

СССР — МПС  
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА  
им. М. И. КАЛИНИНА

---

На правах рукописи

Аспирант ЛЕСЮК Иван Иванович

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СУХОМ И ВЯЗКОМ ТРЕНИИ

(Специальность 01.022 — сопротивление материалов  
и строительная механика)

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Днепропетровск  
1974

НТБ  
ДНУЖТ

СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО  
ТРАНСПОРТА им. М. И. КАЛИНИНА

---

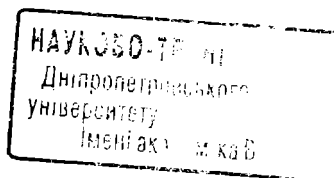
На правах рукописи

Аспирант ЛЕСОК Иван Иванович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПРИ СУХОМ И ВЯЗКОМ ТРЕНИИ

(Специальность 01.022 - сопротивление материалов  
и строительная механика )

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук



Днепропетровск  
1 9 7 4

НТБ  
ДНУЖТ

6900a

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта имени М.И.Калинина .

Научный руководитель – доктор технических наук ,  
профессор Бондарь Н.Г.

Официальные оппоненты :

доктор физико-математических наук, профессор  
Крыков Б.И. ,

кандидат технических наук, доцент Радзиховский Д.А.

ведущее предприятие – Институт Механики АН УССР  
(Днепропетровское отделение ) ,

Автореферат составлен 20 января 1975 г.

Защита диссертации состоится 20 февраля 1975 г.  
в 14 часов на заседании Ученого Совета Днепропетровского  
института инженеров железнодорожного транспорта имени  
М.И.Калинина .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке  
института .

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании  
Ученого Совета или прислать свои отзывы о работе в двух  
экземплярах по адресу : 320629 ГСП, Днепропетровск, 10 ,  
ул. Университетская 2, ДИИТ .

Ученый секретарь Совета

НТБ  
ДНУЖТ

В последние годы интенсивно развиваются различные области техники. Наряду с этим при исследовании колебательных процессов возникает ряд вопросов, в решении которых необходимо применять методы теории нелинейных колебаний. Одним из таких важных для практики вопросов является вопрос исследования колебаний систем с нелинейными упругими характеристиками с учетом внешнего и внутреннего рассеивания энергии в системе.

Из внешних сопротивлений в колебательных системах наиболее часто встречается сухое трение между поверхностями. Сухое трение имеет место в опорных частях конструкций мостов, в местах опирания конструкций промышленного и гражданского строительства, в подвижных соединениях механизмов, машин, измерительных приборов и т.д.

Изучению природы сухого трения посвящено много работ отечественных и зарубежных ученых. В этих работах, наряду с другими вопросами, исследуется зависимость силы сухого трения от скорости относительного смещения трущихся пар. Как показывают результаты экспериментов, проведенные В.М. Андриевским, Ю.И. Коостериным, В.Г. Крагельским, Н.Ф. Куниным и Г.Д. Ломанкиным, В.Г. Подольским и др., внешнее сухое трение при исследовании колебаний механических систем можно принимать в виде кулоновского.

Из внутренних сопротивлений в любой механической системе имеет место рассеивание энергии в материале колебательной системы. Во многих случаях внутреннее рассеивание энергии можно описать в виде вязкого трения, если надлежащим образом подобрано значение его коэффициента. В работах

НТБ  
ДНУЖТ

Н. Г. Бондаря, В. В. Болотина, М. З. Коловского, В. Колоушана, В. А. Лазаряна, Я. Г. Пановко, В. Г. Подольского, О. А. Савинова и др. показано, что при исследовании колебаний механических систем представление внутреннего рассеивания энергии в виде вязкого трения часто удовлетворяет требованиям практики.

Кроме того, в последнее время в разных областях техники в качестве виброгасителей широко применяются демпферы с сухим и вязким трением.

Как отмечают в своей работе И. И. Блахман и Я. Г. Пановко <sup>х)</sup> в настоящее время уже сложилось убеждение в том, что в большинстве практических случаев удовлетворительное представление сил трения может быть достигнуто лишь при применении нелинейных математических моделей. Одной из таких нелинейных моделей, учитывающей рассеивание энергии в колебательных системах, является наличие в системе сухого (кулоновского) и вязкого трения.

