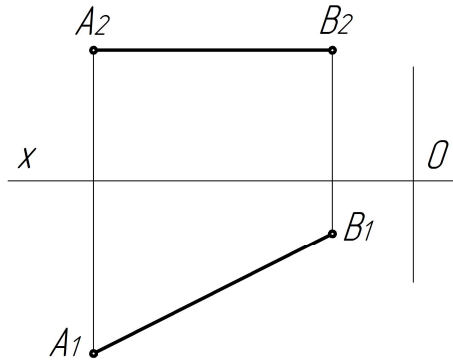


Рис. 3.35

1.  $45^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $30^\circ$       4.  $0^\circ$       5.  $60^\circ$

50. Під яким кутом пряма  $AB$  на рисунку 3.35 нахилена до площини  $\Pi_3$ ?

1.  $45^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $30^\circ$       4.  $0^\circ$       5.  $60^\circ$

51. Під яким кутом пряма  $AB$  на рисунку 3.35 нахилена до площини  $\Pi_1$ ?

1.  $45^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $30^\circ$       4.  $0^\circ$       5.  $60^\circ$

52. Під яким кутом пряма  $AB$  на рисунку 3.36 нахилена до площини  $\Pi_1$ ?

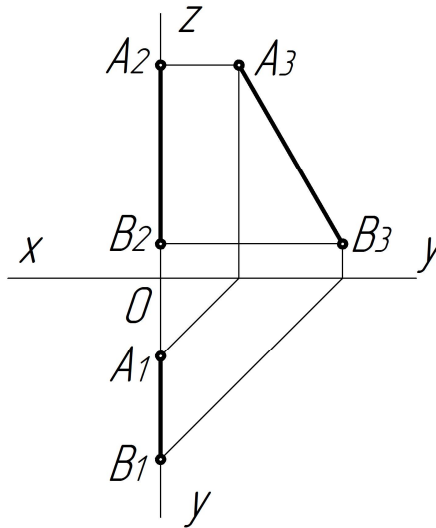


Рис. 3.36

1.  $45^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $30^\circ$       4.  $0^\circ$       5.  $60^\circ$

53. На яку площину проєкцій пряма, зображена на рисунку, проєктується в натуральну величину?

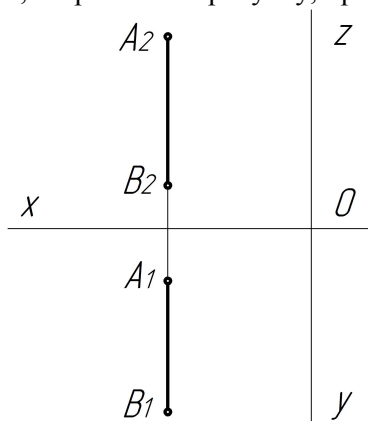


Рис. 3.37

1. горизонтальну
2. фронтальну
3. профільну
4. на жодну з площин проєкцій

54. На яку площину проєкцій пряма, зображена на рисунку, проєктується в натуральну величину?

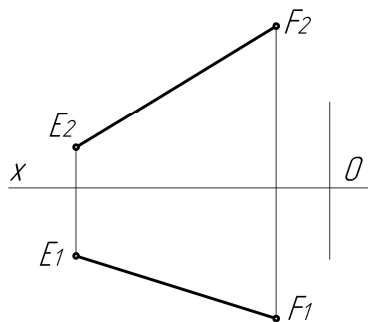


Рис. 3.38

1. горизонтальну
2. фронтальну
3. профільну
4. не проектується на жодну з площин проєкцій

55. На яку площину проєкцій пряма, зображена на рисунку, проектується в натуральну величину?

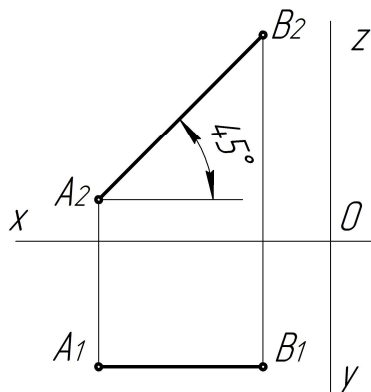


Рис. 3.39

1. горизонтальну
2. фронтальну
3. профільну
4. не проектується на жодну з площин проєкцій

56. На яку площину проєкцій пряма, зображена на рисунку, проектується в натуральну величину?

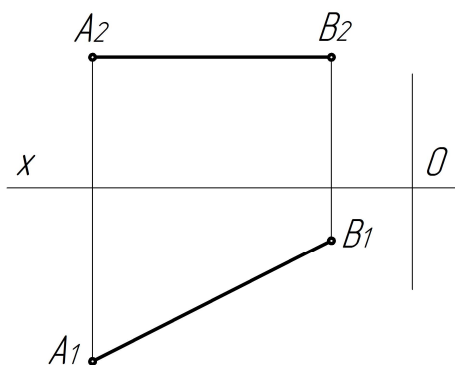


Рис. 3.40

1. горизонтальну
2. фронтальну
3. профільну
4. не проектується на жодну з площин проєкцій

57. Під яким кутом пряма  $AB$  нахилена до площини  $\Pi_3$ ?

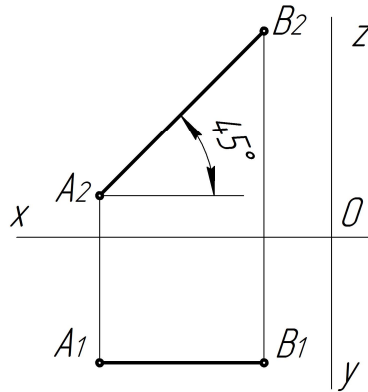


Рис. 3.41

1.  $60^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $0^\circ$       4.  $30^\circ$       5.  $45^\circ$

60. Під яким кутом пряма  $AB$  на рисунку 3.41 нахилена до площини  $\Pi_2$ ?

1.  $60^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $0^\circ$       4.  $30^\circ$       5.  $45^\circ$

61. Під яким кутом пряма  $AB$  на рисунку 3.41 нахилена до площини  $\Pi_1$ ?

1.  $60^\circ$       2.  $90^\circ$       3.  $0^\circ$       4.  $30^\circ$       5.  $45^\circ$

62. До яких площин проєкцій паралельна горизонтально-проєктуюча пряма?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Не паралельна до жодної площини проєкцій

63. До яких площин проєкцій паралельна фронтально-проєктуюча пряма?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Не паралельна до жодної площини проєкцій

64. До яких площин проєкцій паралельна профільно-проєктуюча пряма?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4. Не паралельна до жодної площини проєкцій

65. Яке взаємне положення в просторі прямих  $AB$  і  $CD$ ?

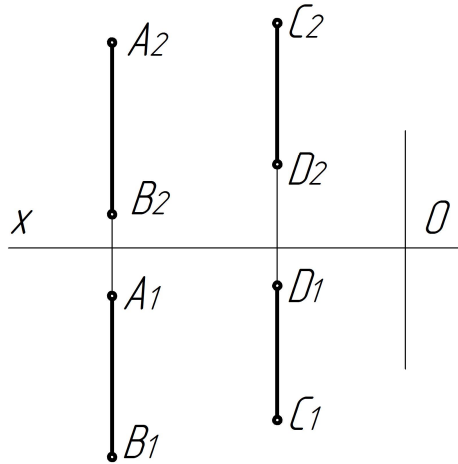


Рис. 3.42

1. Паралельні 2. Мимобіжні 3. Перетинаються 4. Перпендикулярні

66. Визначити взаємне положення прямих в просторі.

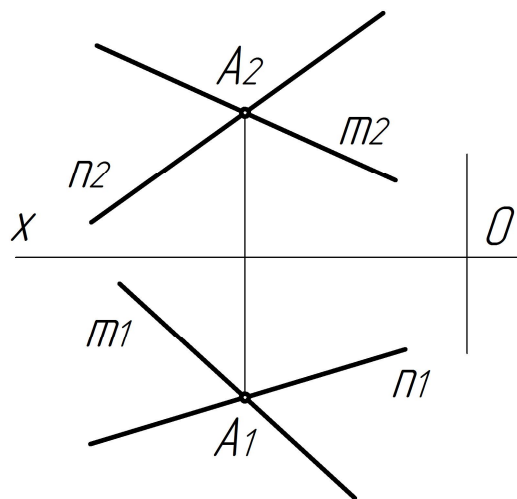


Рис. 3.43

1. Паралельні  
 2. Мимобіжні  
 3. Перетинаються під довільним кутом  
 4. Перпендикулярні

67. Визначити взаємне положення прямих в просторі.

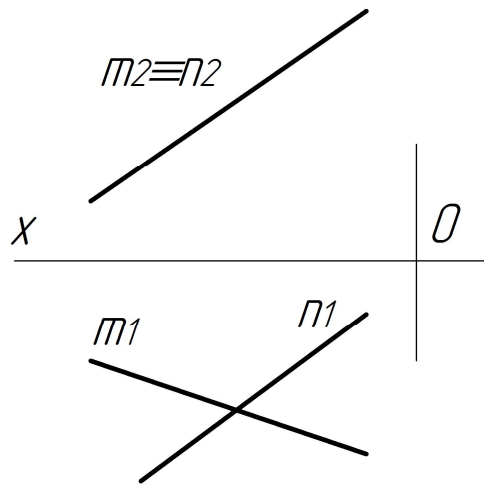


Рис. 3.44

1. Паралельні
2. Мимобіжні
3. Перетинаються під довільним кутом
4. Перпендикулярні

68. Визначити взаємне положення прямих в просторі.

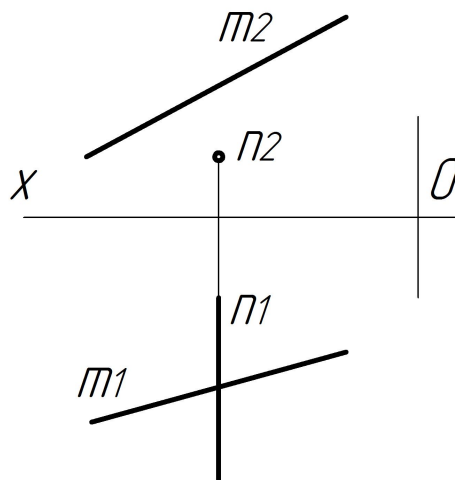


Рис. 3.45

1. Паралельні
2. Мимобіжні
3. Перетинаються під довільним кутом
4. Перпендикулярні

69. Визначити взаємне положення прямих в просторі.

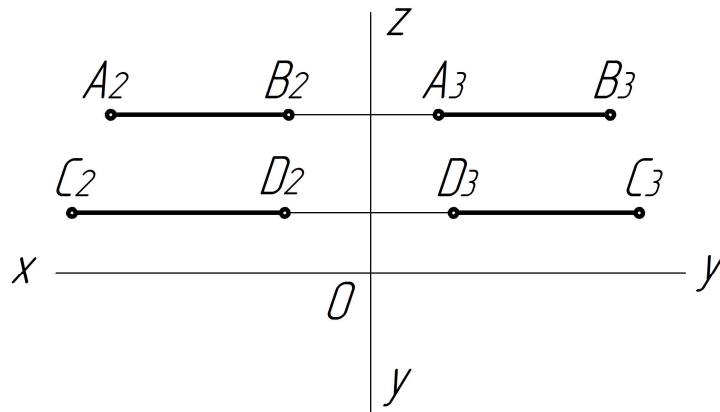


Рис. 3.46

1. Паралельні
2. Мимобіжні
3. Перетинаються під довільним кутом
4. Перпендикулярні

70. Які прямі зображені на рисунку 3.47 паралельні до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ ?

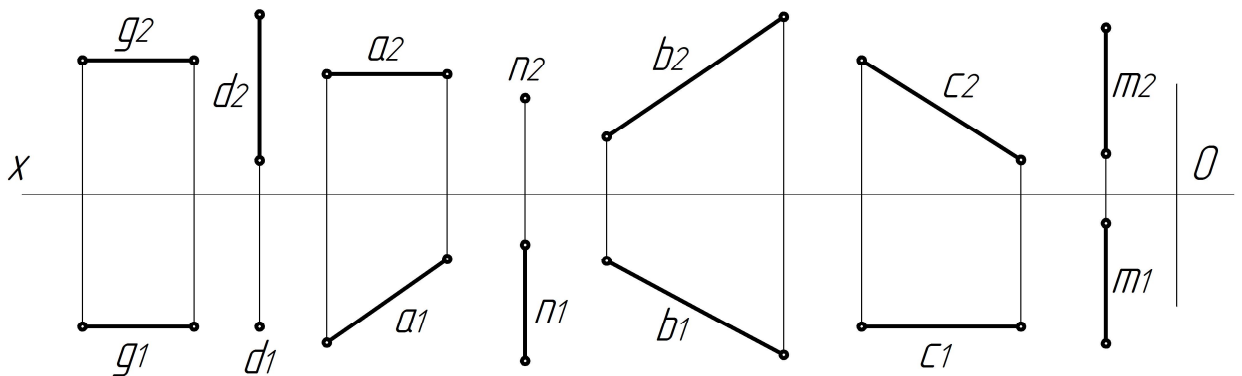


Рис. 3.47

1. *a*
2. *b*
3. *c*
4. *d*
5. *n*
6. *m*
7. *g*

71. Які прямі, що зображені на рисунку 3.47 паралельні до профільної площини проєкцій  $\Pi_3$ ?

1. *a*
2. *b*
3. *c*
4. *d*
5. *n*
6. *m*
7. *g*

72. Які прямі, що зображені на рисунку 3.47 паралельні до фронтальної площини проєкцій?

1. *a*
2. *b*
3. *c*
4. *d*
5. *n*
6. *m*
7. *g*

73. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 розташована перпендикулярно до профільної площини проєкцій  $\Pi_3$ ?

1. *a*
2. *b*
3. *c*
4. *d*
5. *n*
6. *m*
7. *g*

74. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 розташована перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ ?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

75. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 розташована перпендикулярно до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ ?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

76. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 є прямою загального положення?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

77. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 є горизонтальною прямою?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

78. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 є фронтальною прямою?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

79. Яка пряма, зображена на рисунку 3.47 є профільною прямою?

1. *a*    2. *b*    3. *c*    4. *d*    5. *n*    6. *m*    7. *g*

80. Визначити взаємне положення прямих.

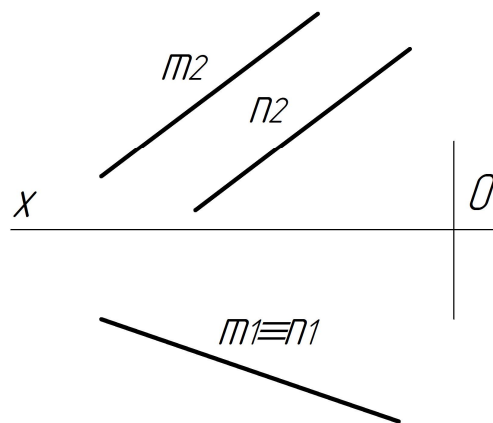


Рис. 3.48

1. Паралельні
2. Мимобіжні
3. Перетинаються під довільним кутом
4. Перпендикулярні

81. Визначити взаємне положення прямих.

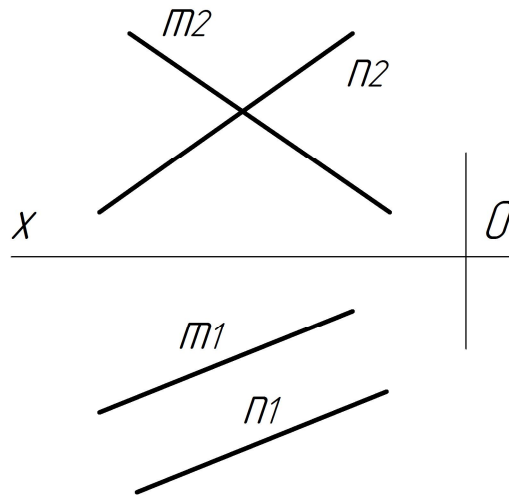


Рис. 3.49

1. Паралельні
2. Мимобіжні
3. Перетинаються під довільним кутом
4. Перпендикулярні

82. В якому відношенні точка  $C$  поділяє відрізок  $AB$ ?

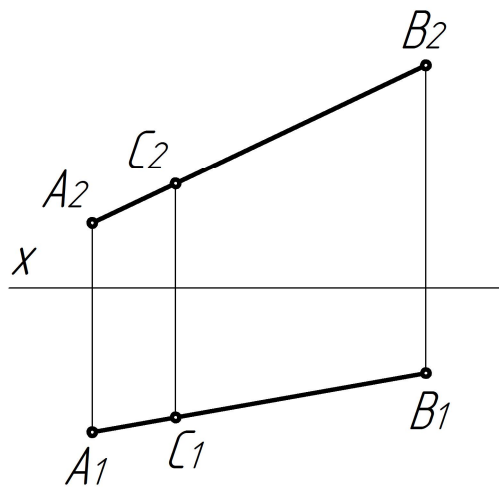


Рис. 3.50

1. 1:4
2. 1:3
3. 3:1
4. 4:1

83. Визначити взаємне положення прямих.

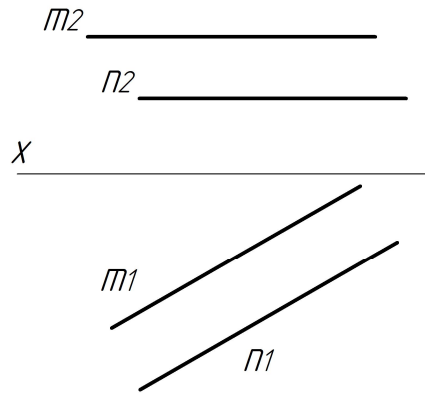


Рис. 3.51

1. Мимобіжні
2. Паралельні
3. Перетинаються
4. Перпендикулярні

84. На якому рисунку пряма  $a$  є горизонталлю площини?

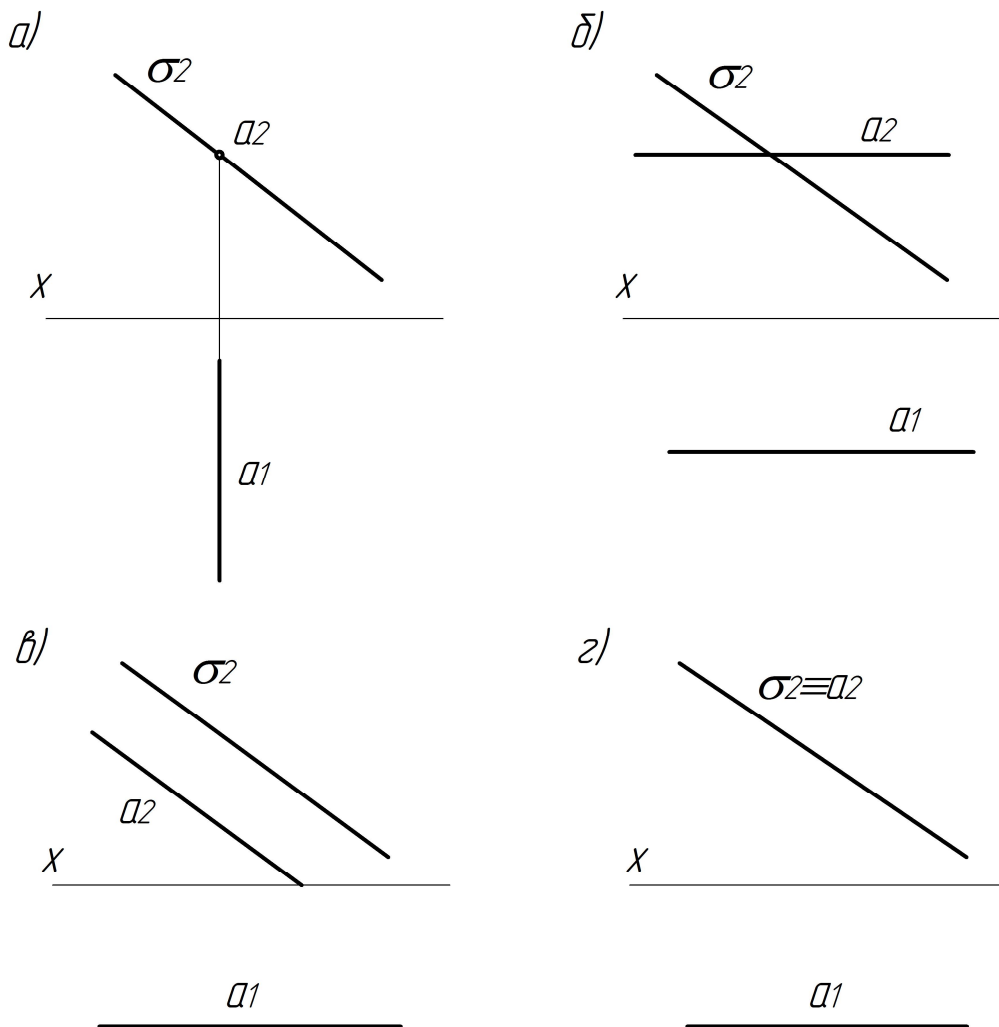


Рис. 3.52

## 4. ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ ПЛОЩИН

Проекцією площини, як нескінченної поверхні, на будь-яку площину проєкцій є вся площина проєкцій. На папері можна зобразити математичну (абстрактну) точку, як укол голки чи маленьке п'ятно від олівця. Модель прямої, як безперервної множини точок, зображується прямою проведеною олівцем під лінійку. Промодельовати площину, або її частину, як множену її точок неможливо. Тому на комплексному рисунку площину задають окремими її точками або прямими на підставі наступних аксіом елементарної геометрії:

1. *Три точки, що не лежать на одній прямій визначають площину.*
2. *Пряма належить площині, якщо вона має з площиною дві спільні точки.*
3. *Пряма належить площині, якщо має з площиною одну спільну точку і паралельна будь-якій прямій площини.*
4. *Точка належить площині, якщо вона лежить на будь-якій прямій площини.*

### 4.1 ЗАВДАННЯ ПЛОЩИНИ НА КОМПЛЕКСНОМУ РИСУНКУ

На рисунку 4.1а задано три точки  $A (A_1, A_2)$ ,  $B (B_1, B_2)$ ,  $C (C_1, C_2)$ . Згідно з аксіомою 1 вони визначають площину довільно розташовану у просторі. Площини будемо позначати малими літерами грецького алфавіту з зазначенням в дужках способу задавання площини. То ж площину  $\alpha$  задано трьома точками  $A, B, C$ , будемо позначати  $\alpha (A, B, C)$ .

На рисунку 4.1б задано ту ж площину  $\alpha$ . Точки  $A$  та  $B$  з'єднано прямою  $b$ . Пряма  $b$  належить площині  $\alpha$  (аксіома 2). На цьому рисунку площина  $\alpha$  задана іншим способом, а саме, точкою  $C$  і прямою  $b - \alpha (C, b)$ .

На рисунку 4.1в через точку  $C$  проведено пряму  $d$  паралельно прямій  $b$ . Пряма  $d$  належить площині  $\alpha$  (аксіома 3). Маємо ще один спосіб задавання тієї ж площини  $\alpha$  паралельними прямими  $b$  і  $d - \alpha (b // d)$ .

На рисунку 4.1г точки  $B$  і  $C$  з'єднано прямою  $a$ , яка теж належить площині  $\alpha$  (аксіома 2). Маємо спосіб задавання тієї ж площини  $\alpha -$  двома прямими, що перетинаються,  $\alpha (a \cap b)$ .

Насамкінець три задані точки  $A, B, C$  з'єднано попарно трьома відрізками (рис. 4.1д), що утворюють плоску фігуру – трикутник  $ABC$ . Маємо завдання тієї ж площини  $\alpha$  плоскою фігурою –  $\alpha (ABC)$ .

**Висновок:** якщо площину задано одним із наведених способів, то завжди можемо перейти до іншого способу, зручного для розв'язання тієї чи іншої задачі. Нижче це буде продемонстровано при розв'язанні прикладів і задач.

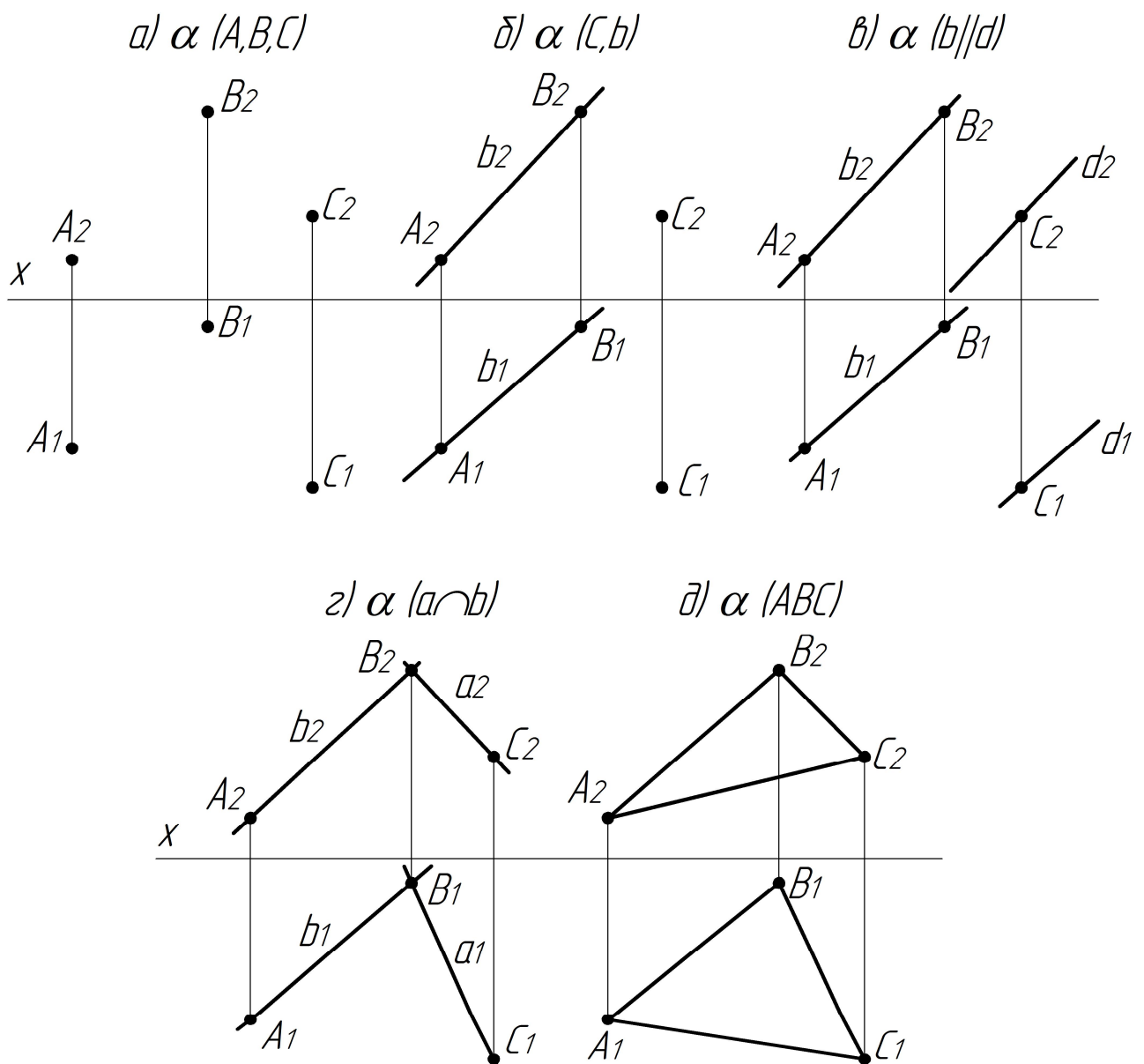


Рис. 4.1

## 4.2 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ПЛОЩИНУ

Ми розглянули способи задавання площини на комплексному рисунку. Що означає вираз: задана площина? Цей вираз означає, що на комплексному рисунку задано мінімальну кількість точок або прямих, які визначають положення площини у просторі і дозволяють відповісти на запитання: чи лежить будь-яка точка простору на цій площині, чи не лежить? Крім того, якщо площина задана, то можна побудувати будь-яку кількість точок і прямих, що належать площині, необхідних для розв'язання конкретної задачі. Наступні елементарні задачі, які, образно кажучи, є «таблицею множення» нарисної геометрії дозволяють розв'язувати поставлені вище питання.

**Задача 4.1.** За одною проекцією прямої  $d$ , що лежить на даній площині  $\alpha$  ( $a, A$ ), побудувати другу її проекцію (рис. 4.2).

Для розв'язання задачі треба побудувати дві точки спільні для прямої  $d$  і площини  $\alpha$  ( $a, A$ ). Одна з них  $T$  ( $T_1, T_2$ ) знаходиться як точка перетину прямої  $d$  з прямою  $a$  ( $a_1, a_2$ ).

$$d_1 \cap a_1 = T_1. \text{ Л.з. } T \cap a_2 = T_2.$$

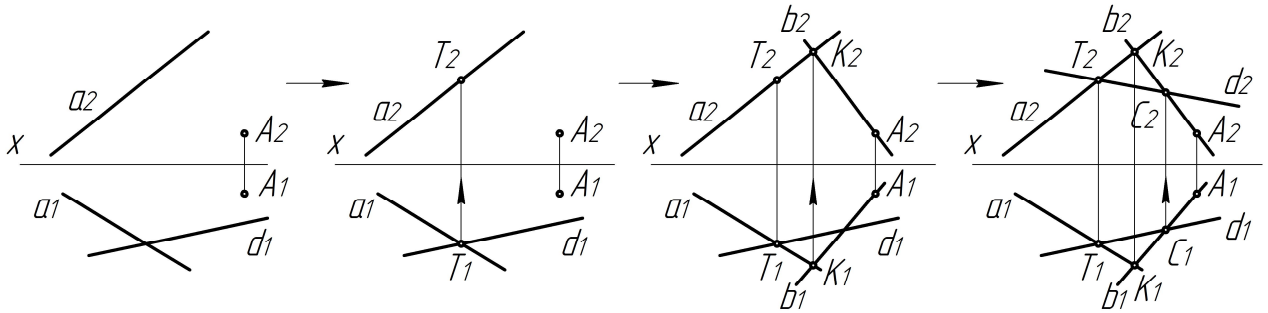


Рис. 4.2

Для побудови другої точки перейдемо до іншого способу задавання площини  $\alpha$ , наприклад двома прямими, що перетинаються. Проведемо через точку  $A$  довільну пряму  $b$ , яка перетинає пряму  $a$  в точці  $K$ .

$$b_1 \cap a_1 = K_1. \text{ Л.з. } K \cap a_2 = K_2. A_2 \cup K_2 = b_2$$

$$d_1 \cap b_1 = S_1. \text{ Л.з. } S \cap b_2 = S_2.$$

Пряма  $S_2 T_2$  визначає другу, фронтальну проекцію  $d_2$  прямої  $d$ .

**Задача 4.2.** На даній площині  $\beta$  ( $a//b$ ) побудувати довільну горизонталь  $h$  (рис. 4.3).

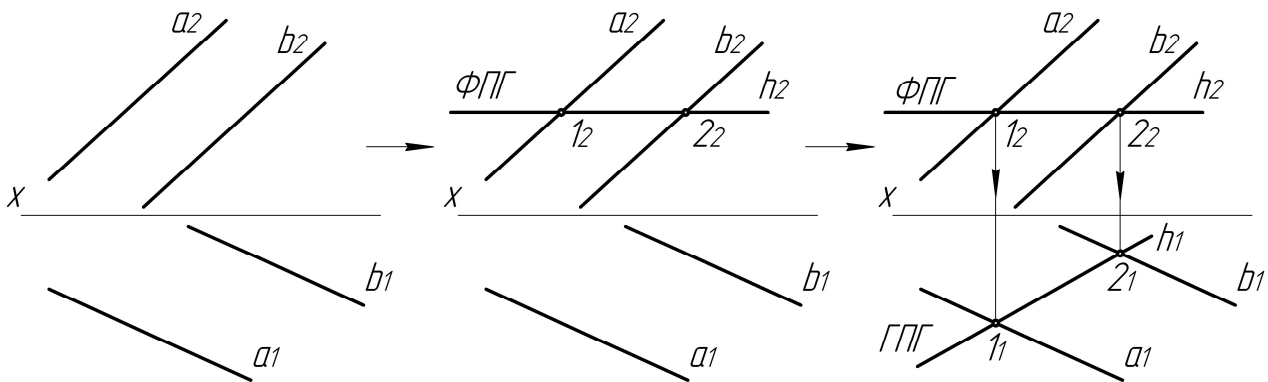


Рис. 4.3

Горизонталлю площини називається пряма що лежить на даній площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій. Оскільки ознакою горизонтальної прямої є те, що її фронтальна проекція (ФПГ) паралельна до осі  $x$ , то починати розв'язувати задачу треба з проведення ФПГ  $h_2//x$ . А далі треба розв'язати задачу 1: за фронтальною проекцією  $h_2$  горизонталі побудувати її горизонтальну проекцію (ГПГ)  $h_1$ .

**Задача 4.3.** На даній площині  $\beta$  ( $ABC$ ) побудувати довільну фронталь  $f$  (рис. 4.4).

Фронталью площини називається пряма, що лежить на даній площині і паралельна фронтальній площині проєкцій. Її горизонтальна проєкція (ГПФ) паралельна осі  $x$ , бо це є ознакою прямої паралельної до фронтальної площини проєкцій.

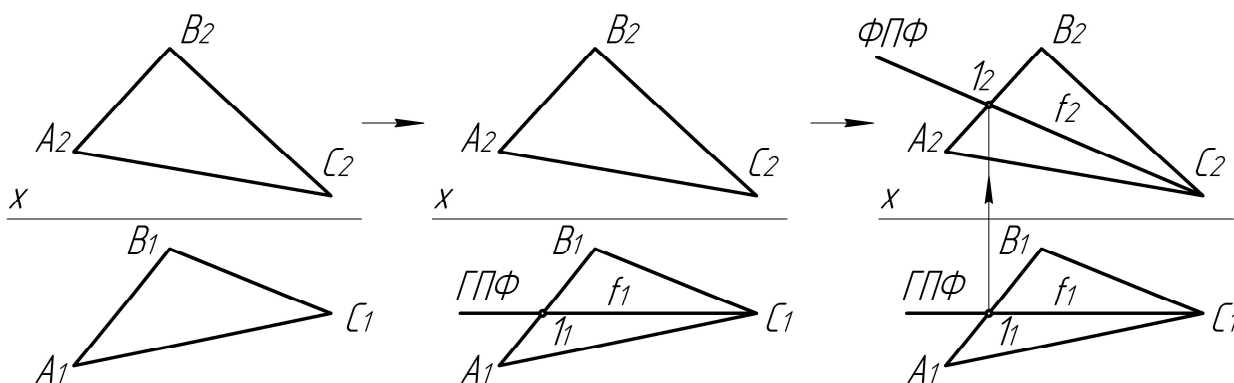


Рис. 4.4

Проведемо фронталь, наприклад, через вершину  $C$  трикутника  $ABC$ . Її горизонтальна проєкція – ГПФ  $f_1 // x$  і проходить через проєкцію  $C_1$  точки  $C$ . Тепер розв'язуємо задачу 1: за горизонтальною проєкцією ГПФ  $f_1$  будемо її фронтальну проєкцію ФПФ  $f_2$ .

Після розв'язання задач 4.1, 4.2, 4.3 звернемо увагу на два окремих випадки завдання площини доцільних і ефективних при розв'язанні деяких задач. На рисунку 4.5 площина  $\sigma$  задана двома прямими рівня – горизонталлю  $h$  ( $h_1, h_2$ ) та фронталью  $f$  ( $f_1, f_2$ ), що перетинаються в точці  $K$  ( $K_1, K_2$ ),  $\sigma$  ( $h \cap f$ ).

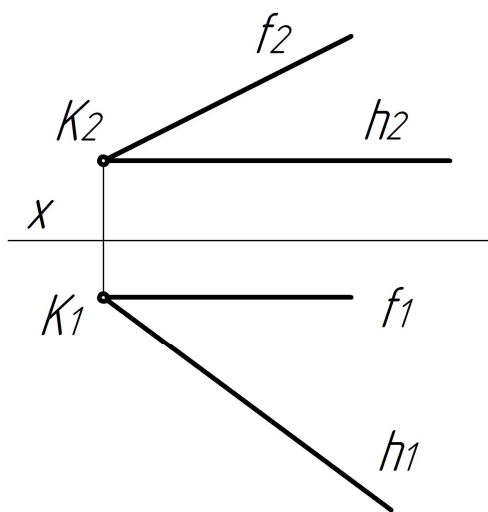


Рис. 4.5

Такий спосіб завдання площини дуже ефективний і економічний з точки зору зменшення ліній побудов при розгляді взаємно перпендикулярних прямих і площин, що буде продемонстровано нижче.

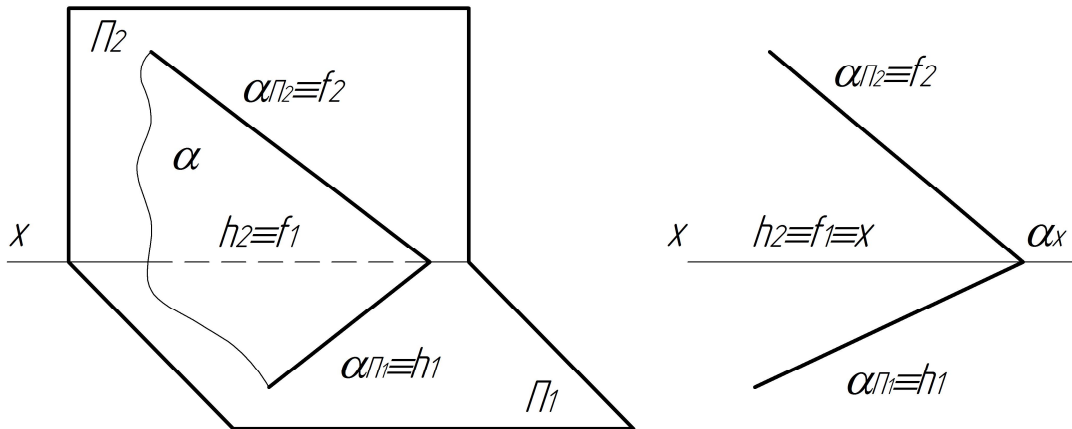


Рис. 4.6

На рисунку 4.6 площину  $\alpha$  задано слідами  $\alpha_{\Pi 1}$  і  $\alpha_{\Pi 2}$ , зліва – на наочному зображенні, справа – на комплексному рисунку.

Слідами площини називаються прямі  $\alpha_{\Pi 1}$  і  $\alpha_{\Pi 2}$  перетину площини з площинами проєкцій. Відзначимо, що завдання площин слідами не є принципово новим способом завдання площини. Площина задається двома прямими, що перетинаються в точці  $\alpha_x$  сходу слідів площини – горизонталлю  $h$  ( $h_1, h_2$ ) та фронталлю  $f$  ( $f_1, f_2$ ), які є прямими нульового рівня, тобто лежать на горизонтальній та фронтальній площинах проєкцій відповідно.

На комплексному рисунку, як правило, позначають тільки сліди  $\alpha_{\Pi 1}$  та  $\alpha_{\Pi 2}$  площини, але треба добре пам'ятати, що горизонтальна проєкція фронтального сліду та фронтальна проєкція горизонтального сліду співпадають з віссю  $x$ . Якщо така ж площина задається горизонталлю  $h$  ( $h_1, h_2$ ) та фронталлю  $f$  ( $f_1, f_2$ ) то позначають тільки її проєкції без символів позначення слідів площини. Символічно це позначається так:  $\alpha (h \cap f)$ , при чому в цьому випадку  $h_2 \equiv f_1 \equiv x$ .

**Задача 4.4.** За одною проєкцією точки, що належить даній площині побудувати другу її проєкцію.

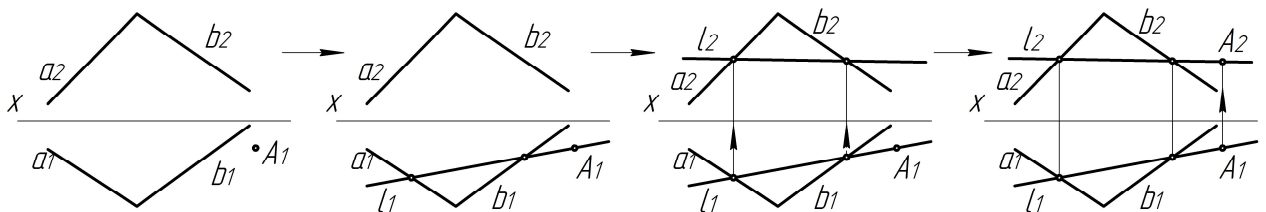


Рис. 4.7

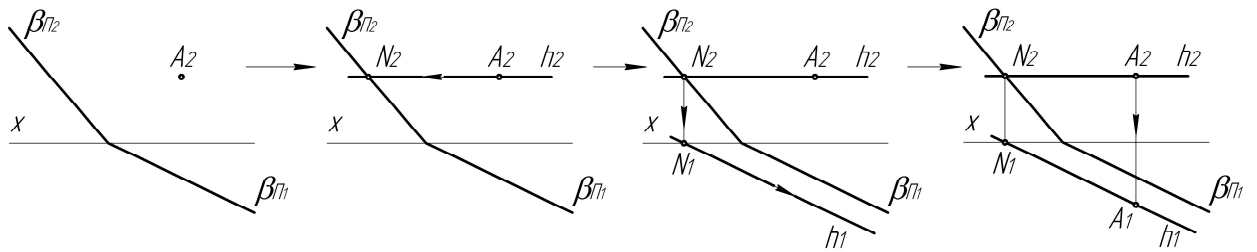


Рис. 4.8

На рисунку 4.7 задано площину  $\beta$  ( $a \cap b$ ) і горизонтальну проекцію  $A_1$  точки  $A$ , яка за умовою лежить на площині  $\beta$  у просторі. Треба побудувати фронтальну  $A_2$  проекцію цієї точки. Через проекцію  $A_1$  проводимо, довільно, горизонтальну проекцію  $l_1$  допоміжної прямої  $l$ . Будуємо фронтальну проекцію  $l_2$  цієї прямої за умови, що пряма  $l$  належить площині  $\beta$  (задача 1). Фронтальну проекцію  $A_2$  точки  $A$  знаходимо на  $l_2$ :

*Л.з.*  $A \cap l_1 = A_1$

Точка  $A$  ( $A_1, A_2$ ) лежить на площині  $\beta$ , бо вона лежить на прямій  $l$  ( $l_1, l_2$ ) площини  $\beta$  (аксіома 4).

На рисунку 4.8 площина  $\beta$  задана слідами  $\beta$  ( $\beta_{\pi 1}, \beta_{\pi 2}$ ). Задана також фронтальна проекція  $A_2$  точки  $A$ , яка лежить у просторі на площині  $\beta$ . В цьому випадку доцільно скористатися, як допоміжною прямою горизонталлю площини.

*Л.з.*  $A_2 \in h_2 // x, h_2 \cap \beta_{\pi 2} = N_2, \text{ Л.з. } N \cap x = N_1, N_1 \in h_1 // \beta_{\pi 1}, \text{ Л.з. } A \cap h_1 = A_1$ .

Задача 4.4 застосовується для побудови проєкцій плоских фігур. Наприклад на рисунку 4.9 задано фронтальну проекцію  $A_2B_2C_2D_2$  плоского чотирикутника  $ABCD$  і горизонтальні проєкції  $A_1B_1D_1$  трьох його вершин  $A, B, D$ . Треба побудувати горизонтальну проекцію чотирикутника. Оскільки чотирикутник плоский, тобто всі його вершини лежать в одній площині, яка визначається трьома точками  $A, B, D$ , або трикутником  $ABD$  ( $A_1B_1D_1, A_2B_2D_2$ ), то задача зводиться до побудови горизонтальної проєкції  $C_1$  вершини  $C$  чотирикутника за відомою проєкцією  $C_2$  цієї точки, тобто до розв'язання задачі 4.4; за даною фронтальною проєкцією  $C_2$  точки  $C$ , що лежить в площині трикутника  $ABD$  побудувати її горизонтальну проєкцію  $C_1$ .

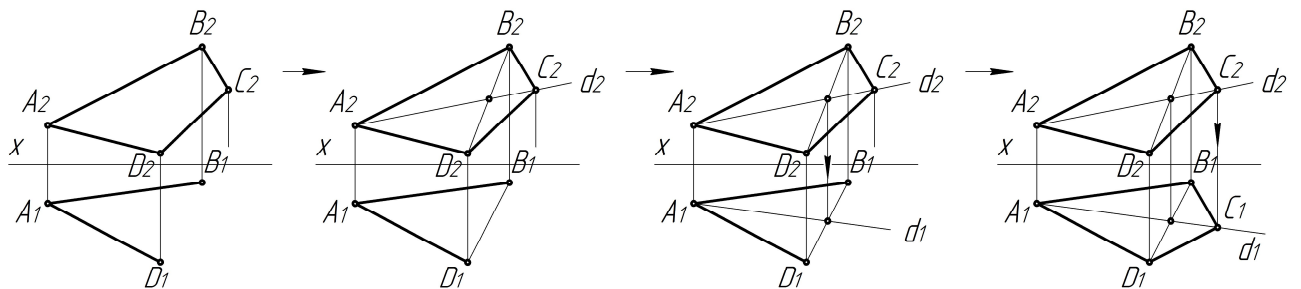


Рис. 4.9

**Задача 4.5.** Визначити взаємне положення точки  $E (E_1, E_2)$  і площини  $\alpha (A, B, C)$ . Точка може належати площині, чи не належати. Щоб з'ясувати взаємне положення точки  $E$  і площини  $\alpha (A, B, C)$ , заданих на рисунку 4.10, треба на площині провести пряму, одна проекція якої проходить через однойменну проекцію точки, наприклад  $A_2E_2=a_2$ , чи  $A_1E_1=b_1$ . Будуємо другі проекції прямих  $a$  і  $b$  за умови, що ці прямі належать площині  $\alpha$ . Жодна з цих других проекцій  $a_1$  та  $b_2$  не проходить через однойменні проекції точки  $E$ ,  $a_1 \not\supset E_1, b_2 \not\supset E_2$ .

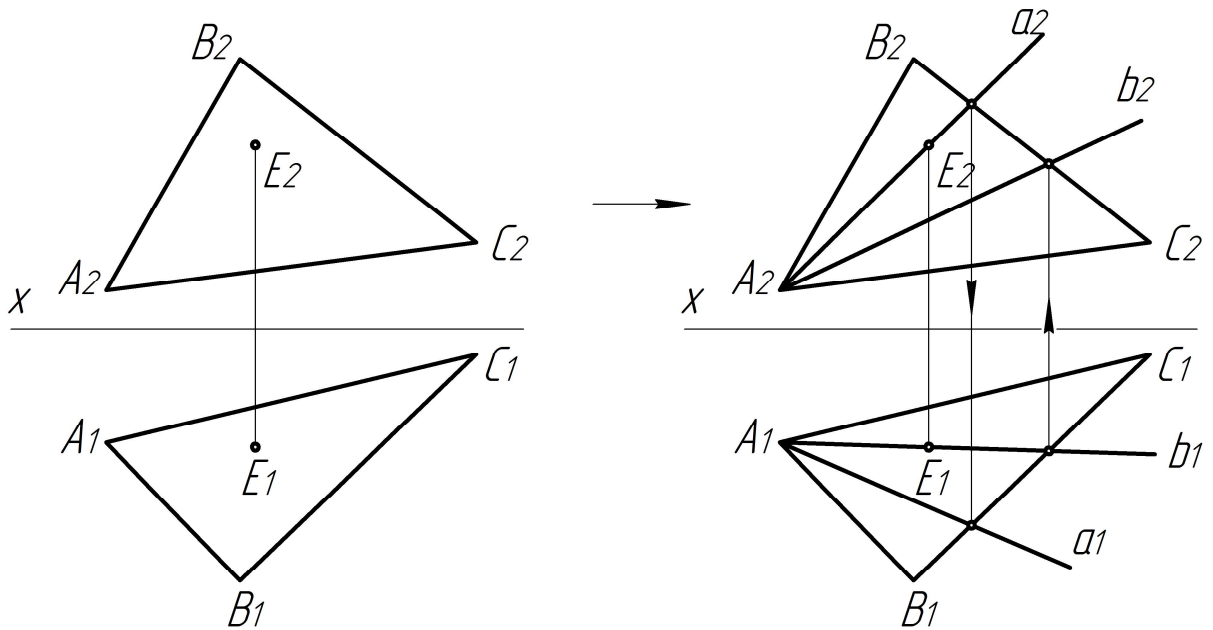


Рис. 4.10

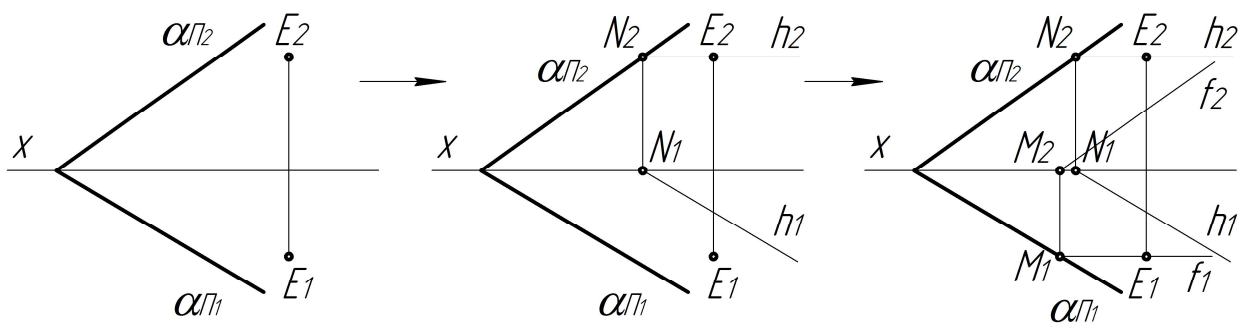


Рис. 4.11

Значить точка  $E$  не лежить на площині  $\alpha$ . Розглядаючи взаємне розташування точки  $E$  і прямих  $a$  і  $b$  доходимо висновку що точка  $E$  розташована над площиною  $\alpha$ , бо проекція  $E_2$  знаходиться вище проекції  $b_2$  і за площиною  $\alpha$ , бо  $E_1$  розташована за  $a_1$ .