Известные исследования колебаний систем с сухим или сухим и вязким трениями можно разделить на две группы. К первой группе относятся решения задач колебаний систем с линейной упругой характеристикой. К ним относятся работы Б. М. Абрамова, В. Л. Бидермана, Н. Г. Бондаря, И. И. Быковского, Ф. Р. Геккера, В. М. Глозмана, Й. Ден-Гартога, Д. А. Ермолина, Н. А. Железцова, А. С. Кондратьева, М. В. Лаврова, В. А. Лазаряна, В. Г. Подольского, Р. Рейсига, Д. Б. Ружички, В. Л. Саковича, Е. С. Сорокина, А. М. Стрекиса, М. И. Фейгина, Е. Фунайоли, В. М. Чересиза, В. Шаблевского, Б. Б. Шилина и В. Б. Шилина, Л. С. Якобсена и др. Ко второй группе относятся исследования колебаний систем с нелинейной упругой характеристикой. Здесь известны решения В. А. Бапат и П. Сринивасана,

<sup>х)</sup> Сб. "Механика в СССР за 50 лет". Т. I. М. "Наука", 1968.

Б.А.Барбашина и В.А.Тарабуевой, Н.Г.Бондаря и Н.М.Поповича, Б.В.Зылева, Г.Каудерера, М.З.Коловского, Г.В.Миненкова, И.Г.Прусиса и Г.И.Страхова, Б.Н.Редькина и В.В.Шилина, Г.Стана, В.Тагжака, Т.С.Штейнберга, А.А.Эглиты .

Обзор научных работ упомянутых исследователей показывает, что колебания нелинейных систем при большом сухом и вязком трении мало исследованы, а в некоторых случаях такие исследования вовсе отсутствуют. В связи с этим настоящая работа посвящается исследованиям некоторых задач колебаний одностепенных систем с симметричной нелинейной характеристикой  $[R(x) = -R(-x)]$  с учетом сухого и вязкого трения. Для исследований использован метод переменного масштаба, предложенный профессором Н.Г.Бондарем <sup>х)</sup>

Решение задач колебаний производится без линеаризации силы сухого трения.

Результаты аналитических решений сопоставляются с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭЦМ "Промінь" .

Диссертационная работа объемом в 164 страницы машинописного текста, с 64 иллюстрациями и 13 таблицами состоит из введения, четырех глав, заключения и описки литературы. Библиография содержит 154 названия .

Первая глава посвящена исследованиям свободных колебаний систем с сухим (  $c$  ) и вязким (  $n$  ) трением, описываемых уравнением

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + c \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + R(x) = 0, \quad (I)$$

<sup>х)</sup> Н.Г.Бондарь. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Киев, "Наукова думка", 1969.

Н.Г.Бондарь. Нелинейные стационарные колебания. Киев, "Наукова думка", 1974 .

Н.Г.Б.  
ДНУЖТ

при произвольных начальных условиях ( $t=0$ ,  $x=x_0$ ,  $\dot{x}=v_0$ ).

Получены выражения для определения значений первого амплитудного перемещения и момента времени достижения этого перемещения.

Между значениями последующих амплитудных смещений установлена рекуррентная зависимость

$$f(A_{i+1}) = e^{-\frac{n\pi}{V\theta^2(A_i) - n^2}} \cdot \left[ f(A_i) - \frac{c}{\theta(A_i)} \right] - \frac{c}{\theta(A_i)} \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  - частота свободных колебаний, зависящая от амплитуды колебаний  $A$  на  $i$ -том полупериоде;  $f(A)$  - амплитудная функция

$$f(x) = \left[ 2 \int_0^x R(u) du \right]^{1/2}; \quad f(A) = \left[ 2 \int_0^A R(u) du \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Для пользования рекуррентной зависимостью (2) показан удобный графический прием.

Решение уравнения (I) записывается в общем виде на любом  $i$ -том полупериоде.

Для частного случая наличия в системе (I) только большого вязкого трения, решение имеет вид

$$f(x) = e^{-nt} \cdot \psi(x), \quad (4)$$

где функция  $\psi(x)$  определяется из уравнения

$$\ddot{\psi} + [\theta^2(A) - n^2] \psi = 0.$$

Отсюда видно, что вид решения (4) зависит от значения коэффициента  $(\theta^2 - n^2)$ .