Для розв'язання цієї задачі, у випадку коли площина задана слідами (рис. 4.11), доцільно скористатися горизонталлю  $h (h_1, h_2)$ ,  $h_2 \supset E_2$  і фронталлю  $f (f_1, f_2)$ ,  $f_1 \supset E_1$ . Другі проекції цих прямих не проходять через

однойменні проєкції точки  $E$ . Точка  $E$  не лежить на площині  $\alpha$ , а знаходиться над і попереду площини, що впливає з аналізу розташування точки  $E$  відносно горизонталі  $h$  та фронталі  $f$ .

**Задача 4.6.** Визначити взаємне розташування прямої  $d$  і площини  $\alpha$  ( $a//b$ ) (рис. 4.12).

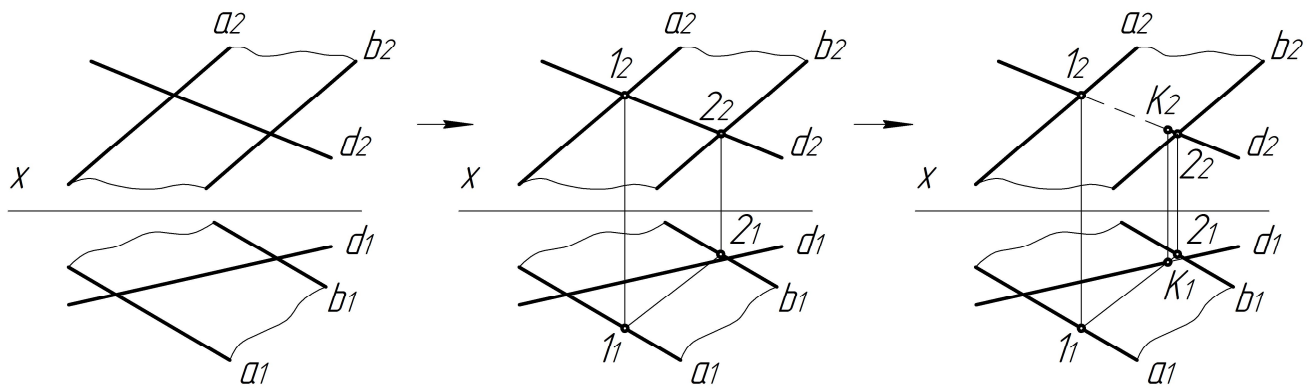


Рис. 4.12

Приймаючи фронтальну проєкцію  $d_2$  прямої  $d$  за проєкцію прямої, що лежить на даній площині  $\alpha$ , будемо її горизонтальну проєкцію  $1_1 2_1$  (задача 4.1). Проєкція  $1_1 2_1$  не співпадає з  $d_1$ , а значить пряма  $d$  не лежить на площині  $\alpha$ .  $1_2 \cap d = K$ ,  $1_1 2_1 \cap d_1 = K_1$ , Л.з.  $K \cap d_2 = K_2$ .

Точка  $K$  спільна для площини  $\alpha$  і прямої  $d$ , тобто є точкою перетину прямої  $d$  з площиною  $\alpha$  ( $a//b$ ).

Якщо частину площини (відсік) між паралельними прямими  $a//b$  вважати непрозорою, то фронтальна проєкція відрізка  $1_2 2_2$  прямої  $d$  буде невидима, бо точка  $1 \in a$  знаходиться попереду прямої  $d$  (проєкція  $1_1$  далі від осі  $x$ , ніж відповідна проєкція точки на прямій  $d$ ). Аналогічно визначаємо видимість горизонтальної проєкції прямої  $d$ .

Дотепер ми розглядали площини довільно розташовані у просторі відносно площин проєкцій. Такі площини називаються площинами загального положення. Кожна площина загального положення нахилена до кожної площини проєкцій під довільними кутами. Тепер розглянемо комплексні рисунки площин **перпендикулярних і паралельних окремим площинам проєкцій**.

### 4.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ПЛОЩИН ЗА ЇХ РОЗТАШУВАННЯМ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

**Проектуючими площинами** називаються площини перпендикулярні тільки до одної площини проєкцій. До двох інших площин проєкцій вони нахилені під довільними кутами, сума яких дорівнює  $90^\circ$ .

**Площинами рівня** називаються площини паралельні будь-якій площині проєкцій. До кожної з інших двох площин проєкцій площини рівня перпендикулярні, тобто площини рівня є подвійно проектуючі ми.

Проекцією проектуючої площини, на площину проєкцій до якої вона перпендикулярна, є пряма лінія – **вироджена проєкція**. Проекція будь-якої точки, прямої чи фігури, що лежить в проектуючій площині, співпадає з виродженою проєкцією цієї площини.

У площини рівня дві проєкції є вироджені. Вони паралельні осям проєкцій, що лежать на площині проєкцій, до якої паралельна площина рівня. Будь-яка фігура, що лежить в площині рівня, проектується в натуральну величину на площину проєкцій, до якої паралельна площина рівня.

На комплексному рисунку проектуючі площини та площини рівня найчастіше задаються одною своєю виродженою проєкцією, яку називають також слідом-проєкцією.

В таблиці 3 наведено назви, наочні зображення, комплексні рисунки та ознаки і властивості проектуючих площин і площин рівня.

Таблиця 3.

Назва площини	Наочне зображення		Комплексний рисунок		Ознаки та властивості на комплексному рисунку
	Слідами	Плоскою фігурою	Слідами	Плоскою фігурою	
1	<b>ПРОЕКТУЮЧІ ПЛОЩИНИ</b>				
2					7
Горизонтально-проектуюча $\perp \Pi_1$					1. $\alpha_1$ – вироджена проекція. $\alpha_{\Pi 2} \equiv \alpha_1$ – слід-проекція. 2. $\alpha_{\Pi 1} \perp x, \alpha_{\Pi 2} \perp y$ – сліди площини $\alpha$ . 3. $\angle \beta^\circ$ – нахил площини $\alpha$ до $\Pi_2$ у просторі. $\angle \gamma^\circ$ – нахил площини $\alpha$ до $\Pi_3$ у просторі. $\angle \beta^\circ + \angle \gamma^\circ = 90^\circ$ 4. $ABC \subset \alpha, A_1 B_1 C_1 \equiv \alpha_1$
Фронтально-проектуюча $\perp \Pi_2$					1. $\beta_2$ – вироджена проекція. $\beta_{\Pi 2} \equiv \beta_2$ – слід-проекція. 2. $\beta_{\Pi 1} \perp x, \beta_{\Pi 2} \perp z$ – сліди площини $\beta$ . 3. $\angle \alpha^\circ$ – нахил площини $\beta$ до $\Pi_1$ у просторі. $\angle \gamma^\circ$ – нахил площини $\beta$ до $\Pi_3$ у просторі. $\angle \alpha^\circ + \angle \gamma^\circ = 90^\circ$ 4. $a \cap b \subset \beta, a_2 \equiv b_2 \equiv \beta_1$
Профільно-проектуюча $\perp \Pi_3$					1. $\gamma_3$ – вироджена проекція. $\gamma_{\Pi 3} \equiv \gamma_3$ – слід-проекція. 2. $\gamma_{\Pi 1} \parallel x, \gamma_{\Pi 2} \parallel y$ – сліди площини $\gamma$ . 3. $\angle \alpha^\circ$ – нахил площини $\gamma$ до $\Pi_1$ у просторі. $\angle \beta^\circ$ – нахил площини $\gamma$ до $\Pi_2$ у просторі. 4. $a \parallel b \subset \gamma, a_3 \equiv b_3 \equiv \gamma_3$

1	2	3	4	5	6	7
ПЛОЩИН	Горизонтальна $\Pi_2 \perp \Pi_1; \Pi_3$ $\Pi_1 \perp \Pi_2; \Pi_3$					<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\gamma_2 \parallel x, \gamma_3 \parallel y</math> – вироджені проєкції площини <math>\gamma \parallel \Pi_1</math>.</li> <li><math>ABC \subset \gamma, A_1B_1C_1 \equiv \gamma_2</math></li> <li><math>A_1B_1C_1 = ABC</math> – натуральна величина трикутника <math>ABC</math>.</li> </ol>
ИНИ	Фронтальна $\Pi_2 \perp \Pi_1; \Pi_3$ $\Pi_1 \perp \Pi_2; \Pi_3$					<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\varphi_1 \parallel x, \varphi_3 \parallel z</math> – вироджені проєкції площини <math>\varphi \parallel \Pi_2</math>.</li> <li><math>a \cap b \subset \varphi, a_1 \equiv b_1 \equiv \varphi_1</math></li> <li><math>a_2 \wedge b_2 = a \wedge b</math> – натуральна величина кута між <math>a</math> та <math>b</math>.</li> </ol>
Я	Профільна $\Pi_3 \perp \Pi_1; \Pi_2$ $\Pi_1 \perp \Pi_2; \Pi_3$					<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\tau_1 \parallel y, \tau_2 \parallel z</math> – вироджені проєкції площини <math>\tau \parallel \Pi_3</math>.</li> <li><math>c \parallel d \subset \tau, c_1 \equiv d_1 \equiv \tau_1, \tau_1 \equiv \tau_2 \perp x, c_2 \equiv d_2 \equiv \tau_2</math></li> <li>Відстань між <math>c_3 d_3</math> дорівнює <math>H</math> в. відстані між <math>c</math> і <math>d</math>.</li> </ol>

## 4.4 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма може лежати на площині, бути їй паралельною, або перетинати площину, в окремому випадку під прямим кутом.

Питання взаємної належності прямої і площини розглянуто в розділі 4.2.

З елементарної геометрії (стереометрії) відомо: пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій площини.

На комплексному рисунку задано площину  $\alpha$  ( $ABC$ ) та пряму  $d$  ( $d_1, d_2$ ) (рис. 4.13). Як визначити відносне положення площини  $\alpha$  та прямої  $d$  у просторі?

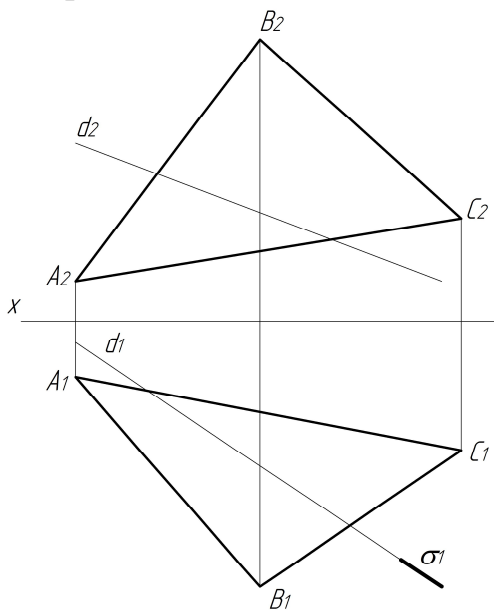


Рис. 4.13

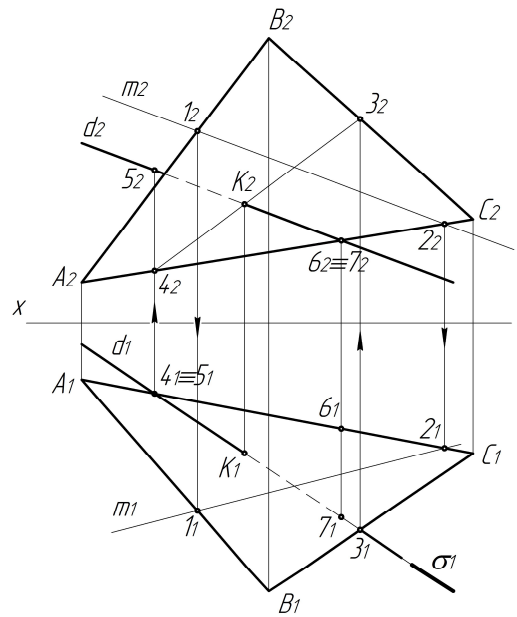


Рис. 4.14

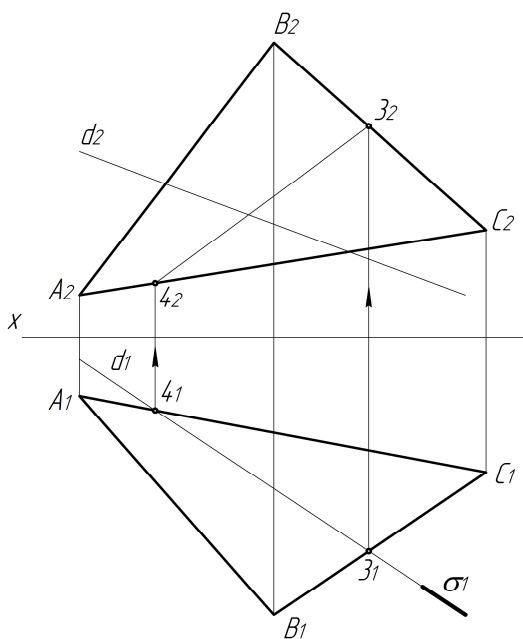


Рис. 4.15

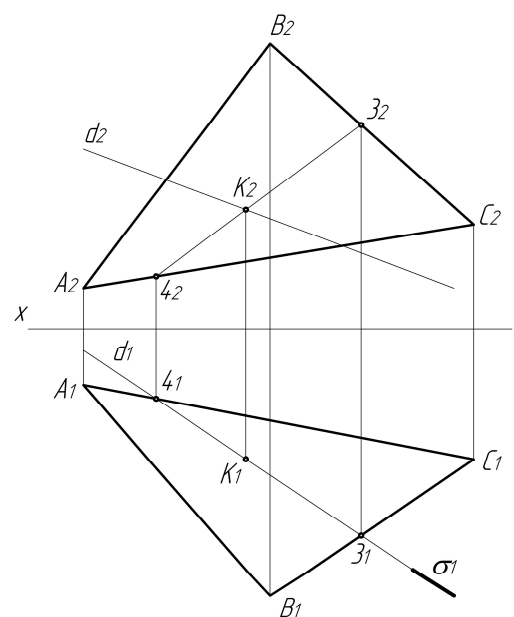


Рис. 4.16

Спробуємо провести на даній площині  $\alpha$  довільну пряму  $m//d$  (рис. 4.14). Проведемо фронтальну проекцію  $m_2$  прямої  $m$  так, щоби  $m_2//d_2$ , і побудуємо її горизонтальну проекцію  $m_1$  з умови, що пряма  $m$  належить площині  $\alpha$ . Оскільки  $m_1$  виявилась не паралельною  $d_1$ , то прямі  $d$  і  $m$  не паралельні між собою у просторі, а значить пряма  $d$  не паралельна площині  $\alpha$ .

Перевіримо тепер, чи не лежить пряма  $d$  на площині  $\alpha$ ?

Будемо вважати, що  $d_1 \equiv 3_1 4_1$  є горизонтальна проекція прямої  $34$ , яка належить площині  $\alpha$  (рис. 4.15). Її фронтальна проекція  $3_2 4_2$  не співпадає з  $d_2$ . Це означає що пряма  $d$  не лежить на площині  $\alpha$ , а перетинає її в точці  $K=34 \cap d$ , бо ця точка лежить і на прямій  $d$  і на площині  $\alpha$ , тобто є їх спільною точкою (рис. 4.16). Таким чином ми розв'язали одну з основних позиційних задач нарисної геометрії: побудувати точку перетину прямої загального положення з площиною загального положення.

В нарисній геометрії цій побудові надають іншу інтерпретацію, пов'язану з універсальним способом допоміжних площин, що застосовується для розв'язання позиційних задач. Нижче наводиться алгоритм побудови точки перетину прямої з площиною.

1. Дану пряму  $d$  включити в допоміжну проектуючу площину  $\sigma$  (на рисунку 4.13 ця площина є горизонтально-проектуючою)

$$\sigma \supset d, \quad \sigma \perp \Pi_1, \quad \sigma_1 \equiv d_1.$$

2. Побудувати допоміжну лінію перетину допоміжної площини  $\sigma$  з даною площиною  $\alpha$  (рис. 4.15).

$$\sigma \cap \alpha = 34, \quad \sigma_1 \cap B_1 C_1 = 3_1, \quad \sigma_1 \cap A_1 C_1 = 4_1, \quad 3_2 \subset B_2 C_2, \quad 4_2 \subset A_2 C_2.$$

3. Точка перетину допоміжної лінії перетину з даною прямою є точка перетину даних прямої і площини (рис. 4.16).

$$d \cap 34 = K, \quad K_2 = d_2 \cap 3_2 4_2, \quad K_1 \subset d_1.$$

Для надання наочності комплексному рисунку слід визначити видимість проекцій прямої, виходячи з умови, що трикутна пластинка (відсік площини  $\alpha$ ) непрозора. Скористаємося для визначення видимості конкуруючими точками, наприклад точки  $4$  і  $5$ , у яких  $4_1 \equiv 5_1$  і  $4_1 \subset A_1 C_1$ , а  $5_1 \subset d_1$ ,  $4_2 \subset A_2 C_2$ ,  $5_2 \subset d_2$ , тобто  $4 \subset AC$ ,  $5 \subset d$  (рис. 4.17). З розташування фронтальних проекцій  $4_2$  і  $5_2$  бачимо, що точка  $5$  розташована вище точки  $4$ . Це означає, що горизонтальна проекція  $5_1$  видима, а значить відрізок  $4_1 K_1$  горизонтальної проекції  $d_1$  теж видимий. В точці  $K$  пряма переходить на інший бік трикутної пластини і відрізок  $K_1 3_1$  стає невидимим.

Видимість фронтальної проекції прямої визначається аналогічно за допомогою конкуруючих точок відносно фронтальної площини проєкцій, наприклад точок **6** і **7**, у яких  $b_2 \equiv 7_2 = d_2 \cap A_2 B_2$  (рис. 4.18).

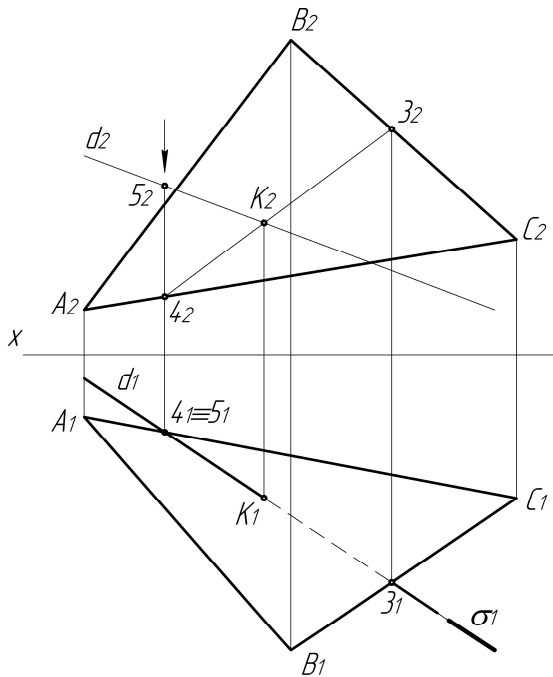


Рис. 4.17

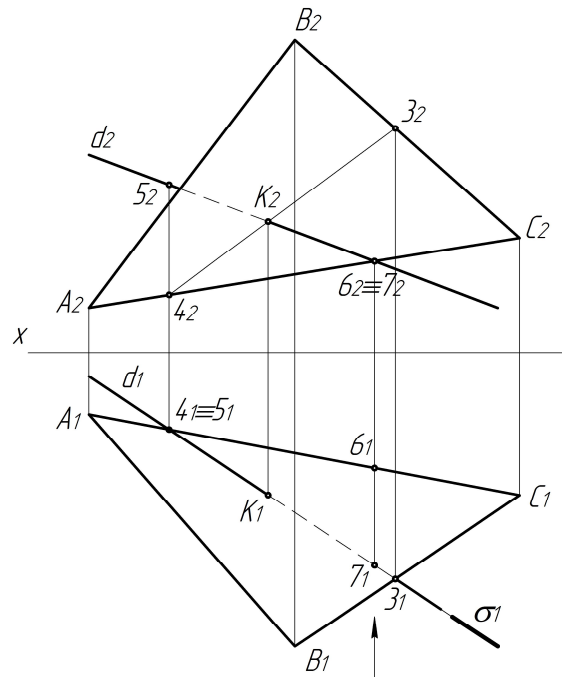


Рис. 4.18

#### 4.5 ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПЛОЩИН

Лінія перетину двох площин визначається двома спільними до обох площин точками. Тому, в загальному випадку, для побудови лінії перетину двох площин слід знайти будь-які дві точки, кожна з яких належить обом площинам. Ці точки і визначають лінію перетину площин.

Для знаходження кожної з цих двох точок необхідно виконувати спеціальні побудови. Але якщо хоча б одна з двох площин, які перетинаються, перпендикулярна до площини проєкцій, то побудова лінії перетину значно спрощується.

Якщо обидві площини перпендикулярні до якоїсь площини проєкцій, то і лінія їхнього перетину також перпендикулярна до цієї ж площини проєкцій (рис. 4.19).

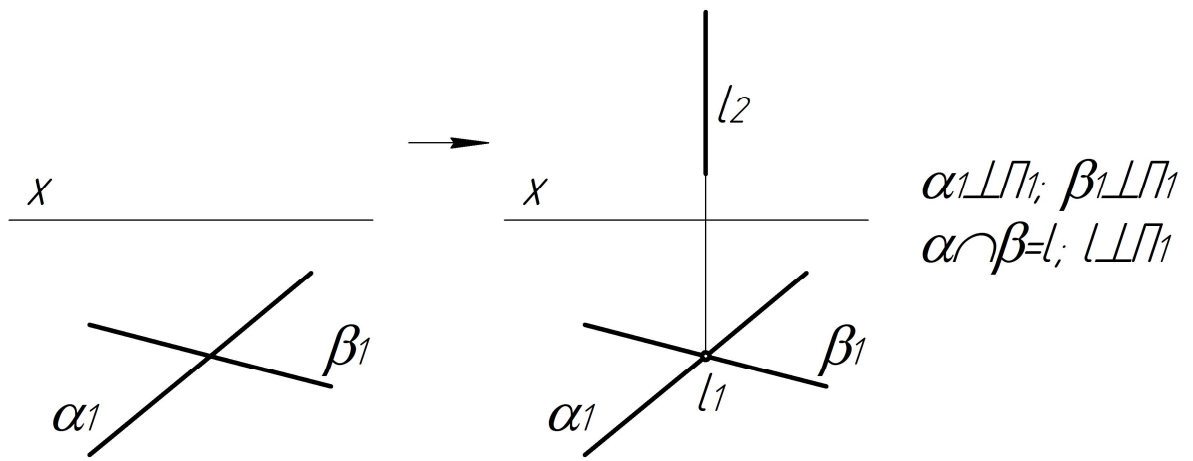


Рис. 4.19

У разі, коли одна з площин загального положення, а друга – окремого, то одна із проєкцій лінії їх перетину збігається з слідом-проєкцією площини окремого положення. Друга проєкція лінії перетину визначається за умови належності її площині загального положення. На рисунку 4.20 вказано перетин двох площин, одна з яких (задана трикутником  $ABC$ ) розташована перпендикулярно до фронтальної площини проєкцій. Побудова лінії перетину зрозуміла з рисунка.

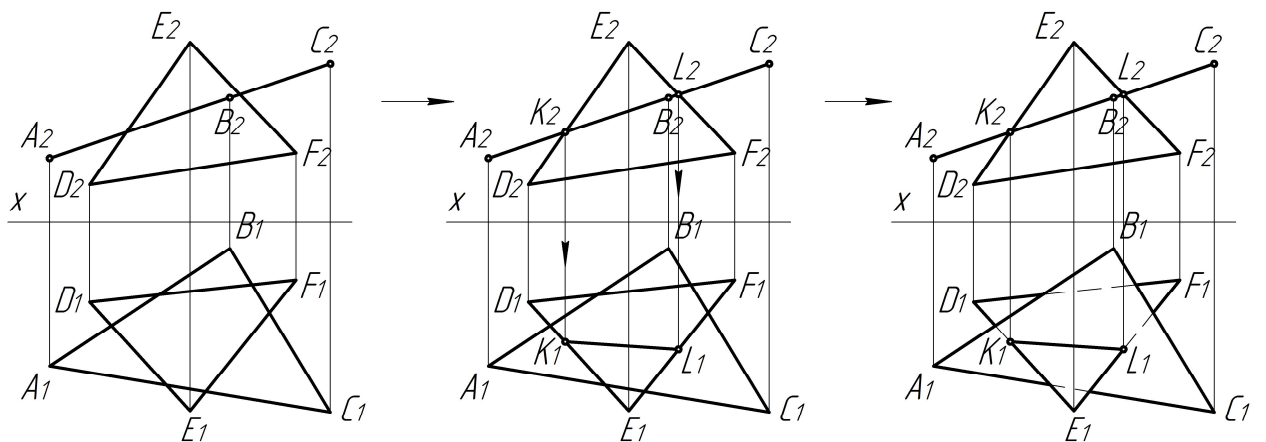


Рис. 4.20

Інший приклад наведено на рисунку 4.21. Горизонтально-проєктуюча площина  $\beta$  перерізає площину трикутника  $ABC$ . Горизонтальна проєкція лінії перетину цих площин – відрізок  $KL$ , співпадає з горизонтальним слідом площини  $\beta$ .

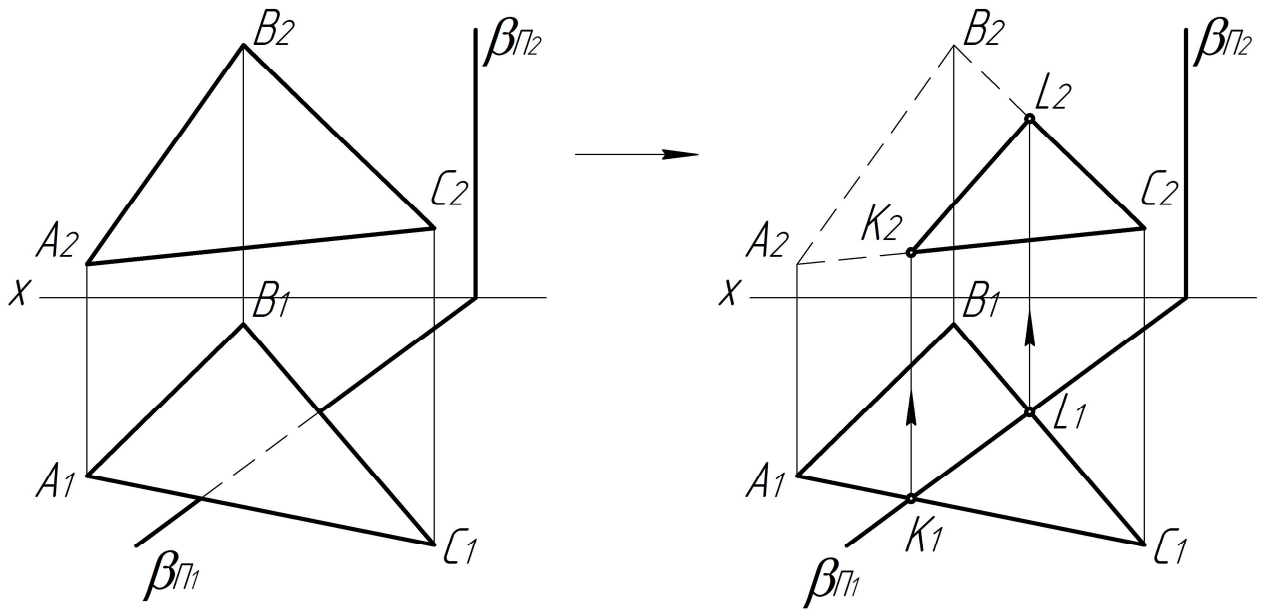


Рис. 4.21

Тепер розглянемо випадок перетину площин загального положення. Одну з площин,  $\alpha$ , задано двома прямими, які перетинаються, а іншу,  $\beta$ , – двома паралельними прямими (рис. 4.22).

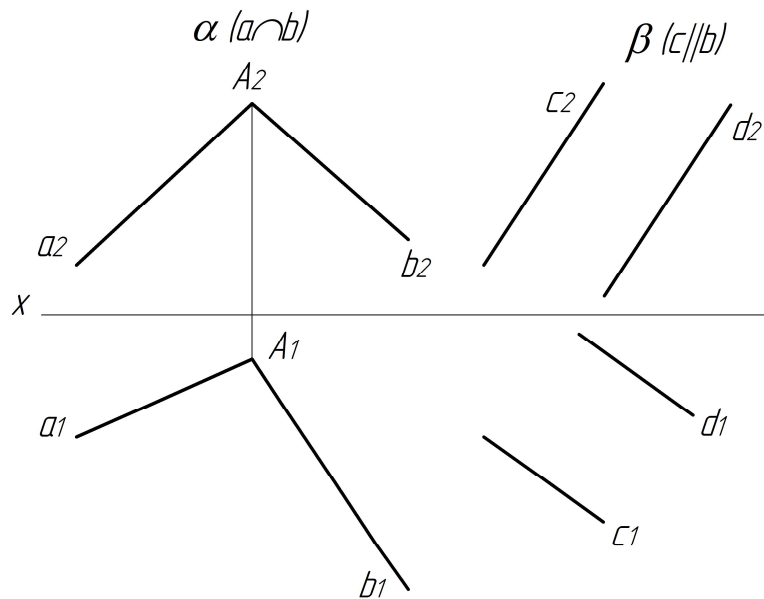


Рис. 4.22

Лінію перетину цих площин доцільно будувати за допомогою двох площин-посередників за таким алгоритмом:

1. Задані площини  $\alpha$  і  $\beta$  перерізаються допоміжною площиною-посередником  $\gamma$  (рис. 4.23);

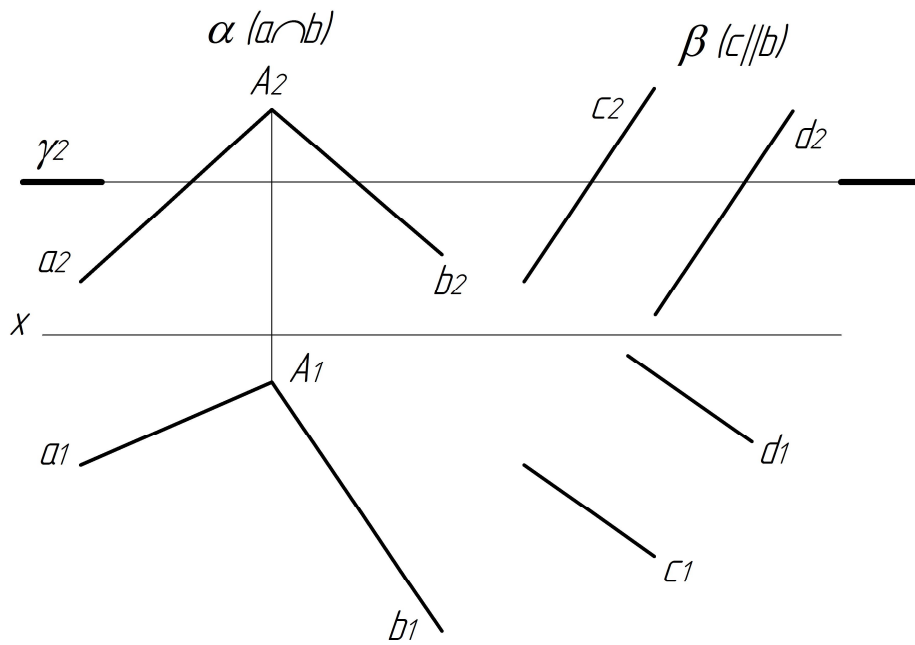


Рис. 4.23

2. Будуються дві лінії перетину заданих площин з площиною-посередником  $\alpha \cap \gamma = 12$ ,  $\beta \cap \gamma = 34$  (рис. 4.24);

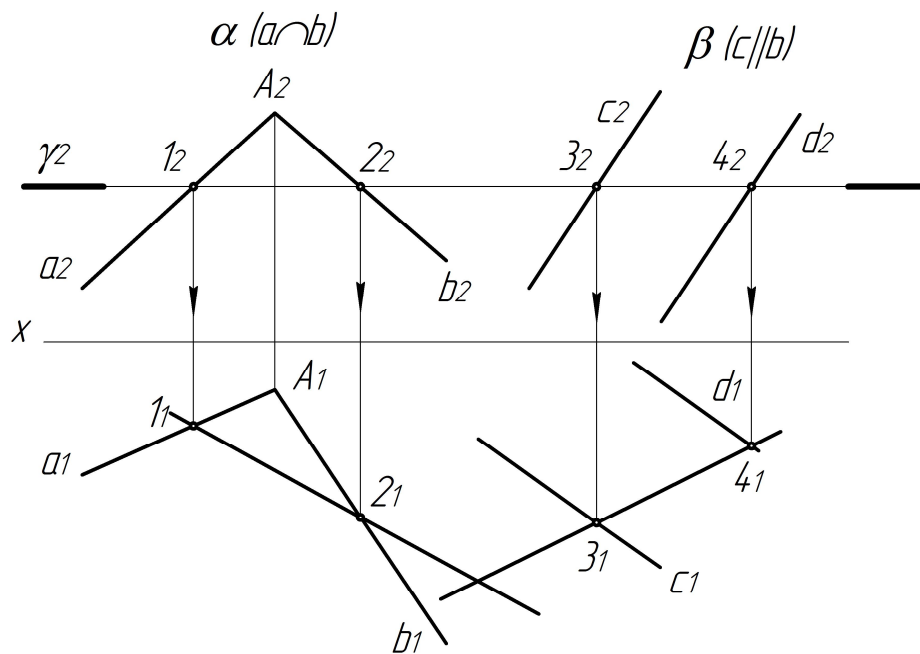


Рис. 4.24

3. Знаходиться точка перетину  $K$  побудованих ліній перетину (рис. 4.25);

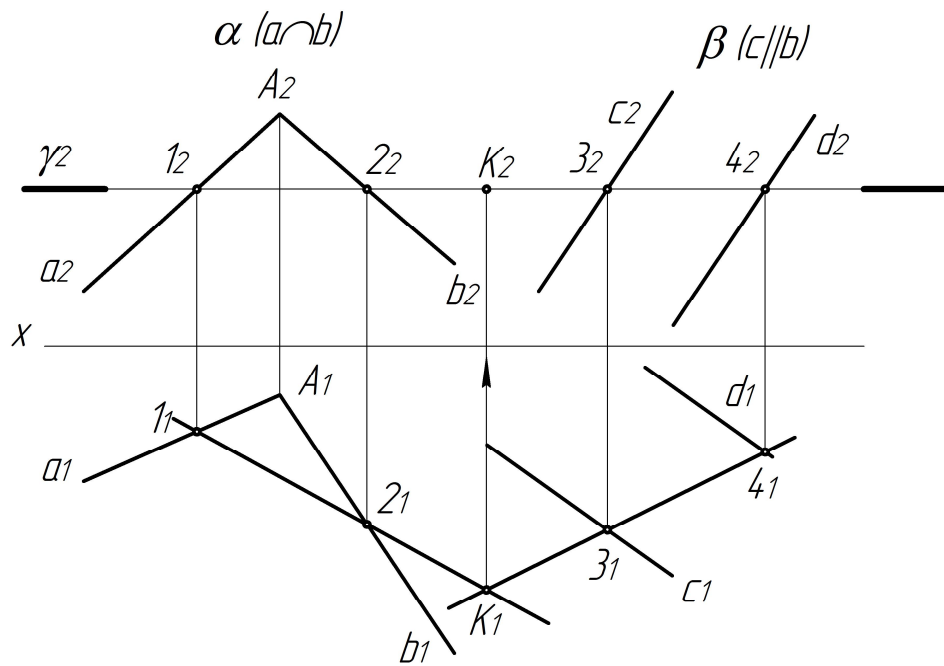


Рис. 4.25

4. Аналогічно знаходиться друга точка  $L$  лінії перетину заданих площин  $\alpha$  і  $\beta$ ;
5. Пряма, що проходить через точки  $K$  і  $L$ , є лінією перетину заданих площин (рис. 4.26).

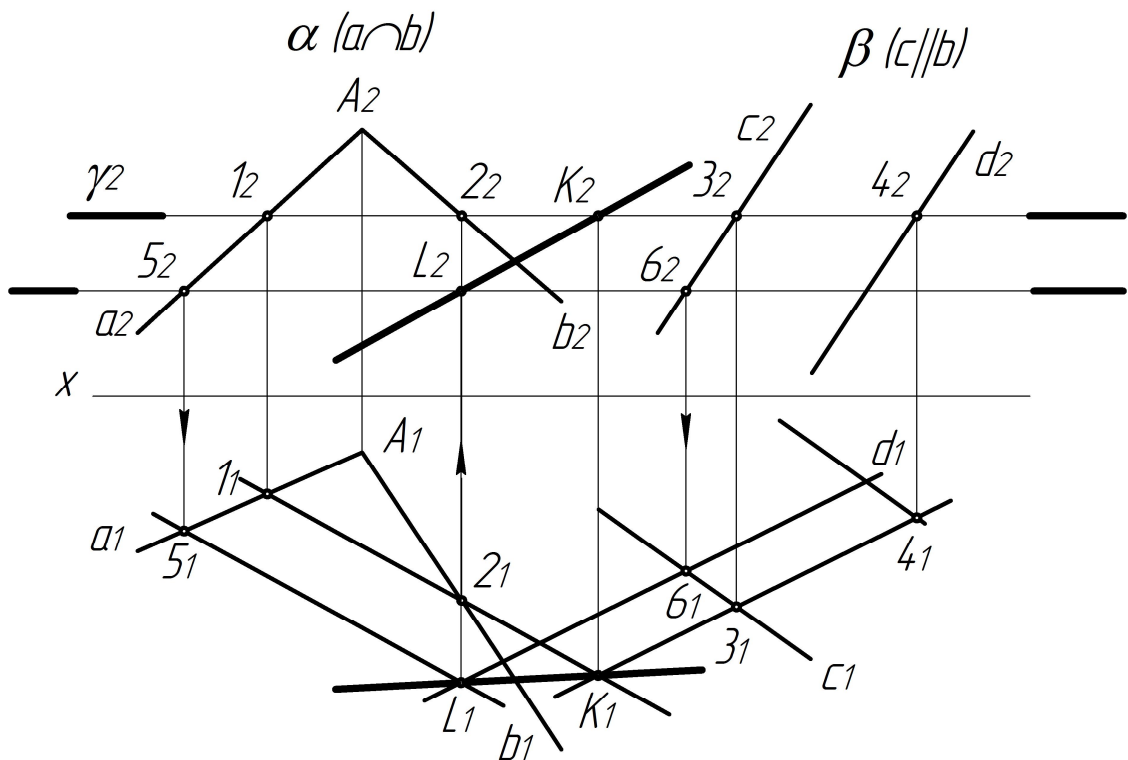


Рис. 4.26

Може виявитися, що перша площина-посередник перетинає задані площини по паралельним прямим. Це може свідчити, що площини паралельні між собою, або площина-посередник паралельна їхній лінії перетину. У такому разі другу площину-посередник слід провести не паралельно першій. Якщо і друга площина-посередник перетинає задані площини по паралельним прямим, то ці площини паралельні. Якщо ж друга площина-посередник перерізає задані площини не по паралельним прямим, то через точку перетину цих прямих проходить лінія перетину цих площин паралельно лініям перетину першої площини-посередника з заданими площинами.

Якщо площини задано слідами, то знаходити точки, які визначають пряму перетину цих площин, слід в точках перетину однойменних слідів площин (рис. 4.27). Пряма, що проходить через ці точки, є прямою спільною до обох площин, тобто є лінією їх перетину. Тут роль допоміжних січних площин виконують самі площини проєкцій. Точки перетину однойменних слідів площин є слідами лінії перетину цих площин.

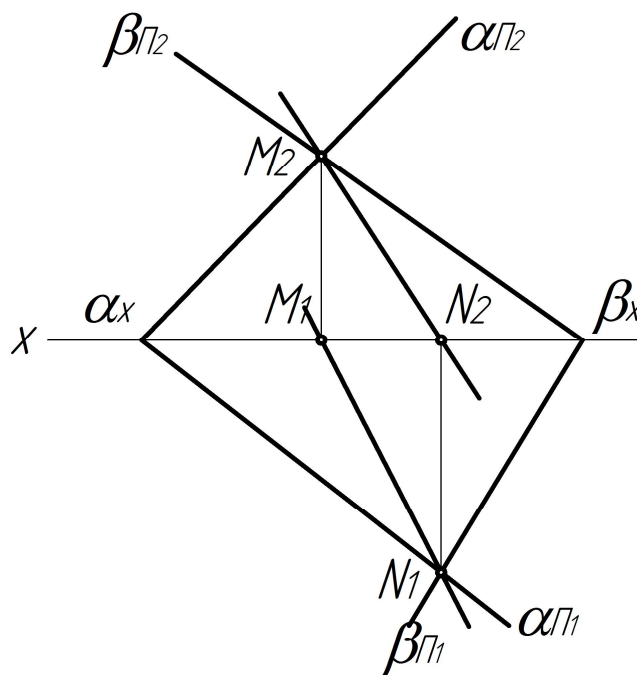


Рис. 4.27

На рисунках 4.28 та 4.29 наведено випадки, коли відомий напрямок лінії перетину. Тому достатньо мати лише одну точку перетину слідів і далі провести через неї пряму, виходячи з положення заданих площин та їх слідів.

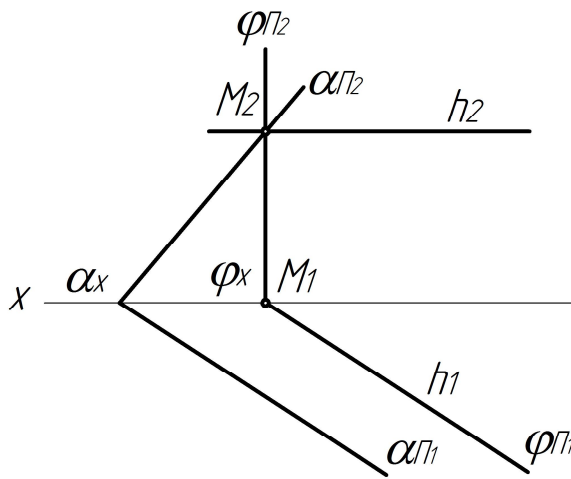


Рис. 4.28

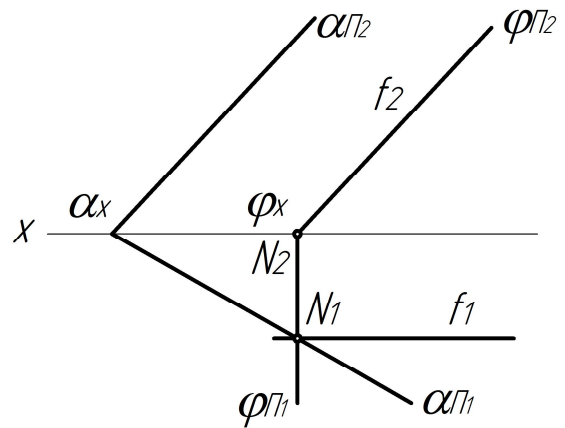


Рис. 4.29

Розглянемо інший спосіб побудови лінії перетину площин загального положення. *Задачу можна розв'язати знайшовши точки перетину двох прямих, які належать одній з площин проєкцій, з другою площиною.* Відповідно треба вміти знаходити точку перетину прямої з площиною загального положення (див. розділ 4.4). На рисунку 4.30 площини задано у вигляді двох трикутників  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) та  $\beta$  ( $\triangle DEF$ ).

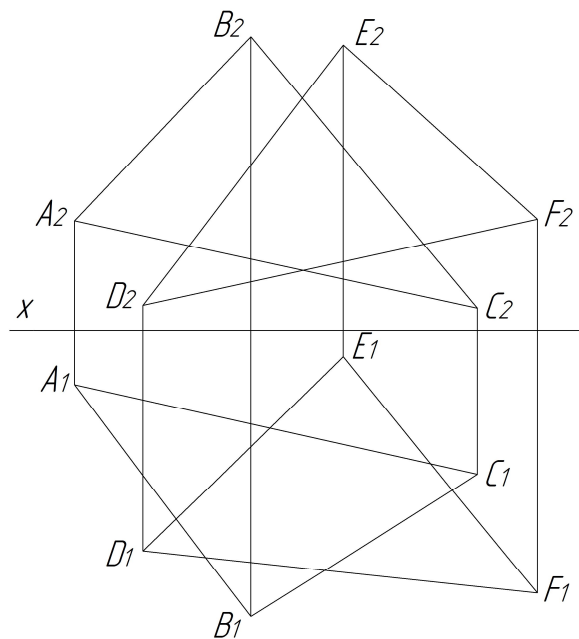


Рис. 4.30

Допоміжну горизонтально-проєктуючу площину  $\sigma$  проведено через пряму  $DE$ . На рисунку 4.31 ця площина перерізає трикутник  $ABC$  по прямій  $12$  ( $1_12_1, 1_22_2$ ). В перетині проєкцій  $1_22_2$  та  $D_2E_2$  отримана фронтальна проєкція точки  $K_2$  перетину прямої  $DE$  і трикутника  $ABC$ , далі побудована проєкція  $K_1$ .

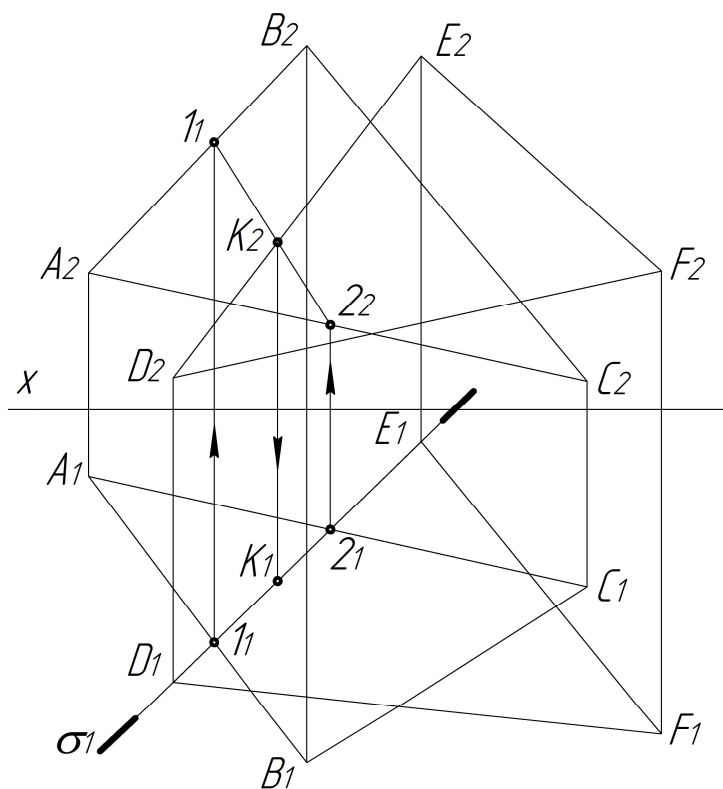


Рис. 4.31

Так само знайдена і точка  $L$  (рис. 4.32).

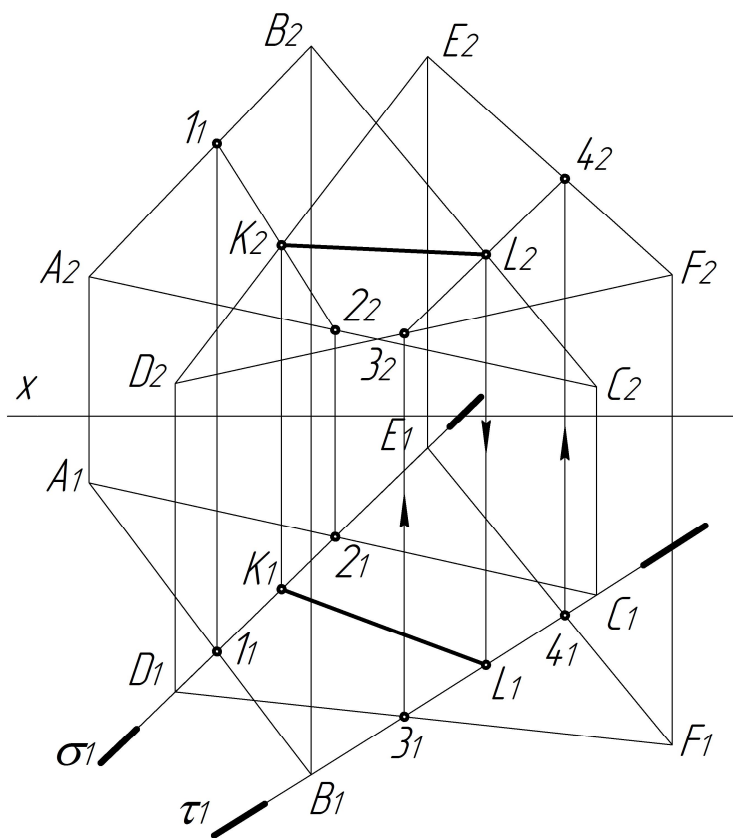


Рис. 4.32

Видимість визначено за допомогою конкуруючих точок (рис. 4.33).

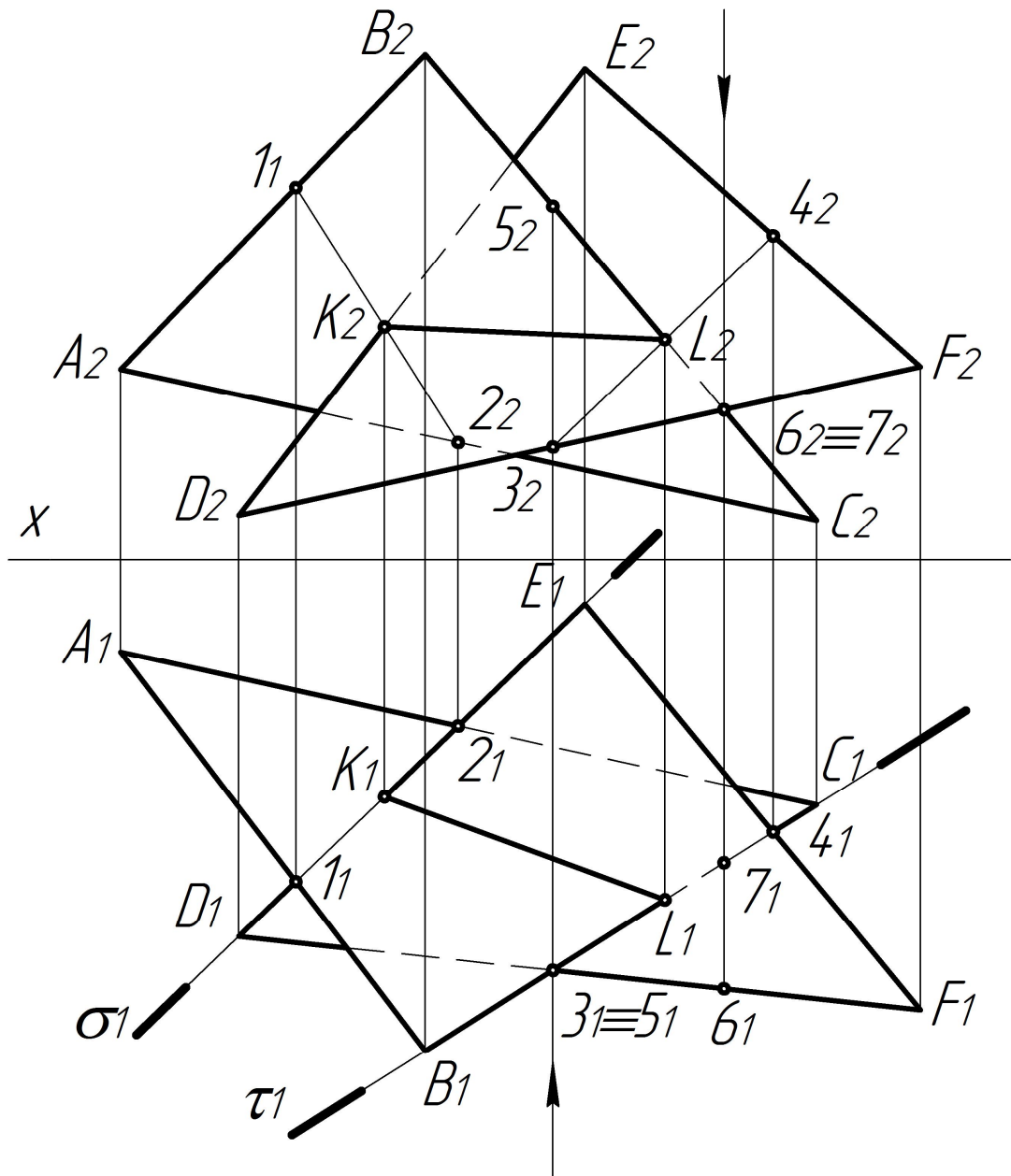


Рис. 4.33

На рисунку 4.34 наведено ще один приклад побудови лінії перетину двох трикутників. В даному випадку задачу розв'язано за допомогою допоміжних фронтально-проекуючих площин.

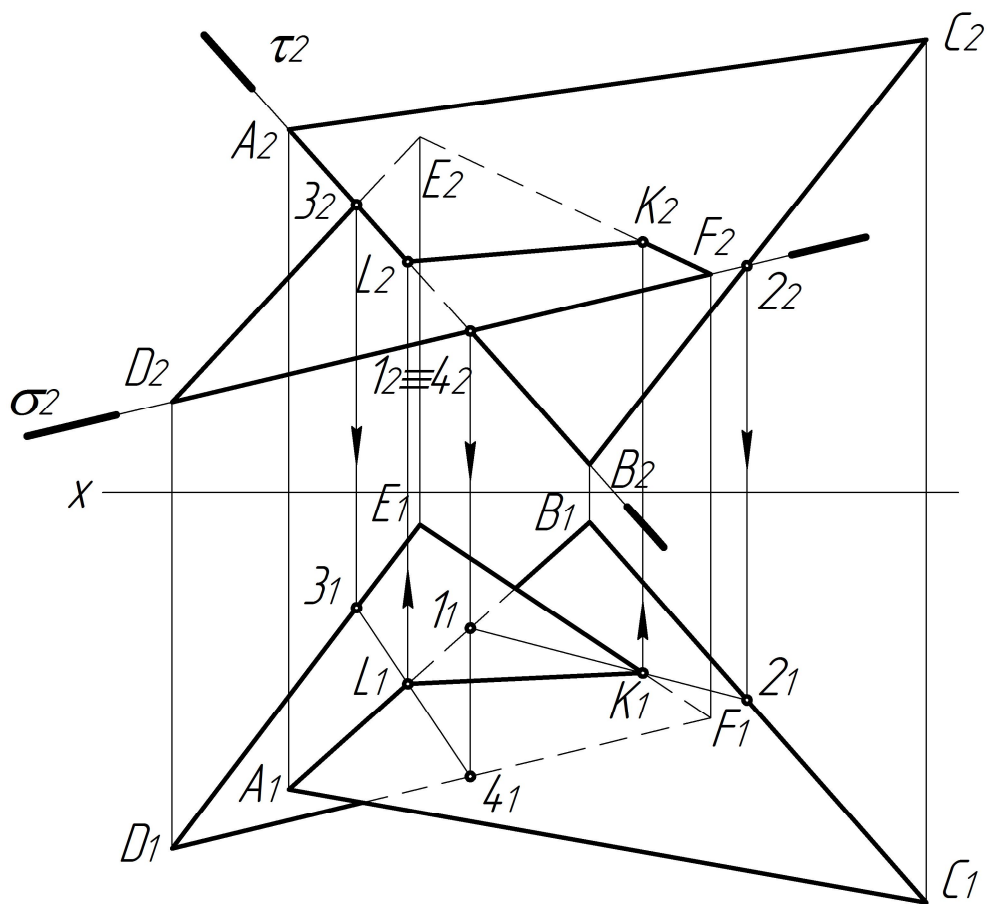


Рис. 4.34

#### 4.6 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ТА ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Нагадаємо деякі положення елементарної стереометрії, на яких будується теорія перпендикулярності на комплексному рисунку.

1. **Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох будь-яких прямих площини, що перетинаються.** Перпендикулярність розглядається в широкому розумінні. Дві перпендикулярні прямі можуть не перетинатися, але перехрещуватись під прямим кутом.

2. **Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини.**

3. **Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до другої.**

Наведені положення визначають умови перпендикулярності прямих і площин у просторі. А які графічні ознаки перпендикулярності прямих і площин заданих на комплексному рисунку? Яким вимогам повинні відповідати проекції прямої перпендикулярної до площини, заданій на комплексному рисунку? Визначимо ці умови і ознаки.

Розв'яжемо задачу: через точку  $A$  провести пряму  $l$  (побудувати її проєкції) перпендикулярну в просторі до площини  $\alpha$  ( $BCD$ ) (рис. 4.35).

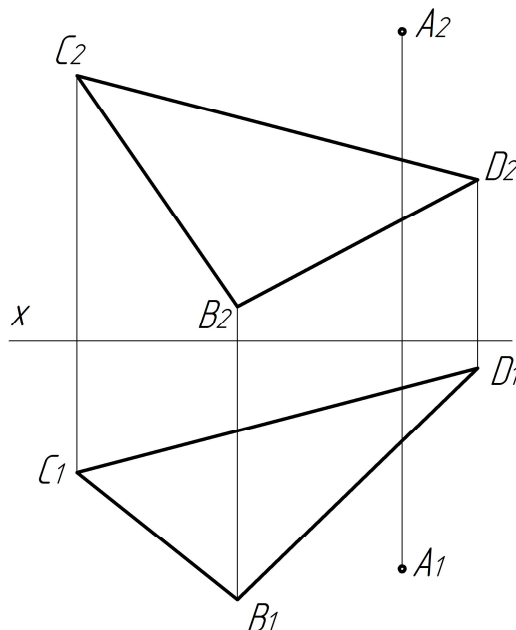


Рис. 4.35

Через точку простору проходить тільки одна пряма перпендикулярна до даної площини. Її проєкції  $l_1 \supset A_1$  і  $l_2 \supset A_2$ , але напрямки цієї проєкції невідомі. Для визначення напрямків проєкцій перпендикуляра розглянемо рисунок 4.36б. На цьому рисунку схематично зображено площину  $\alpha$  і пряму  $l \perp \alpha$ . Перпендикуляр  $l$  проходить через точку  $K$ , що належить площині  $\alpha$ . Там же зображено (схематично) горизонтальні проєкції  $l_1$  і  $K_1$  перпендикуляра  $l$  і точки  $K$ . Згідно з положенням 2 пряма  $l$  перпендикулярна до будь-якої площини  $\alpha$ . У множині прямих площини  $\alpha$  є горизонтальні прямі, одна з яких  $h$  зображена (схематично) на рисунку. Горизонтальна проєкція  $h_1$  цієї горизонталі паралельна  $h$ . Одна сторона прямого кута при вершині  $K$ , а саме сторона  $h$ , паралельна до площини  $\Pi_1$ . Отже проєкція цього кута на  $\Pi_1$  є також прямий кут. Висновок: **якщо пряма перпендикулярна до площини у просторі, то на комплексному рисунку її горизонтальна проєкція перпендикулярна до горизонтальної проєкції будь-якої горизонталі площини.**

Аналогічні міркування, щодо фронтальної проєкції перпендикуляра до даної площини приводять до аналогічного висновку.

**Якщо пряма перпендикулярна до площини у просторі, то на комплексному рисунку її фронтальна проєкція перпендикулярна до фронтальної проєкції будь-якої фронталі площини.**

Стисло кажучи, пряма перпендикулярна до площини у просторі, якщо її проєкції на комплексному рисунку перпендикулярні до однойменних проєкцій горизонталі і фронталі площини.

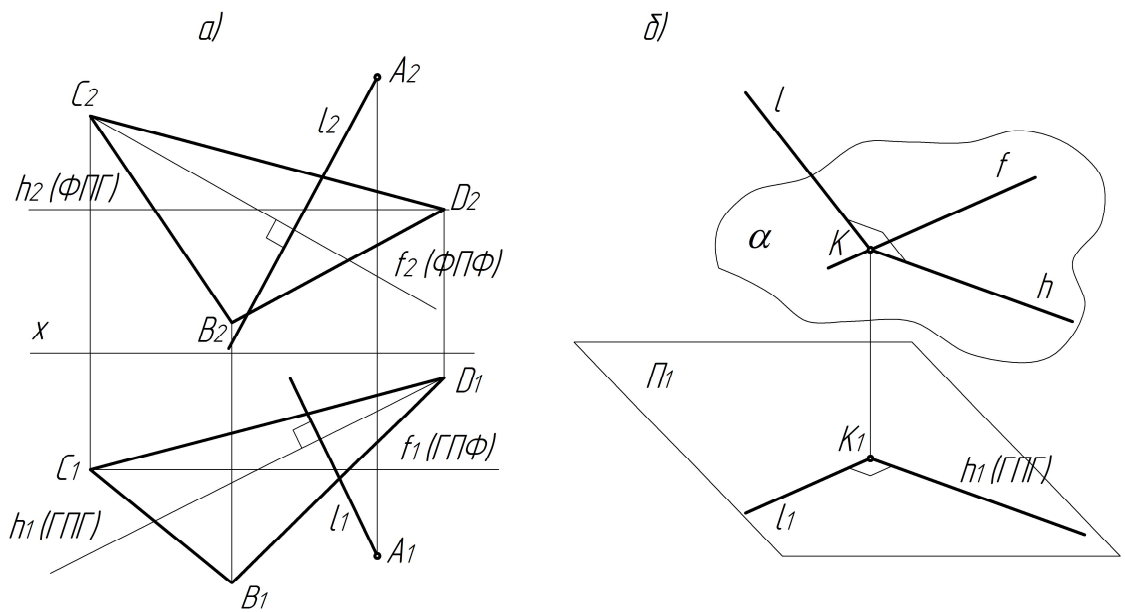


Рис. 4.36

Це і є ознаки перпендикулярності прямої і площини на комплексному рисунку.

Тепер ми можемо розв'язати поставлену на початку цього параграфу задачу. Проводимо на площині  $\alpha$  ( $BCD$ ) довільні горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) і фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ). Через  $A_1$  проводимо  $l_1 \perp h_1$  (ГПП), а через  $A_2$  –  $l_2 \perp f_2$  (ФПФ).  $l_1$  і  $l_2$  є проєкціями прямої  $l \perp \alpha$  ( $BCD$ ) (рис. 4.36а).

Розглянемо типові приклади та побудови, пов'язані з перпендикулярністю та паралельністю прямих і площин.

**Приклад 1.** Через дану точку провести площину перпендикулярну даній прямій.

На рисунку 4.37 задані прямі є прямими рівня. Через точку  $A$  ( $A_1, A_2$ ) проведена площина  $\alpha \perp h$  ( $h_1, h_2$ ). Оскільки пряма  $h \parallel \Pi_1$  ( $h_2 \parallel x$ ), то площина  $\alpha \perp h$  і  $\alpha \perp \Pi_1$ , тобто є горизонтально-проєктуюча. Її вироджена горизонтальна проєкція  $\alpha_1 \supset A_1$  і  $\alpha \perp h_1$ . Через точку  $B$  ( $B_1, B_2$ ) проведемо площину  $\beta \perp f$  ( $f_1, f_2$ ). Ця площина – фронтально-проєктуюча. Її вироджена проєкція  $\beta_2 \perp f_2$ .

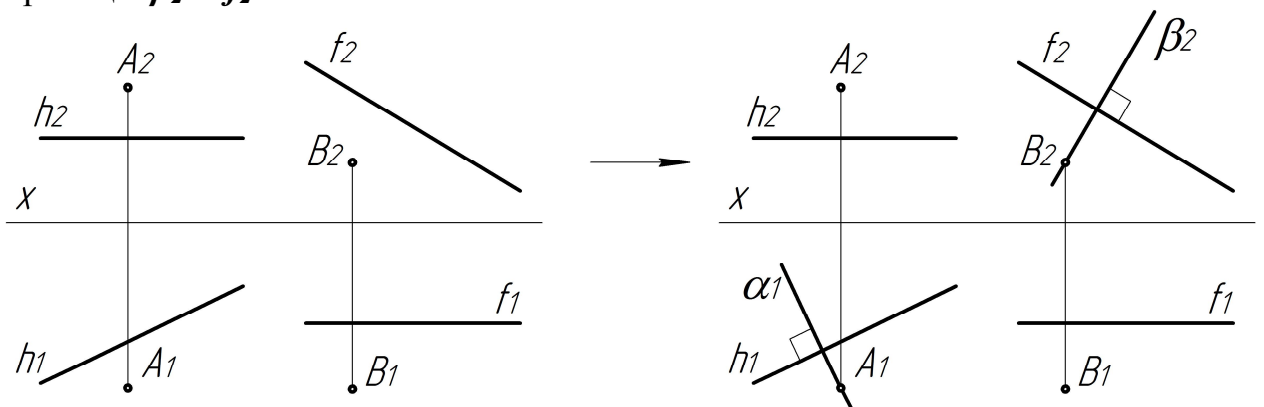


Рис. 4.37

На рисунку 4.38 пряма  $d$  є *прямою загального положення*. Через точку  $A$  проведено дві прямі горизонталь і фронталь. Горизонтальна проекція горизонталі  $h_1 \perp d_1$ , а фронтальна проекція фронталі  $f_2 \perp d_2$ . Площина  $\alpha$  ( $h \cap f$ ) перпендикулярна в просторі до прямої  $d$ , бо проекції прямої  $d$  перпендикулярні до однойменних проекцій горизонталі і фронталі площини  $\alpha$  ( $h \cap f$ ).

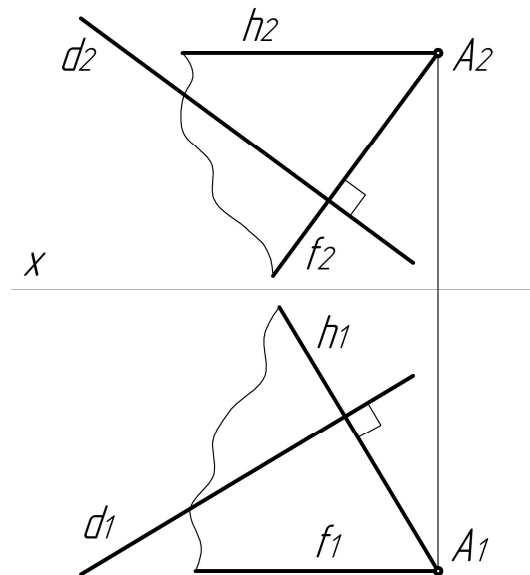


Рис. 4.38

Зазначимо, що розглянутий на рисунку 4.16 приклад є етапом побудови прямої перпендикулярної до прямої загального положення.

Насправді, якщо побудувати точку  $K = d \cap \alpha$  ( $h \cap f$ ) (на рисунку ця побудова не показана), то проекції  $A_1K_1$  і  $A_2K_2$  зададуть пряму  $AK \perp d$  і будуть проекціями відстані від точки  $A$  до прямої  $d$ .

Якщо за умовою площину  $\alpha \perp d$  треба задати слідами, то достатньо побудувати сліди площини  $\alpha$  ( $h \cap f$ ).

Цей же приклад є етапом побудови площини перпендикулярної до іншої заданої площини. Для побудови такої площини треба на заданій площині взяти довільну пряму і побудувати площину перпендикулярну до цієї прямої так, як це зроблено в наведеному прикладі.

**Приклад 2.** Через дану точку провести площину паралельно даній площині. На рисунку 4.39 задано площину загального положення  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) і точку  $A$  ( $A_1, A_2$ ). Ознака паралельності двох площин: якщо дві прямі, що перетинаються, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини взаємно паралельні (стереометрія).

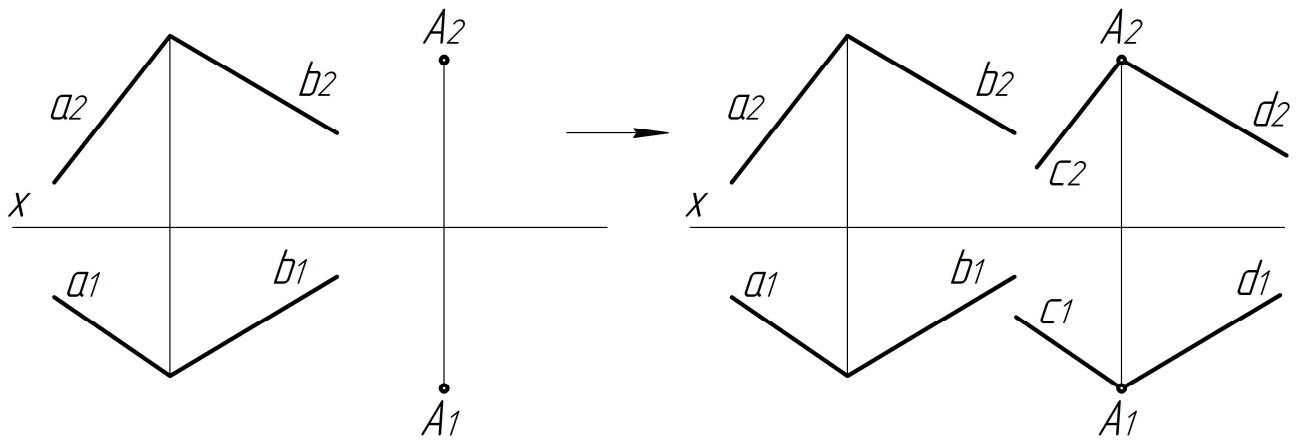


Рис. 4.39

Виходячи з цієї ознаки, через точку  $A$  проведемо дві прямі  $c//a$  і  $d//b$ . Ці дві прямі визначають площину  $\beta$  ( $c \cap d$ ) паралельну до даної площини  $\alpha$ .

Побудови:  $A_1 \subset c_1 // a_1, A_2 \subset c_2 // a_2 \rightarrow c // a$ ;

$A_1 \subset d_1 // b_1, A_2 \subset d_2 // b_2 \rightarrow d // b$ .

**Приклад 3.** Через дану точку провести довільну пряму паралельну до заданої площини. На рисунку 4.40 задана площина  $\alpha$  двома паралельними прямими  $a$  ( $a_1 // b_1$ ) і точка  $A$  ( $A_1, A_2$ ).

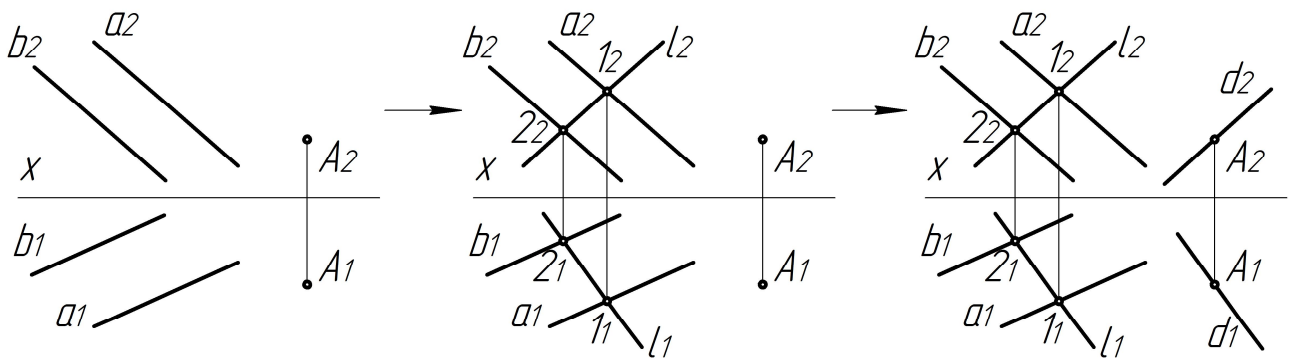


Рис. 4.40

Ознака паралельності прямої і площини: пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій площини. Через точку, що не лежить на даній площині, можна провести безліч прямих паралельних цій площині. Для проведення одної з них спочатку задамо на площині довільну пряму  $l$  ( $l_1, l_2$ ).  $l_1 \equiv l_1 a_1, l_2 \equiv l_2 a_2$ . Через точку  $A$  проведемо пряму  $d // l$  –  $d_1 \supset A_1 // l_1, d_2 \supset A_2 // l_2$ . Пряма  $d$  ( $d_1, d_2$ ) паралельна площині  $\alpha$  ( $a // b$ ), бо вона паралельна прямій  $l$  ( $l_1, l_2$ )  $\subset \alpha$  ( $a // b$ ).

## ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ

1. Як неможливо задати площину?

1. Паралельними прямими
2. Прямими, які перетинаються
3. Мимобіжними прямими
4. Трьома точками, які не лежать на одній прямій

2. Як позначається профільна площина проекцій?

1.  $\Pi_{23}$
2.  $\Pi_1$
3.  $\Pi_3$
4.  $\Pi_2$

3. Як позначається горизонтальна площина проекцій?

1.  $\Pi_{23}$
2.  $\Pi_1$
3.  $\Pi_3$
4.  $\Pi_2$

4. Як позначається фронтальна площина проекцій?

1.  $\Pi_{23}$
2.  $\Pi_1$
3.  $\Pi_3$
4.  $\Pi_2$

5. Як називається площина, зображена на рисунку?

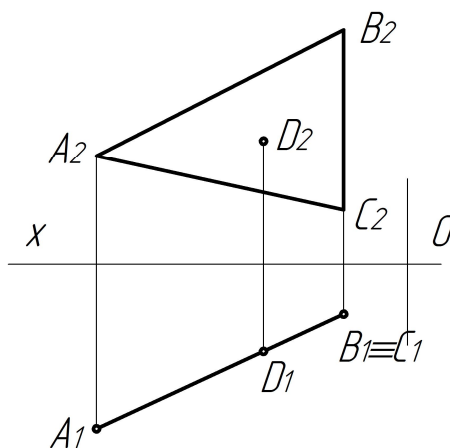


Рис. 4.41

- |                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| а) Загального положення. | б) Горизонтально-проектуюча |
| в) Фронтально-проектуюча | г) Профільна                |

6. Як називається площина, зображена на рисунку?

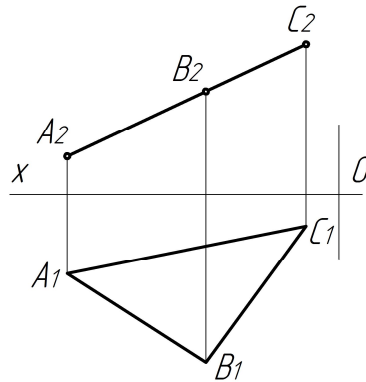


Рис. 4.42

- |                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| а) Загального положення  | б) Горизонтально-проектуюча |
| в) Фронтально-проектуюча | г) Фронтальна               |

7. Як називається площина, зображена на рисунку?

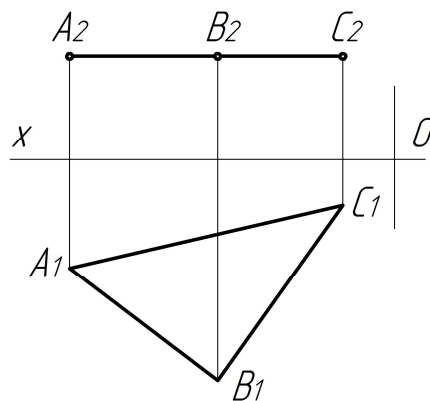


Рис. 4.43

- |                         |                  |
|-------------------------|------------------|
| а) Загального положення | б) Горизонтальна |
| в) Профільна            | г) Фронтальна    |

8. Як називається площина, зображена на рисунку?

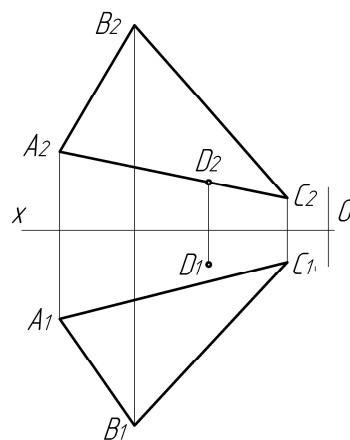


Рис. 4.44

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| а) Загального положення     | б) Профільно-проектуюча  |
| в) Горизонтально-проектуюча | г) Фронтально-проектуюча |

9. Як називається площина, зображена на рисунку?

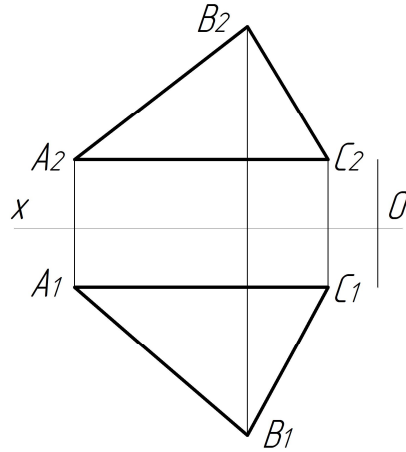


Рис. 4.45

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| а) Загального положення     | б) Профільно-проектуюча  |
| в) Горизонтально-проектуюча | г) Фронтально-проектуюча |

10. Як називається площина, зображена на рисунку?

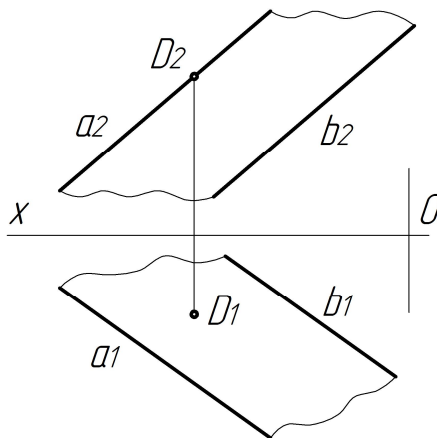


Рис. 4.46

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| а) Загального положення | б) Профільно-проектуюча |
| в) Горизонтальна        | г) Фронтальна           |

11. Як називається площина, зображена на рисунку?

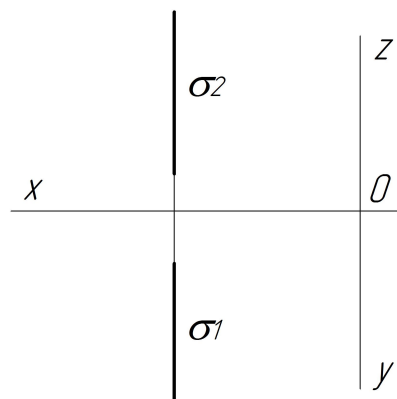


Рис. 4.47

- а) Загального положення
- в) Горизонтальна

- б) Профільна
- г) Фронтальна

12. Як називається площина, зображена на рисунку?

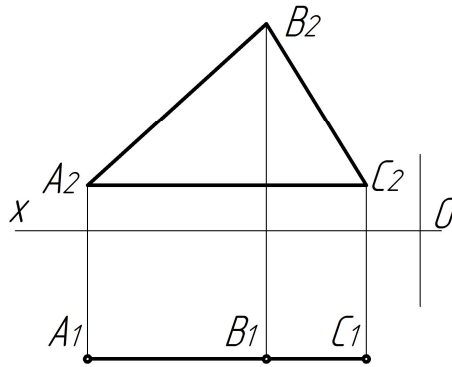


Рис. 4.48

- а) Загального положення
- в) Горизонтальна

- б) Профільна
- г) Фронтальна

13. На якому рисунку точка **D** лежить в заданій площині?

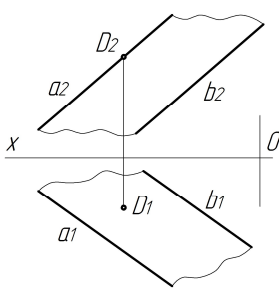


Рис. 1

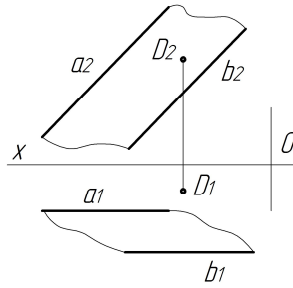


Рис. 2

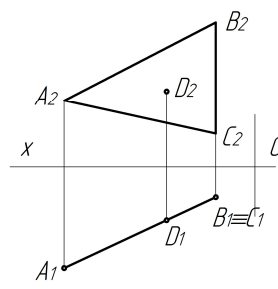


Рис. 3

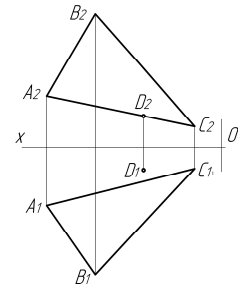


Рис. 4

Рис. 4.49

14. На якому рисунку точка **D** належить площині  $\sigma$  ?

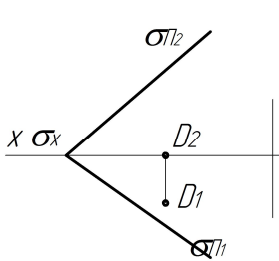


Рис. 1

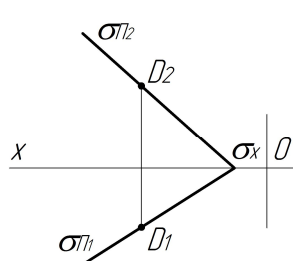


Рис. 2

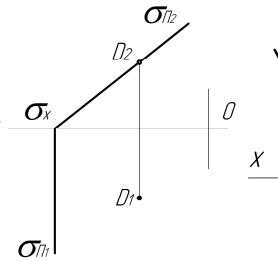


Рис. 3

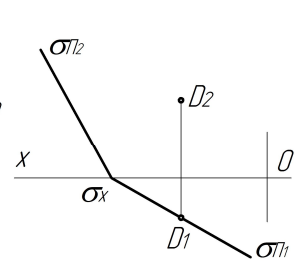


Рис. 4

Рис. 4.50

15. На якому рисунку пряма  $AB$  лежить у проектуючій площині?

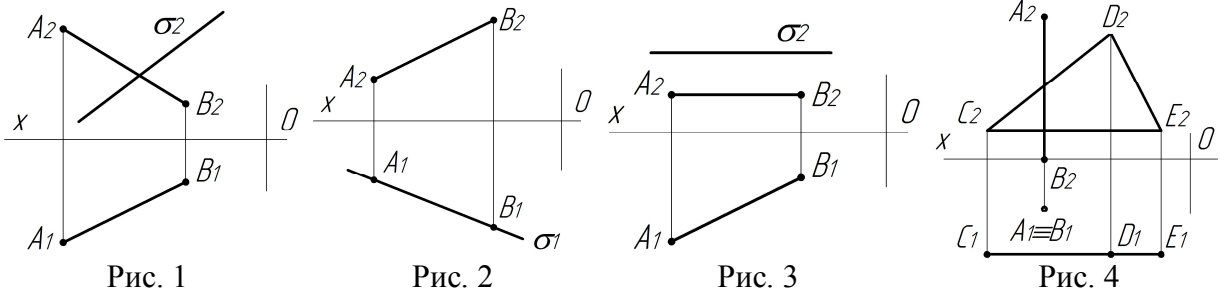


Рис. 4.51

16. На якому рисунку площина  $ABC$  є горизонтально-проекуючою?

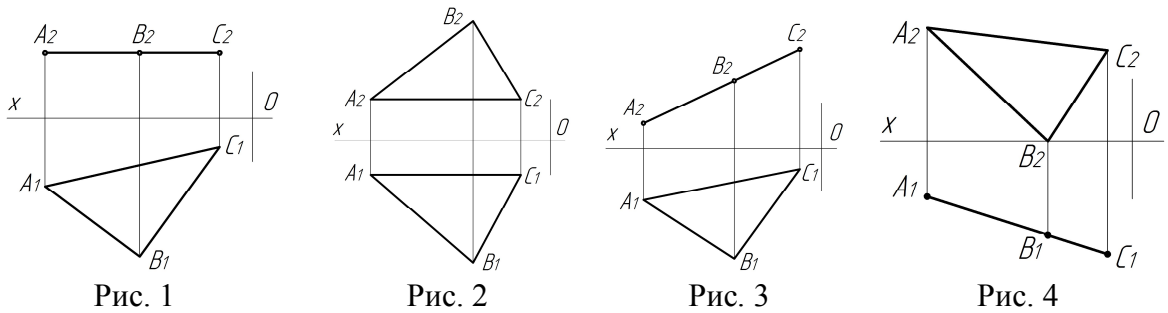


Рис. 4.52

17. На якому рисунку зображена фронталь площини?

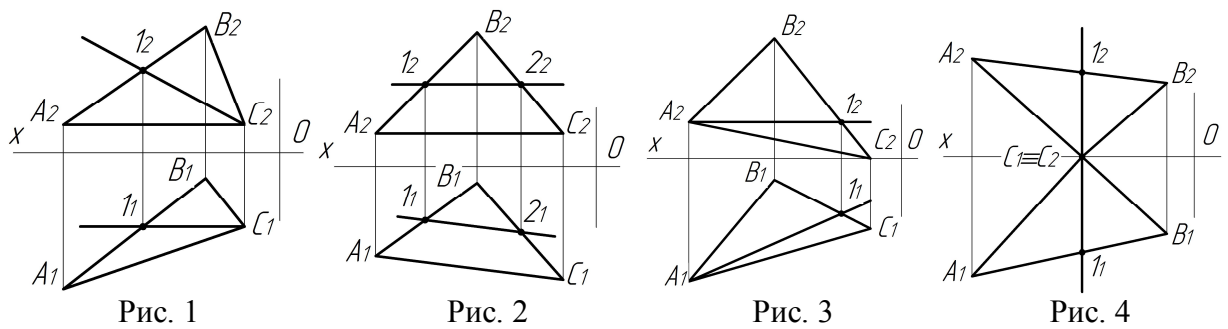


Рис. 4.53

18. На якому рисунку пряма  $AB$  належить площині трикутника?

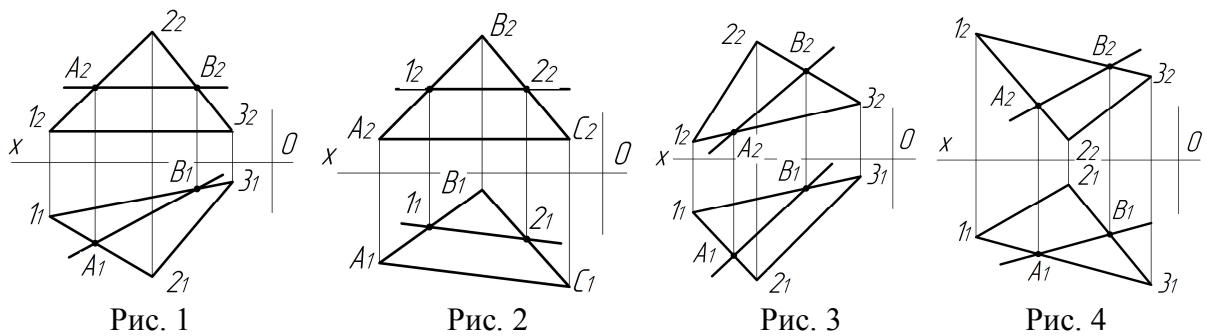


Рис. 4.54

19. На якому рисунку зображена горизонтальна площина?

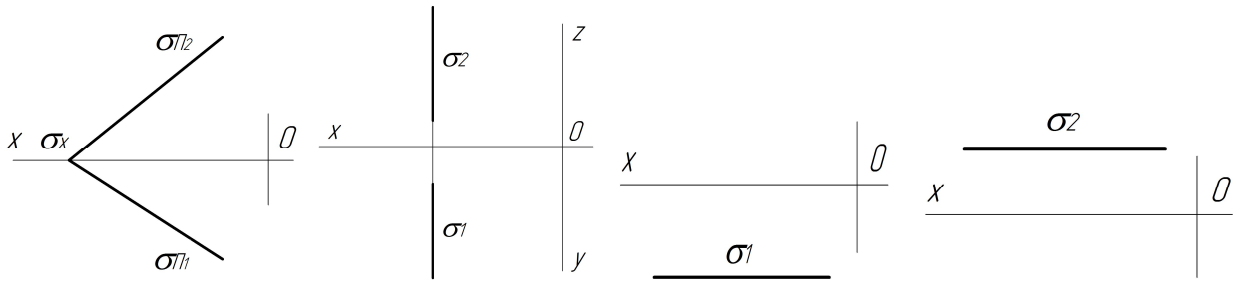


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 4.55

20. На якому рисунку зображена горизонталь площини?

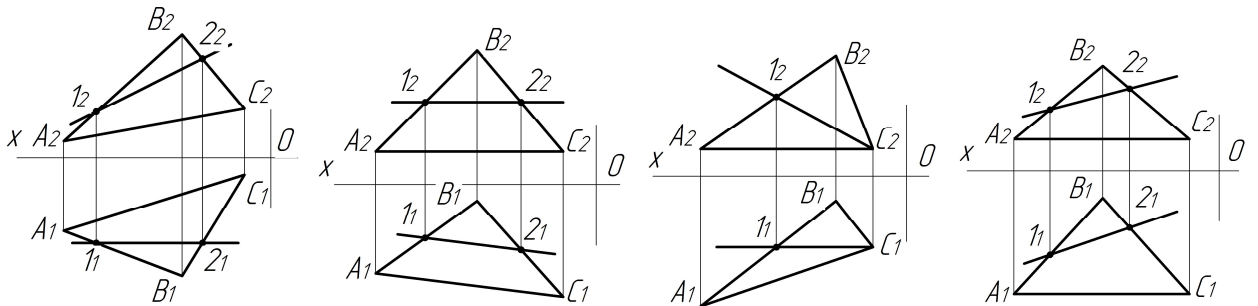


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 4.56

21. Як називається площина, зображена на рисунку?

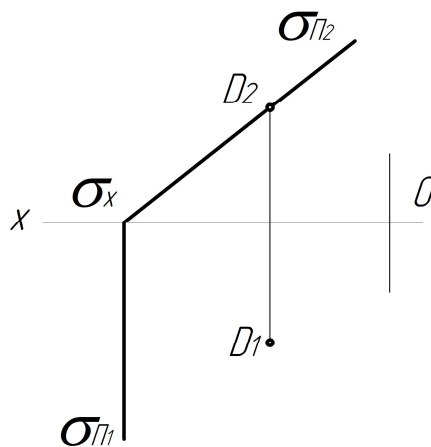


Рис. 4.57

- а) Загального положення
- в) Горизонтально-проектуюча

- б) Профільна
- г) Фронтально-проектуюча

22. Як називається площина проєкцій  $\Pi_1$ ?

1. Горизонтальна
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Паралельна

23. Як називається площина проєкцій  $\Pi_2$ ?

1. Горизонтальна
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Паралельна

24. Як називається площина проєкцій  $\Pi_3$ ?

1. Горизонтальна
2. Фронтальна
3. Профільна
4. Паралельна

25. До яких площин проєкцій перпендикулярна горизонтальна площина рівня?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4.  $\Pi_1, \Pi_2$  та  $\Pi_3$

26. До яких площин проєкцій перпендикулярна фронтальна площина рівня?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4.  $\Pi_1, \Pi_2$  та  $\Pi_3$

27. До яких площин проєкцій перпендикулярна профільна площина рівня?

1.  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$
2.  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$
3.  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$
4.  $\Pi_1, \Pi_2$  та  $\Pi_3$

28. Як називається площина зображена на рисунку?

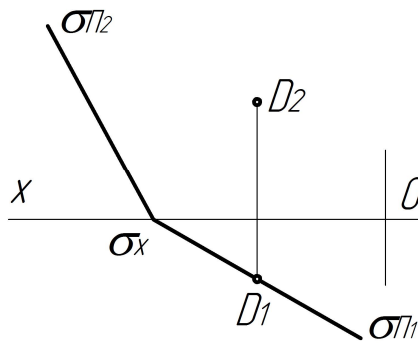


Рис. 4.58

- а) Профільно-проектуюча
- б) Профільна
- в) Загального положення
- г) Горизонтально-проектуюча

29. Як називається площина зображена на рисунку?

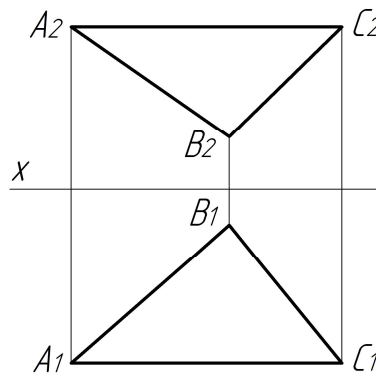


Рис. 4.59

- а) Профільно-проектуюча
- б) Профільна
- в) Загального положення
- г) Горизонтально-проектуюча

30. Як називається площина зображена на рисунку?

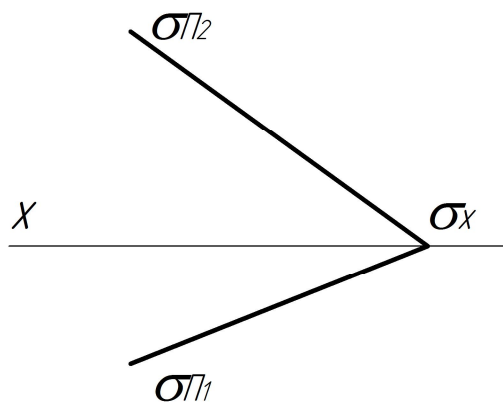


Рис. 4.60

- а) Горизонтальна
- б) Профільна
- в) Загального положення
- г) Горизонтально-проектуюча

31. До якої з площин проєкцій перпендикулярна площина зображена на рисунку 4.59?

1.  $\Pi_1$       2.  $\Pi_2$       3.  $\Pi_3$       4. Не перпендикулярна до жодної

32. До якої з площин проєкцій перпендикулярна площина зображена на рисунку 4.60?

1.  $\Pi_1$       2.  $\Pi_2$       3.  $\Pi_3$       4. Не перпендикулярна до жодної

33. До якої з площин проєкцій перпендикулярна площина зображена на рисунку 4.57?

1.  $\Pi_1$       2.  $\Pi_2$       3.  $\Pi_3$       4. Не перпендикулярна до жодної

34. До яких з площин проєкцій перпендикулярна площина зображена на рисунку 4.48?

1.  $\Pi_1$       2.  $\Pi_2$       3.  $\Pi_3$       4. Не перпендикулярна до жодної

35. До яких осей проєкцій паралельна горизонтальна площина?

1.  $x, z$       2.  $x, y$       3.  $y, z$       4.  $x, y, z$

36. До яких осей проєкцій паралельна профільна площина?

1.  $x, z$       2.  $x, y$       3.  $y, z$       4.  $x, y, z$

37. До яких осей проєкцій паралельна фронтальна площина?

1.  $x, z$       2.  $x, y$       3.  $y, z$       4.  $x, y, z$

38. На якому рисунку пряма  $a$  паралельна площині  $\sigma$ ?

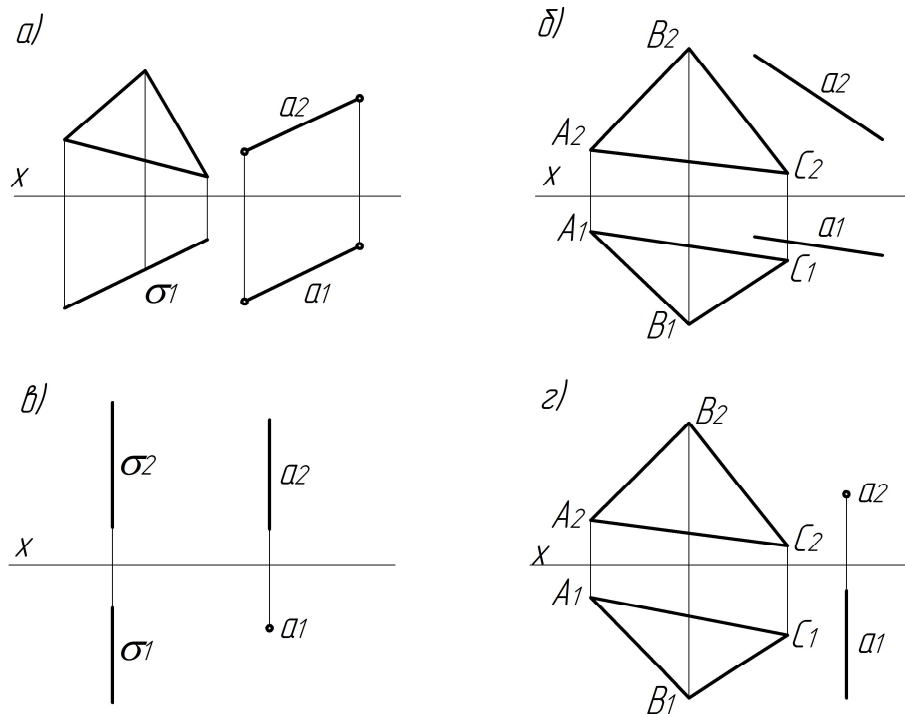


Рис. 4.61

39. На якому рисунку площини паралельні між собою?

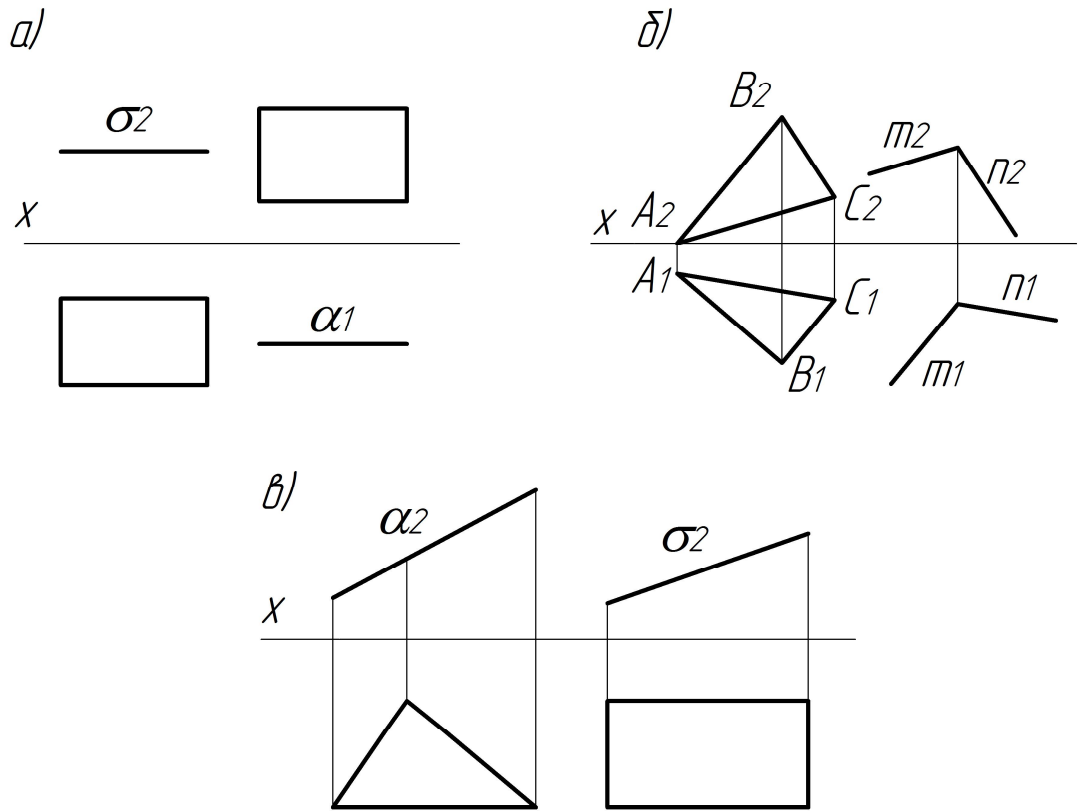


Рис. 4.62

40. Яке взаємне положення прямої  $a$  та площини  $\sigma$ ?