Так как в нелинейных системах частота свободных колебаний  $\theta$  зависит от амплитуды колебаний  $A$ , то при

больших значениях коэффициента вязкого трения  $n$  может иметь место случай, когда процесс затухающих свободных колебаний имеет участки апериодического (где  $\theta^2 - n^2 < 0$ ) и периодического (где  $\theta^2 - n^2 > 0$ ) характера, а границей апериодичности является точка (где  $\theta^2 - n^2 = 0$ ). В этом состоит качественное отличие нелинейных систем от систем с линейной характеристикой.

В работе приведены аналитические выражения для определения значений коэффициентов трения по опытным виброграммам затухающих свободных колебаний для случаев наличия в системе сухого, сухого и вязкого или вязкого трений. Достоверность этих выражений проиллюстрирована на конкретных примерах с использованием в качестве виброграмм результатов численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭЦМ.

Во второй главе рассмотрены стационарные колебания системы при гармоническом возмущении, описываемые уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + c \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + R(x) = F \cos \omega t. \quad (5)$$

Предполагается преобладание колебаний с основной частотой  $\omega$

В частном случае наличия в системе (5) только произвольно большого вязкого трения  $n$  ( $c=0$ ), амплитудно-частотная характеристика описывается уравнением

$$f(A) = \frac{F \cdot \theta(A)}{\sqrt{[\theta^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (6)$$

а значение фазового угла

$$\varphi = \arctg \frac{2n\omega}{\theta^2(A) - \omega^2}$$

НТБ  
ДНУЖТ

Граница между аperiodическими движениями и колебаниями имеет место при  $n \cdot \sqrt{2} = \theta(A)$

При наличии в системе (5) только сухого трения ( $n=0$ ) исследования стационарных колебаний производится с использованием условий стационарности на полупериоде колебаний. Такой подход позволяет получить решение без ограничений величины коэффициента сухого трения и дает возможность провести исследования границы безостановочных колебаний.

При исследовании границы безостановочных колебаний получены условия, при выполнении которых система не попадает в зону анкилозиса.

Амплитудно-частотная характеристика

$$f(A) = \sqrt{\left[ \frac{F \cdot \theta(A)}{\theta^2(A) - \omega^2} \right]^2 - \left[ \frac{c}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\theta(A) \cdot \pi}{2\omega} \right]^2} \quad (7)$$

для резонансных амплитуд колебаний. (т.е. где  $\omega \approx \theta$ ) принимает более простой вид

$$\lim_{\omega \rightarrow \theta} f(A) = \frac{\theta(A)}{\theta^2(A) - \omega^2} \sqrt{F^2 - \left( \frac{4c}{\pi} \right)^2} \quad (8)$$

Амплитудно-частотные зависимости, в которых влияние сухого трения на значения амплитуд колебаний учитывается подобно тому, как в выражении (8), определяются также при линеаризации сухого трения. Следовательно, для определения резонансных амплитуд колебаний возможно получать верные решения при линеаризации сухого трения. Однако, при определении значений нерезонансных амплитуд безостановочных колебаний, выражение (8) дает большие погрешности, достигающие в

НТБ  
ДНУЖТ

некоторых случаях 100 % .

Выражение (7) позволяет определять правильные значения амплитуд колебаний при любых частотах возмущения.

Сухое трение, в отличие от вязкого, оказывает более существенные влияния на значения нерезонансных амплитуд колебаний. В результате этого, с увеличением значения коэффициента сухого трения амплитудно-частотная характеристика располагается ближе к осязательной кривой, не пересекаясь с ней. Условие существования бистабильных режимов колебаний с резонансными амплитудами имеет такой же вид, как и в системах с линейной характеристикой

$$\frac{c}{F} \leq \frac{\pi}{4} \quad (9)$$

Кроме того, сухое трение оказывает большее влияние на значения амплитуд колебаний, находящихся в противофазе с возмущающей силой.

Фазово-частотная характеристика определяется уравнением

$$\rho = a \operatorname{tg} \left[ - \frac{c}{\omega f(A)} \operatorname{tg} \frac{\theta(A) \cdot \pi}{2 \omega} \right]. \quad (10)$$

Здесь, в правой части, необходимо принимать значения  $A$  и  $\omega$ , которые предварительно находятся из выражения (7).