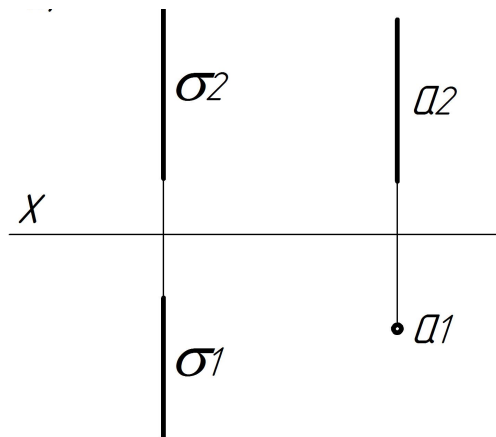


Рис. 4.63

1. Пряма перпендикулярна до площини
2. Паралельні
3. Пряма належить площині
4. Пряма перетинає площину під довільним кутом

41. Яке взаємне положення площин?

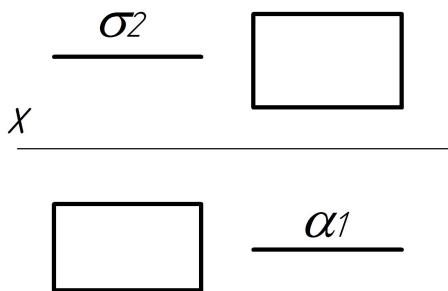


Рис. 4.64

- 1) Паралельні
- 2) Перетинаються під довільним кутом
- 3) Перпендикулярні
- 4) Співпадають

42. Яке взаємне положення площин?

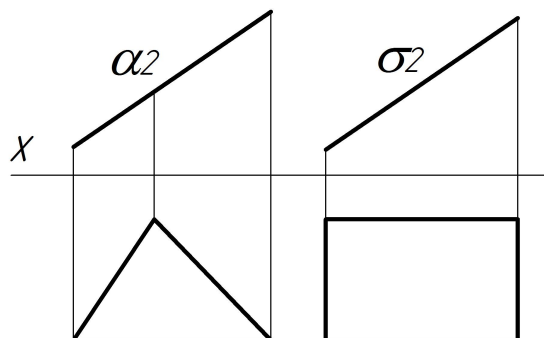


Рис. 4.65

- 1) Паралельні
- 2) Перетинаються під довільним кутом
- 3) Перпендикулярні
- 4) Співпадають

43. Яке взаємне розташування прямої і площини?

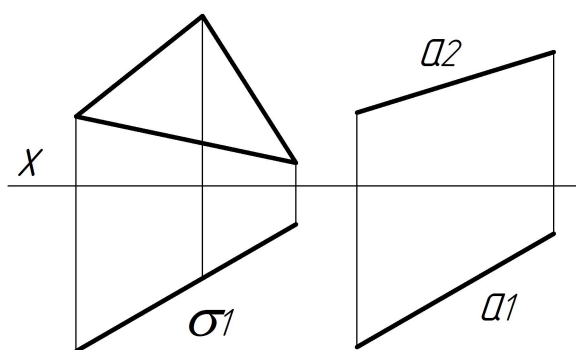


Рис. 4.66

- 1) Перетинаються під довільним кутом
- 2) Паралельні
- 3) Пряма перпендикулярна до площини
- 4) Пряма належить площині

44. Яке взаємне розташування прямої і площини?

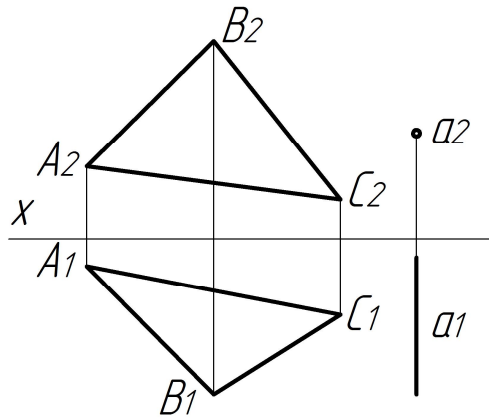


Рис. 4.67

- 1) Перетинаються під довільним кутом
- 2) Паралельні
- 3) Пряма перпендикулярна до площини
- 4) Пряма належить площині

45. Яке взаємне розташування прямої і площини?

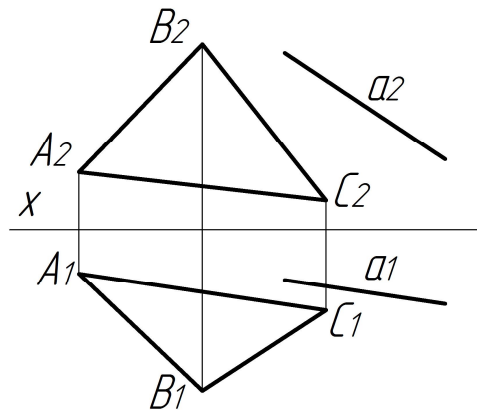


Рис. 4.68

- 1) Перетинаються під довільним кутом
- 2) Паралельні
- 3) Пряма перпендикулярна до площини
- 4) Пряма належить площині

## 5. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ РИСУНКІВ

Способи перетворення комплексних рисунків призначені для побудови на заданому комплексному рисунку нових проекцій, заданих геометричних образів, зручніших для розв'язання поставлених задач ніж початкові проекції. Досягається це, або заміною положення площин проекцій, або зміною положення заданих в умові задачі геометричних образів, відносно первісних площин проекцій без порушення відносного положення цих образів. Відповідно до сказаного нижче розглядаються спосіб заміни площин проекцій та спосіб плоско-паралельного переміщення з його окремими випадками – способами обертання та суміщення.

### 5.1 СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

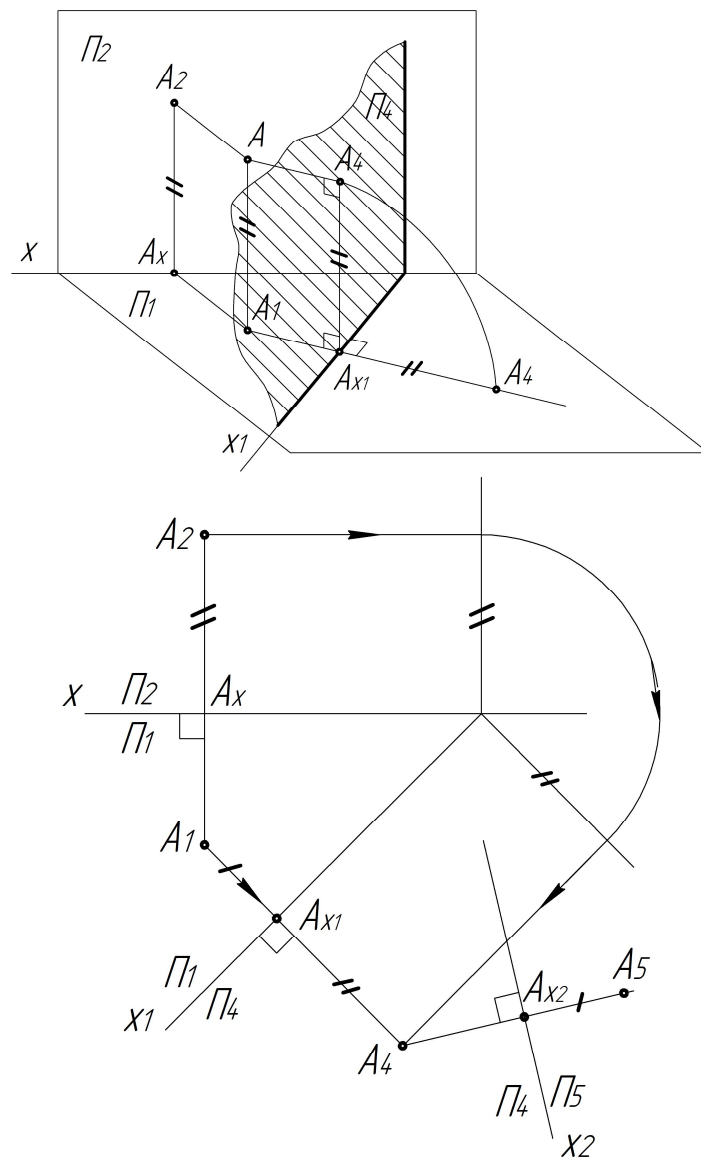


Рис. 5.1

На рисунку 5.1 наочно зображена точка  $A$  в системі площин проєкцій  $x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_2}}$ .

Введемо нову площину проєкцій  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  і розглянемо нову прямокутну систему площин проєкцій  $x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_4}}$ . Цю операцію зручно записувати символічно:

$x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_2}} \rightarrow x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_4}}$ , де  $x_1$  є проєкція площини  $\Pi_4$ . Будемо називати її новою віссю

проєкцій. З символічного запису видно, що площина  $\Pi_1$  є спільною для обох систем проєкцій, тобто є незамінною площиною проєкцій. Площини  $\Pi_2$  в новій системі площин проєкцій нема. Її замінили на площину  $\Pi_4$  (звідки і назва: спосіб заміни площин проєкцій), тобто площина  $\Pi_2$  є замінною площиною проєкцій.

Побудуємо прямокутну проєкцію  $A_4$  точки  $A$  на площині  $\Pi_4$  (дивись рис. 5.1) і обертанням навколо осі  $x_1$  сумістимо  $\Pi_4$  разом з проєкцією  $A_4$  з площиною  $\Pi_1$ . Після суміщення нова проєкція  $A_4$  розташується на новій лінії проєкційного зв'язку  $A_1A_4 \perp x_1$  на відстані  $A_4A_{x_1} = A_2A_x$ .

Отже, для побудови нової проєкції точки на новій площині проєкцій необхідно через незамінну проєкцію точки провести нову лінію проєкційного зв'язку перпендикулярно до нової осі проєкцій і відкласти від нової осі проєкцій відрізок, довжина якого дорівнює відстані від замінної проєкції точки до попередньої осі проєкцій.

Перехід від попередньої системи площин проєкцій до нової на комплексному рисунку показано на рисунку 5.1. Точка  $A$  ( $A_1, A_2$ ) задана в системі  $x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_2}}$ . Проведемо нову вісь  $x_1$ , яка визначає нову площину проєкцій

$\Pi_4 \perp \Pi_1$ . Далі діємо за правилом викладеним у попередньому абзаці. Через незамінну проєкцію  $A_1$  точки  $A$  проводимо нову лінію проєкційного зв'язку  $A_1A_{x_1} \perp x_1$  і відкладаємо на ній відрізок  $A_{x_1}A_4 = A_xA_2$ , довжина якого дорівнює відстані від замінної проєкції  $A_2$  до попередньої осі проєкцій.

Розглянуте правило дозволяє послідовно замінювати обидві початкові площини проєкцій. Перейдемо від системи  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$  до системи  $\frac{\Pi_5}{\Pi_4}$ ,  $x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_4}} \rightarrow x_{\frac{\Pi_5}{\Pi_4}}$ . Символічний запис показує, що в цьому випадку площина  $\Pi_1$  і проєкція  $A_1$  замінені, а  $\Pi_4$  і  $A_4$  – незамінні. Нова вісь проєкцій  $x_2$  (дивись рис 5.1) визначає нову площину проєкцій  $\Pi_5 \perp \Pi_4$ . Нова лінія проєкційного зв'язку  $A_4A_{x_2} \perp x_2$ , а відрізок  $A_{x_2}A_5 = A_1A_{x_1}$ . На цьому рисунку показано графічний спосіб побудови нової проєкції  $A_4$  точки  $A$ , як спосіб побудови третьої проєкції  $A_4$  точки  $A$  на площині  $\Pi_4$  за двома даними проєкціями  $A_1$  та  $A_2$  в попередній системі проєкцій  $x_{\frac{\Pi_1}{\Pi_2}}$ .

Ми детально розглянули заміну площини проєкцій  $\Pi_2$ . При заміні площини  $\Pi_1$  аналогічні міркування приведуть до висновку, що і в цьому випадку діє викладене правило побудови нових проєкцій точок на нові площини проєкцій.

## 5.2 СПОСІБ ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ОБЕРТАННЯ

*Плоско-паралельним переміщенням фігури відносно будь-якої площини проєкцій називається таке переміщення при якому кожна точка фігури переміщується в своїй площині паралельній до площини проєкцій. Фігуру розглядаємо як незмінну систему точок у якій відстань між будь-якими точками системи не змінюється при будь-якому її переміщенню.*

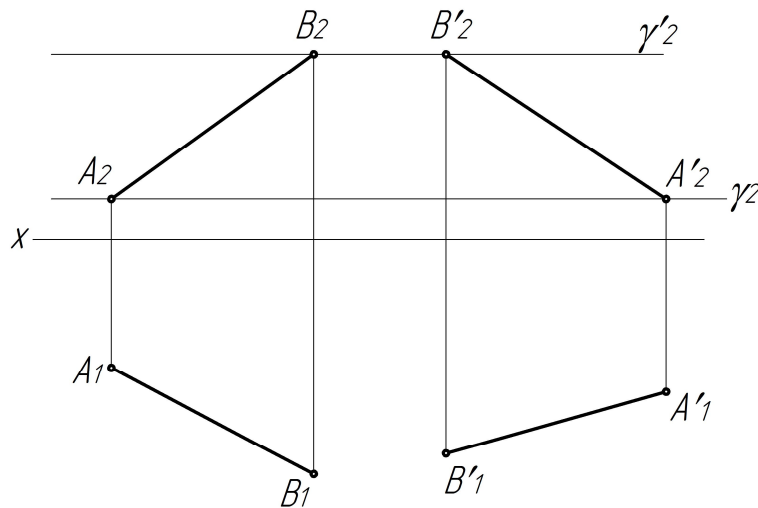


Рис. 5.2

На комплексному рисунку (рис. 5.2) задано відрізок  $AB$  довільної прямої загального положення. Як здійснити будь-яке плоско-паралельне переміщення цього відрізка на комплексному рисунку, наприклад, відносно горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ ? Згідно з означенням плоско-паралельного переміщення кінці відрізка будуть переміщатись в горизонтальних площинах –  $A$  в площині  $\gamma$ ,  $B$  в площині  $\gamma'$ . Це означає, що кут нахилу прямої  $AB$  до площини  $\Pi_1$  залишається незмінним при будь-якому переміщенні відрізка  $AB$ , оскільки його довжина незмінна. Це, в свою чергу означає, що довжина горизонтальної проєкції  $A_1B_1$  відрізка залишається теж незмінною. Цей висновок можна узагальнити: горизонтальна проєкція будь-якої фігури при плоско-паралельному переміщенні цієї фігури відносно горизонтальної площини проєкцій не змінює ні своєї форми ні величини.

Цей висновок дозволяє здійснювати плоско-паралельне переміщення на комплексному рисунку. Переміщаємо горизонтальну проєкцію фігури в будь-яке місце комплексного рисунку (зручне, як с точки зору розташування на рисунку, так і з точки зору розв'язання конкретної задачі). На рисунку 5.2 горизонтальна проєкція  $A_1B_1$  відрізка  $AB$  довільно переміщена в положення  $A_1'B_1'$  без зміни її довжини ( $A_1'B_1' = A_1B_1$ ). Фронтальні проєкції цих точок будуть переміщуватися по прямим  $\gamma_2$  і  $\gamma_2'$  і займуть положення  $A_2'$  і  $B_2'$  відповідно.

Плоско-паралельне переміщення відносно фронтальної площини проєкцій здійснюється аналогічно. Тільки в цьому випадку фронтальні проєкції фігур не змінюються ні по величині ні по формі, а горизонтальні проєкції точок переміщуються по прямим паралельним осі  $x$ .

Спосіб плоско-паралельного переміщення можна розглядати, як спосіб обертання навколо осі перпендикулярної до площини проєкцій, положення якої на комплексному рисунку не вказано, але завжди може бути побудовано.

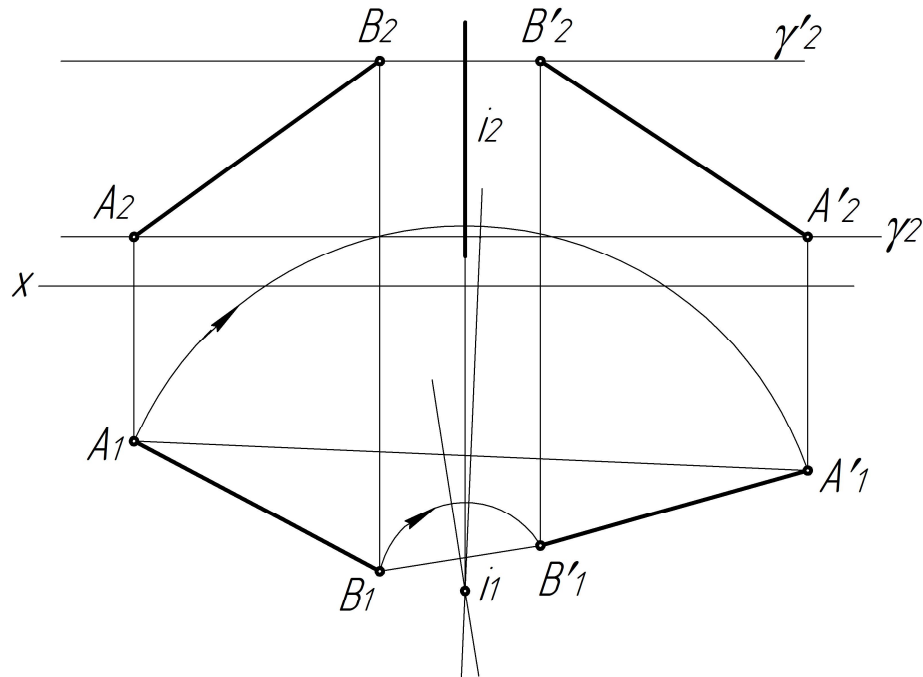


Рис. 5.3

На рисунку 5.3 через середини відрізків  $A_1A'_1$  і  $B_1B'_1$ , які сполучають горизонтальні проєкції заданих і переміщених точок  $A$  і  $B$  проведено перпендикуляри, які перетинаються в точці  $i_1$ , що є горизонтальною проєкцією осі обертання  $i$ . Її фронтальна проєкція  $i_2$  перпендикулярна до осі  $x$ . Повертаючи горизонтальні проєкції  $A_1$  і  $B_1$  навколо проєкції  $i_1$  досягнемо того ж результату, що досягнутий плоско-паралельним переміщенням.

Перевагою плоско-паралельного переміщення є те, що проєкції переміщених фігур можна розташовувати на будь-якому вільному на рисунці місці. Але обертання навколо прямих є дуже розповсюдженим рухом в техніці. Тому розглянемо основи способу обертання навколо осей перпендикулярних до площин проєкцій.

На рисунку 5.4 задано точку  $A$  ( $A_1, A_2$ ) та вісь  $i$  ( $i_1, i_2$ ) обертання перпендикулярну до  $\Pi_1$ . Горизонтальна проєкція  $i_1$  осі обертання є точка, фронтальна проєкція  $i_2$  – пряма перпендикулярна до осі  $x$ . Розглянемо як здійснюється на комплексному рисунку обертання точки  $A$  на довільний кут  $\varphi^\circ$  навколо осі  $i$ .

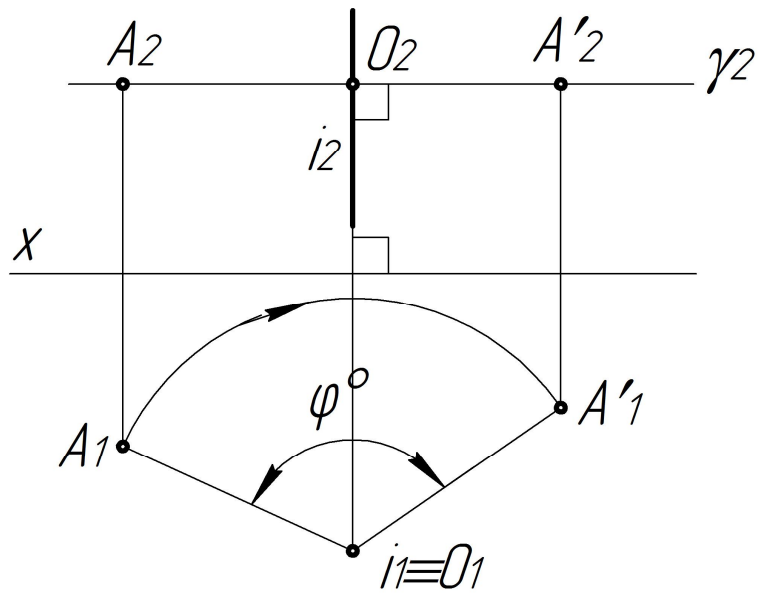


Рис. 5.4

Площина  $\gamma$  обертання точки  $A$  перпендикулярна до осі  $i$ . На комплексному рисунку  $\gamma_2 \perp i_2$ ,  $\gamma_2 // x$ , тобто площина  $\gamma // \Pi_1$ . Центр обертання  $O$  точки  $A$  є точкою перетину площини  $\gamma$  з віссю  $i$ .

На комплексному рисунку  $O_1 \equiv i_1$ . Горизонтальна проекція  $A_1$  точки  $A$  переміщується по дузі кола з центром  $O_1$  та радіусом  $O_1 A_1$  на заданий, або визначений з умови задачі кут  $\varphi^\circ$ , а фронтальна проекція  $A_2$  переміщується по прямій паралельній до осі  $x$ . Повернувши горизонтальну проекцію  $A_1$  на кут  $\varphi^\circ$ , отримаємо її нове положення  $A_1'$ . Лінія проекційного зв'язку проведена через  $A_1'$  перетне фронтальну проекцію  $\gamma_2'$  площини обертання в точці  $A_2'$ . Проекції  $A_1'$ ,  $A_2'$  визначають нове положення  $A'$  точки  $A$  після її обертання у просторі навколо осі  $i$ .

Обертання точки навколо осі перпендикулярної до площини проекції  $\Pi_2$  виконується аналогічно. В цьому випадку фронтальна проекція точки переміщується по дузі кола, а горизонтальна – по прямій паралельній до осі  $x$ .

## ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ

1. Яким способом знайдено справжню величину прямої  $AB$ ?

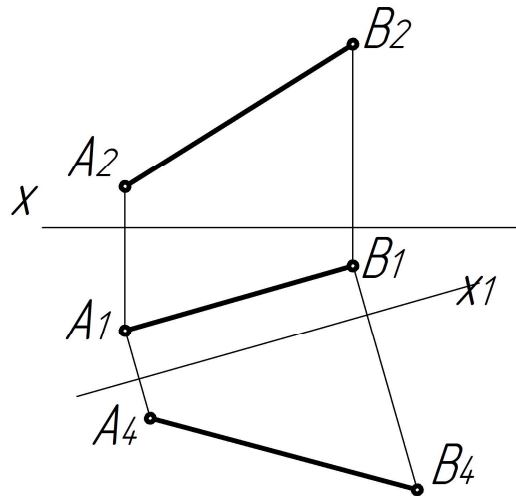


Рис. 5.5

1. Спосіб заміни площин проєкцій
2. Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярної до площин проєкцій
3. Спосіб плоско-паралельного переміщення
4. Спосіб сфер

2. Яким способом знайдено справжню величину прямої  $AB$ ?

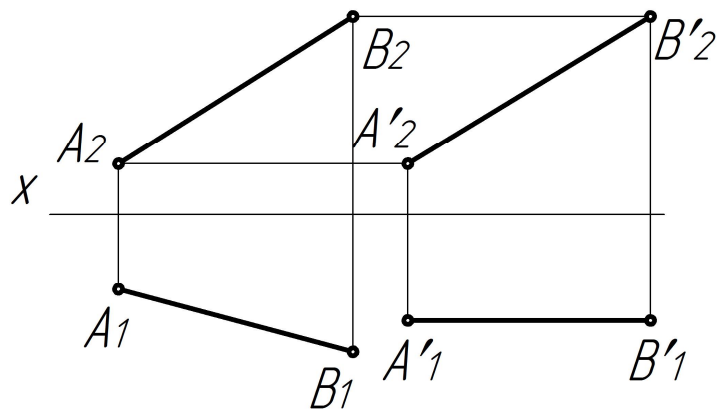


Рис. 5.6

1. Спосіб заміни площин проєкцій
2. Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярної до площин проєкцій
3. Спосіб плоско-паралельного переміщення
4. Спосіб сфер

3. Яким способом знайдено справжню величину прямої  $AB$ ?

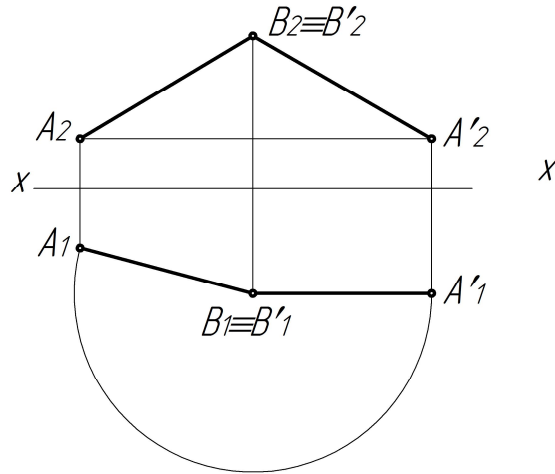


Рис. 5.7

1. Спосіб заміни площин проєкцій
2. Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проєкцій
3. Спосіб плоско-паралельного переміщення
4. Спосіб сфер

4. На якому з рисунків натуральну величину відрізка  $AB$  знайдено способом заміни площин проєкцій?

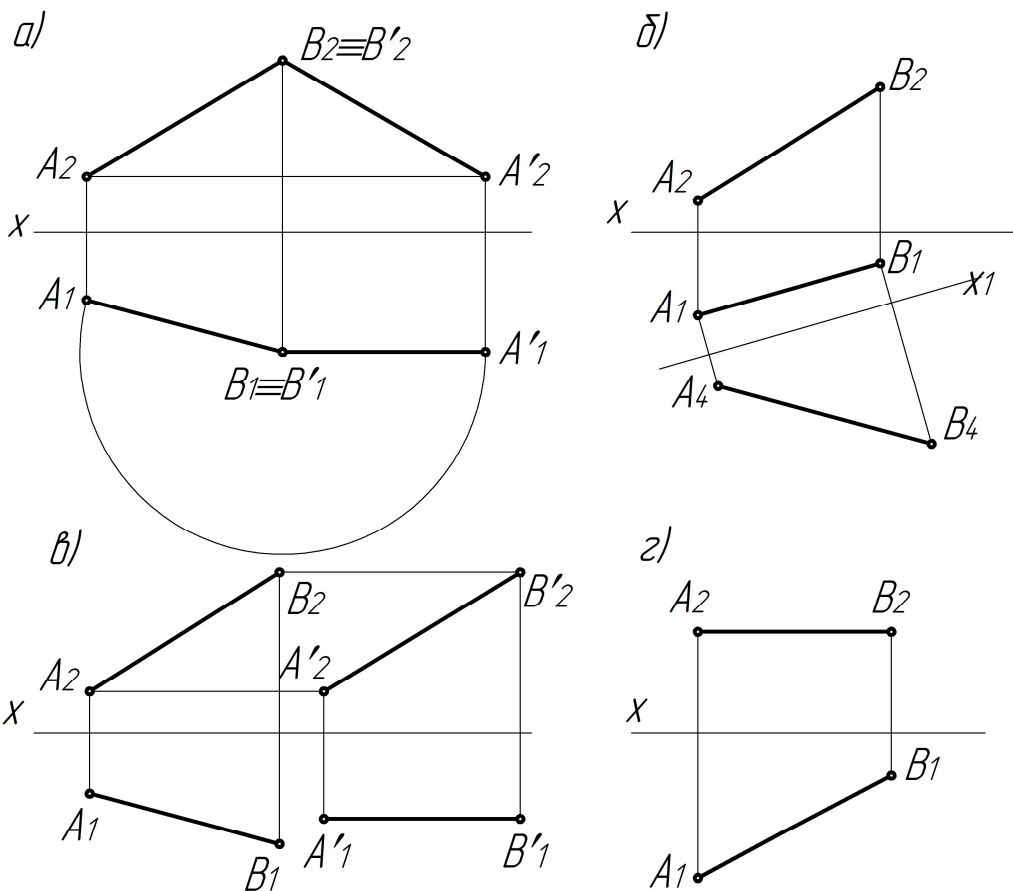


Рис. 5.8

5. На якому з рисунків натуральну величину відрізка  $AB$  знайдено способом плоско-паралельного переміщення (рисунок 5.8)?

а)      б)      в)      г)

6. На якому з рисунків натуральну величину відрізка  $AB$  знайдено способом обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проєкцій (рисунок 5.8)?

а)      б)      в)      г)

## 6. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ МНОГОГРАННИКІВ

**Многогранник** це – просторова фігура (тіло) обмежена з усіх боків від навколишнього простору плоскими багатокутниками – гранями. Суміжні грані перетинаються по ребрам, ребра сходяться в точках – вершинах многогранника.

Многогранник називається випуклим, якщо він розташований тільки з одного боку площини або будь-якої своєї грані.

Многогранні форми широко застосовуються в різних областях техніки, в будівництві, машинобудуванні, приладобудуванні, технічній оптиці та ін. Більшість частин будівель, прогонних споруд мостів, берегових опор є многогранниками.

В короткому курсі нарисної геометрії обмажемося розглядом найпростіших многогранників призм та пірамід, представників яких показано на рисунку 6.1, та які вивчаються в середній школі.

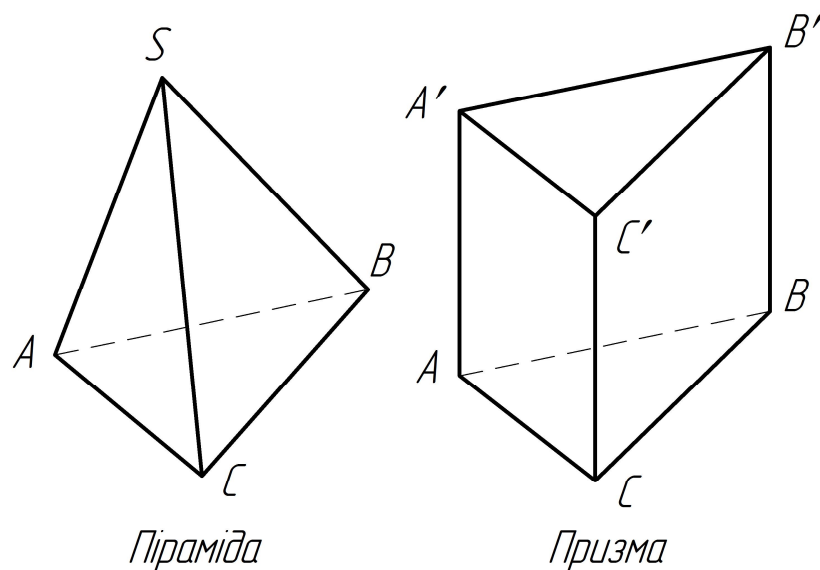


Рис. 6.1

Для таких многогранників введені поняття бокових граней та основ (хоча основа – це теж грань). У піраміді бокові грані  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCA$  (див.

рис. 6.1) завжди трикутники, у призми – паралелограми, або прямокутники (у випадку коли ребра призми перпендикулярні площинам основ призми).

Основою призми та піраміди можуть бути будь-які плоскі багатокутники. В залежності від форми основи розрізняють трикутні, чотирикутні, і т. д. призми і піраміди.

## 6.1. КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ МНОГОГРАННИКІВ

На комплексному рисунку многогранник задається проекціями своїх вершин та ребер з визначенням їх видимості.

На комплексному рисунку (рис. 6.2) задано чотирикутну піраміду  $SABCD$  двома проекціями  $S_1A_1B_1C_1D_1$  та  $S_2A_2B_2C_2D_2$ . Розглянемо питання: як визначити видимість проекцій його ребер і граней? Якщо на комплексному рисунку задамо один многогранник, то очевидно, що зовнішні контури його проекцій завжди видимі, бо не задано іншої фігури, яка закривала ці контури. Це означає, що питання видимості треба розглядати для проекцій тих ребер, які знаходяться у середині контуру проекцій многогранника.

Визначення видимості ребер та граней многогранника розглянемо на прикладі піраміди (рис. 6.2).

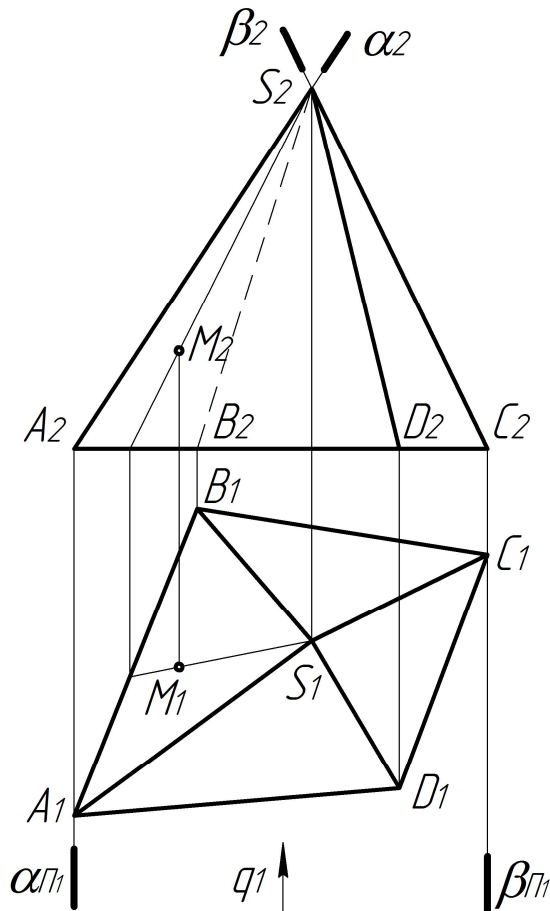


Рис. 6.2

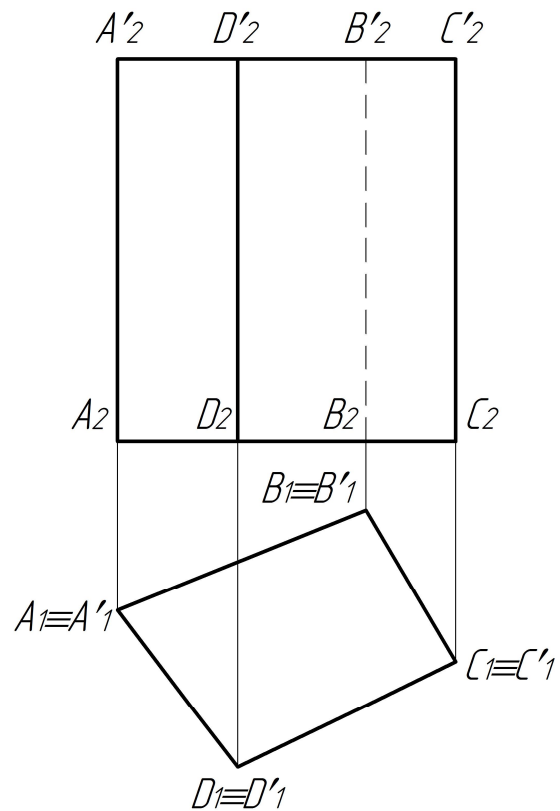


Рис. 6.3

Щоб визначити видимість фронтальних проекцій  $S_2B_2$  та  $S_2D_2$  ребер піраміди, які розташовані у середині контуру її фронтальної проекції, проведемо через контурні ребра  $SA$  та  $SC$  фронтально проектуючі площини  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. Разом з площиною основи піраміди вони утворюють контурну фронтально-проектуючу трикутну призму. Визначимо горизонтальні проекції бокових граней піраміди, які видимі чи невидимі на фронтальній проекції піраміди. Горизонтальна проекція  $A_1S_1C_1$  контуру видимості ділить горизонтальну проекцію піраміди на дві частини – передню по відношенню до фронтальної площини проекцій і задню. Оскільки напрямок проектування (погляду) визначається фронтально проектуючою прямою  $g$ , то на фронтальній проекції піраміди будуть видимі  $SAD$  і  $SDC$  бо вони лежать на передній частині піраміди, а грані  $SAB$  і  $SBC$  – невидимі, як такі, що лежать на задній, невидимій частині піраміди. Тому фронтальна проекція  $S_2B_2$ , як невидима зображена штриховою лінією. Відповідно будь-яка точка чи лінія, що лежить на гранях  $SAB$  та  $SBC$  на фронтальній площині піраміди буде невидима. Наприклад, точка  $M$ , задана на поверхні піраміди на фронтальній проекції піраміди буде невидима. Відповідно будь-яка фігура, що лежить на видимих гранях  $SAD$  і  $SDC$  матиме видиму фронтальну проекцію. Щодо видимості граней піраміди на горизонтальній проекції, то аналізуючи (читаючи) її фронтальну проекцію доходимо до висновку, що всі її бокові грані видимі бо вершина піраміди розташована над основою піраміди. Невидима буде лише основа піраміди.

Висновок: щоб визначити видимість елементів фігури на одній площині проекцій аналізуємо (читаємо) розташування її елементів відносно цієї площини проекцій на другій проекції фігури.

Всі побудови пов'язані з визначенням видимості ребер і граней многогранників треба навчитись виконувати подумки. Для цього треба мати необхідні уміння та навички, яких можна досягнути тільки розв'язанням прикладів, задач, тестів.

На рисунку 6.3 задано чотирикутну призму, у якій ребра та грані перпендикулярні до основ призми, а площини основ паралельні до горизонтальної площини проекцій. Не проводячи ніяких побудов, але знаючи і пам'ятаючи напрямок проектування на фронтальну площину проекцій і аналізуючи розташування горизонтальної проекції призми відносно напрямку проектування та фронтальної площини проекцій доходимо до висновку, що фронтальні проекції  $A_2A_2'D_2D_2'$  та  $D_2D_2'C_2C_2'$  видимі, а інші дві грані і ребро  $B_2B_2'$  – невидимі.

## 6.2 ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКІВ ПЛОЩИНОЮ

При перерізі многогранника площиною утворюється плоска фігура – многокутник. Вершинами цього многокутника-перерізу є точки перетину ребер многогранника з січною площиною, а сторонами відрізки прямих по

яких січна площина перетинає грані многогранника. Отже для побудови перерізу треба, знайти або точки перетину кожного ребра многогранника з січною площиною, або прямі перетину кожної грані з цією ж площиною, тобто неодноразово розв'язати відомі задачі на перетин прямої з площиною та перетин двох площин.

Спочатку розглянемо переріз многогранника проектуючою площиною. Чотирикутна піраміда  $SABCD$  (рис. 6.4) перерізається фронтально – проектуючою площиною  $\alpha$ , заданою виродженою проекцією  $\alpha_2$ . У цьому випадку фронтальна проекція перерізу наперед відома. Вона співпадає з відрізком виродженої проекції  $\alpha_2$ . Кінці цього відрізка є точки перетину  $\alpha_2$  з зовнішнім контуром фронтальної проекції піраміди.

Спочатку визначимось яким буде многокутник, що утворюється в перерізі, скільки в нього буде вершин? Їх буде стільки, скільки ребер перетне площина  $\alpha$ . Підрахуємо їх кількість, читаючи фронтальну проекцію. Почнемо з ребра  $SD$ .

$$S_2D_2 \cap \alpha_2 = 1_2. \quad S_2C_2 \cap \alpha_2 = 2_2. \quad 1_2 \equiv 2_2, \text{ бо } S_2D_2 \equiv S_2C_2.$$

$$S_2B_2 \cap \alpha_2 = 3_2.$$

$$A_2B_2 \cap \alpha_2 = 4_2. \quad A_2D_2 \cap \alpha_2 = 5_2. \quad 4_2 \equiv 5_2,$$

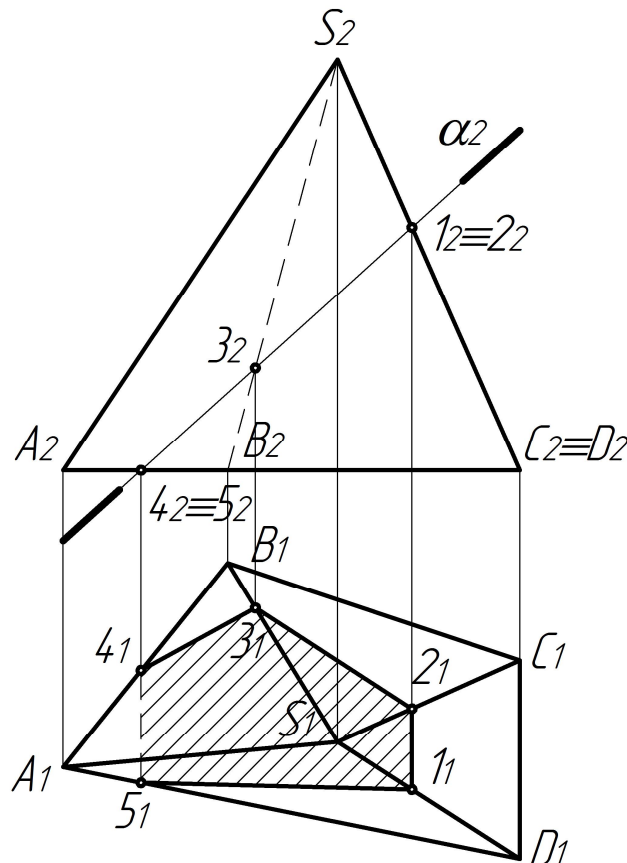


Рис. 6.4

Отже фігурою перерізу буде п'ятикутник. Побудувавши горизонтальну проекцію отримаємо п'ятикутник  $1_12_13_14_15_1$ .

Якщо многогранник перетинається горизонтально-проектуючою площиною то підрахунок вершин фігури перерізу ведуть на горизонтальній проекції аналогічно.

Натуральну величину перерізу фігури можна знайти способом заміни площин проєкцій (рис. 6.5). Нова площина проєкцій  $\Pi_5$  паралельна до площини  $\alpha$  і перпендикулярна до  $\Pi_2$  (нова ось  $x_1$  паралельна  $\alpha$ ). Відстань від нової осі  $x_1$  до точок  $1_5, 2_5, 3_5, 4_5, 5_5$  така ж як і від старої осі  $x$  до точок  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$  відповідно.

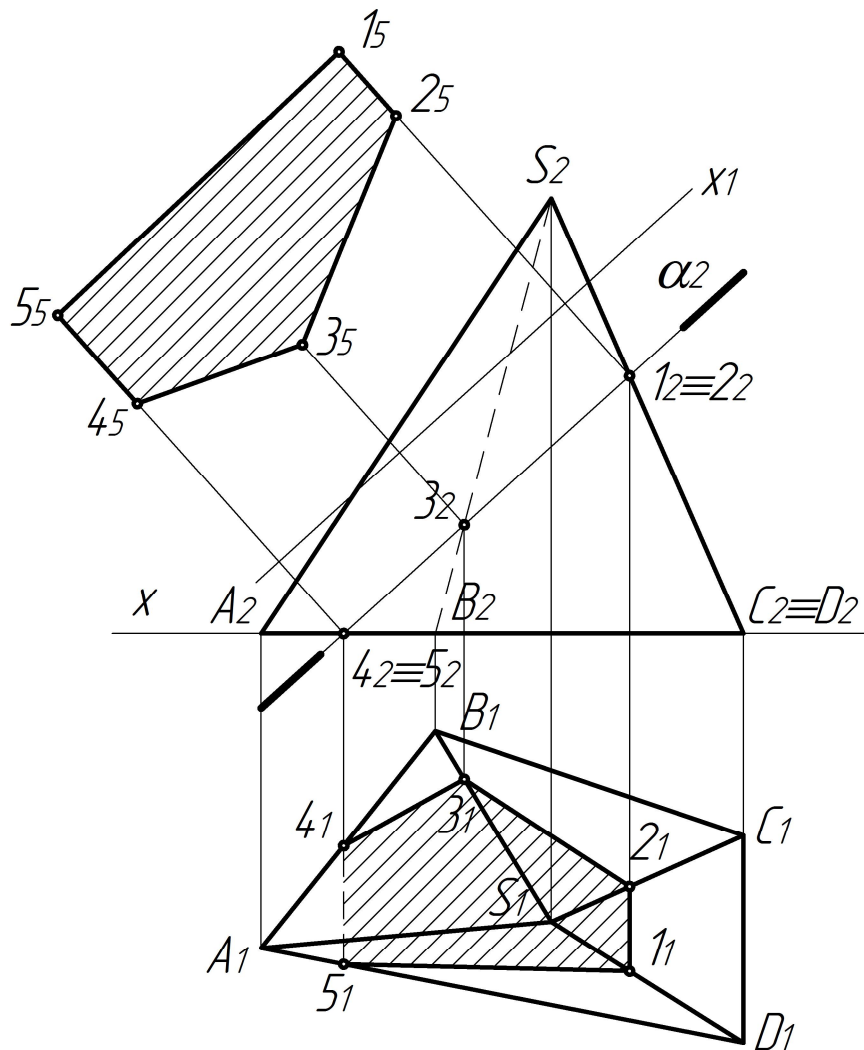


Рис. 6.5

Натуральну величину перерізу також можна знайти способом плоско-паралельного переміщення (рис. 6.6). При цьому вироджена проєкція перерізу  $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$  переміщується в положення паралельно до осі  $x$  ( $1'_2 2'_2 3'_2 4'_2 5'_2$ ).

Натуральну величину перерізу піраміди можна побудувати і методом обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини проєкцій. Обираємо ось обертання, що проходить через точки  $4$  і  $5$  січної площини  $\alpha$ . Січна площина обертається до положення паралельного до горизонтальній площині проєкцій. З фронтальних проєкцій точок перерізу проводимо лінії

проекційного зв'язку перпендикулярно до осі проєкцій  $x$ , з горизонтальних – паралельно осі  $x$  (рис. 6.7).

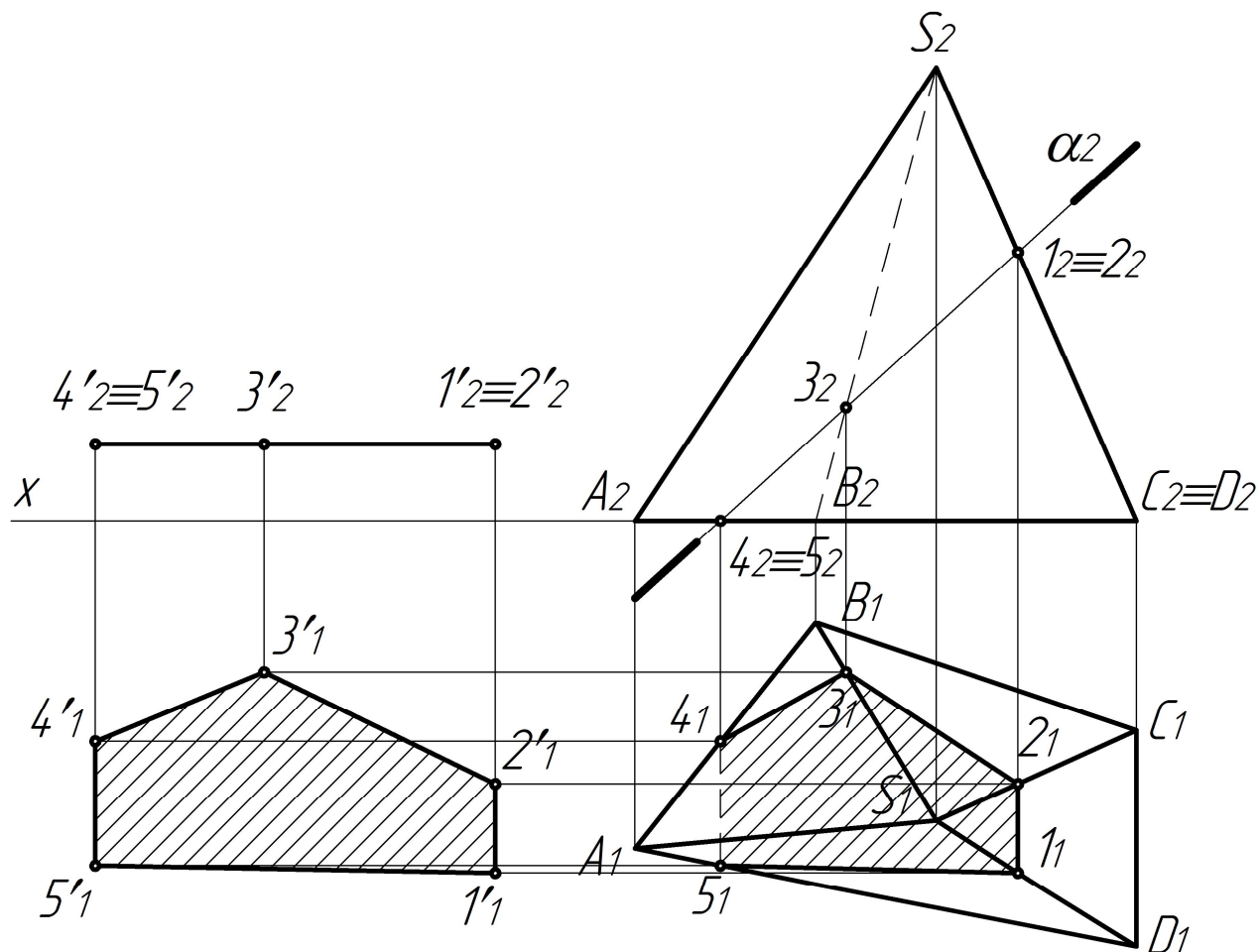


Рис. 6.6

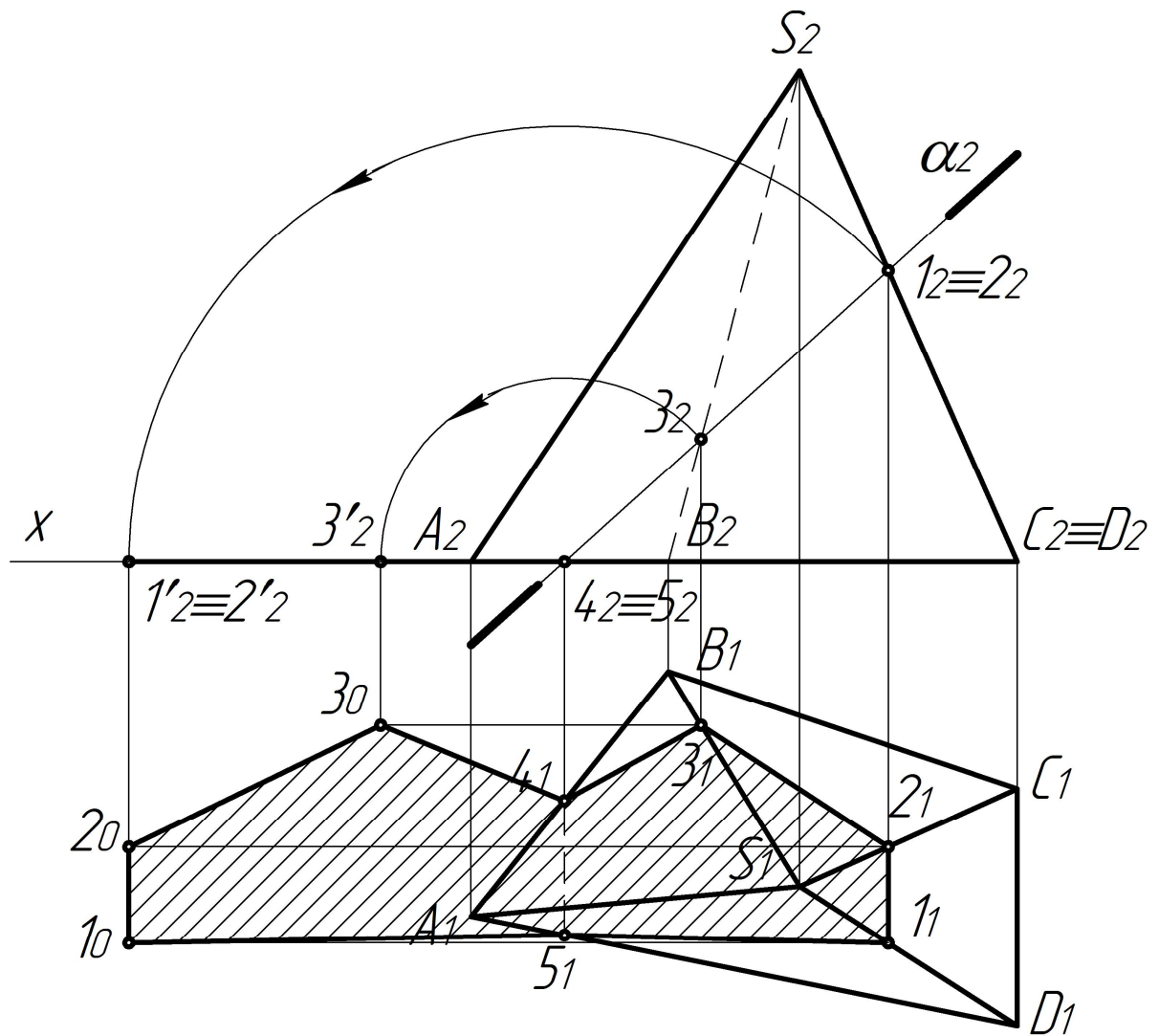


Рис. 6.7

Тепер розглянемо перетин многогранника площиною загального положення. На рисунку 6.8 задано трикутну піраміду  $SABC$  ( $S_1A_1B_1C_1$ ,  $S_2A_2B_2C_2$ ) та площину загального положення  $\alpha$  ( $m//n$ ) двома паралельними прямими – горизонталями. Для побудови фігури перерізу можна застосувати два варіанти. За першим знаходять точки перетину ребер піраміди з січною площиною, тобто неодноразово застосовують розв'язання задачі на визначення точки перетину прямої з площиною за відомим алгоритмом:

1.  $SA \subset \sigma$ ,  $\sigma \perp \Pi_1$ ,  $\sigma_1 \equiv S_1A_1$  (зключаємо  $SA$  в горизонтально-проектуючу площину).
2.  $\sigma \cap \alpha = MN$  (будуємо допоміжну пряму  $MN$  перетину площин  $\sigma$  та  $\alpha$ ).
3.  $MN \cap SA = I$  (точка перетину  $I$  прямих  $MN$  та  $SA$  – є точка перетину ребра  $SA$  з площиною  $\alpha$ ).

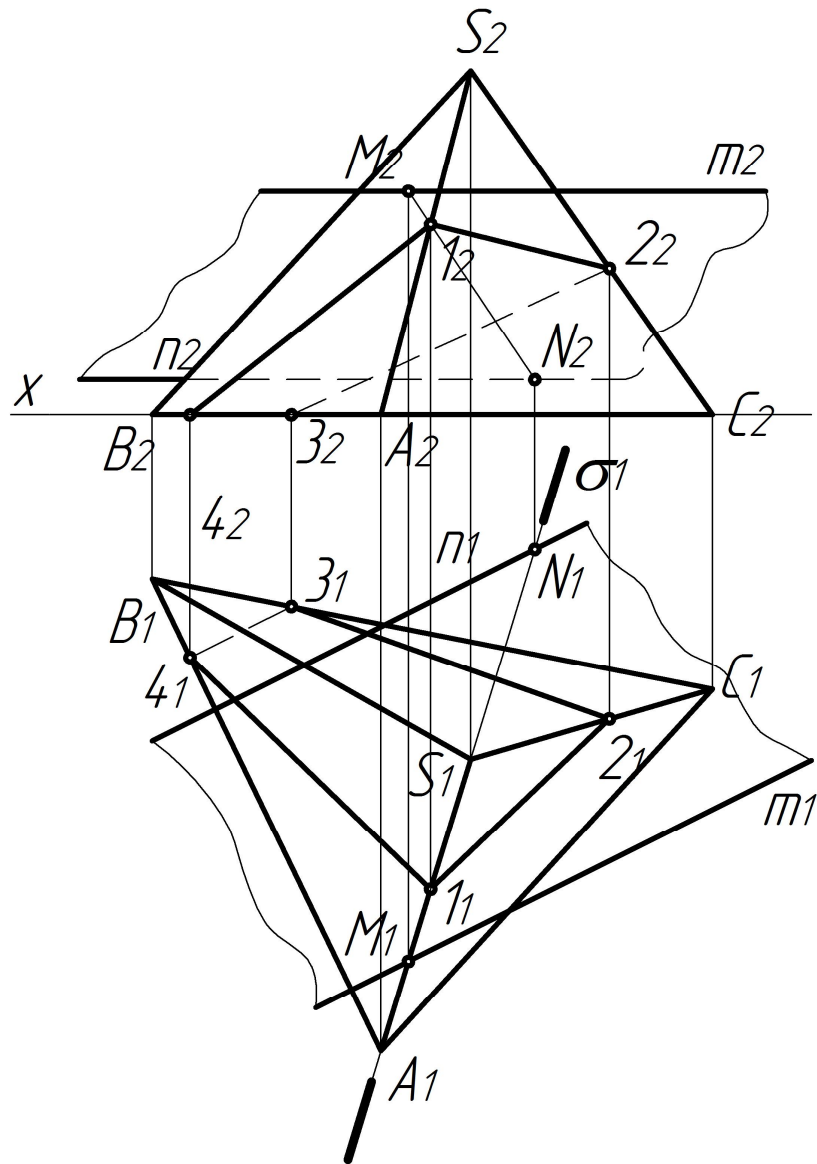


Рис. 6.8

Точки перетину інших ребер піраміди з січною площиною знаходяться аналогічно і являються вершинами багатокутника-перерізу.

За другим варіантом комплексний рисунок перетворюють, наприклад способом заміни площин проєкцій (рис. 6.9), так, щоб січна площина стала проєктуючою. В прикладі, що розглядається, замінюємо площину  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ .  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  і  $\Pi_4 \perp \alpha$ ,  $x_1 \perp m_1$  і  $n_1$ . В системі площин проєкцій  $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$  площина  $\alpha$  стала проєктуючою відносно  $\Pi_4$  і зображується на ній виродженою проєкцією  $\alpha_4$ . Таким чином, задача побудови перерізу звелася до випадку попереднього прикладу. Тепер можемо на новій проєкції піраміди  $S_4A_4B_4C_4$  і січній площині  $\alpha_4$  підрахувати скільки ребер перетинає площина  $\alpha$ , тобто скільки вершин має багатокутник-переріз. Зворотнім проєктуванням проєкцій вершин  $1_42_43_44_4$  отримаємо їх горизонтальні та фронтальні проєкції.

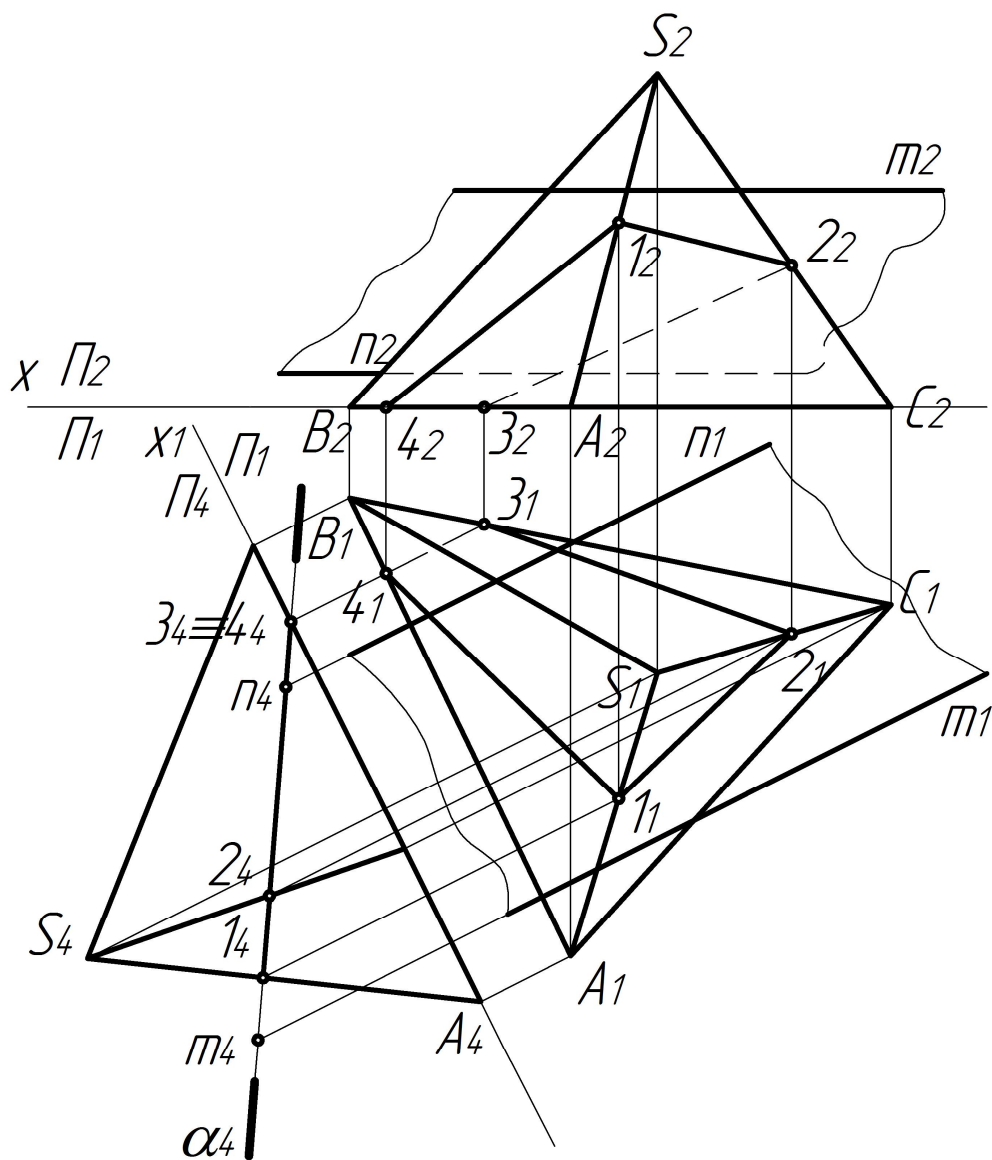


Рис. 6.9

### 6.3 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ

Лінія перетину поверхонь двох многогранників це просторовий многокутник (просторова ламана лінія) сторонами якого є відрізки прямих перетину граней многогранників, а вершинами – точки перетину ребер одного многогранника з гранями іншого і навпаки.

В залежності від взаємного розташування многогранників лінія перетину їх поверхонь може розпадатись на дві частини.

Для побудови лінії перетину поверхонь многогранників треба будувати точки перетину ребер одного многогранника з гранями іншого і навпаки, тобто неодноразово розв'язувати задачу побудови точки перетину прямої з площиною (гранню). Це будуть вершини лінії перетину. Можна будувати відрізки по яким перетинаються грані многогранників, тобто неодноразово

розв'язувати задачу побудови лінії перетину двох площин. Це будуть сторони лінії перетину. Найчастіше ці два способи застосовують комплексно.

Розглянемо наприклад побудову лінії перетину поверхонь двох многогранників. На рисунку 6.10 задані трикутна піраміда і чотирикутна призма. Читаємо комплексний рисунок і усвідомлюємо план розв'язання задачі.

Ребра і грані призми являються фронтально-проектуючими. Тому фронтальна проекція призми вироджується в чотирикутник  $d_2l_2f_2m_2$ , частина якого, що знаходиться у середині контуру  $S_2A_2B_2C_2$  фронтальної проекції піраміди, є фронтальною проекцією лінії перетину призми і піраміди. Залишається побудувати її горизонтальну проекцію.

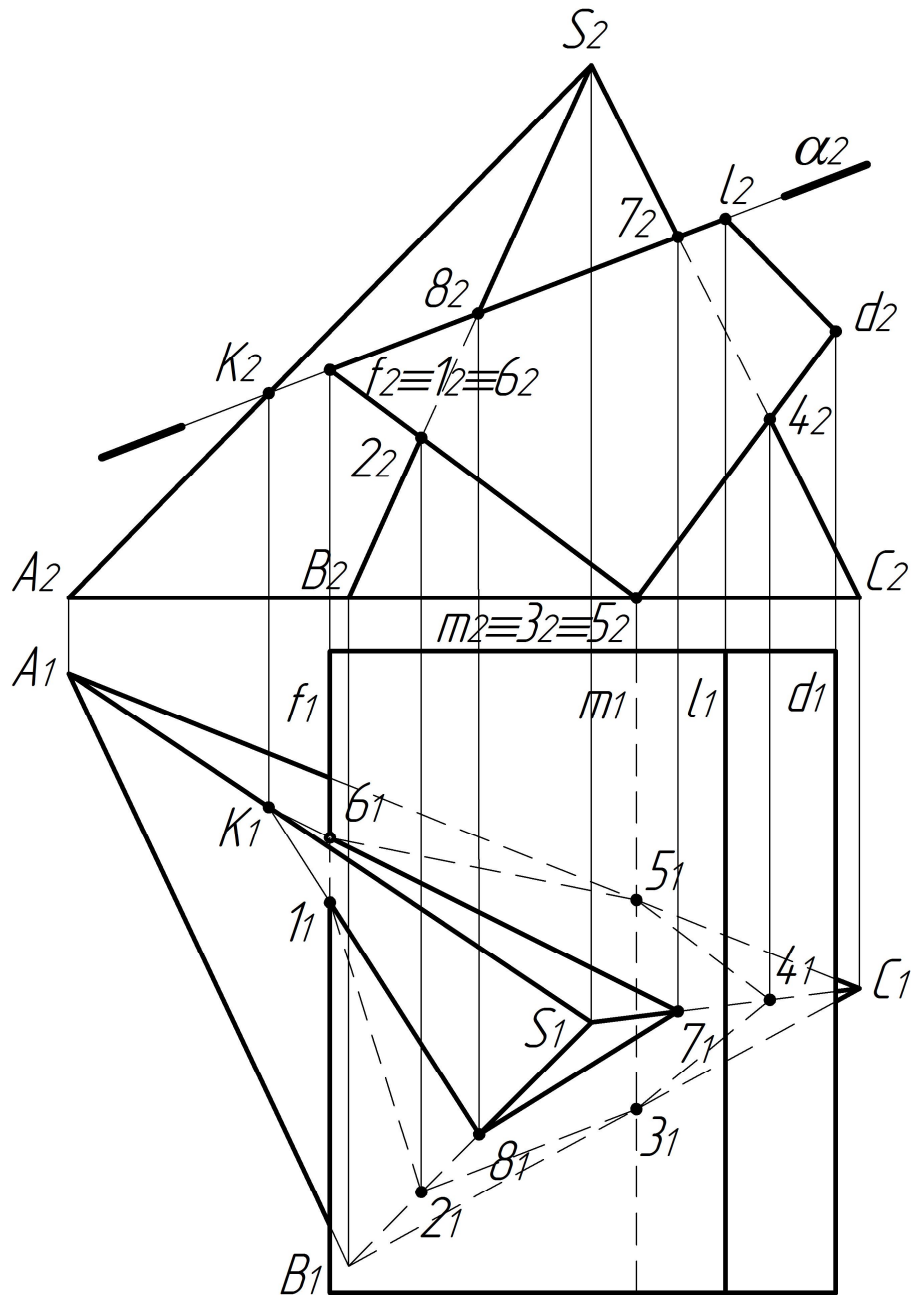


Рис. 6.10

Позначимо ліву верхню грань призми  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ).

1.  $\alpha \cap SABCS = \Delta K78$

2.  $f \cap \Delta K78 = 1,6$  ;  $f_1 \cap K_17_18_1 = 1,6_1$ ;

Л.з.  $8 \cap \Delta K_17_18_1 = 8_1$ ; Л.з.  $7 \cap \Delta K_17_18_1 = 7_1$

Проекції  $6_17_18_11_1$  визначають частину горизонтальної проекції перетину призми і піраміди, яка лежить на грані піраміди  $f_1 // l_1$ . Частини лінії перетину, що утворюються в інших двох гранях визначаються аналогічно. З'єднавши отримані горизонтальні проекції точок лінії перетину відповідними відрізками отримаємо горизонтальну проекцію  $1_12_13_14_15_16_17_18_11_1$  лінії перетину заданих многогранників. Видимими будуть тільки ті проекції відрізків, що лежать на видимих гранях обох многогранників.

## 6.4 РОЗГОРТКИ МНОГОГРАННИКІВ

*Розгорткою многогранника* називається плоска фігура, яка утворюється суміщенням його граней в одну площину послідовним обертанням кожної грані многогранника навколо спільного ребра. Кожна грань на розгортці зображується в натуральну величину.

Побудову розгорток многогранників розглянемо на прикладах призми і піраміди заданих у попередньому прикладі (див. рис. 6.11). Для кращого усвідомлення процесу побудови розгортки призми перекреслимо її проекції окремо (без піраміди) з проекціями ліній перетину  $12345678$ . Позначимо, для зручності подальшого викладу, вершини однієї із основ (передньої) літерами  $MDLF$ . Будемо говорити, наприклад, грань  $MD$  – її фронтальна проекція  $M_2D_2 = H.v. MD$ . Навколо ребра  $m$  повернемо грань  $MD$  суміщенням з горизонтальною площиною проекцій. Це суміщене положення переносимо на вільне місце креслення, тобто будуємо прямокутник  $MDD'M'$ , у якому  $MD = M_2D_2$  – ширина грані, а  $MM' = DD'$  – довжина бокового ребра. Для побудови точки  $4$ , що лежить на цій грані проводимо на відстані  $m_24_2$  від ребра  $MM'$  пряму паралельну ребрам грані і відкладаємо на ній відстань від проекції  $4_1$  до основи піраміди. Далі обертаємо грань  $DL$  навколо ребра  $d$  до суміщення з площиною попередньої грані, потім грань  $FL$  навколо ребра  $l$  і грань  $FM$  навколо ребра  $f$ . Отримуємо розгортку бокової поверхні призми. Якщо до будь-якої сторони основи призми, наприклад, до  $LF$ , як на рисунку, добудувати передню та задню основи, то матимемо повну розгортку призми.

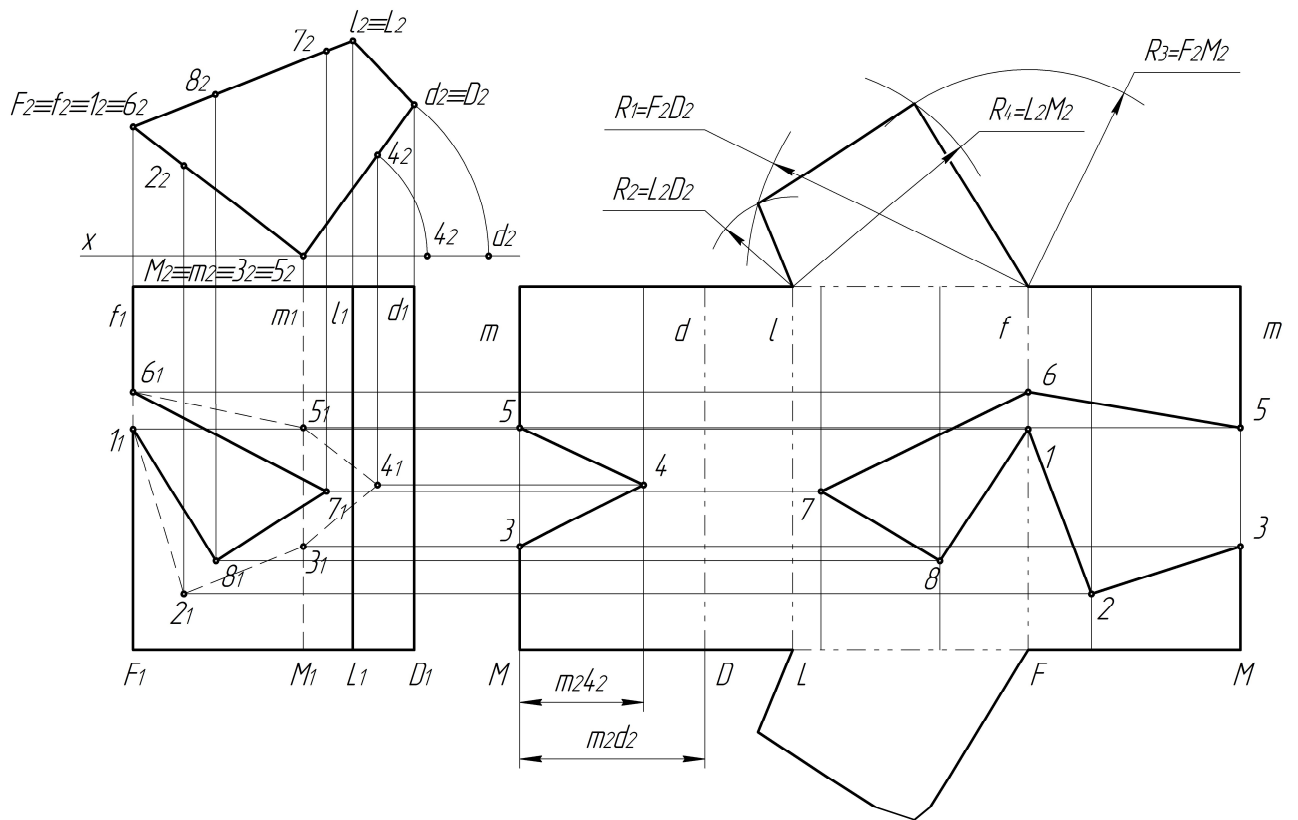


Рис. 6.11

Для побудови розгортки піраміди перекреслимо її проєкції з рисунка 6.10 (рис. 6.12). Читаючи комплексний рисунок піраміди зазначимо, що тільки сторони основи піраміди на горизонтальній проєкції зображаються в натуральну величину. Бокові ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , як відрізки прямих загального положення, спотворюються. Треба визначити натуральні величини цих ребер. Зробити це можна будь-яким способом. У даному випадку доцільно скористатись способом плоско-паралельного переміщення. Перемістимо горизонтальні проєкції  $S_1A_1$ ,  $S_1B_1$ ,  $S_1C_1$ , без зміни їх довжин, в довільне місце осі  $x$   $S_1'A_1'$ ,  $S_1'B_1'$ ,  $S_1'C_1'$ . Фронтальна проєкція  $S_2$  вершини піраміди переміщується в положення  $S_2'$ . Відрізки  $S_2'A_1'$ ,  $S_2'B_1'$ ,  $S_2'C_1'$  визначають натуральні величини ребер піраміди. Будуємо на цих відрізках проєкції  $2_2'$ ,  $4_2'$ ,  $7_2'$ ,  $8_2'$  точок, що належать лінії перетину. Переходимо до побудови розгортки піраміди.

На будь-якому вільному від побудов місці креслення призначаємо вершину  $S$  піраміди на майбутній її розгортці. Будуємо за трьома сторонами трикутник  $SAB$ , де  $SA = S_2'A_1'$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $SB = S_2'B_1'$ . Маємо натуральну величину  $SAB$  бокової грані піраміди. Аналогічно будуємо грані  $SBC$  і  $SCA$  і маємо розгортку бокової поверхні піраміди  $SABCAS$ . Добудуємо на будь-якій стороні основи, наприклад  $AC$ , основу піраміди  $ABC = A_1B_1C_1$  і отримаємо повну розгортку поверхні піраміди.

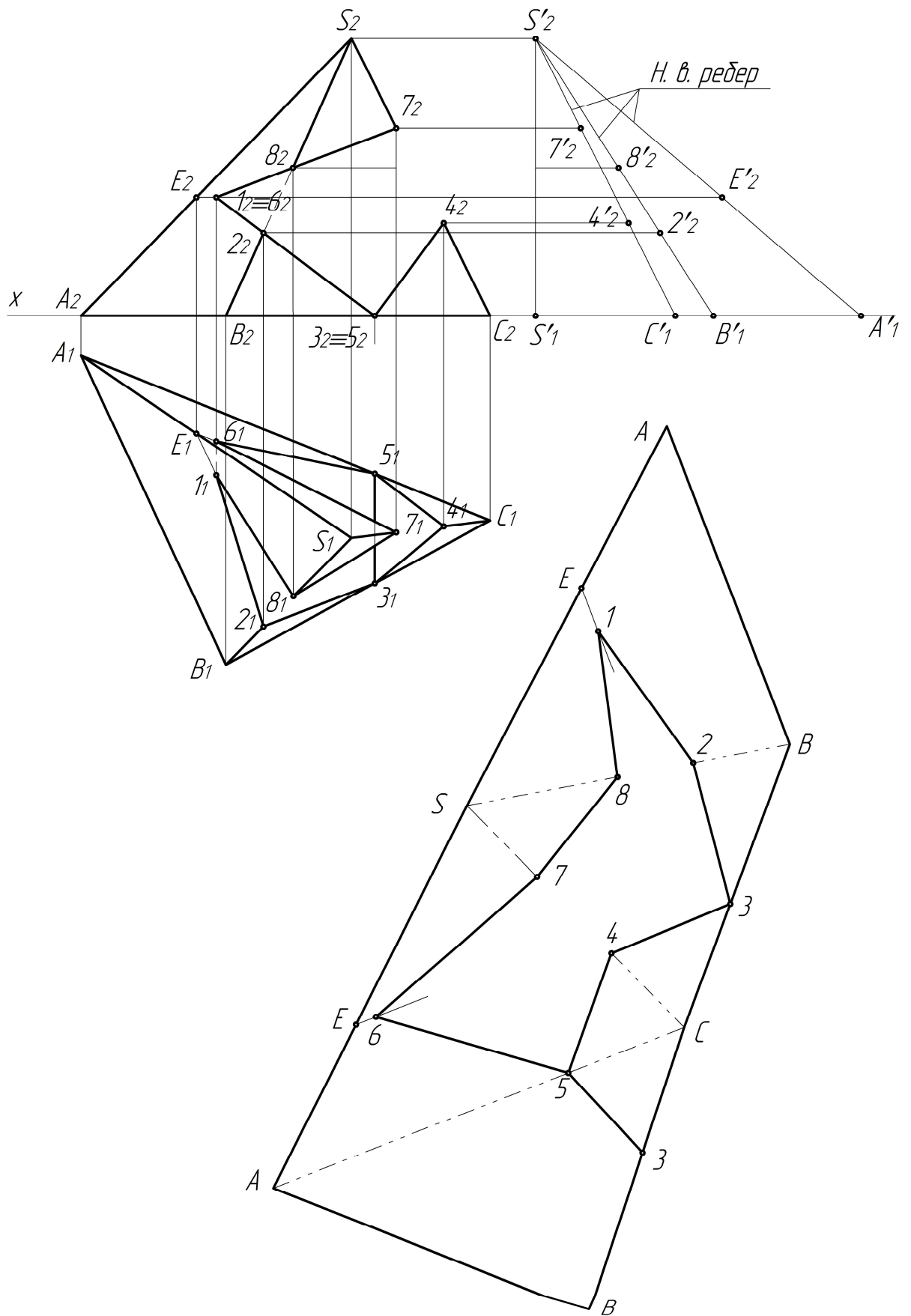


Рис. 6.12

Для нанесення на розгортку лінії перетину, спочатку будуюмо її точки, що лежать на ребрах і сторонах основи, відкладанням відповідних відстаней

від вершини  $S$ . А саме: на ребрі  $SB - S2 = S_2'2_2'$ ,  $S8 = S_2'8_2'$ , на ребрі  $SC - S4 = S_2'4_2'$ , на стороні основи  $C3 = C_13_1$ ,  $C5 = C_15_1$ .

Щодо побудови точок  $1$  і  $6$ , що не лежать на ребрах піраміди, то можемо, наприклад, через точку  $1$  провести горизонталь на грані  $SAB$ , яка перетне ребро  $SA$  в точці  $E$ . Горизонтальна проекція горизонталі проходить через проекцію  $E_1$  паралельно до  $A_1B_1$ . Фронтальну проекцію  $E_2$  перенесемо в положення  $E_2'$  на натуральній величині  $S_2'A_1'$  ребра  $SA$ . Знаходимо на розгортці точку  $E$ , відклавши відрізок  $SE = S_2'E_2'$ . Через точку  $E$  на розгортці проведемо пряму паралельну до сторони  $AB$ . Від точки  $E$  на цій прямій відкладаємо відрізок  $E1 = E_11_1$ . Точку  $6$  будемо аналогічно. З'єднуючи знайдені точки лінії перетину в тому порядку, в якому вони з'єднані на комплексному рисунку піраміди, отримаємо лінію перетину нанесену на розгортку піраміди.

Відзначимо, що на практиці окремо кожну проекцію не перекреслюють, а всі побудови здійснюють на комплексному рисунку, де зображені обидві поверхні разом. Тут, як було зазначено вище, це зроблено для кращого усвідомлення процесу побудови розгортки.

### ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ

1. Скільки ребер піраміди є прямими загального положення?

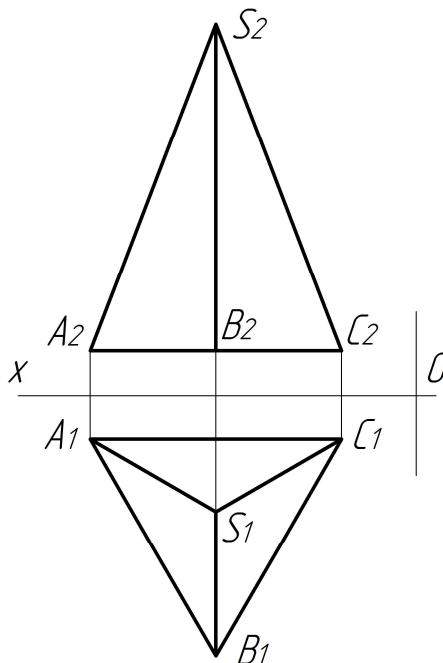


Рис. 6.13

1. 0

2. 2

3. 3

4. 1

2. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є горизонтальними прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
3. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є профільними прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
4. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є фронтальними прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
5. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 проєктуються в натуральну величину на всі площини проєкцій?
1. 4                      2. 2                      3. 3                      4. 1
6. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є горизонтально-проєктуючими прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
7. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є фронтально-проєктуючими прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
8. Скільки ребер піраміди на рисунку 6.13 є профільно-проєктуючими прямими?
1. 0                      2. 2                      3. 3                      4. 1
9. Яка з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташована як далі від горизонтальної площини проєкцій?
1. *A*                      2. *B*                      3. *C*                      4. *S*
10. Яка з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташована як далі від профільної площини проєкцій?
1. *A*                      2. *B*                      3. *C*                      4. *S*
11. Яка з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташована ближче до профільної площини проєкцій?
1. *A*                      2. *B*                      3. *C*                      4. *S*
12. Яка з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташована як далі від фронтальної площини проєкцій?
1. *A*                      2. *B*                      3. *C*                      4. *S*
13. Які з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташовані ближче до фронтальної площини проєкцій?
1. *A, B*                      2. *B, C*                      3. *B, S*                      4. *A, C*
14. Які з вершин піраміди на рисунку 6.13 розташовані ближче до горизонтальної площини проєкцій?
1. *A*                      2. *B*                      3. *C*                      4. *S*

15. Скільки граней піраміди на рисунку 6.13 є площинами загального положення?

1. 1                    2. 0                    3. 2                    4. 3

16. Скільки граней піраміди (рис. 6.13) є площинами рівня?

1. 1                    2. 0                    3. 2                    4. 3

17. Скільки граней піраміди (рис. 6.13) є проектуючі?

1. 1                    2. 0                    3. 2                    4. 3

18. Скільки граней має зображений многогранник?

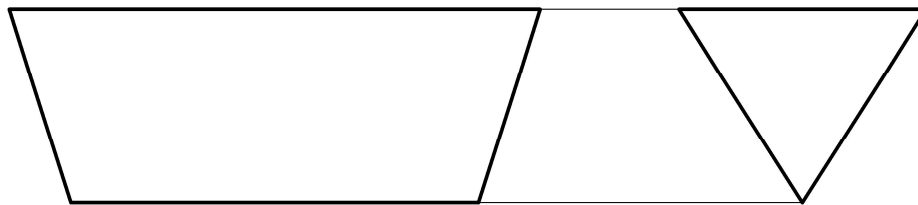


Рис. 6.14

1. 6                    2. 5                    3. 4                    4. 7

19. Скільки граней загального положення має многогранник на рисунку 6.14?

1. 0                    2. 1                    3. 2                    4. 3

20. Скільки горизонтальних граней має многогранник на рисунку 6.14?

1. 0                    2. 1                    3. 2                    4. 3

21. Скільки фронтальних граней має многогранник на рисунку 6.14?

1. 4                    2. 0                    3. 2                    4. 1

22. Скільки ребер має многогранник на рисунку 6.14?

1. 8                    2. 6                    3. 9                    4. 7

23. Скільки профільно-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.14?

1. 0                    2. 2                    3. 3                    4. 4

24. Скільки горизонтально-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.14?

1. 0                    2. 2                    3. 3                    4. 1

25. Скільки фронтально-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.14?

1. 0                    2. 2                    3. 3                    4. 1

26. Скільки ребер загального положення має многогранник на рисунку 6.14?

1. 1                    2. 2                    3. 3                    4. 4

27. Скільки вершин має многогранник на рисунку 6.14?

1. 4      2. 5      3. 6      4. 7

28. Скільки ребер має зображений многогранник?

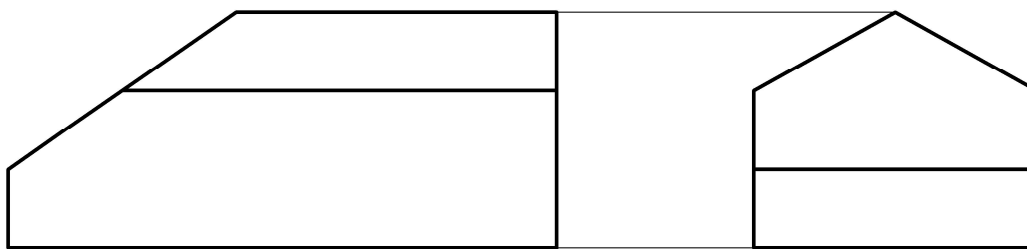


Рис. 6.15

1. 20      2. 22      3. 18      4. 25

29. Скільки вершин має многогранник на рисунку 6.15?

1. 14      2. 10      3. 12      4. 11

30. Скільки профільно-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 2      2. 4      3. 6      4. 5

31. Скільки горизонтально-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 2      2. 4      3. 6      4. 5

32. Скільки фронтально-проектуючих ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 3      2. 4      3. 5      4. 6

33. Скільки ребер загального положення має многогранник на рисунку 6.15?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

34. Скільки горизонтальних ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 7      2. 8      3. 6      4. 9

35. Скільки фронтальних ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 7      2. 9      3. 10      4. 11

36. Скільки профільних ребер має многогранник на рисунку 6.15?

1. 7      2. 9      3. 10      4. 8

37. Скільки граней загального положення має многогранник на рисунку 6.15?

1. 2      2. 0      3. 1      4. 3

38. Скільки горизонтально-проектуючих граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 6      2. 3      3. 4      4. 2

39. Скільки фронтально-проекуючих граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 5      2. 3      3. 4      4. 2

40. Скільки профільно-проекуючих граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 6      2. 3      3. 4      4. 5

41. Скільки горизонтальних граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 0      2. 3      3. 1      4. 2

42. Скільки фронтальних граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 0      2. 3      3. 1      4. 2

43. Скільки профільних граней має многогранник на рисунку 6.15?

1. 0      2. 3      3. 1      4. 2

44. Скільки ребер має многогранник, який зображено на рисунку?

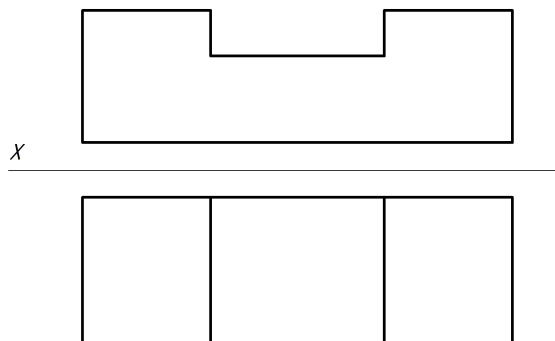


Рис. 6.16

1. 16      2. 20      3. 24      4. 18      5. 22

45. Скільки вершин має многогранник на рисунку 6.16?

1. 12      2. 16      3. 15      4. 18

46. Скільки граней має многогранник на рисунку 6.16?

1. 12      2. 16      3. 15      4. 10

47. Скільки граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

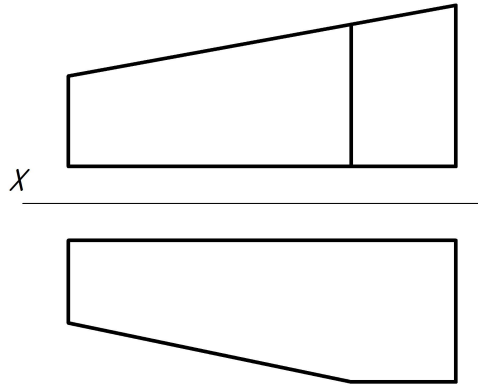


Рис. 6.17

1. 8      2. 7      3. 6      4. 9

48. Скільки горизонтальних граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

49. Скільки фронтальних граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

50. Скільки профільних граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

51. Скільки профільно-проектуючих граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

52. Скільки горизонтально-проектуючих граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 5      2. 1      3. 2      4. 3

53. Скільки фронтально-проектуючих граней має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 4      3. 2      4. 3

54. Скільки граней загального положення має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 0      2. 1      3. 2      4. 3

55. Скільки ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 17      2. 18      3. 15      4. 16

56. Скільки фронтально-проектуючих ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 2      2. 4      3. 5      4. 6

57. Скільки профільно-проектуючих ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 2      2. 4      3. 5      4. 3

58. Скільки ребер загального положення має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 2      2. 0      3. 1      4. 3

59. Скільки горизонтально-проектуючих ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 6      2. 4      3. 5      4. 7

60. Скільки горизонтальних ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 6      2. 4      3. 5      4. 7

61. Скільки фронтальних ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 6      2. 9      3. 5      4. 7

62. Скільки профільних ребер має многогранник зображений на рисунку 6.17?

1. 6      2. 9      3. 8      4. 7

63. Яка фігура утворюється в перерізі прямої тригранної призми, якщо січна площина перетинає два бокових ребра та трикутник основи?

1. п'ятикутник    2. трикутник    3. чотириохкутник    4. шестикутник

64. Яка фігура утворюється в перерізі прямої п'ятигранної призми, якщо січна площина перетинає три бокових ребра та п'ятикутник основи?

1. п'ятикутник    2. трикутник    3. чотириохкутник    4. шестикутник

65. Яка фігура утворюється в перерізі прямої чотириохгранної піраміди, якщо січна площина перетинає три бокових ребра та чотириохкутник основи?

1. п'ятикутник    2. трикутник    3. чотириохкутник    4. шестикутник

66. Яку найбільшу кількість ребер куба може перетнути січна площина?

1. чотири      2. сім      3. п'ять      4. шість

67. З якої кількості плоских фігур складається розгортка правильної п'ятигранної призми?

1. семи      2. шести      3. восьми      4. п'яти

68. Яку найменшу кількість ребер куба може перетнути січна площина?

1. чотири      2. три      3. п'ять      4. два

69. З якої кількості плоских фігур складається розгортка правильної шестигранної піраміди?

1. семи      2. шести      3. восьми      4. п'яти

70. Яку найбільшу кількість ребер правильної шестигранної піраміди може перетнути січна площина?

1. чотири      2. сім      3. п'ять      4. шість

71. Яку найменшу кількість ребер правильної шестигранної піраміди може перетнути січна площина?

1. чотири    2. три    3. п'ять    4. шість

72. Яку найбільшу кількість ребер правильної п'ятигранної піраміди може перетнути січна площина?

1. чотири    2. сім    3. п'ять    4. шість

73. Яку найбільшу кількість ребер правильної тригранної піраміди може перетнути січна площина?

1. чотири    2. три    3. п'ять    4. шість

74. Яку найбільшу кількість ребер правильної п'ятигранної призми може перетнути січна площина?

1. п'ять    2. шість    3. чотири    4. сім

75. Яка площина на рисунку 6.18 утворює в перерізі чотирикутник?

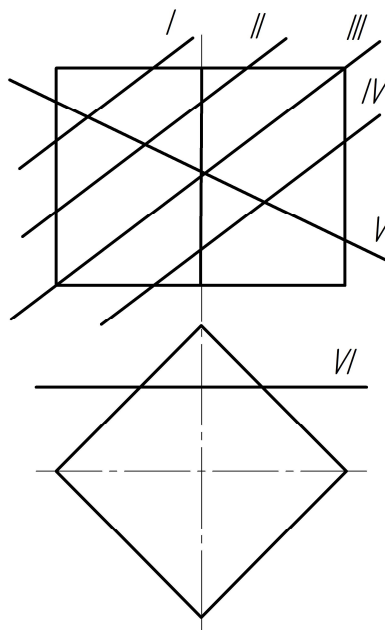


Рис. 6.18

1. IV    2. III    3. II    4. I    5. V    6. VI

76. Яка площина на рисунку 6.18 утворює в перерізі трикутник?

1. IV    2. III    3. II    4. I    5. V    6. VI

77. Які площини на рисунку 6.18 утворюють в перерізі п'ятикутник?

1. IV    2. III    3. II    4. I    5. V    6. VI

78. Яка площина на рисунку 6.18 утворює в перерізі куба многокутник з меншою кількістю кутів?

1. IV    2. III    3. II    4. I    5. V    6. VI

79. Яка площина на рисунку 6.18 утворює в перерізі шестикутник?

80. Яка площина на рисунку 6.18 утворює в перерізі куба многокутник з більшою кількістю кутів?

1. IV

2. III

3. II

4. I

5. V

6. VI

81. Яка площина на рисунку 6.15 утворює в перерізі чотирикутник?

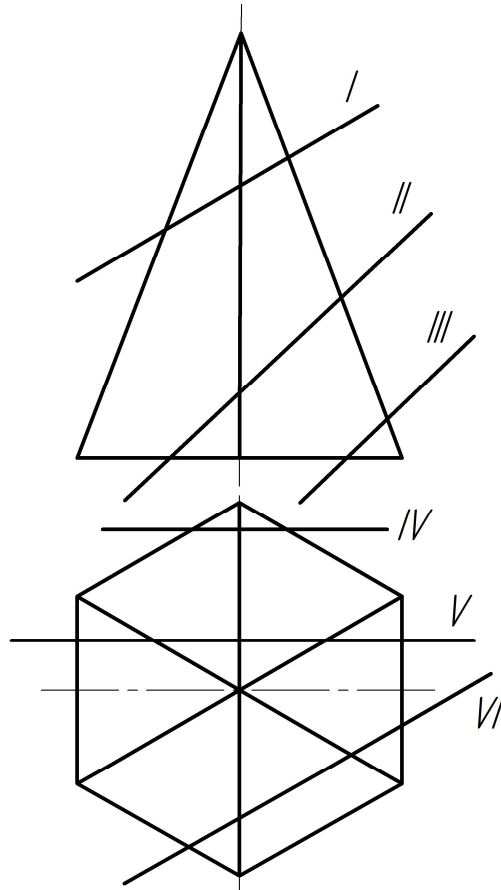


Рис. 6.19

1. I

2. II

3. III

4. IV

5. V

6. VI

82. Які площини на рисунку 6.19 утворюють в перерізі трикутники?

1. I

2. II

3. III

4. IV

5. V

6. VI

83. Які площини на рисунку 6.19 утворюють в перерізі многокутники з найбільшою кількістю кутів?

1. I

2. II

3. III

4. IV

5. V

6. VI

84. Які площини на рисунку 6.19 утворюють в перерізі шестикутники?

1. I

2. II

3. III

4. IV

5. V

6. VI

85. Які площини на рисунку 6.19 утворюють в перерізі многокутники з меншою кількістю кутів?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

86. Яка площина на рисунку 6.19 утворює в перерізі п'ятикутник?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

87. Яка площина на рисунку 6.20 утворює в перерізі чотирикутник?

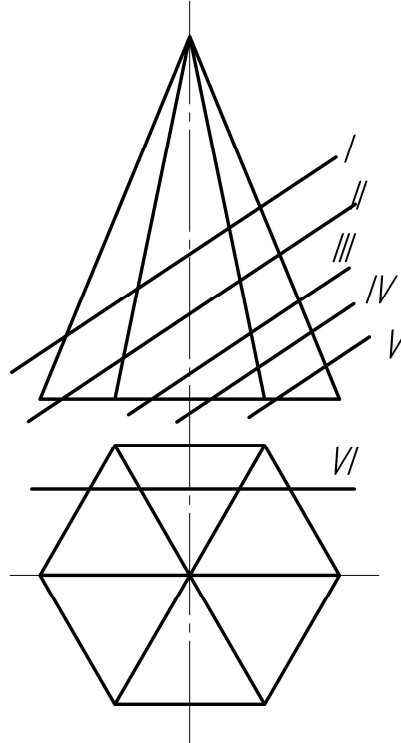


Рис. 6.20

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

88. Яка площина на рисунку 6.20 утворює в перерізі трикутник?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

89. Яка площина на рисунку 6.20 утворює в перерізі многокутник з найбільшою кількістю кутів?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

90. Яка площина на рисунку 6.20 утворює в перерізі шестикутник?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

91. Яка площина на рисунку 6.20 утворює в перерізі многокутник з меншою кількістю кутів?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

92. Які площини на рисунку 6.20 утворюють в перерізі п'ятикутники?

1. I            2. II            3. III            4. IV            5. V            6. VI

93. На якому кресленні зображений многогранник з паралельними боковими гранями?

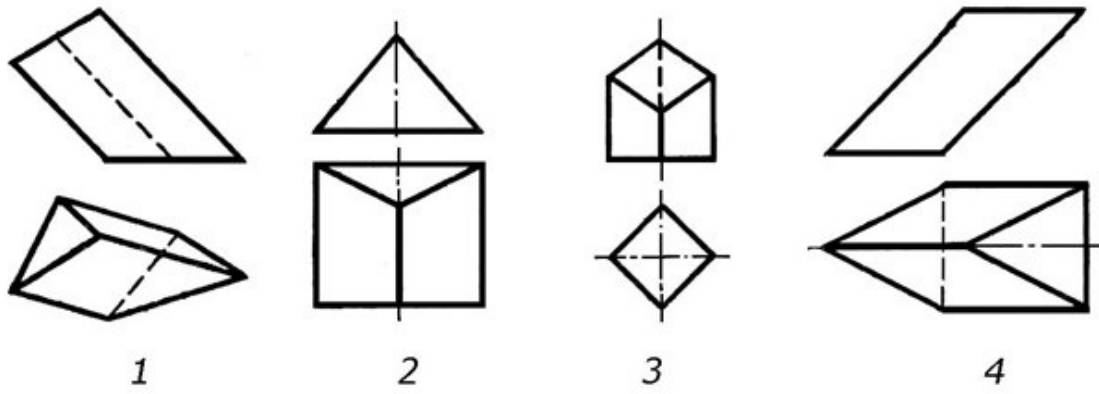


Рис. 6.21

94. На якому кресленні на рисунку 6.21 зображений многогранник з паралельними гранями основи?

- 1                      2                      3                      4

95. Скільки вершин має замкнена лінія перетину призми?

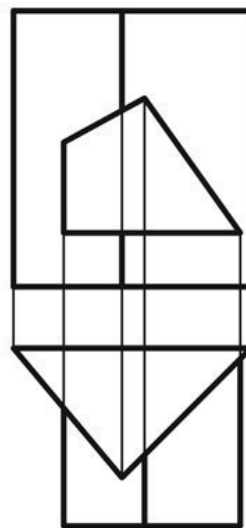


Рис. 6.22

1. 4      2. 5      3. 6      4. 7      5. 8

## 7. КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ

В нарисній геометрії вивчається найбільше поширений спосіб утворення поверхонь – кінематичний. За цим способом, поверхня утворюється, як множина положень певної лінії (твірної), що послідовно і безперервно за визначеним законом переміщується у просторі.

В науковій і навчальній літературі з нарисної геометрії немає універсальної класифікації поверхонь, але є багато схем їх класифікації за певними ознаками.

### 7.1 КОРОТКА КЛАСИФІКАЦІЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ

З великого числа можливих способів утворення поверхонь розглянемо основні способи, виділивши головні ознаки їх класифікації.

1. *За законом руху твірної.* Поверхні з поступальним рухом твірної, з обертальним і гвинтовим рухом твірної.