Как известно, в системе с линейной характеристикой, где соблюдается условие (9), при частоте возмущения  $\omega$ , равной собственной частоте системы, амплитуда колебаний бесконечно увеличивается. В системах с нелинейной характеристикой подобное явление не наблюдается. Здесь колебания устанавливаются при любых значениях частоты возмущения, что можно объяснить выражением

НТБ  
ДНУЖТ

$$F \cdot \pi \sin \rho = 4c, \quad (II)$$

полученным из условия баланса подводимой в систему и рассеиваемой сухим трением энергий. Из выражения (II) следует, что в системах с нелинейной характеристикой при соблюдении условия (9) наличие подводимой энергии расходуется на изменение фазового угла  $\rho$ , т.е. значение  $\rho$  зависит от амплитуды колебаний.

Исследования стационарных колебаний для системы (5) с сухим и вязким трением производятся с использованием тех же условий стационарности, как и в случае наличия в системе только сухого трения.

В случае произвольных значений коэффициентов трения найдены приближенные аналитические выражения частотных характеристик, а также уравнения, служащие для определения границы безостановочных режимов колебаний. Эти решения имеют практически неприемлемый громоздкий вид. Однако, для нахождения максимальных амплитуд колебаний получено простое выражение

$$f(A_{\max}) = \frac{F \cdot \theta(A)}{2n\sqrt{\theta^2(A) - n^2}} - \frac{c}{\theta(A)} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi}{\sqrt{\theta^2(A) - n^2}}} + 1}{e^{\frac{n\pi}{\sqrt{\theta^2(A) - n^2}}} - 1} \quad (I2)$$

Эти амплитуды реализуются при частоте возмущения

$$\omega = \sqrt{\theta^2(A) - 2n^2} \quad (I3)$$

Здесь следует принимать значения  $A$ , найденные из (I2).

Выражения (I2) и (I3) определяют кривую максимальных амплитуд колебаний в параметрическом виде.

НТБ  
ДНУЖТ

Для получения результатов, пригодных для практического пользования, приведено упрощенное решение. В системе (5) силы трения заменяются эквивалентным сухим трением  $C_3$ , так, чтобы рассеянная энергия за половину периода стационарных колебаний  $\left(\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}\right)$  была одинакова в обоих случаях. Описываемая установившаяся колебания приближенно гармоническим законом, имеем

$$C_3 = C + \frac{An\omega\pi}{2} \quad (14)$$

Подставляя в уравнениях (7) и (10) вместо  $C$  значение (14), получаем частотные характеристики. Подобным образом найдены выражения для определения границы безостановочных колебаний.

В работе показано, что эквивалентная замена сил трения позволила получить решения, обеспечивающие возможность нахождения значений параметров колебаний для разных частот возмущения при  $n \leq C$

В третьей главе рассматриваются стационарные колебания систем с сухим и вязким трением при возмущении периодическими мгновенными импульсами  $S$

Рассмотрена задача стационарных колебаний при возмущении односторонними (несимметричное возмущение) периодическими импульсами. Движение системы на периодах возмущения  $T$  описывается уравнением (1), в котором силы трения приводятся к эквивалентному сухому трению

$$C_3 = C + \frac{nA_{cp}\theta_{cp}\pi}{2} \quad (15)$$

НТБ  
ДНУЖТ

Эквивалентное сухое трение определяется из условия, чтобы рассеянная энергия на четверти периода свободных колебаний  $\left(\frac{1}{4}T_c = \frac{\pi}{2\theta_{cp}}\right)$  была одинакова в обоих случаях. Амплитуда колебаний принимается равной усредненному значению амплитуды свободных колебаний  $[A_{cp}, \theta_{cp} = \theta(A_{cp})]$  на периоде возмущения  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . В работе получено выражение  $A_{cp}$  в зависимости от количества экстремумов перемещений  $i$  на периоде возмущения  $T$

$$A_{cp} = A, \theta_{cp} = \theta \text{ при } i=1; A_{cp} = A - \frac{2c}{\omega}, \theta_{cp} = \theta(A_{cp}) \text{ при } i \geq 2. \quad (I6)$$

Рассмотрен случай колебаний системы с соблюдением условий стационарности на периодах возмущения. Получены уравнения частотных характеристик для колебаний без остановок и с попаданием системы в зону анкилозиса в момент воздействия очередного импульса.