2. *По виду твірної.* Розрізняють поверхні з прямолінійною твірною і поверхні з криволінійною твірною – не лінійчаті.

3. *За законом зміни форми твірної.* З твірною постійного або перемінного виду.

4. *По ознакам розгортання.* Поверхні, що розгортаються і, що не розгортаються.

5. *По способу завдання поверхні* – аналітичному або графічному.

6. *По диференціальним властивостям* – гладкі або негладкі поверхні, і по ознаці кривизни поверхні.

### 7.2 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

*Поверхнею обертання* називається поверхня, утворена обертанням прямої або кривої лінії, що утворює поверхню навколо нерухомої прямої – осі обертання.

На проєкційному кресленні вісь обертання розташовують перпендикулярно площині проєкцій. Кола, по яким переміщуються всі точки твірної, називаються паралелями. Найбільшу паралель називають екватором, найменшу – горловиною. Якщо вісь поверхні вертикальна, то всі паралелі проєктуються на горизонтальній проєкції без спотворення, тобто колами.

Площини, що проходять через вісь обертання, перетинають поверхню по лініях, що називаються меридіанами. Меридіан, розташований у площині, паралельній площині проєкцій, називається головним і його проєкція на цю площину проєкцій є контуром проєкції. Паралелі і меридіани, перетинаючись між собою, утворюють на поверхні обертання ортогональну сітку. Вона називається ортогональною тому, що меридіани перетинаються з паралелями під прямим кутом.

З закону утворення поверхонь обертання випливають дві основні їхні властивості:

1. *Площина, перпендикулярна до осі обертання, перетинає поверхню по колу – паралелі.*

2. *Площина, що проходить через вісь обертання, перетинає поверхню по двом симетричним щодо осі лініям, які утворюють меридіан поверхні.*

### 7.3 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Порядок будь-якої алгебраїчної поверхні дорівнює кількості точок перетину довільної прямої з цією поверхнею. В аналітичній геометрії поверхні другого порядку визначаються алгебраїчним рівнянням другого ступеню. Це означає, що будь-яка пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках.

Поверхні обертання другого порядку утворюються обертанням кривої другого порядку навколо одного з її діаметрів. Залежно від того яка крива утворює поверхню їх називають еліпсоїдами, гіперболоїдами, параболоїдами, циліндричними і конічними поверхнями. Особливе місце серед цих поверхонь займають циліндричні і конічні. У них твірна крива розпадається на дві прямі паралельні, у першому випадку, і такі що перетинаються – у другому.

Конічна поверхня обертання утворюється обертанням прямої  $f$ , що перетинає вісь обертання  $i$  в деякій точці  $S$  (рис.7.1). Вона складається з

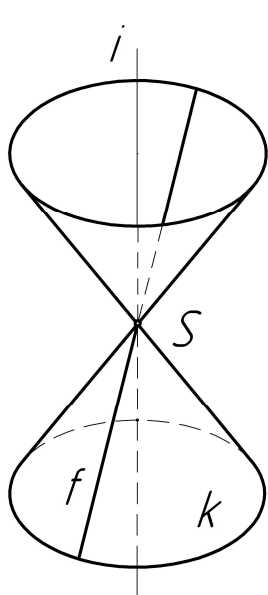


Рис. 7.1

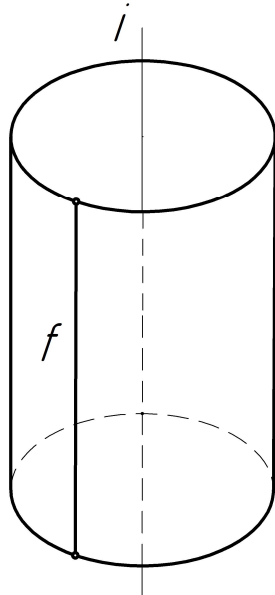


Рис. 7.2

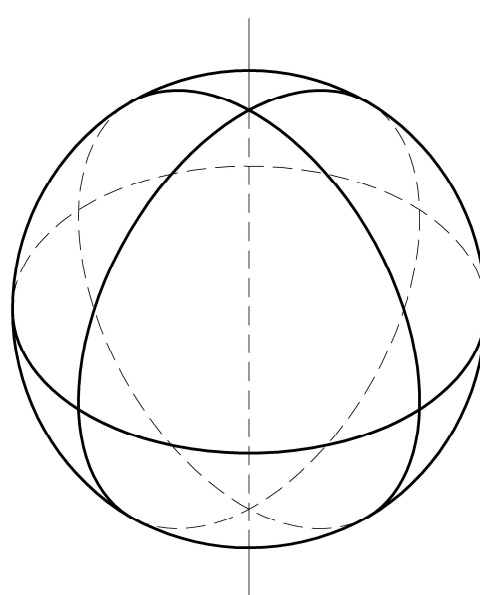


Рис. 7.3

двох нескінченних порожнин, що мають спільну точку  $S$  – вершину поверхні. Частиною поверхні між вершиною  $S$  і площиною будь-якої паралелі  $k$  є тілом у просторі, що називається *круговим конусом*.

**Циліндрична поверхня** утворюється обертанням прямої паралельної до осі обертання (рис. 7.2). Вона являє собою одну нескінченну порожнину, а частина поверхні між двома паралельними перерізами перпендикулярними осі обертання є круговий циліндр.

Для побудови проєкцій конуса і циліндра зручно розглянути їх утворення, як результат обертання плоских фігур навколо одної з їх сторін. Так конус зручно розглядати, як обертання прямокутного трикутника навколо одного з катетів. В цьому випадку гіпотенуза утворить бокову поверхню конуса, а другий катет – круг, основу конуса.

Аналогічно циліндр може бути утворений обертанням прямокутника навколо одної з його сторін. **Сфера** утворюється обертанням кола навколо будь-якого його діаметра (рис. 7.3).

#### **7.4 КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ПОБУДОВА ПРОЄКЦІЙ ТОЧОК, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ**

Вісь тіла обертання може бути довільно розташована у просторі. Для вивчення властивостей поверхонь обертання зручно зображати їх в канонічному положенні, розташовуючи вісь обертання перпендикулярно до тієї, чи іншої площини проєкцій. При такому положенні вісь обертання на площині, до якої вона перпендикулярна, зображується точкою, а паралелі поверхні обертання концентричними колами з центрами, що співпадають з цією точкою. Контур проєкції поверхні на іншій площині проєкцій буде головним меридіаном в натуральну величину.

Ми говоримо задано поверхню. Що це означає? Це означає, що на комплексному рисунку задано мінімальну кількість точок і ліній поверхні, які дозволяють розв'язати основну задачу проєкційного креслення для поверхонь: за одною проєкцією точки, що належить поверхні побудувати інші її проєкції.

Відомо, що точки належать поверхні, якщо вони лежать на лінії, що належить поверхні. Враховуючи цю властивість, можемо скласти алгоритм розв'язання основної задачі:

1) Через задану проєкцію точки провести однойменну проєкцію лінії на поверхні. Бажано щоб ця лінія була простою – пряма або коло.

2) Побудувати другу проєкцію цієї лінії за умови, що вона належить поверхні.

3) За допомогою лінії проєкційного зв'язку на другій проєкції допоміжної лінії побудувати проєкцію заданої точки.

4) За двома проєкціями заданої точки побудувати третю її проєкцію.

Розглянемо застосування цього алгоритму на прикладах.

На рисунку 7.4 побудовано три проєкції циліндра обертання, вісь якого вертикальна. Побудова проєкцій точки *A*, що належить поверхні циліндра зрозуміла з рисунка.

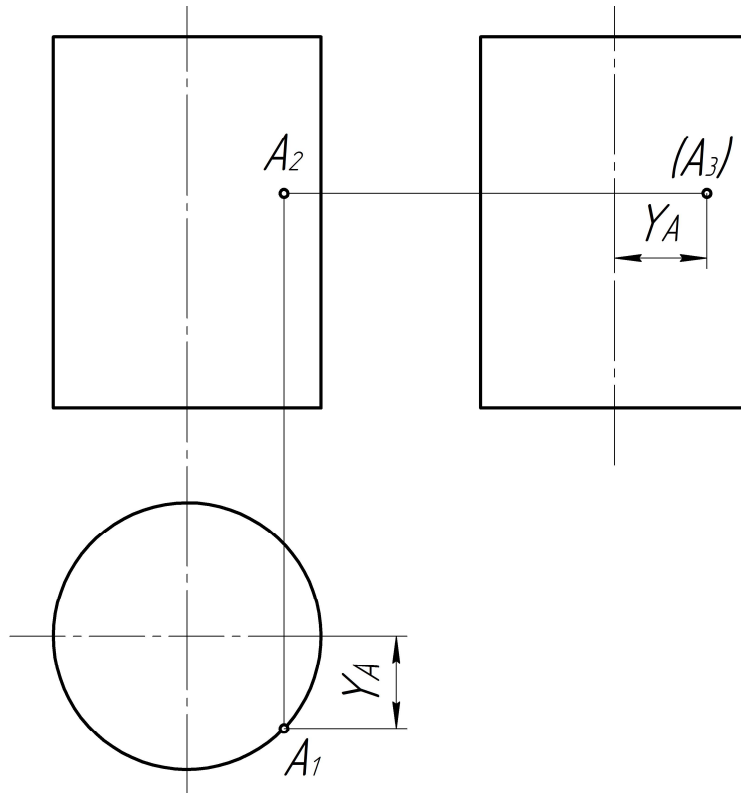


Рис. 7.4

Побудову точок на поверхні конуса обертання показано на рисунку 7.5. Тут задано невидиму проекцію  $(A_2)$  точки  $A$ , що належить поверхні конуса. Через задану проекцію проведена фронтальна проекція кола, яке належить поверхні конуса. Його можна отримати як переріз поверхні конуса площиною  $\gamma$  перпендикулярної до осі конуса. Радіус  $R_A$  цього кола вимірюємо на фронтальній проекції. Горизонтальною його проекцією буде коло радіуса  $R_A$  з центром у проекції  $S_1$ . Через проекцію  $(A_2)$  проведемо вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією допоміжного кола і отримуємо горизонтальну проекцію  $A_1$  точки  $A$ . На вигляді зверху вимірюємо координату  $y_A$  та відкладаємо її на горизонтальній лінії проекційного зв'язку проведеної через проекцію  $(A_2)$ . Отримуємо профільну проекцію  $A_3$  точки  $A$ . На цьому ж конусі на вигляді зверху задано горизонтальну проекцію  $B_1$  точки  $B$ , що належить поверхні конуса. Фронтальна проекція  $B_2$  побудована за допомогою твірної  $SM$  конуса. Хід побудови цієї проекції показано стрілками.

На рисунку 7.6 задано три проекції сфери і фронтальна  $A_2$  та горизонтальна  $B_1$  проекції точок  $A$  і  $B$ , що належать сфері. Для побудови інших проекцій точок використані горизонтальна ( $\gamma$ ) та фронтальна ( $\varphi$ ) площини. Горизонтальна площина  $\gamma$  перетинає сферу по колу радіуса  $R_A$ . Горизонтальна проекція цього кола – коло радіуса  $R_A$  з центром  $O_1$ . На останньому лежить горизонтальна проекція  $A_1$  точки  $A$ . Фронтальна проекція  $B_2$  точки  $B$  побудована за допомогою фронтальної площини  $\varphi$ ,

яка перетинає сферу по колу радіуса  $R_B$  (вимірюємо на горизонтальній площині). На вигляді спереду проводимо коло радіуса  $R_B$  із центром  $O_2$ . Побудова профільних проєкцій точок зрозуміла з рисунка.

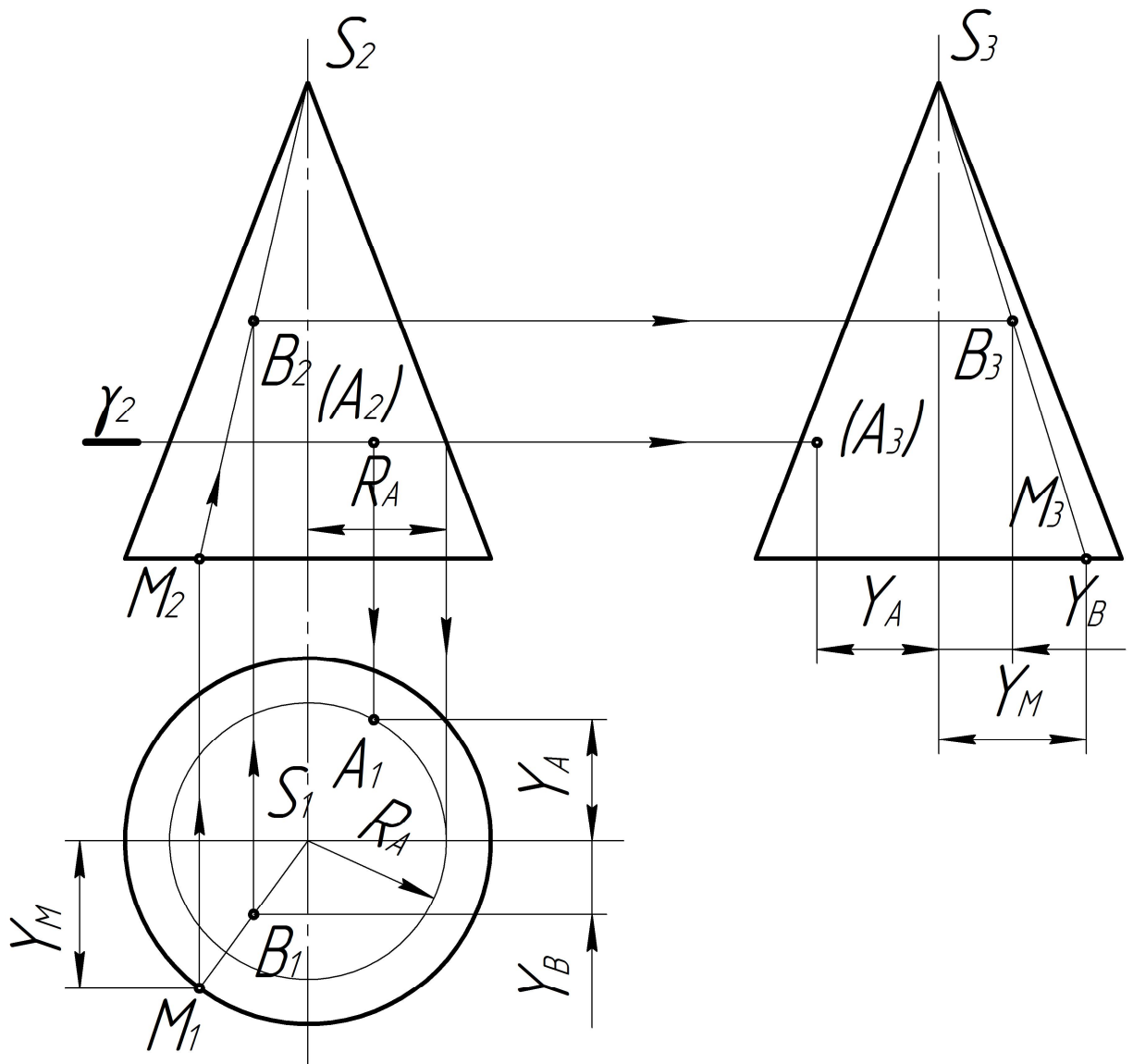


Рис. 7.5

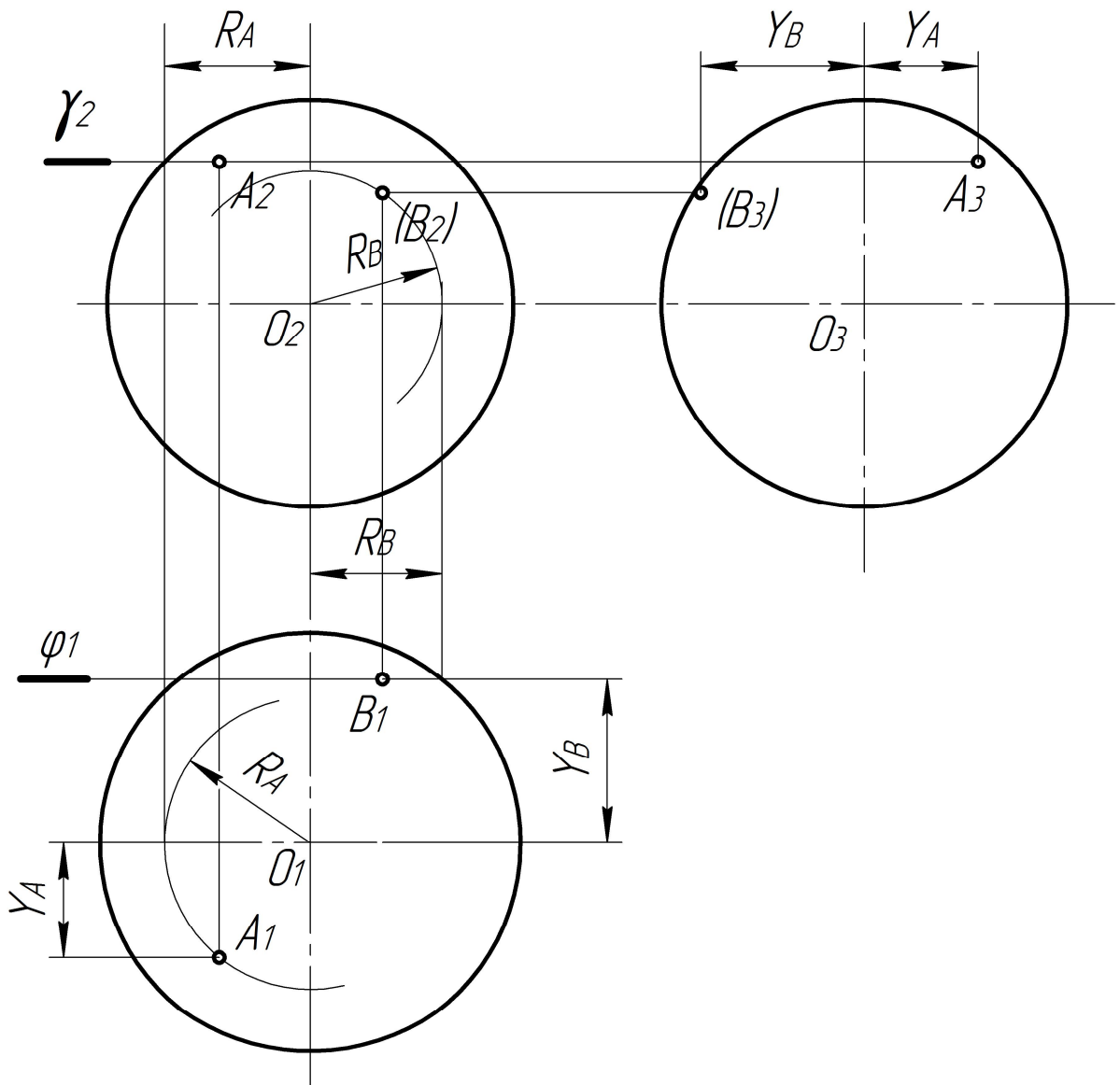


Рис. 7.6

На рисунку 7.7 задано половину поверхні обертання, яку називають тором. Вона утворюється обертанням кола навколо осі  $i$  ( $i_1, i_2$ ) що лежить в площині кола, але не проходить через його центр. Для побудови проєкцій точки  $A$ , що лежить на поверхні тора, за заданою горизонтальною проєкцією  $A_1$  проведена допоміжна фронтальна площина  $\varphi$ . Ця площина перпендикулярна до осі обертання і в перерізі тора дає два кола радіусів  $R_A$  і  $R'_A$ . Фронтальні проєкції цих кіл є теж кола радіуса  $R_A$  і  $R'_A$  з центром  $I_2$ . Якщо задана горизонтальна проєкція  $A_1$  видима, то її фронтальна проєкція лежить на колі радіусом  $R_A$ . Якби за умовою задачі  $A_1$  була невидимою, то її фронтальна проєкція лежала б на колі радіуса  $R'_A$ . Профільна проєкція  $A_3$  точки  $A$  побудована аналогічно попереднім прикладам.

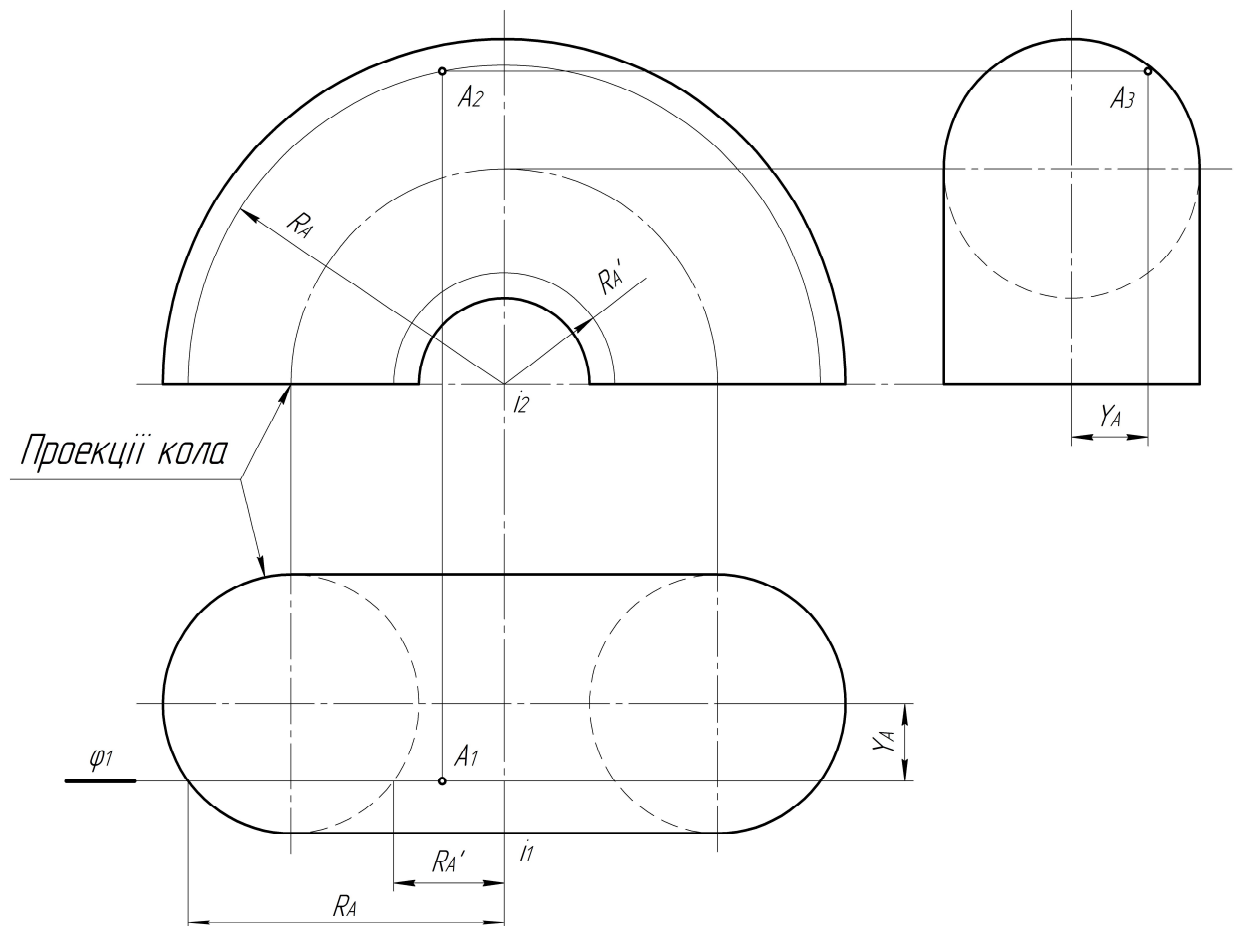


Рис. 7.7

## 7.5 ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ПРОЕКТУЮЧОЮ ПЛОЩИНОЮ

При перерізі поверхні площиною утворюється лінія, що складається з точок спільних для січної площини і поверхні. Плоску фігуру обмежену цією лінією називають перерізом. Якщо січна площина проектує, то одна проекція перерізу наперед відома. Вона співпадає з відрізком виродженої проекції площини, кінцями якого є точки перетину виродженої проекції площини з контуром проекції поверхні. Отже для побудови інших проекцій перерізу треба на відомій його виродженій проекції намітити множину проекцій точок перерізу і для кожної точки розв'язати задачу: за одною проекцією точки, що лежить на заданій поверхні побудувати інші проекції цієї точки. Таку задачу ми розглядали в попередньому параграфі.

Розглянемо приклади побудови перерізів поверхонь обертання другого порядку.

Циліндричними перерізами можуть бути:

1. Коло, якщо січна площина  $\gamma$  (рис. 7.8) перпендикулярна до осі циліндра;

2. Прямокутник, якщо січна площина  $\beta$  паралельна до осі циліндра;
3. Еліпс у всіх інших випадках розташування січної площини  $\alpha$  відносно осі циліндра. Мала вісь еліпса дорівнює діаметру циліндра, а величина  $AB=A_2B_2$  залежить від кута нахилу січної площини до осі циліндра.

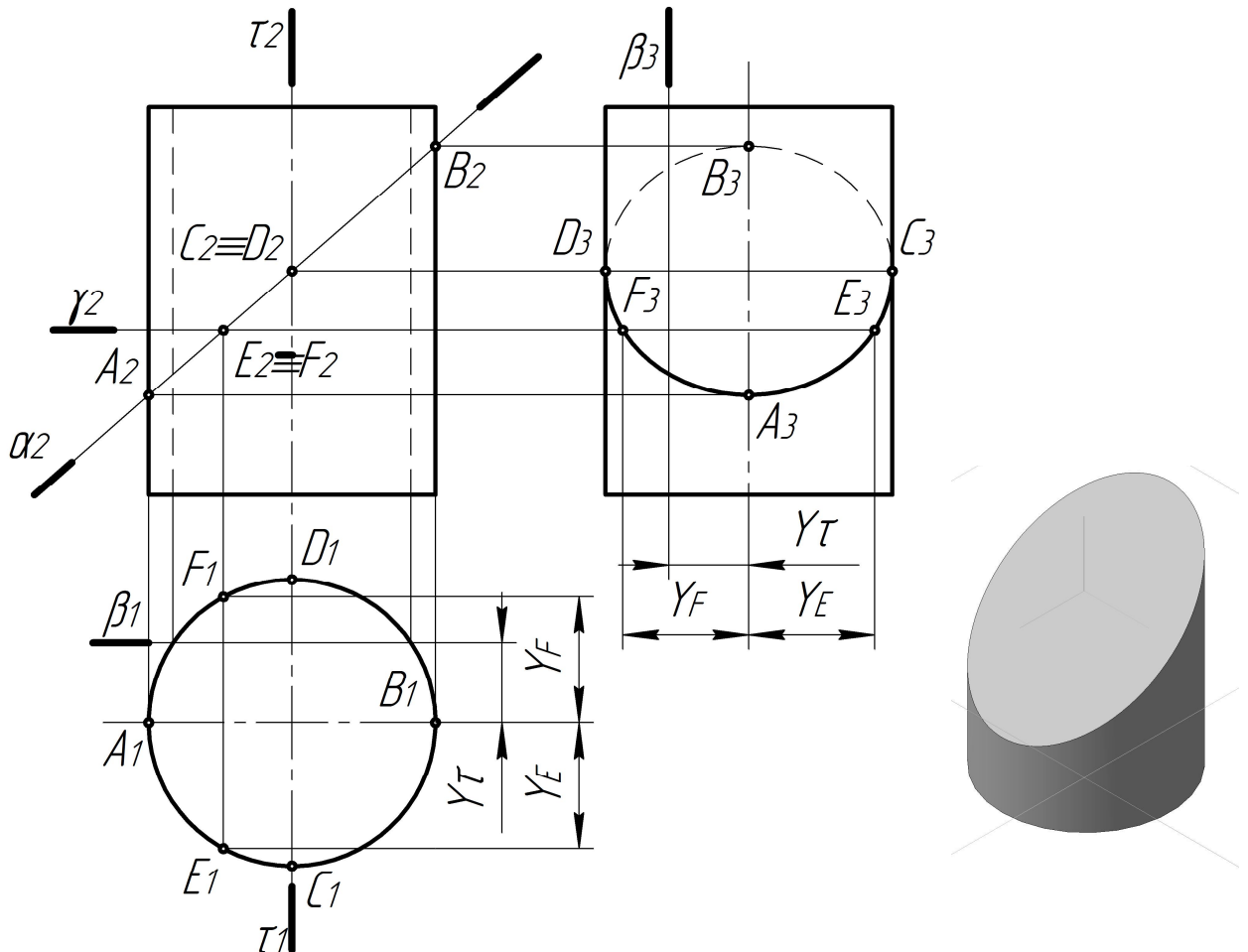


Рис. 7.8

Побудова точок перерізу, що належать еліпсу показана на прикладі точок  $E$  і  $F$ . Звертаємо увагу на необхідність побудови характерних точок лінії перерізу: найвищої і найнижчої, точок зміни видимості. Профільна площина  $\tau$  ( $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ), що проходить через вісь циліндра поділяє його на дві частини ліву і праву (читаємо фронтальну та горизонтальну проекцію циліндра). На профільній проекції видимою буде ліва частина, а права – невидимою. Отож проекції  $C_3$  і  $D_3$  точок  $C$  і  $D$  є точками зміни видимості профільної проекції еліпса.

На рисунку 7.9 наведено приклад побудови перерізу конуса обертання фронтально-проекуючою площиною  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ). Фронтальна проекція перерізу є відрізок  $A_2B_2$ , який співпадає з виродженою проекцією  $\alpha_2$  січної площини  $\alpha$ . Горизонтальні проекції точок перерізу будуються як проекції точок, що належать поверхні конуса. Наприклад, призначимо на проекції  $A_2B_2$  довільну проекцію  $E_2$  точки  $E$ . Зазначимо, що з нею співпадає ще й

проекція ( $F_2$ ) точки  $F$ , яка також належить перерізу. Одна з цих точок лежить на передній частині конуса, друга на задній. Через проекцію  $E_2 \equiv (F_2)$  проводимо вироджену проекцію  $\gamma_2$  горизонтальної площини  $\gamma$ . Площина  $\gamma$  перетне поверхню конуса по паралелі – колові радіуса  $R_E$ . Будуємо горизонтальну проекцію цього кола. Це буде коло, центр якого співпадає з горизонтальною проекцією  $S_1 \equiv O_1$  осі конуса, а радіус дорівнює  $R_E$ . Горизонтальні проекції  $E_1, F_1$  точок  $E$  і  $F$  лежать на цьому колі. Таким чином, можна побудувати безліч точок, що належать перерізу, який в розглянутому прикладі буде еліпсом. Велика вісь  $AB = A_2B_2$ . Малу вісь  $CD$  можна побудувати, як таку, що її фронтальна проекція  $C_2D_2$  співпадає з серединою проекції  $A_2B_2$ .

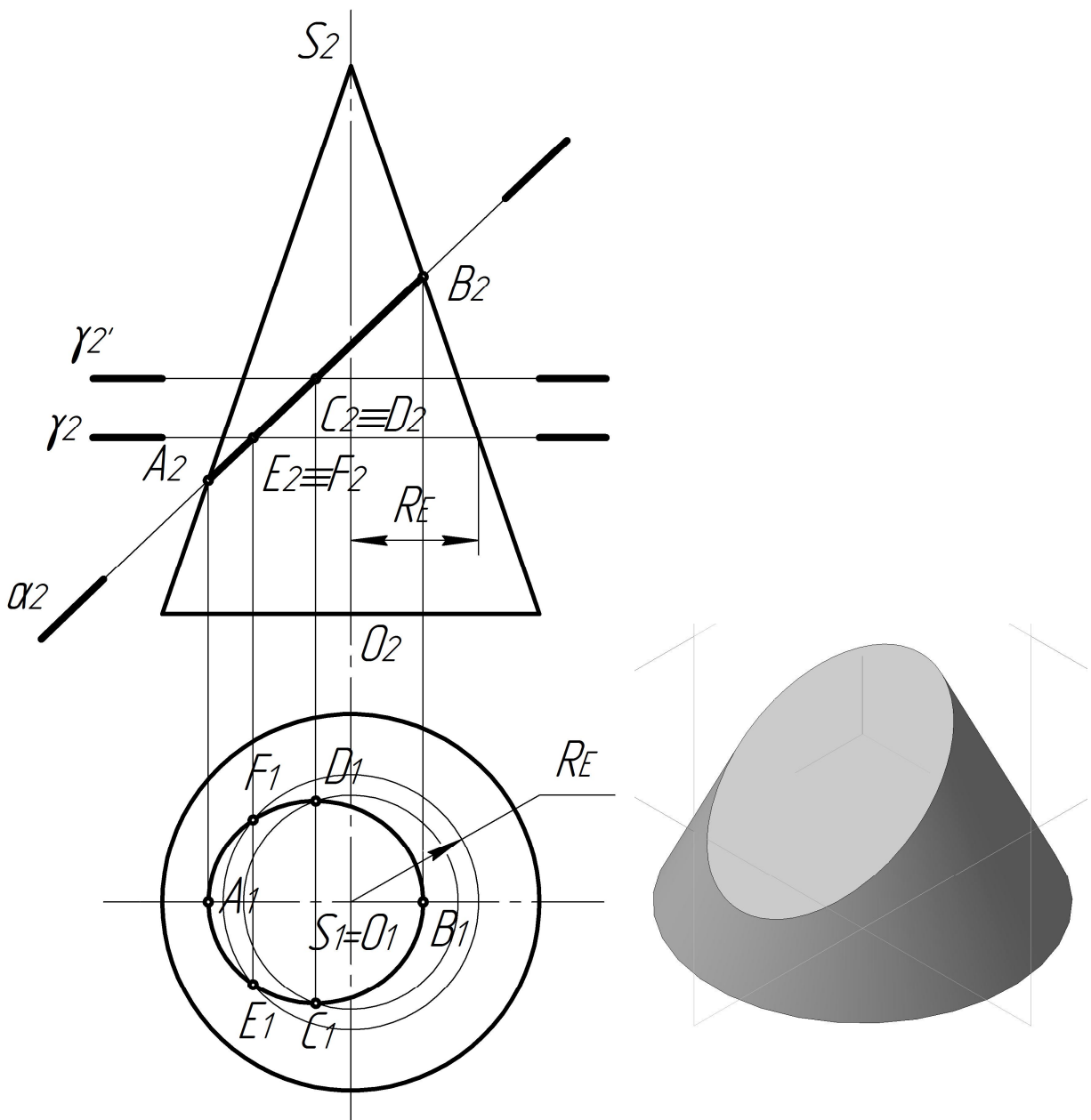


Рис. 7.9

Ми розглянули приклад, коли перерізом конуса є еліпс. Взагалі ж конічними перерізами можуть бути такі лінії (і фігури, якщо розглядати переріз конуса, як тіла):

1. **Коло**, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса.
2. **Дві твірні (трикутник)**, якщо січна площина проходить через вершину конуса.
3. **Еліпс**, якщо січна площина перетинає всі твірні конуса.
4. **Парабола**, якщо січна площина паралельна одній твірній конуса.
5. **Гіпербола**, якщо січна площина паралельна двом твірним конуса.

Процес утворення різних конічних перерізів можна зрозуміти наступним чином. На рисунку 7.10 показано фронтальну проекцію конічної поверхні з вершиною  $S$ . Проведемо довільну фронтально-проектуючу площину  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ) паралельно до твірної  $t$  ( $t_2$ ). Ця площина перетинає конічну поверхню по параболі з вершиною  $N$  ( $N_2$ ). В площині  $\alpha$  проведемо довільну фронтально-проектуючу пряму  $i$  ( $i_2$ ). Будемо обертати навколо цієї прямої площину  $\alpha$ , наприклад, проти ходу годинникової стрілки. В секторі  $\alpha_2 i_2 \alpha'_2$ , у будь-якому положенні, ця площина перетинає обидві порожнини конічної поверхні по гіперболі. В положенні, коли площина пройде через вершину  $S$  поверхні, вона перетне поверхню по двох твірних, які вважаються гіперболою, що розпалась на пару прямих. В положенні  $\alpha'$  паралельному твірній  $t$  знову маємо параболу, але з вершиною  $M$ . При подальшому обертанні площина буде перетинати одну порожнину поверхні, утворюючи еліпси, в тому числі і коло, як окремий випадок еліпса.

Дві твірні (трикутник)

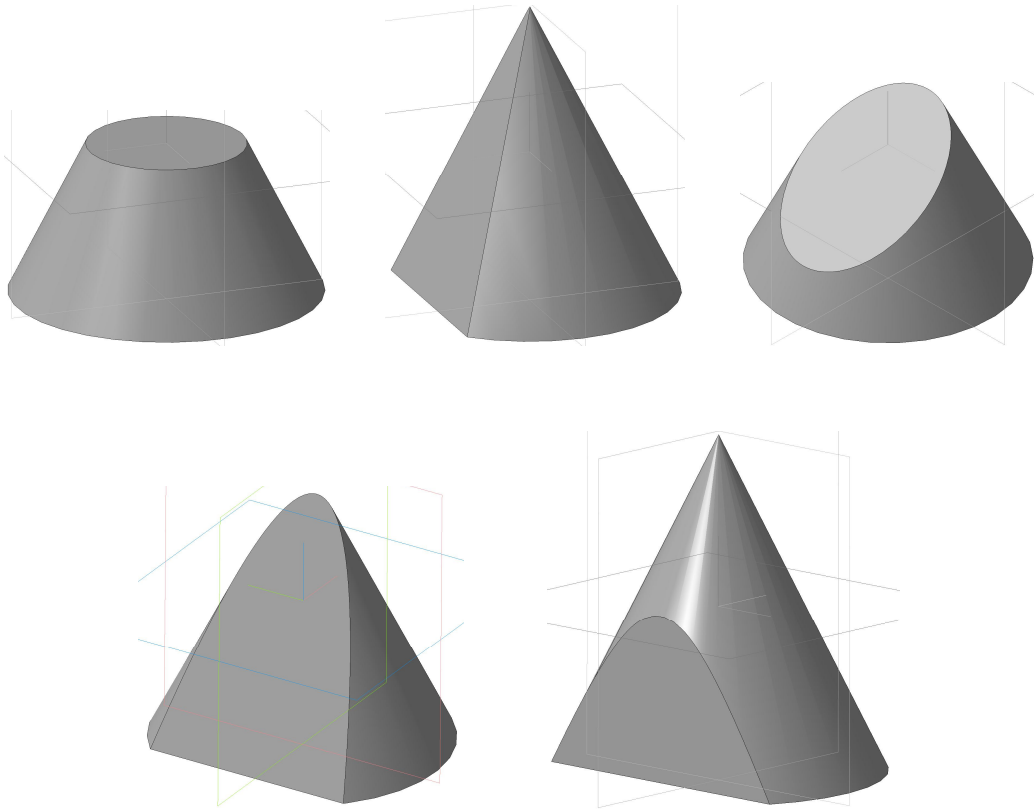
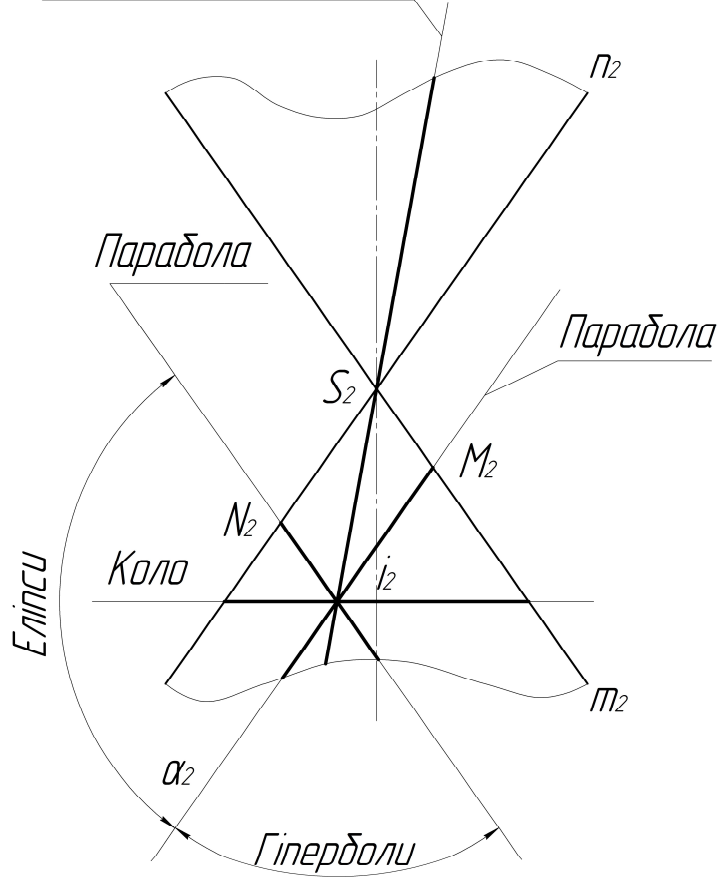


Рис. 7.10

## 7.6 ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Переріз поверхні площиною загального положення розглянемо на прикладі задачі на рисунку 7.11. Прямий конус перерізано площиною, яка задана горизонталлю  $h$  ( $h_1, h_2$ ) та фронталлю  $f$  ( $f_1, f_2$ ).

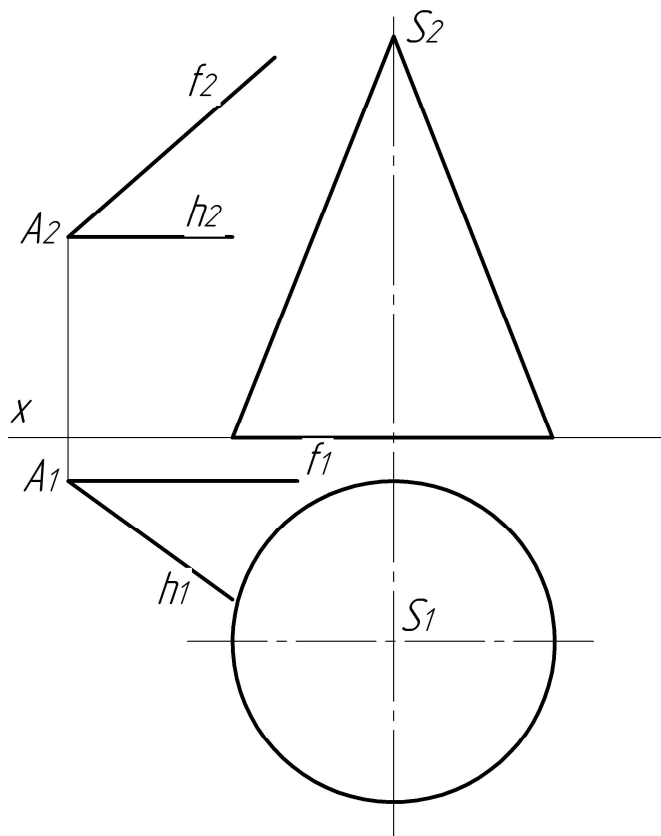


Рис. 7.11

Побудову виконуємо за допомогою способу заміни площин проекцій. Введемо допоміжну площину проекцій  $\Pi_4$ , яка перпендикулярна не тільки до горизонтальної площини проекцій  $\Pi_1$ , а також й до заданої січної площини. Ось  $x_1$  проведено перпендикулярно до проекції  $h_1$ . На площині  $\Pi_4$  січна площина проектується у вигляді прямої (рис. 7.12) на якій розташовано проекція фігури перерізу (відрізок  $12$ ). Відрізок  $12$  визначає велику вісь еліпса, по якому конус перерізається заданою площиною. В точці  $O_4$ , яка поділяє відрізок  $1_42_4$  навпіл, знаходиться проекція центру еліпса (рис. 7.13).

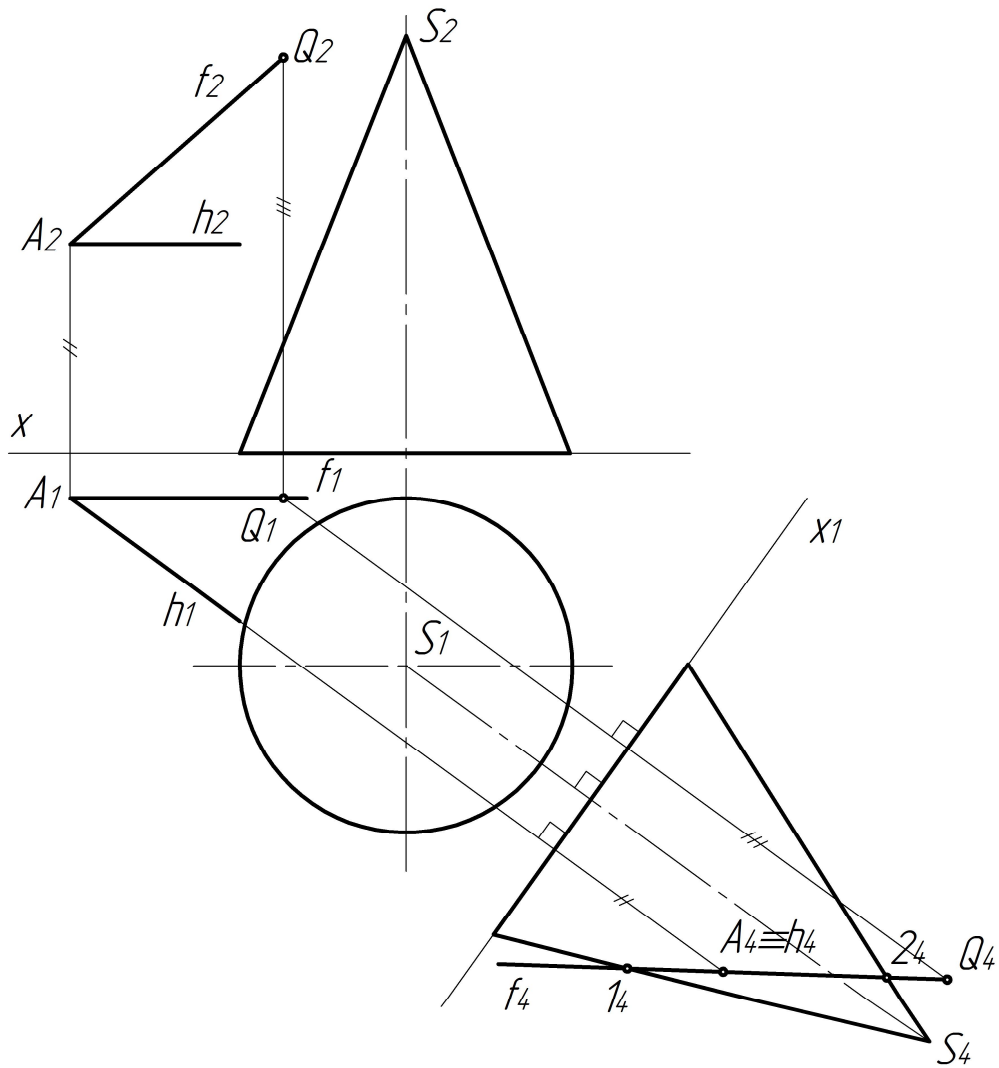


Рис. 712

Площина  $\gamma$ , яка проведена перпендикулярно до осі еліпса через точку  $O_4$ , дозволяє знайти малу ось еліпса (рис. 7.13). Мала ось еліпса проектується на площину  $\Pi_1$  в натуральну величину (відрізок  $3_14_1$ ). По точкам  $O_4, 1_4, 2_4$  визначено проєкції  $O_1, 1_1, 2_1$  (рис. 7.13), а далі проєкції  $O_2, 1_2, 2_2$ , відстань яких від осі  $x$  така ж сама, як і відстань точок  $O_4, 1_4, 2_4$  від осі  $x_1$  (рис. 7.14). Точка  $2_2$  – найвища на фронтальній проєкції, точка  $1_2$  – найнижча. Далі визначено положення точки  $5$  (рис. 7.14), в котрій еліпс на фронтальній площині проєкцій розділяється на «видиму» та «невидиму» частини (другу точку  $3$  вже знайдено).

Натуральну величину перерізу побудовано виконано способом заміни площин проєкцій (рис. 7.15). Нову площину проєкцій  $\Pi_5$  проведено паралельно до виродженої проєкції еліпса ( $x_2 \parallel 1_42_43_44_4$ ).

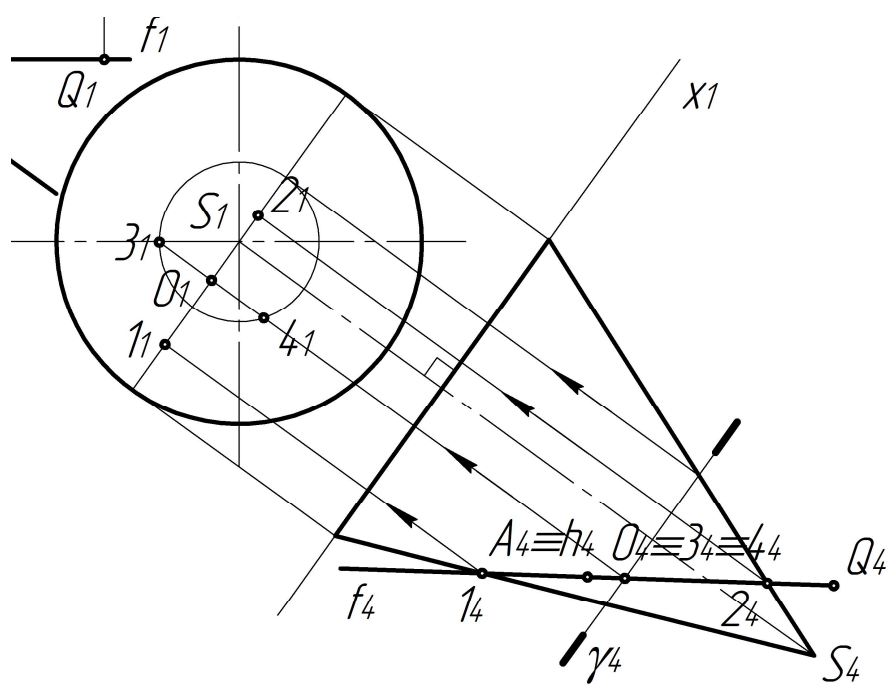


Рис. 7.13

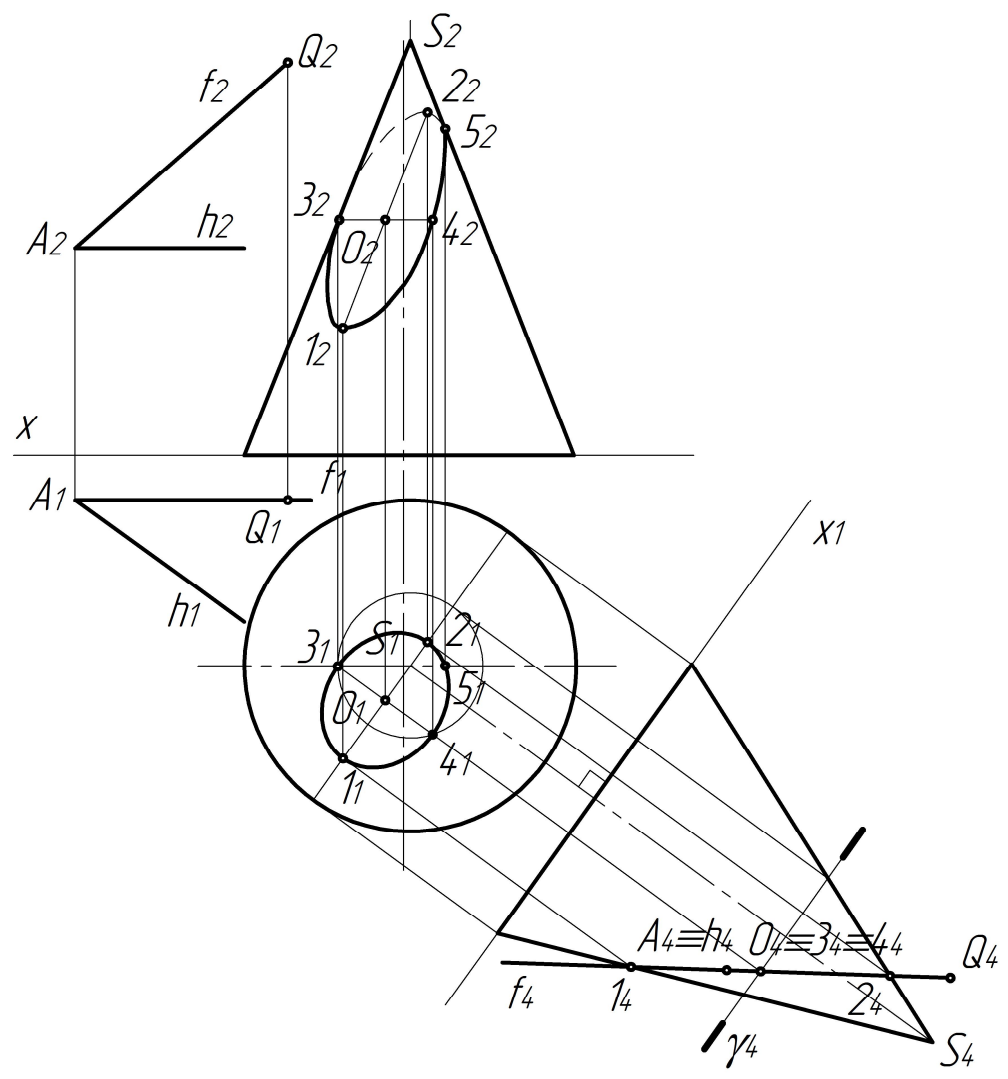


Рис. 7.14

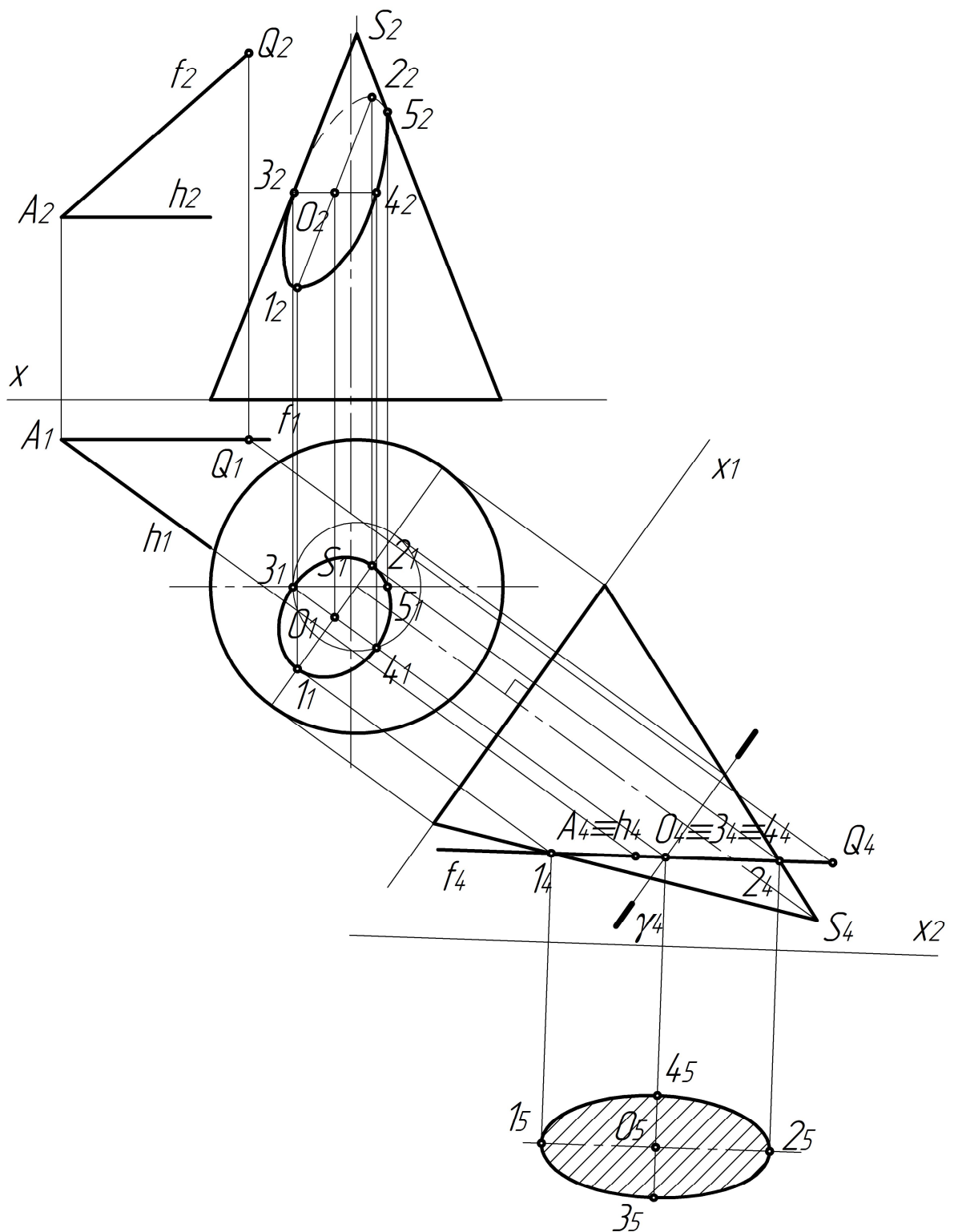


Рис. 7.15

На рисунку 7.16 розв'язано аналогічну задачу при завданні січної площини слідами.

Побудову проєкцій перерізу почато з визначення точок  $1$  і  $2$ , які лежать на основі конуса. Так як основа конуса та горизонтальний слід знаходяться на  $\Pi_1$ , горизонтальні проєкції точок  $1_1$  і  $2_1$  розташовані в місті їх перетину.

Далі побудовано найвищу точку перерізу  $З$ , для чого проведена допоміжна січна площина  $\sigma$ , яка є горизонтально-проектуючою, перпендикулярну до сліду  $\alpha\Pi_1$  та яка проходить через вісь конуса. Площина  $\sigma$  перерізає конус по твірній  $SL$ , а площину  $\alpha$  по лінії  $NK$ . Точка  $З$  буде знаходитися на перетині проєкцій прямих  $S_2L_2$  і  $N_2K_2$ .

Для знаходження інших точок лінії перерізу вводимо горизонтальну допоміжну січну площину  $\gamma$ . Площина  $\gamma$  перерізає конус по колу, горизонтальна проєкція якого перетинаючись з лінією перетину площин  $\alpha$  і  $\gamma$  (проходить через точку  $E$ ) визначає точки  $З$  та  $4$ , які належать лінії перерізу. Горизонтальні площини слід проводити нижче точки  $З$ .

Для визначення точки  $б$ , в якій фронтальна проєкція лінії перерізу торкається твірної конуса і розділяє її на «видиму» та «невидиму» частини, треба провести допоміжну фронтальну площину  $\tau$ . Фронтальна проєкція  $б_2$  точки  $б$  знаходиться на перетині фронтальних ліній твірної конуса та фронтальної проєкції лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\tau$  (проходить через точку  $T$ ).

Натуральну величину перерізу знайдено суміщенням січної площини  $\alpha$  з горизонтальною площиною  $\Pi_1$  (див. рис. 7.16).



1. Провести допоміжну площину через задану пряму. Бажано, щоб ця допоміжна площина перетинала задану поверхню по простому перерізу (многокутник або коло);

2. Побудувати допоміжний переріз заданої поверхні допоміжною площиною;

3. Точки перетину заданої прямої з контуром допоміжного перерізу є точками перетину даних прямої і поверхні.

Розглянемо застосування цього алгоритму на прикладах.

На рисунку 7.17 задано циліндр обертання і пряму загального положення  $m$ . Здійснюємо алгоритм.

1.  $m \subset \alpha, \alpha \perp \Pi_1, \alpha_1 \equiv M_1$ ;

2.  $\alpha \cap \text{Циліндр} = 1234$  – прямокутник;

3.  $m \cap 12 = M, m \cap 34 = N$ .  $M, N$  – точки перетину прямої з поверхнею циліндра.

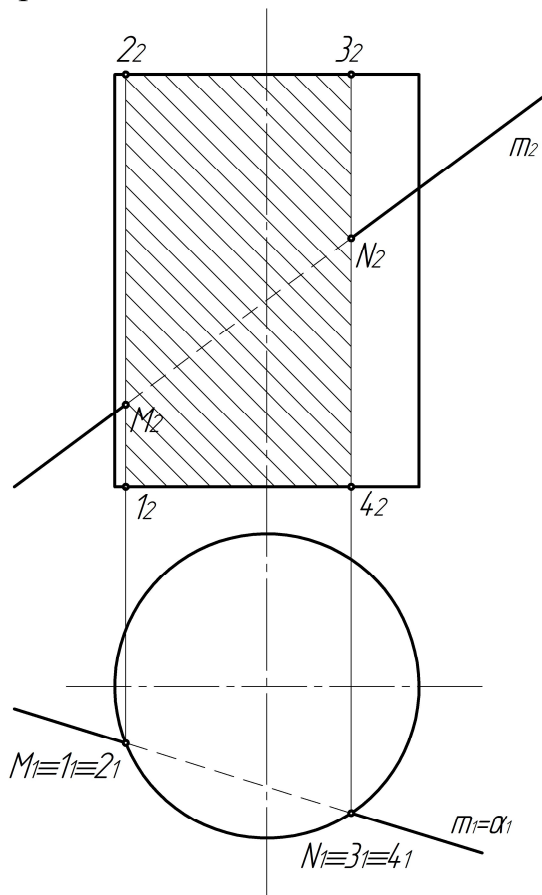


Рис. 7.17

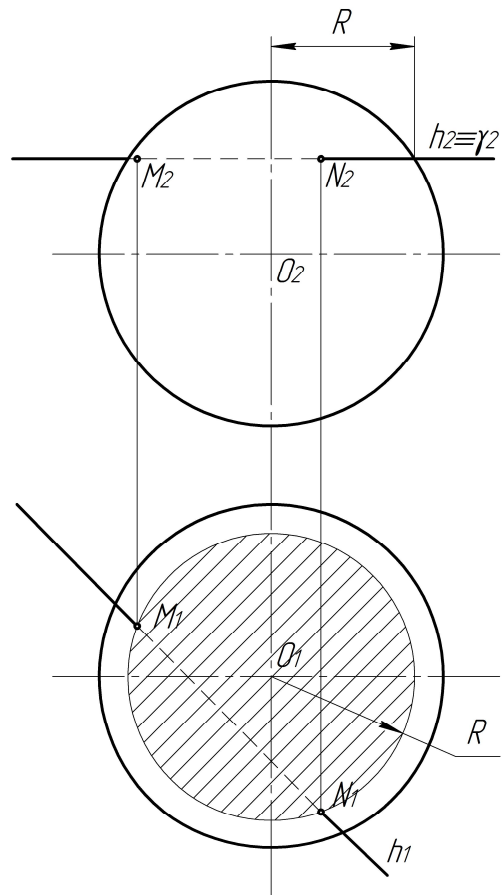


Рис. 7.18

В даному випадку, оскільки циліндр горизонтально-проектуючий горизонтальні проекції  $M_1$  і  $N_1$  точок перетину наперед відомі. Можна було б і не застосовувати алгоритм. Він застосований для кращого усвідомлення суті алгоритму.

На рисунку 7.18 побудовано точки перетину горизонтальної прямої зі сферою.

1.  $h \subset \gamma, h \parallel \Pi_1, \gamma_2 \equiv h_2, h_2 // x$ ;



$$2. \alpha (h \cap m) \cap \text{Конус} = S12.$$

$$3. m \cap S1 = M, m \cap S2 = N.$$

Точки  $M$  і  $N$  є точками перетину заданої прямої  $m$  з поверхнею конуса.

## 7.8 ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Лінія перетину двох кривих поверхонь в загальному випадку є **просторова крива лінія**, яка складається з точок спільних для обох поверхонь. Отже для побудови лінії перетину поверхонь треба побудувати множину точок спільних обом поверхням. На комплексних рисунках застосовуються різні способи розв'язання цієї задачі. Розглянемо деякі з них.

### 7.8.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЛОЩИН

Побудова точок, що належать лінії перетину двох поверхонь, способом допоміжних січних площин здійснюється в такій послідовності:

1. Проводиться допоміжна січна площина, яка перетинає обидві поверхні. Бажано щоб ця площина перетинала кожен поверхню по простому перерізу (многокутник, коло).

2. Будується перший допоміжний переріз однієї з поверхонь з допоміжною площиною.

3. Будується другий допоміжний переріз другої поверхні з допоміжною площиною.

4. Знаходяться точки перетину контурів допоміжних перерізів. Ці точки є спільними для обох поверхонь, а значить належать лінії їх перетину.

Розглянемо приклад. На рисунку 7.20 задано конус обертання і сфера зі спільною площиною симетрії  $\varphi$ . Треба побудувати лінію перетину цих двох поверхонь. Враховуючи розташування заданих поверхонь відносно площини проєкцій, доходимо до висновку, що в даному випадку доцільно застосувати, як допоміжні, горизонтальні площини. Далі діємо за алгоритмом.

$$1. \gamma \parallel \Pi_1, \gamma_2 \parallel x, \gamma_2 \perp S_2C_2 \text{ (фронтальній проєкції осі конуса).}$$

2.  $\gamma \cap \text{Сферу} = \text{Коло}$  радіуса  $R$ . Горизонтальна проєкція цього кола теж буде коло  $(O_1, R)$  з центром  $O_1$  і радіусом  $R$ . Вимірюємо довжину  $R$  на фронтальній проєкції сфери і креслимо допоміжне коло  $(O_1, R)$  на горизонтальній проєкції.

3.  $\gamma \cap \text{Конус} = \text{Коло} (r)$ . Це буде другий допоміжний переріз. Будуємо його горизонтальну проєкцію – коло  $(S_1, r)$ .

4. Коло  $(O_1, R) \cap$  Коло  $(S_1, r) = 1, 2$ .

Точки  $1, 2$  спільні для обох заданих поверхонь, тобто належать лінії перетину цих поверхонь. Здійснюючи аналогічні побудови для інших горизонтальних січних площин, отримаємо множину точок, що належать лінії перетину. Однойменні проєкції цих точок з'єднують плавною кривою.

Для кращого уявлення форми лінії перетину та збільшенні її точності на кресленні доцільно будувати характерні (опорні) точки цієї лінії. Такими точками є габаритні (найвища, найнижча, найдальша, найближча), точки зміни видимості та ін.

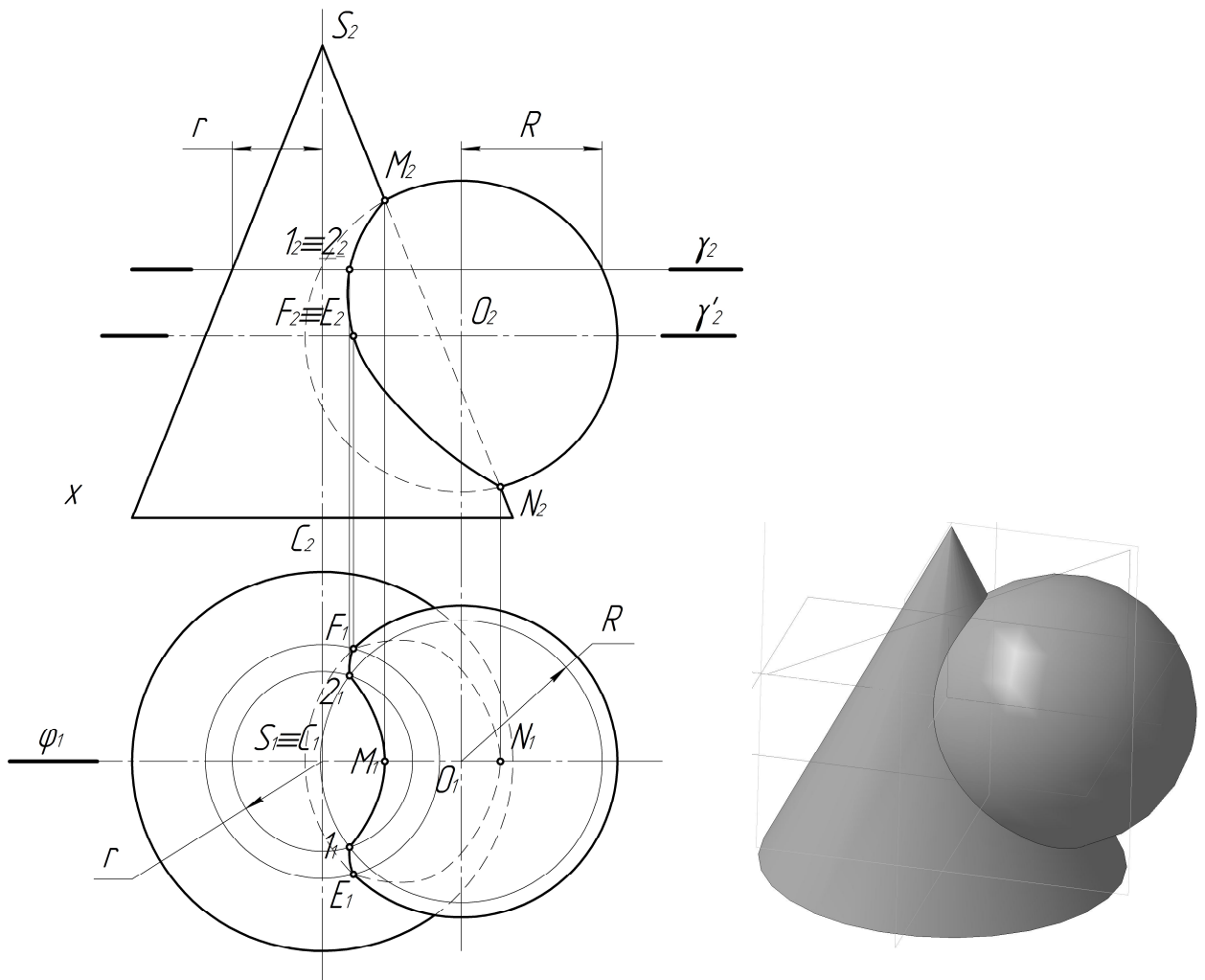


Рис. 7.20

В розглянутому прикладі найвища  $M (M_1, M_2)$  та найнижча  $N (N_1, N_2)$  точки побудовані як точки перетину головних меридіанів поверхонь. Точки  $E (E_1, E_2)$  та  $F (F_1, F_2)$  лінії видимості горизонтальної проєкції лінії перетину знайдені за допомогою допоміжної січної площини  $\gamma'$ , яка проведена через центр сфери і перетинає її по екватору.

Розглянемо інший приклад. На рисунку 7.21 фронтальні проекції точок лінії, по якій циліндр перетинає поверхню півсфери, можуть бути знайдені по горизонтальним проекціям.

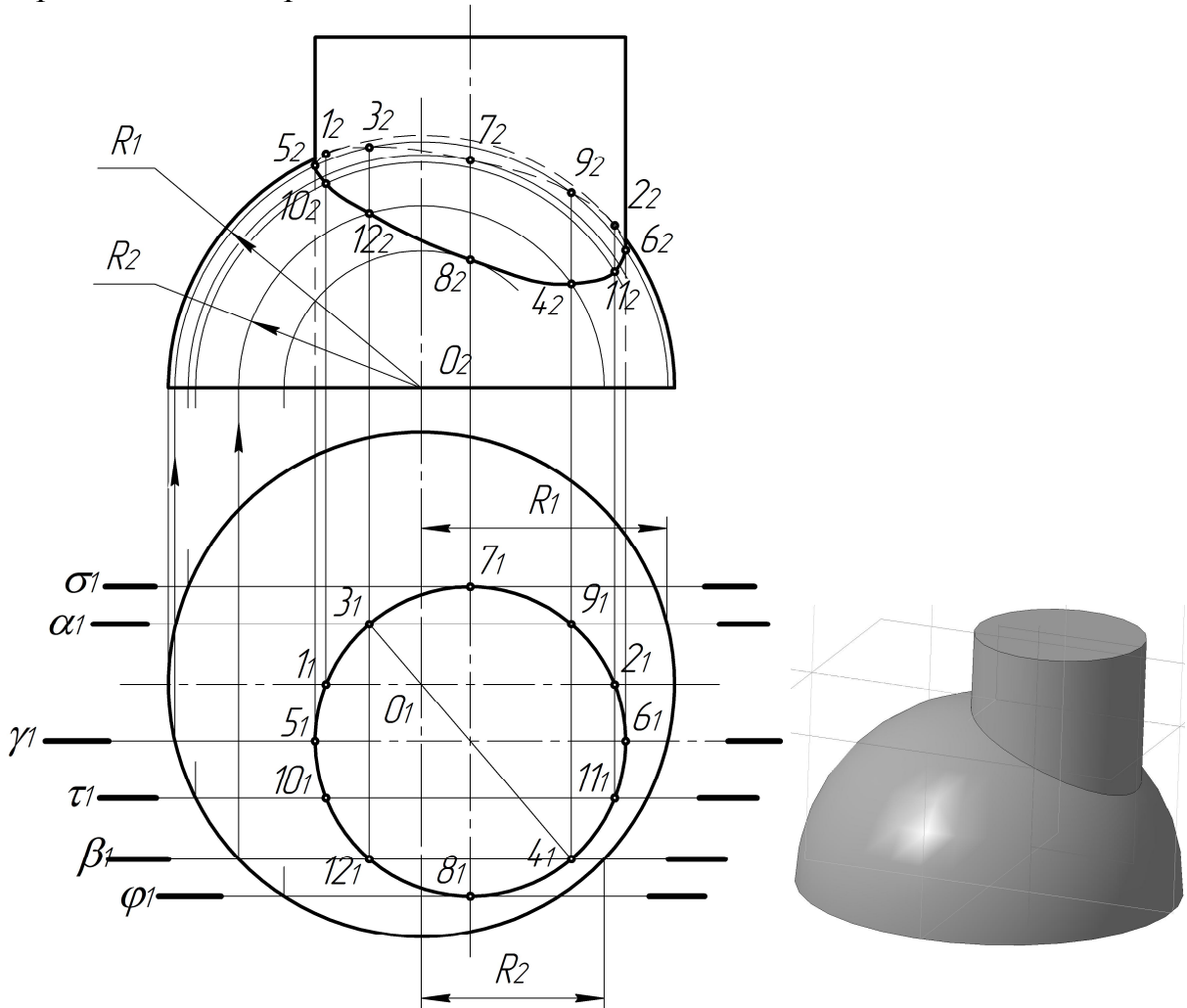


Рис. 7.21

Точки  $1$  і  $2$  розташовані на головному меридіані сфери (характерні точки, які знаходяться без допоміжних побудов). Найвищу та найнижчу точки лінії перетину  $3$  і  $4$  знайдено за допомогою фронтальних січних площин  $\alpha$  і  $\beta$ . Ці площини перерізають сферу по колам радіусів  $R_1$  та  $R_2$ . Побудова фронтальних проекцій точок  $3_2$  і  $4_2$  зрозуміла з рисунка. В точках  $5$  і  $6$  лінія на «видиму» та «невидиму» частини. Їх проекції на фронтальній площині проекцій  $5_2$  та  $6_2$  побудовано аналогічно точкам  $3$  і  $4$ . Так само побудовано і всі інші точки лінії перетину поверхонь.

### 7.8.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ КОНЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Застосування сфер для побудови лінії перетину поверхонь обертання ґрунтується на тому, що будь-яка поверхня обертання вісь якої проходить

через центр сфери перетинається з цією сферою по колах. Площини цих кіл перпендикулярні до осі обертання і зображуються у будь-якій площині паралельній осі обертання відрізками прямих. На рисунку 7.22 показано сферу з центром  $O$  ( $O_2$ ) і конус та два циліндра обертання, осі яких проходять через центр сфери. Кожна з цих поверхонь перетинає сферу по колах. Кожне коло зображується відрізком, кінцями якого є точки перетину контурів проекцій поверхні і сфери.

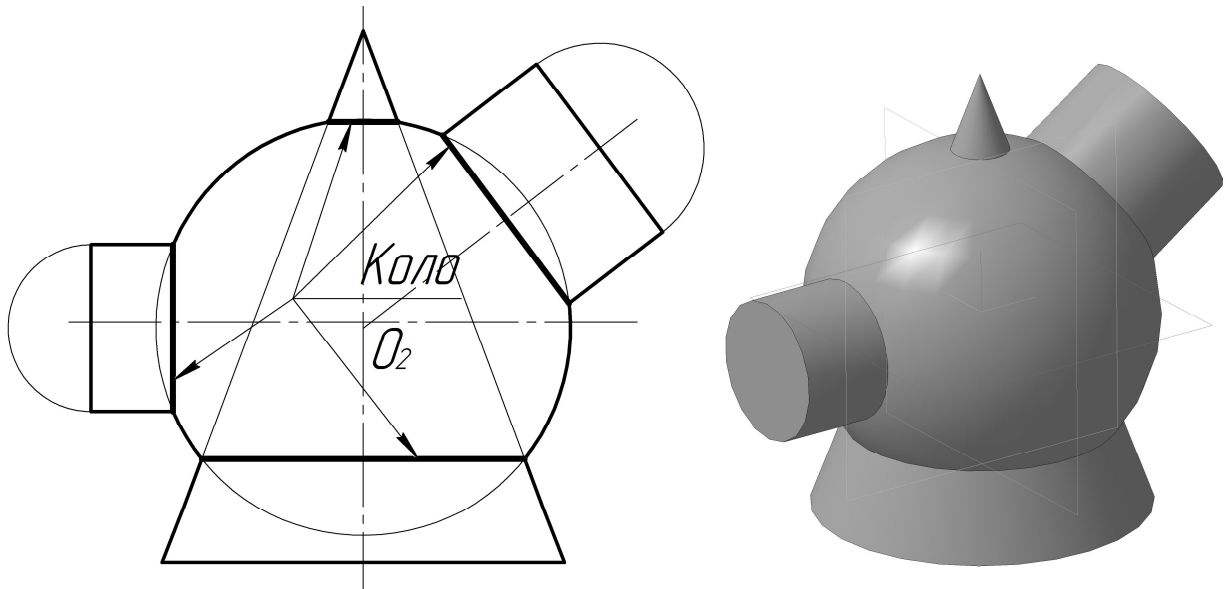


Рис. 7.22

Розглянемо приклад. На рисунку 7.23 задано конус обертання з горизонтально-проектуючою віссю та циліндр обертання з профільно-проектуючою віссю. Осі поверхонь перетинаються в точці  $O$  ( $O_1, O_2$ ) і паралельні фронтальній площині проекцій. Треба побудувати лінію перетину цих поверхонь. Послідовність побудови наступна:

1. Точку  $O$  ( $O_1, O_2$ ) перетину осей поверхонь приймаємо за центр допоміжних концентричних сфер.
2. З цього центру проведемо допоміжну сферу довільного радіуса, але в межах спільної частини поверхонь. Будемо будувати тільки фронтальні проекції допоміжних сфер.
3. Ця сфера перетне циліндр по колові, фронтальна проекція якого відрізок  $A_2B_2$ .
4. Ця ж допоміжна сфера перетне конус по колу, фронтальна проекція якого є відрізок  $C_2D_2$ .

5. Оскільки обидва кола лежать на одній допоміжній сфері, то вони перетинаються в двох точках  $1$  і  $2$ , фронтальні проекції яких співпадають  $I_2 \equiv 2_2 = A_2 B_2 \cap C_2 D_2$ . Горизонтальні проекції  $1_1$  і  $2_1$  точок  $1$  і  $2$  будуються з умови належності їх одній із заданих поверхонь, або допоміжній сфері.

Точки  $1$  і  $2$  є спільними для заданих поверхонь, а значить належать лінії перетину цих поверхонь.

Змінюючи величину радіуса допоміжної сфери, можемо побудувати достатню кількість точок для проведення кривої перетину. Межі зміни величини радіусу визначаються в кожному конкретному випадку. Для розглянутого прикладу  $O_2 M_2 \leq R_{сф} \leq O_2 K_2$ . У випадку  $R_{сф} = O_2 K_2$  допоміжна сфера буде дотичною.

*Спосіб допоміжних концентричних сфер може застосовуватись тільки у випадку, коли осі заданих поверхонь обертання перетинаються і обидві паралельні до одної площини проекцій.*

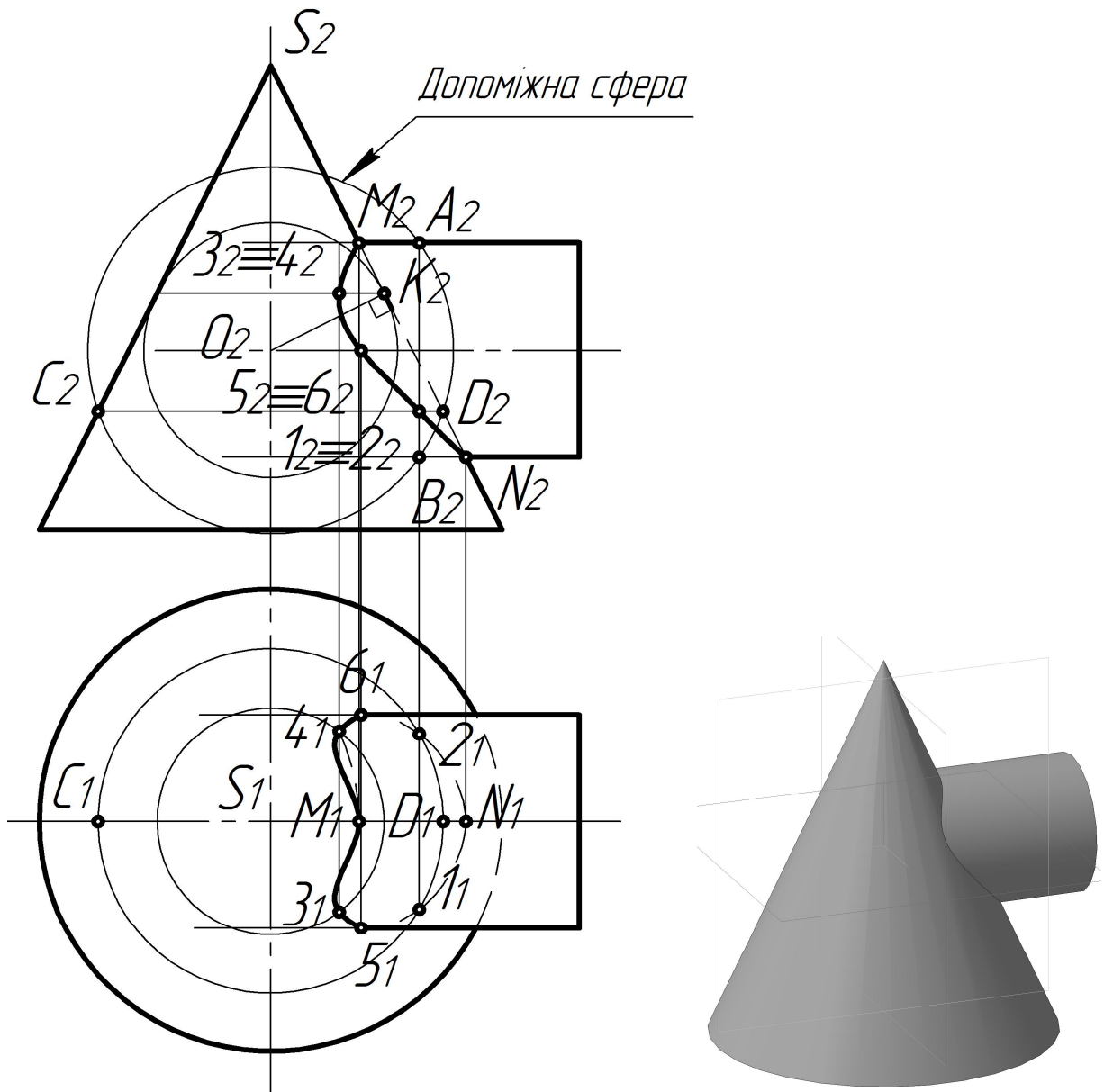


Рис. 7.23

### 7.8.3 ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В загальному випадку лінія перетину двох поверхонь обертання другого порядку є просторова лінія четвертого порядку. У попередніх прикладах ми будували проєкції таких ліній.

В особливих випадках ця лінія розпадається на *дві плоскі криві другого порядку*. Ці особливі випадки визначаються теоремою Г. Монжа: *якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої або вписані в неї, то лінія їх перетину розпадається на дві плоскі криві другого порядку*.

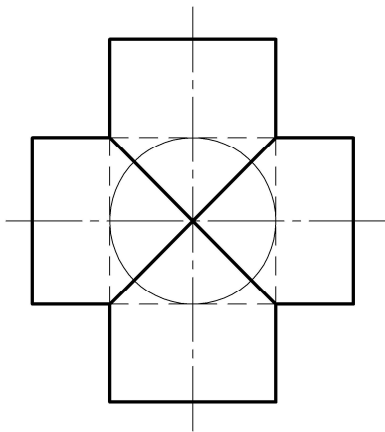
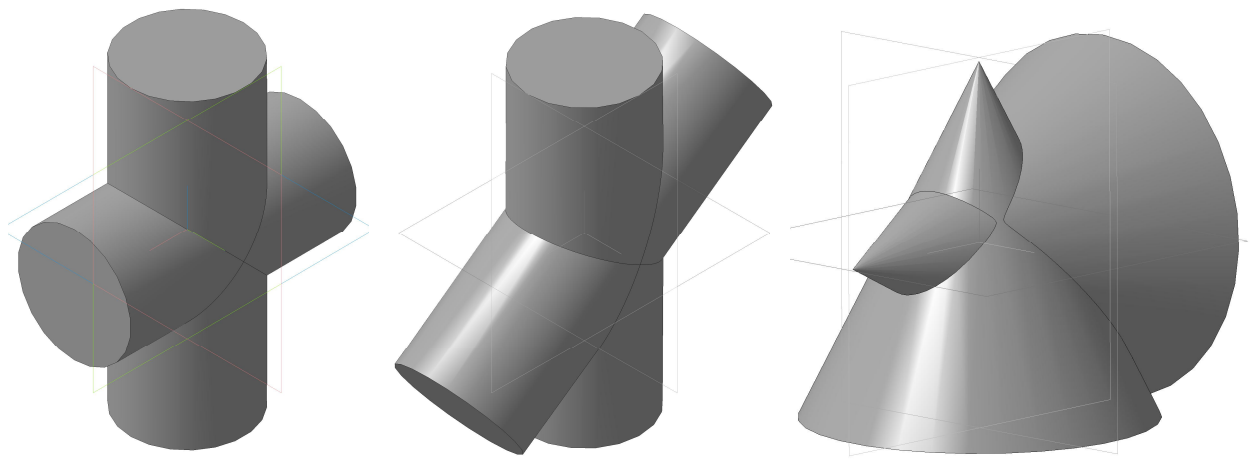


Рис. 7.24

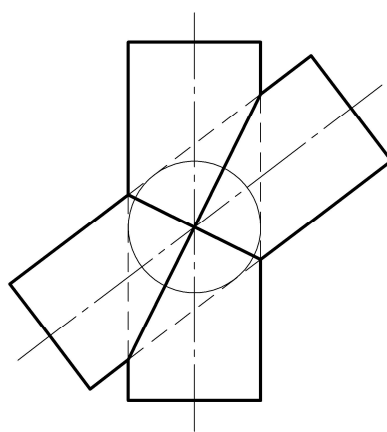


Рис. 7.25

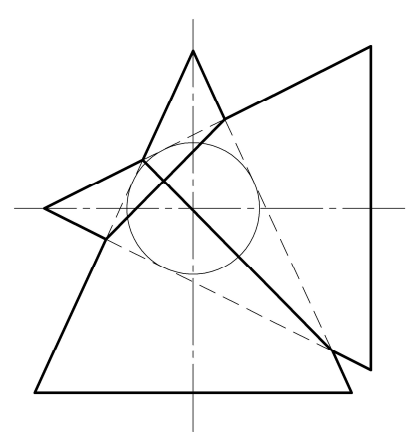


Рис. 7.26

Ми розглянемо окремий випадок цієї теореми, коли поверхнею навколо якої описані дві поверхні другого порядку є сфера.

На рисунках 7.24, 7.25, 7.26 наведено приклади (показано тільки фронтальні проєкції) коли лінія перетину двох поверхонь, що дотичні до сфери, розпадається у кожному випадку на два еліпси.

## 7.9 РОЗГОРТКИ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

*Розгорткою поверхні, яка обгортає просторове тіло, називається плоска фігура утворена неперервним вигинанням поверхні на площину без розривів і складок.*

Для поверхонь, які розгортаються (циліндр, конус), можна побудувати точні розгортки (в межах точності інструментів та значення числа  $\pi$  і тригонометричних функцій) або наближені.

У практиці проектування і будівництва розгортки поверхонь знаходять застосування при розробці креслень для розкрою плоского листового матеріалу. Розгортки поверхонь використовуються при проектуванні і будівництві резервуарів різної форми, повітроводів та ін.

### 7.9.1 РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ ПРЯМОГО КОНУСА ОБЕРТАННЯ

Розгорткою прямого конуса обертання є *сектор кола*, радіус якого  $L$  і центральний кут  $\varphi = 360 \cdot R/L$  та коло основи (рис. 7.27). Прийнято будувати кут  $\varphi$  не користуючись транспортиром, який дає значну похибку. До того ж кут  $\varphi$  в більшості випадків не дорівнює цілому числу градусів. Конічну поверхню при побудові розгортки замінюють на поверхню многогранної піраміди вписаної в дану конічну поверхню.

Приклад розгортки прямого конуса обертання наведено на рисунку 7.28. Дугу сектора розділяють на рівні частини, наприклад на 12, і на стільки ж рівних части основу конуса. Нумерують точки розділу, як показано на рисунку 7.28 та проводять твірні на проєкціях конуса і на розгортці. Залишається перенести

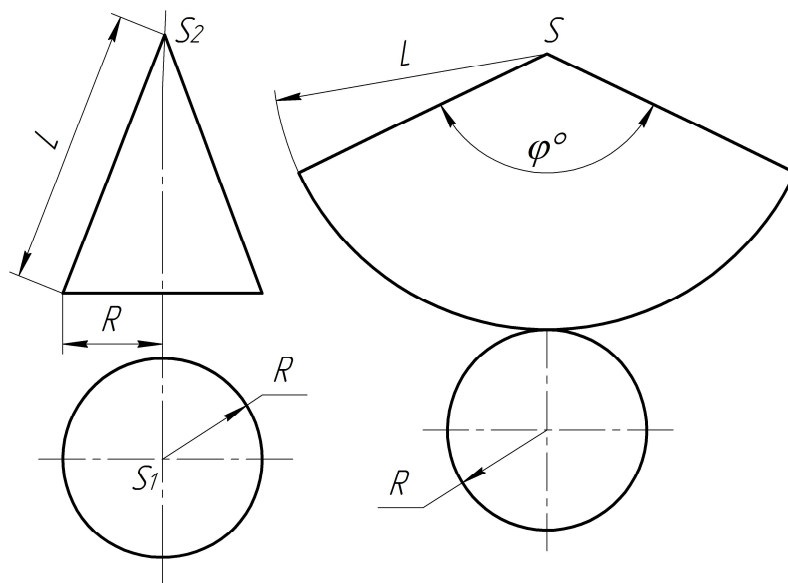


Рис. 7.27

точки з проєкції лінії перерізу конуса площиною на розгортку. Для цього необхідно визначити їх натуральну відстань від вершини  $S$ . Це виконується паралельним переміщенням кожної точки на крайню твірну конуса, яка проєктується в натуральну величину на фронтальній площині проєкцій.

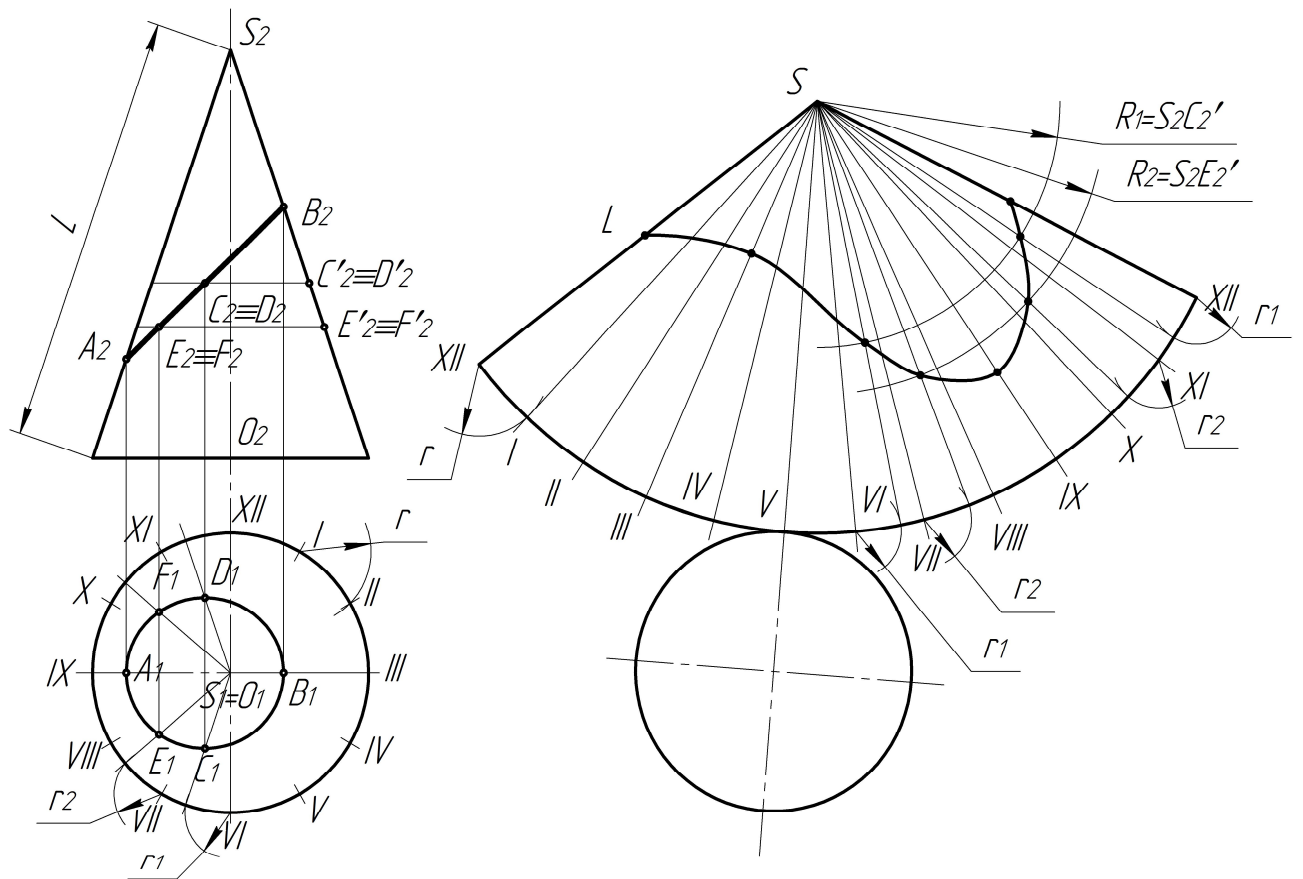


Рис. 7.28

### 7.9.2 РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ ПРЯМОГО ЦИЛІНДРА ОБЕРТАННЯ

*Розгортка прямого циліндра обертання є плоска фігура, яка складається з прямокутника і двох кіл (рис. 7.29). Одна сторона прямокутника дорівнює висоті циліндра  $h$ , інша – довжині кола основи. Довжину кола основи можна визначити по формулі  $C=2\pi R$  або  $C=\pi D$ .  $R$  і  $D$  – радіус і діаметр кола основи.*

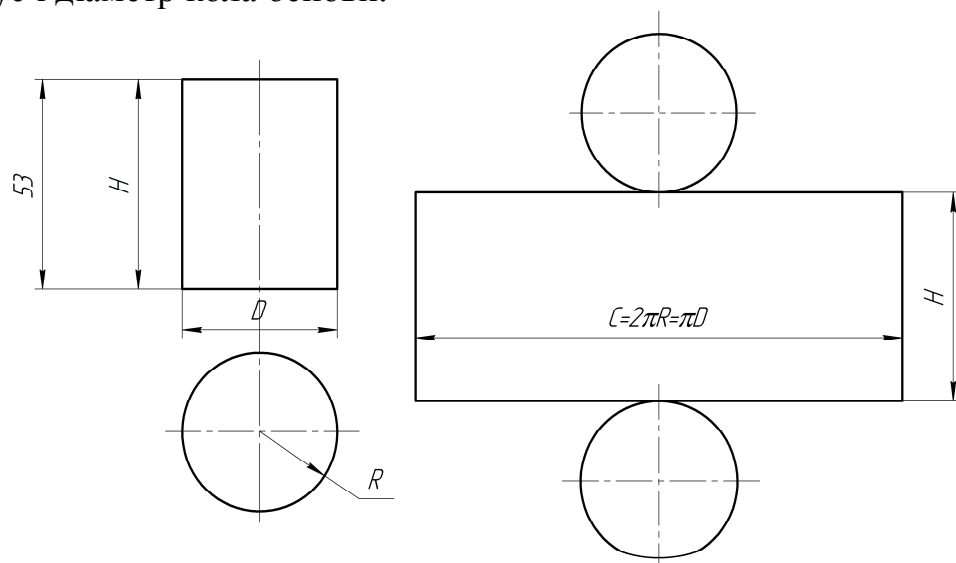


Рис. 7.29

На практиці циліндричну поверхню при побудові розгортки замінюють на поверхню многогранної призми вписаної в дану циліндричну поверхню.

Приклад розгортки прямого циліндра обертання, перерізаного площиною, яка нахилена під довільним кутом до осі обертання (яка найбільш часто зустрічається на практиці), наведено на рисунку 7.30. В даному випадку крива лінія, в яку на розгортці перетворюється лінія перерізу поверхні, перетворюється на синусоїду.

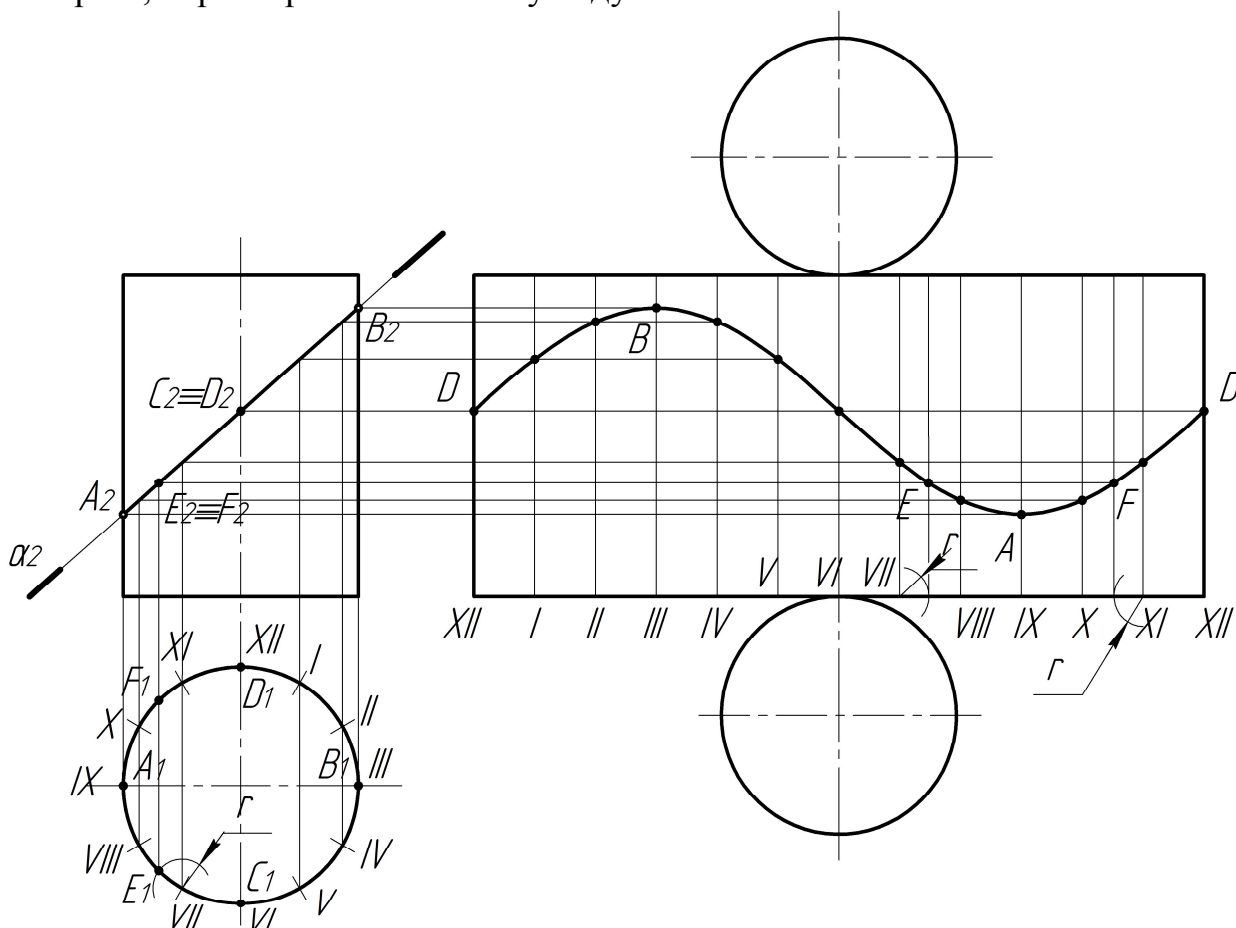


Рис. 7.30

### 7.9.3 НАБЛИЖЕНІ РОЗГОРТКИ СФЕРИ

Окрему увагу приділимо розгортці сфери, так як вона має форму тіла, що не розгортається. Тому для таких поверхонь можна побудувати лише наближені розгортки через що втрачається точність розгортки такої поверхні на площині. На жаль, в багатьох підручниках з нарисної геометрії не приділяється належна увага розгортці таких поверхонь. Тому важливим є питання дослідження способів розгортки сферичних об'єктів.

Для будь якого многогранника можливо побудувати точну розгортку. Циліндр і конус також мають точні розгортки. Деякі поверхні не можуть бути розгорнуті на площині точно, без розривів і складок, наприклад сфера (поверхня кулі). Вони мають назву поверхонь, які не розгортаються. Для таких поверхонь можна побудувати лише наближені розгортки. Якщо

скласти наближену розгортку, ми отримаємо деяку іншу поверхню, наближену по формі до вихідної, але не повністю з нею співпадаючу.

Розглянемо деякі способи наближеної розгортки сфери на прикладі відомих об'єктів.

Очистити апельсин від шкірки можна наступним способом: розрізати її ножом по дугам великих кіл (розріз кулі площиною, яка проходить через центр) так, як проходять меридіани земної кулі. При цьому слід відзначити, що кожна частина шкірки не плоска, а випукла, і спроби зробити її плоскою можливі лише в тому випадку, коли шкірка достатньо еластична і ми зможемо стиснути середину та розтягнув при цьому краї. Подібна розгортка сфери знаходить широке застосування, наприклад при виготовленні поверхні глобуса (рис. 7.31).

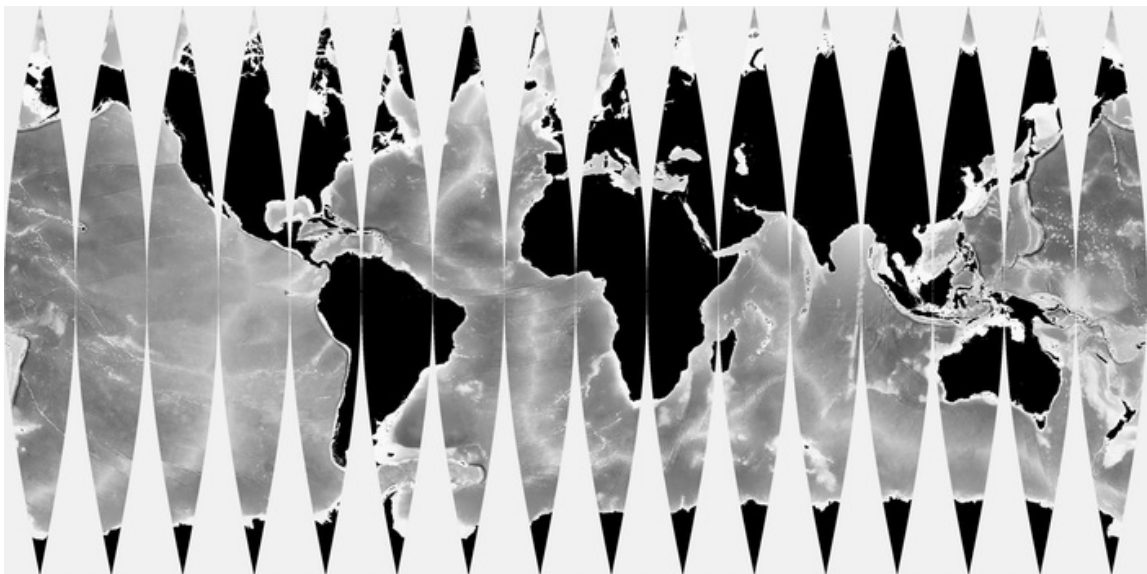


Рис. 7.31

Розгортка точніша, чим більше число частин, на які розрізана сфера. Кожна частина має назву сферичного двокутника.

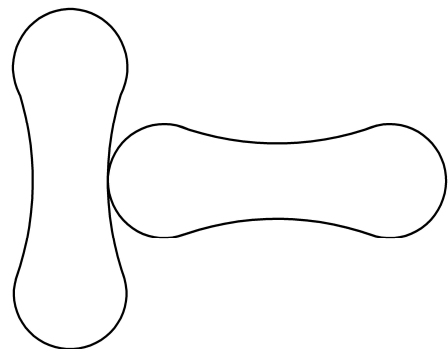


Рис. 7.32

Існують і інші способи наближених розгорток сфери, наприклад розгортка тенісних куль, яка складається з двох однакових частин (рис. 7.32), форма яких нагадує вісімку; розгортка футбольних м'ячів, яка складається з п'яти та шестикутників (рис. 7.33) та інші.

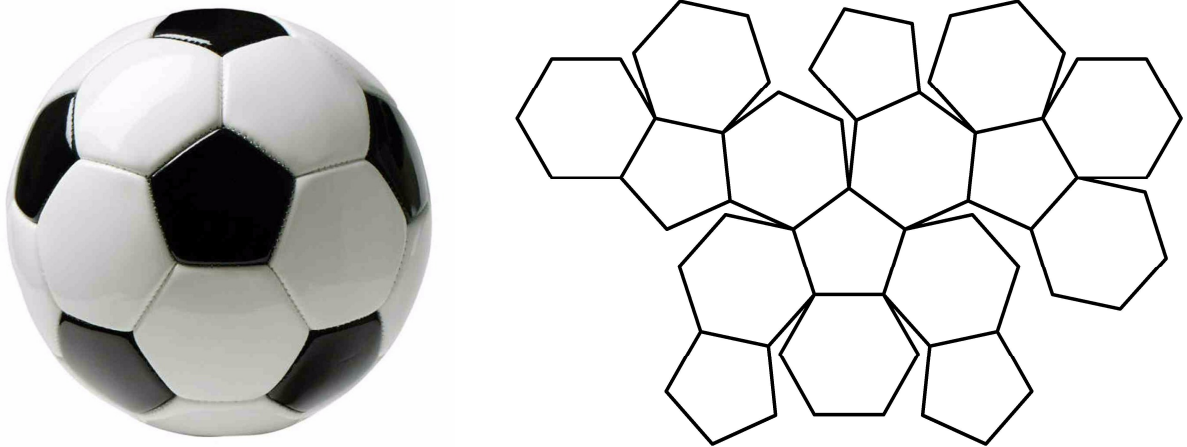


Рис. 7.33

Заздалегідь поверхня, що не розгортається, апроксимується ділянками розгорнутих поверхонь, будується розгортка цих ділянок, сукупність яких і є умовною розгорткою поверхні. Якщо ця поверхня лінійчата, доцільно умовну розгортку будувати способом триангуляції, тобто шляхом розбиття поверхні на трикутники, які послідовно поєднуються на площині креслення.

Умовні розгортки поверхні обертання зазвичай будують способом допоміжних циліндрів (рис. 7.34).

За допомогою вертикальних площин, що проходять через центр сфери, розіб'ємо її поверхню на дванадцять рівних відсіків. Парно протилежні відсіки апроксимуємо циліндричною поверхонню (циліндр, описаний навколо сфери). Будуємо розгортку відсіку, який знаходиться між суміжними меридіональними перетинами. Дванадцять подібних розгорток і складуть умовну розгортку сфери. Для побудови розгортки відсіку циліндричної поверхні проводимо в його межах декілька змінних твірних - горизонтальних відрізків 1-2, 3-4, 5-6. Ці твірні проектується на горизонтальну площину проєкцій у натуральну величину ( $1_12_1$ ;  $3_14_1$ ;  $5_16_1$ ). А відстань між ними проектується у натуральну величину на розгортці відсіку. Так на плоскій мапі земної кулі площа материків та островів, які знаходяться ближче до північного і південного полюсів виглядає більше ніж на справді (див. рис. 7.31).

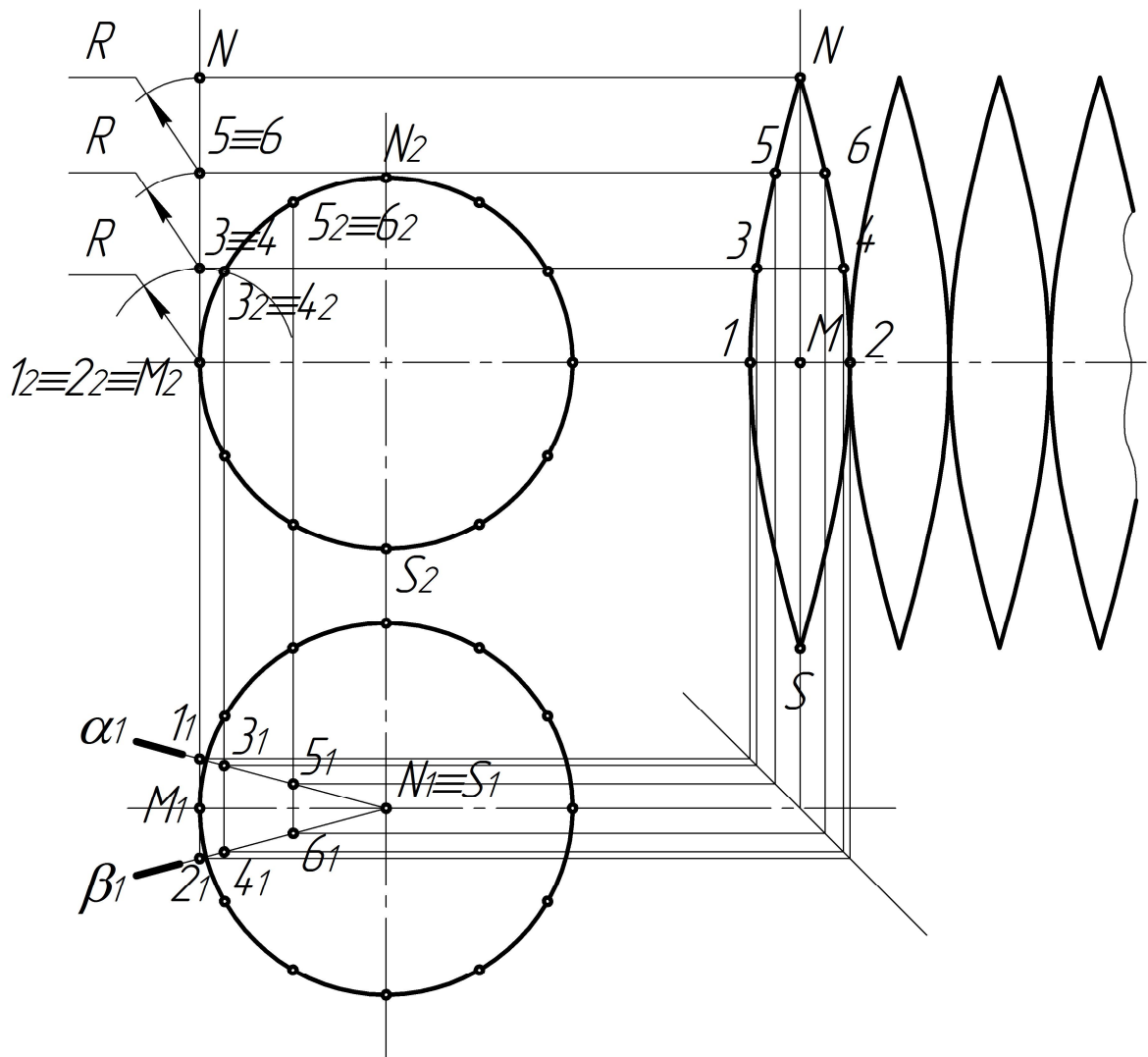


Рис. 7.34

Спосіб допоміжних конусів (рис. 7.35) полягає в тому, що сфера горизонтальними площинами розбивається на ряд сферичних поясів, які апроксимуються конічними поверхнями, вписаними або описаними. Сукупність розгорток зрізаних конусів і представлятиме умовну розгортку сфери. Вона розбита на три сферичні пояси, кожний з яких замінений вписаними конічними поверхнями з вершинами в точках 5, 5' і 5". На розгортці радіуси секторів кругів відповідають довжинам твірних конусів, а центральні кути секторів визначені по формулі  $\varphi = 360 R / L$ .

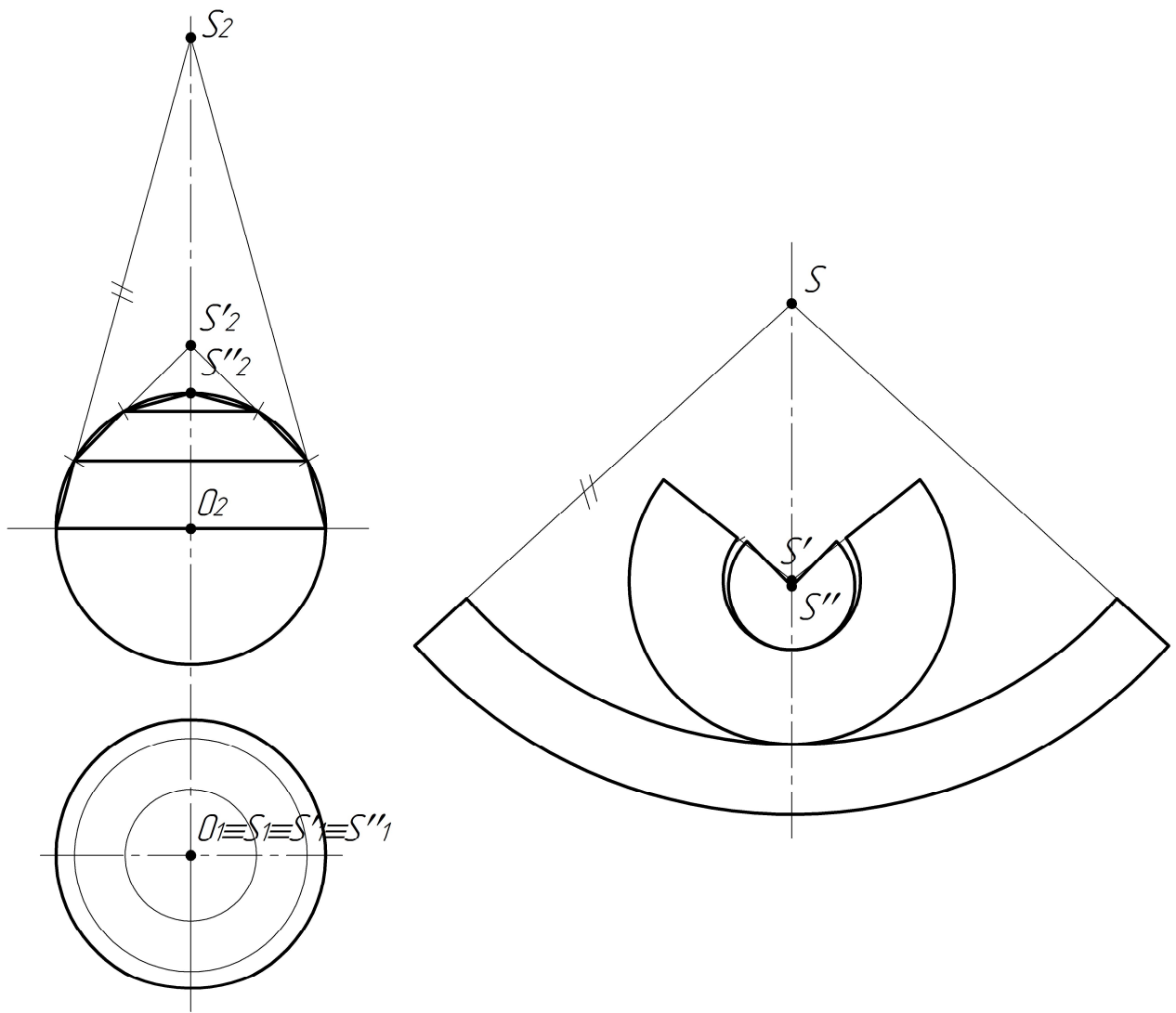


Рис. 7.35

### **ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ**

1. Яка фігура має умовну розгортку поверхні?

1. Многогранник
2. Циліндр
3. Сфера
4. Конус

2. Розгортку якої кривої поверхні можна побудувати точно?

1. Гіперболоїд
2. Сфера
3. Тор
4. Циліндр

3. Яка фігура утворюється при перерізі сфери площиною?

1. Прямокутник
2. Еліпс
3. Коло
4. Квадрат

4. Яка площина на рисунку 7.36 перерізає сферу по колу найменшого діаметра?

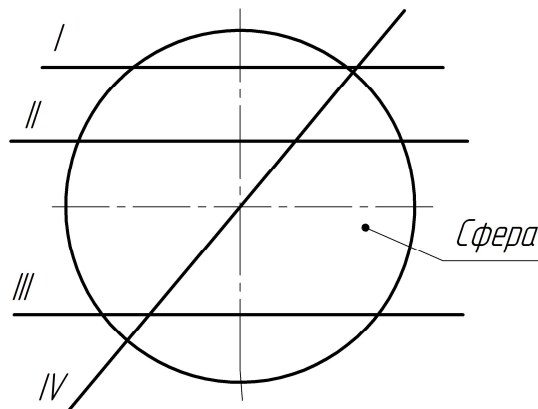


Рис. 7.36

1. *IV*                      2. *III*                      3. *II*                      4. *I*

5. Яка площина на рисунку 7.36 перерізає сферу по колу найбільшого діаметра?

1. *IV*                      2. *III*                      3. *II*                      4. *I*

6. Яка з площин на рисунку 7.36 утворює переріз у формі еліпсу на горизонтальній площині проєкцій?

1. *IV*                      2. *III*                      3. *II*                      4. *I*

7. Яку форму має розгортка бокової поверхні прямого конуса обертання з основою, яка перпендикулярна до осі конуса?

1. Сектор
2. Трикутник
3. Сегмент
4. Прямокутник

8. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі коло?

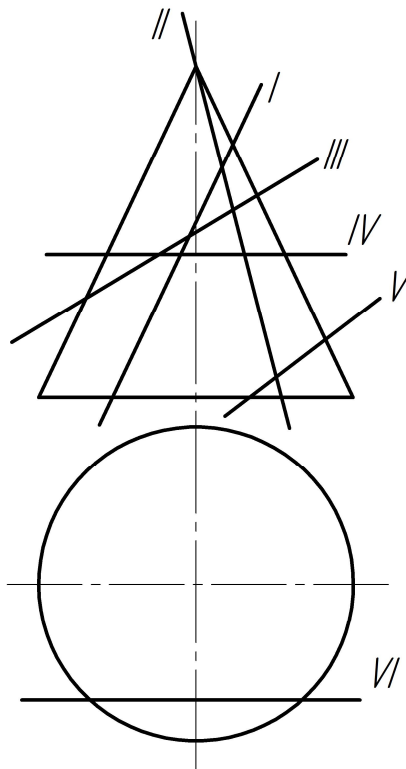


Рис. 7.37

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

9. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі еліпс?

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

10. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі половину гіперболи?

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

11. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі параболу?

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

12. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі трикутник?

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

13. Яка фігура утворюється при перерізі прямого конуса площиною, що проходить через його вершину?

1. Частина еліпса
2. Парабола
3. Гіпербола
4. Трикутник

14. Яка площина на рисунку 7.37 утворює в перерізі частину еліпса?

1. *I*            2. *II*            3. *III*            4. *IV*            5. *V*            6. *VI*

15. Чому дорівнює довжина розгортки бічної поверхні прямого циліндра обертання, якщо радіус основи дорівнює  $R$ ?

1.  $\pi R$       2.  $2\pi R^2$       3.  $\pi R^2$       4.  $2\pi R$

16. Яка площина на рисунку 7.38 утворює в перерізі коло?

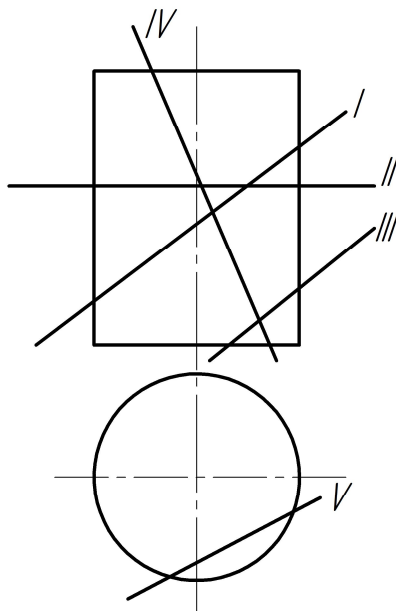


Рис. 7.38

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*

17. Яка площина на рисунку 7.38 утворює в перерізі прямокутник?

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*

18. Яка площина на рисунку 7.38 утворює в перерізі еліпс?

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*

19. Яка площина на рисунку 7.38 утворює в перерізі частину еліпса?

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*

20. Яка площина на рисунку 7.38 утворює в перерізі частинну еліпса, обмежену з двох боків прямими?

1. *I*      2. *II*      3. *III*      4. *IV*      5. *V*

21. Яка фігура утворюється при перерізі прямого циліндра площиною, яка паралельна до його осі обертання?

1. Коло
2. Прямокутник
3. Частина еліпса
4. Трикутник

22. Яка фігура утворюється при перерізі прямого циліндра площиною, яка перпендикулярна до його осі обертання?

1. Коло
2. Прямокутник
3. Частина еліпса
4. Еліпс

23. Яка фігура утворюється при перерізі прямого циліндра площиною, яка перетинає його основу і не паралельна до осі обертання?

1. Коло
2. Прямокутник
3. Частина еліпса
4. Еліпс

24. Білими колами на рисунку 7.39 зображені видимі проєкції точок, чорними – невидимі. Видимість якої точки на горизонтальній проєкції визначена невірно?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

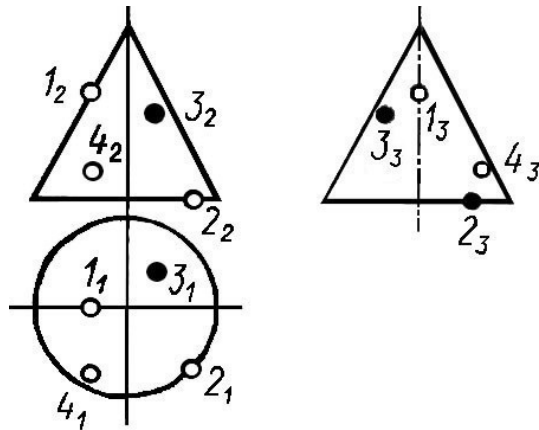
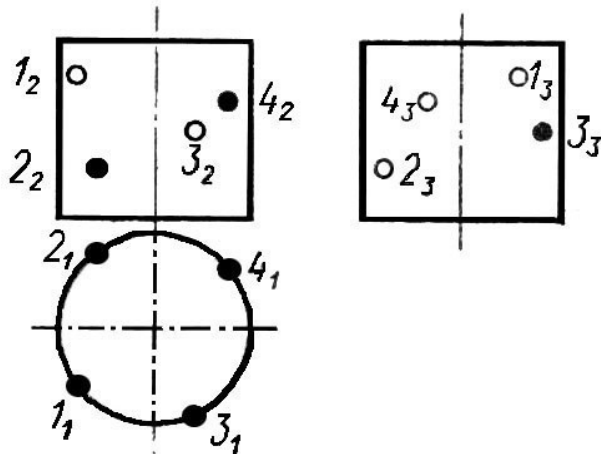


Рис. 7.39

25. Яка форма перерізу буде одержана у тому випадку, якщо циліндр обертання буде перерізатися площиною, яка нахилена до його осі і всі твірні циліндра будуть приймати участь у перетині?

1. Коло
2. Прямокутник
3. Частина еліпса, яка обмежена прямою
4. Еліпс

26. Білими колами на рисунку 7.40 зображені видимі проєкції точок, чорними – невидимі. Видимість якої точки визначена невірно?



1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Рис. 7.40

27. Профільна проекція якої точки на рисунку 7.41 побудована невірно?

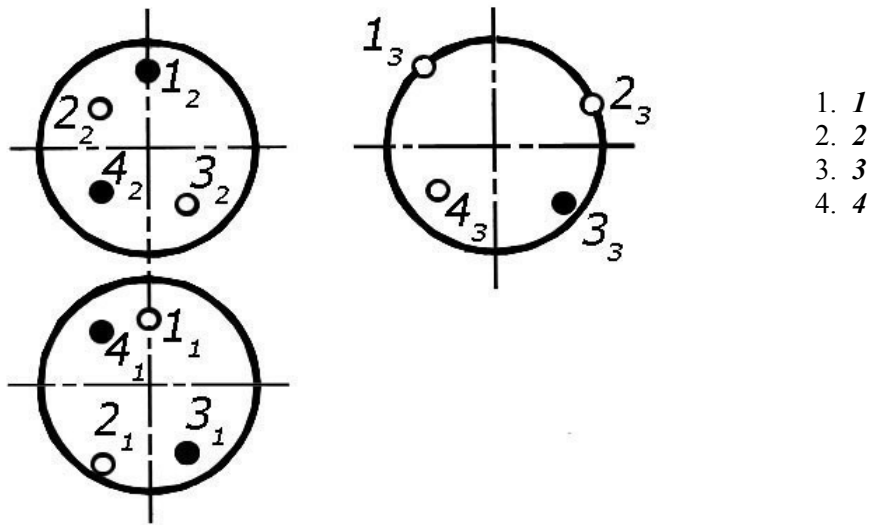


Рис. 7.41

28. Білими колами на рисунку 7.42 зображені видимі проекції точок, чорними - невидимі. Видимість якої точки на одній з проекцій визначена невірно?

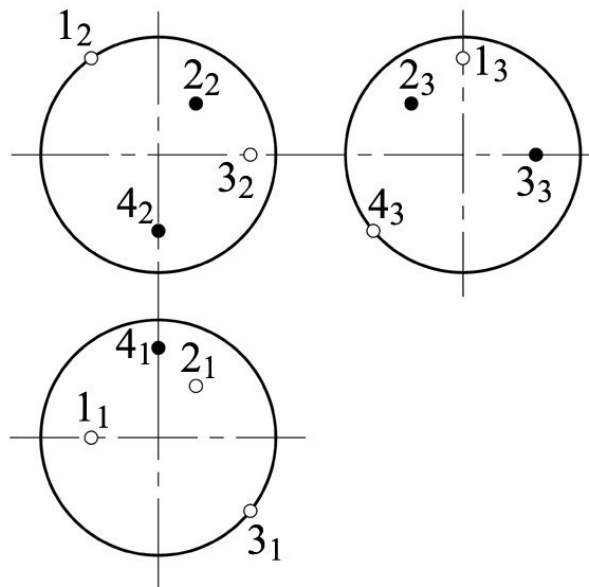


Рис. 7.42

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4    5. жодної – всі вірно

29. Білими колами на рисунку 7.43 зображені видимі проекції точок, чорними - невидимі. Видимість якої точки на одній з проекцій визначена невірно?

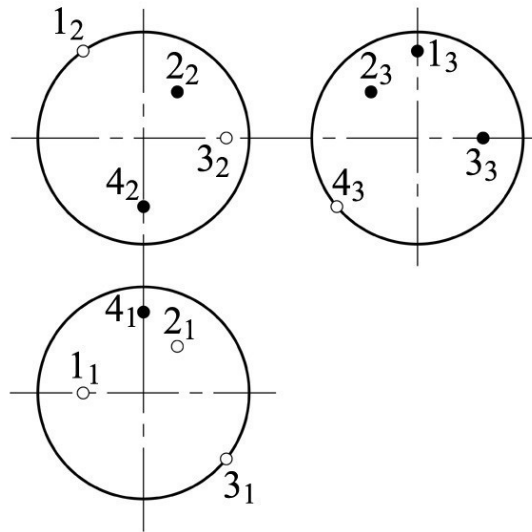


Рис. 7.43

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4    5. жодної – всі вірно

30. Білими колами на рисунку 7.44 зображені видимі проекції точок, чорними - невидимі. Видимість якої точки на одній з проекцій визначена невірно?

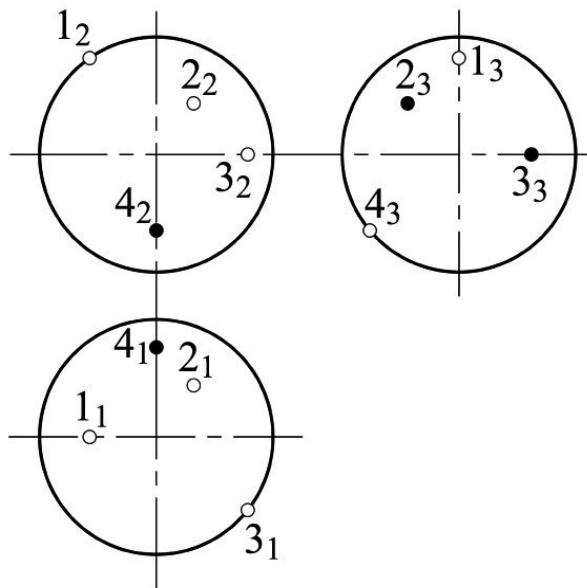


Рис. 7.44

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4    5. жодної – всі вірно

31. Білими колами на рисунку 7.45 зображені видимі проекції точок, чорними - невидимі. Видимість якої точки на одній з проекцій визначена невірно?

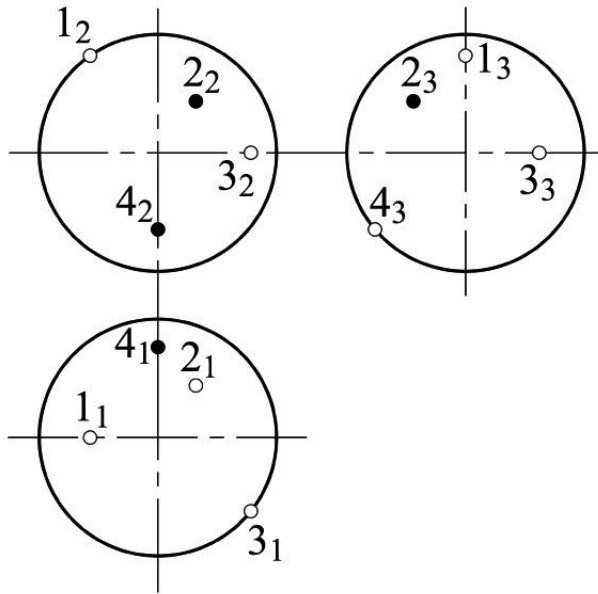


Рис. 7.45

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4    5. жодної – всі вірно

32. Білими колами на рисунку 7.46 зображені видимі проекції точок, чорними - невидимі. Видимість якої точки на одній з проекцій визначена невірно?

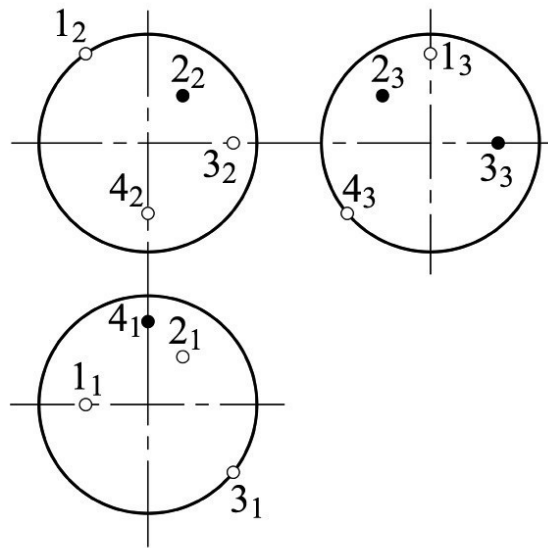


Рис. 7.46

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4    5. жодної – всі вірно

33. Який кут сектора має розгортка бічної поверхні прямого конуса?

1.  $\frac{180^\circ R}{l}$

2.  $\frac{360^\circ R}{l}$

3.  $\frac{360^\circ l}{R}$

4.  $\frac{180^\circ l}{R}$

34. На якому рисунку для знаходження лінії перетину поверхонь доцільно використати горизонтальні січні площини?

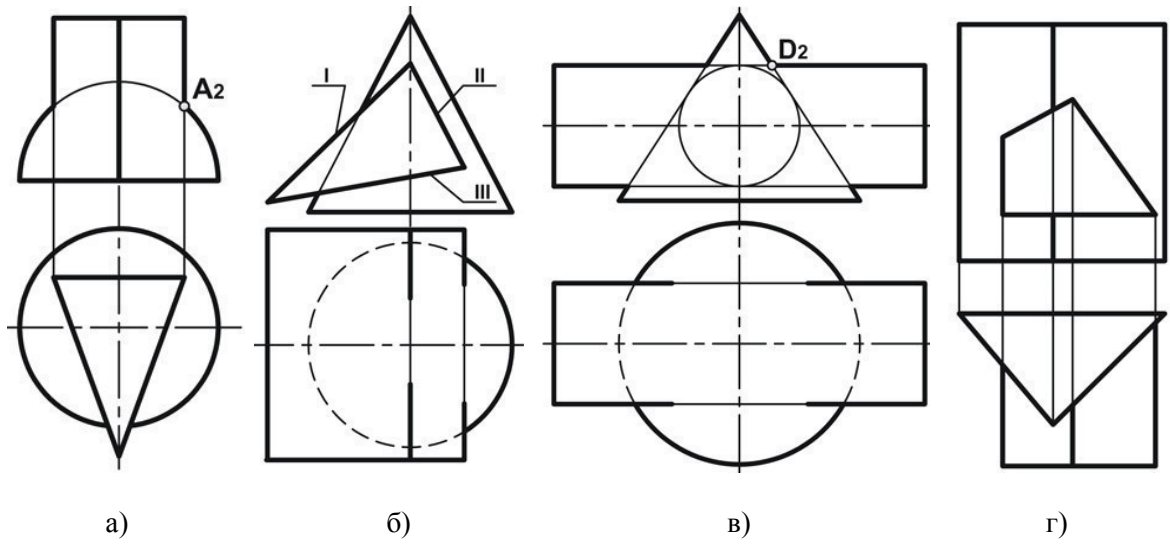


Рис. 7.47

35. На якому рисунку лінія перетину поверхонь може бути знайдена за допомогою метода концентричних допоміжних сфер?

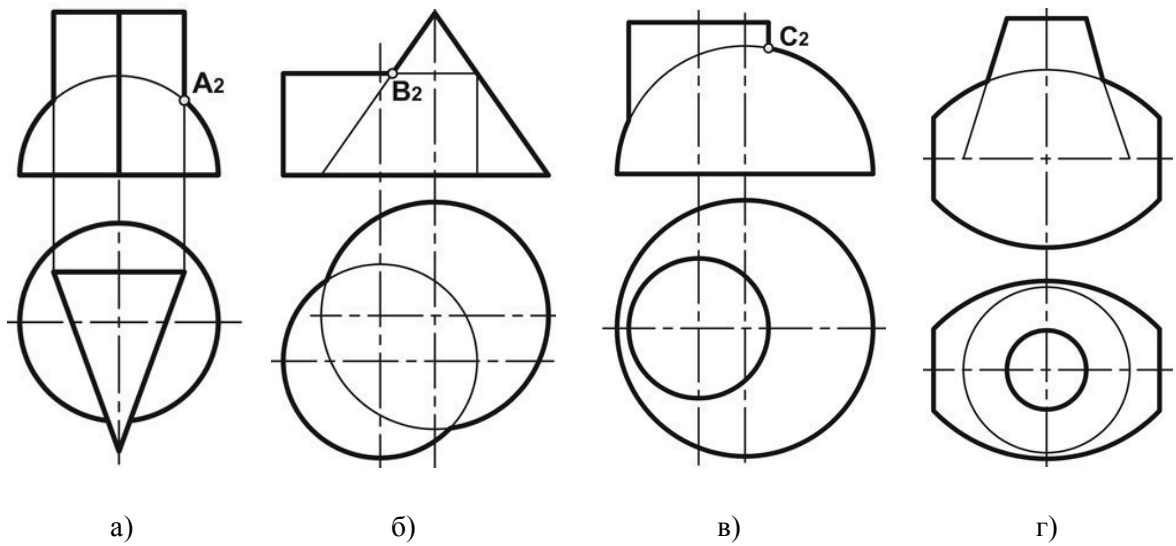


Рис. 7.48

36. На якому рисунку задача побудови лінії перетину поверхонь не може бути вирішена за допомогою метода концентричних допоміжних сфер?

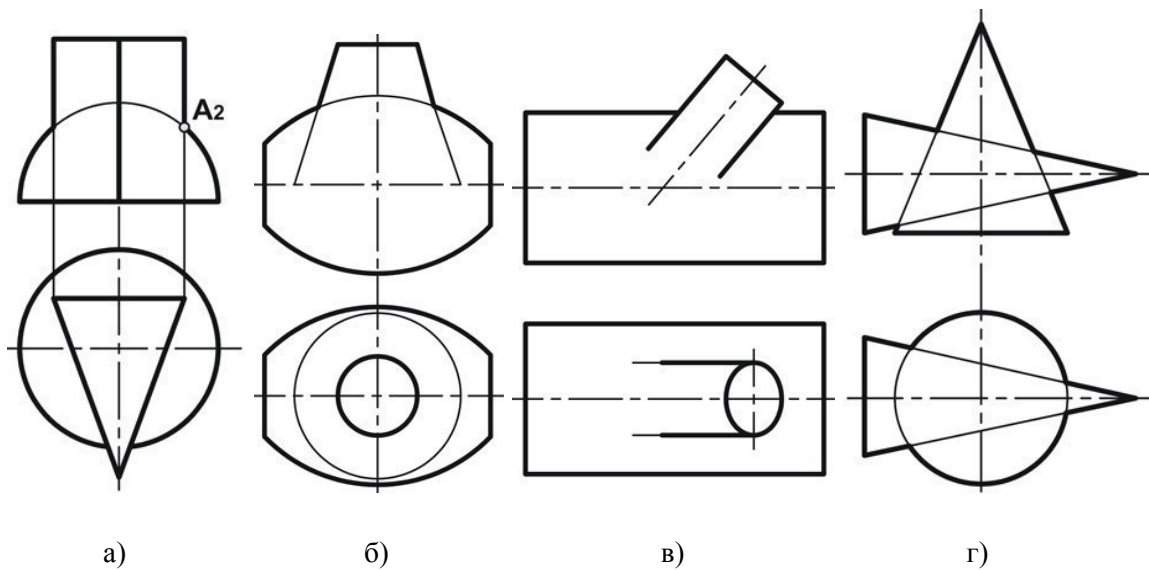


Рис. 7.49

37. На якому рисунку поверхні перетинаються по двом плоским кривим (теорема Монжа)?

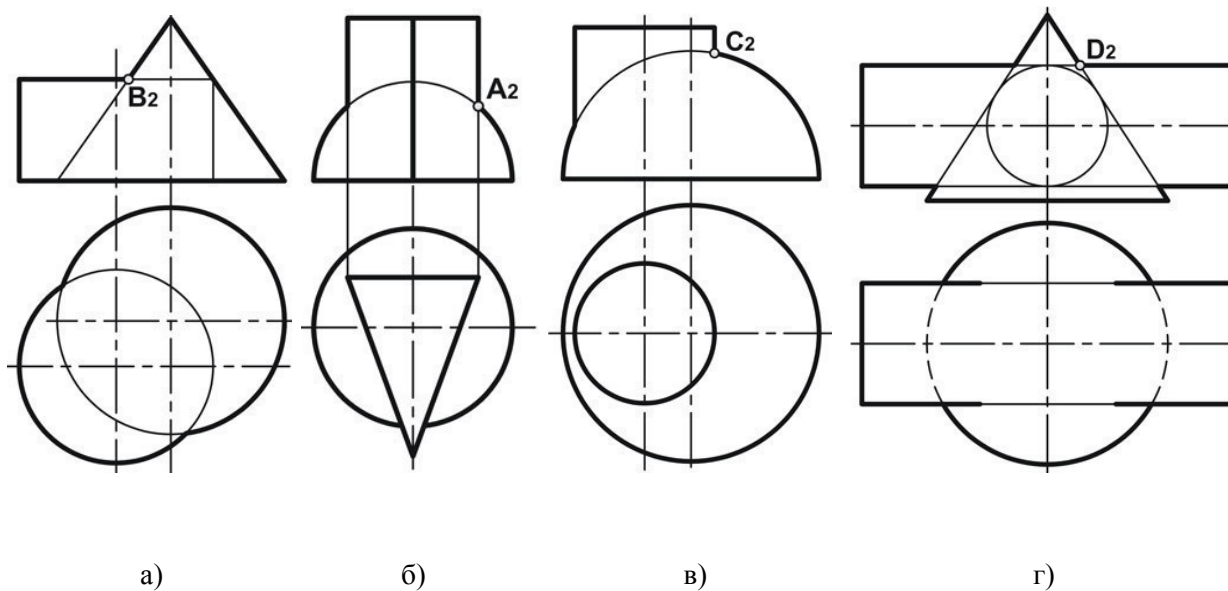


Рис. 7.50

38. На якому рисунку поверхні перетинаються по двом плоским кривим (теорема Монжа)?

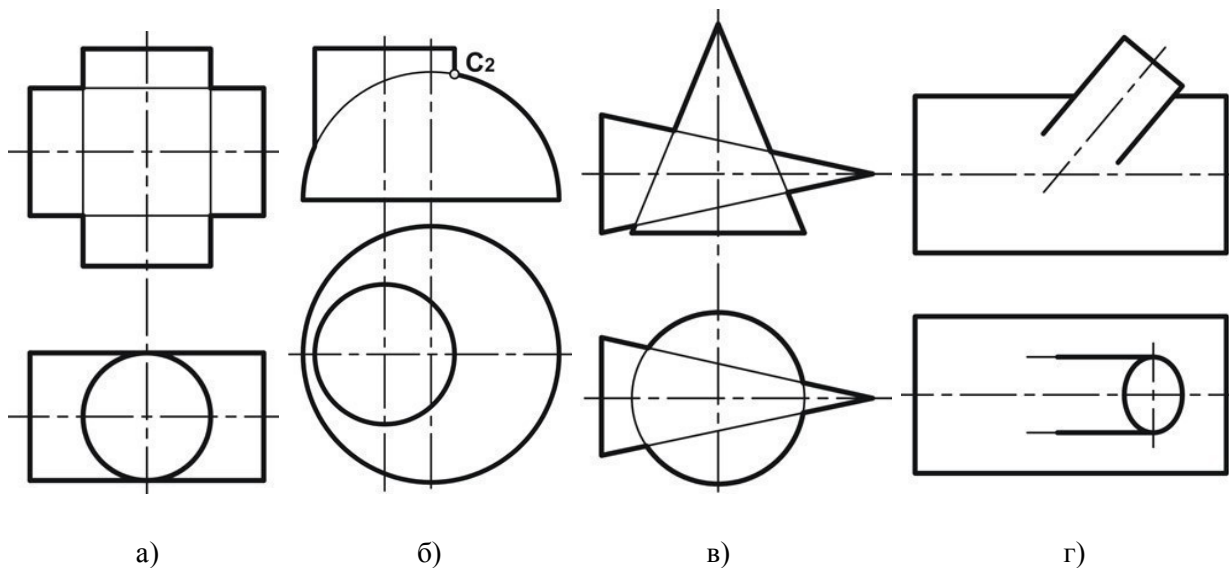


Рис. 7.51

40. Яка крива утворюється на поверхні конуса при перетині його гранню призми, яка позначена номером **I** (рис. 7.52)?

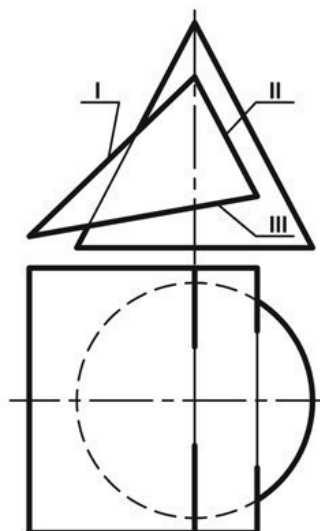


Рис. 7.52

1. Коло    2. Еліпс    3. Частина еліпса    4. Дві дуги параболи    5. Дві дуги гіперболи

41. Яка крива утворюється на поверхні конуса при перетині його гранню призми, яка позначена номером **III** (рис. 7.52)?

1. Коло    2. Еліпс    3. Частина еліпса    4. Дві дуги параболи    5. Дві дуги гіперболи

42. Яка крива утворюється на поверхні конуса при перетині його гранню призми, яка позначена номером **II** (рис. 7.52)?

1. Коло    2. Еліпс    3. Частина еліпса    4. Дві дуги параболи    5. Дві дуги гіперболи


## ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна та комп'ютерна графіка. Підручник. - За ред. В.Є. Михайленка. - 5-е вид. Київ: Каравела, 2010. - 360 с.
2. В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов, І.А. Скидан; Інженерна та комп'ютерна графіка. Підручник для студ. вузів За ред. В.Є. Михайленка. - 2-ге вид. перероб. - К. : Вища школа, 2001. - 350 с
3. Русскевич, Н. Л. Начертательная геометрия. Учеб. пособие для вузов строит. спец. - Киев : Вища школа, 1978. - 311 с
4. А. В. Бубенников, М. Я. Громов. Начертательная геометрия. Учеб. для втузов - М. : Высшая школа, 1973. - 416 с.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983. - 240 с.
6. Королевич А. И. Геометрия графического отображения. Львов: Изд. Львовского университета, 1968г. -280 с.
7. Альтшулер И.С. Краткий курс начертательной геометрии. Курс лекций. - Минск: Высшая школа, 1965. - 271 с.
8. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки : Навчальний посібник . Михайленко В.Є., Найдиш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. За ред. В.Є. Михайленка. - К. : Вища школа, 2003. - 159 с.

# З М І С Т

<b>ПЕРЕДМОВА</b>	3
<b>ПОРАДИ СТУДЕНТАМ</b>	3
<b>ПРИЙНЯТІ ТЕРМІНИ ТА ЇХ ПОЗНАЧЕННЯ</b>	4
<b>1. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ</b>	5
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	7
<b>2. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ТОЧКИ</b>	9
2.1 ПРОЕКЦІЇ ТОЧОК НА ДВІ І ТРИ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ	9
2.2 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧОК ПЛОЩИНАМ ПРОЕКЦІЙ	13
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	14
<b>3. ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ</b>	28
3.1 КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ ПРЯМИХ ЛІНІЙ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ	28
3.2 КЛАСИФІКАЦІЯ ПРЯМИХ ЗА ЇХ ПОЛОЖЕННЯМ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ	32
3.3 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМИХ І ТОЧОК	32
3.4 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ	33
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	40
<b>4. ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ ПЛОЩИН</b>	61
4.1 ЗАВДАННЯ ПЛОЩИНИ НА КОМПЛЕКСНОМУ РИСУНКУ	61
4.2 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ПЛОЩИНУ	62
4.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ПЛОЩИН ЗА ЇХ РОЗТАШУВАННЯМ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ	69
4.4 ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ	72
4.5 ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПЛОЩИН	74
4.6 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ТА ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН	83
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	88
<b>5. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ РИСУНКІВ</b>	100
5.1 СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ	100
5.2 СПОСІБИ ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ОБЕРТАННЯ	102
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	105

<b>6. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ МНОГОГРАННИКІВ</b>	107
6.1. КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ МНОГОГРАННИКІВ	108
6.2. ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКІВ ПЛОЩИНОЮ	109
6.3. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ	115
6.4. РОЗГОРТКИ МНОГОГРАННИКІВ	117
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	120
<b>7. КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ</b>	131
7.1. КОРОТКА КЛАСИФІКАЦІЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ	131
7.2. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ	131
7.3. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	132
7.4. КОМПЛЕКСНІ РИСУНКИ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ПОБУДОВА ТОЧОК, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ	133
7.5. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ПРОЕКТУЮЧОЮ ПЛОЩИНОЮ	137
7.6. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ	142
7.7. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПОВЕРХНЯМИ ОБЕРТАННЯ	147
7.8. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ	150
7.8.1. СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЛОЩИН	150
7.8.2. СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ КОНЦЕНТРИЧНИХ СФЕР	152
7.8.3. ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	155
7.9. РОЗГОРТКИ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ	156
7.9.1. РОЗГОРТКА ПРЯМОГО КОНУСА ОБЕРТАННЯ	157
7.9.2. РОЗГОРТКА ПРЯМОГО ЦИЛІНДРА ОБЕРТАННЯ	158
7.9.3. НАБЛИЖЕННІ РОЗГОРТКИ СФЕРИ	159
ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ	163
<b>ЛІТЕРАТУРА</b>	174



*Ю. Я. Попудняк, А. Д. Малий,  
А. В. Краснюк, А. С. Щербак*

*Нарисна геометрія  
Навчальний посібник  
з контрольними  
тестами*