Уравнение амплитудно-частотной характеристики имеет вид :

а) для колебаний без остановок

$$\begin{aligned} & \left[ f(A) + \frac{c_3}{\theta_{cp}} \right]^2 + \left( \frac{S}{m} \right)^2 - \left\{ \frac{c_3}{\theta_{cp}} [1 - (-1)^i] \right\}^2 = \\ & = \left[ \frac{c_3}{\theta_{cp}} (2i-1) - f(A) \right] \cdot \left\{ f(A) - \frac{c_3}{\theta_{cp}} (2i-1) - 2 \left[ f(A) - \frac{c_3}{\theta_{cp}} \right] \cos \theta_{cp} \frac{2\pi}{\omega} \right\}; \quad (I7) \end{aligned}$$

б) для колебаний с остановками в момент воздействия очередного импульса

$$f(A) = \frac{S}{m} - \frac{c_3}{\theta(A)} \quad (I8)$$

В уравнениях (I7) и (I8) используются выражения (I5) и (I6), а  $m$  — масса системы.

Резонансные случаи имеют место при

НТБ  
ДНУЖТ

$$\omega = \frac{\theta_{cp}}{k}, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

В работе получены выражения для определения частоты возмущения, соответствующей границе колебаний системы без остановок в момент воздействия очередного импульса и дано разъяснение о последовательности построения амплитудно-частотной зависимости по уравнениям (17), (18) и (19).

Осреднение амплитуды колебаний на периоде возмущения (16) дает возможность находить более точные значения амплитуд колебаний при  $i \geq 2$ , т.е. при низких частотах возмущения.

Аналогичные результаты получены при рассмотрении задачи стационарных колебаний системы, возмущаемой разносторонними, одинаковыми по абсолютной величине (симметричное возмущение) периодическими импульсами.

Четвертая глава посвящена исследованиям орбитальной устойчивости колебаний систем с мягкой кубической характеристикой

$$R(x) = \alpha x - \beta x^3, \quad \beta > 0 \quad (20)$$

при наличии сил сухого и вязкого трения.

Исследования проводятся по методике, предложенной профессором Н.Г.Бондарем<sup>х)</sup>. Если амплитуда колебаний превышает значения ненулевых корней характеристики системы

$$\alpha x_* - \beta x_*^3 = 0, \quad x_* = 0, \quad x_* = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (21)$$

то восстанавливающая сила упругости изменит знак, т.е. превратится в толкающую. В этом случае будет иметь место аперио-

<sup>х)</sup> Бондарь Н.Г. Нелинейные стационарные колебания. Киев, "Наукова думка", 1974.

дическое движение, называемое иногда вращательным режимом. Достижение амплитудой колебаний значения ненулевого корня характеристики системы

$$|A| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (22)$$

является критическим состоянием системы, соответствующим границе между колебательным и апериодическим режимами.

В работе проведены исследования устойчивости свободных колебаний, а также стационарных колебаний при периодическом симметричном и несимметричном импульсных возмущениях и стационарных колебаний при гармоническом возмущении.

Получено условие неустойчивости свободных колебаний системы с малыми значениями коэффициентов демпфирования при произвольных начальных условиях. Для частного случая удара по системе, находящейся в состоянии покоя, выражение для определения критического значения импульса имеет вид

$$\frac{S_{кр}}{m} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}} + c\sqrt{\frac{2}{\alpha}} + n\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (23)$$

Показано, что зона анкилозиса в окрестности ненулевого корня характеристики системы при малых значениях коэффициента сухого трения не оказывает существенного влияния на значения критического импульса, определяемого по выражению (23).

Зоны анкилозиса определяются из условия

$$(\alpha A - \beta A^3)^2 = c^2$$

При исследовании орбитальной устойчивости стационарных колебаний получены уравнения кривых I-ых критических состояний, определяемых критерием (22). То, что для стационарных колебаний условие I-го критического состояния является таким же, как и для свободных колебаний, физически можно объяснить сле-

НТБ  
ДНУЖТ

дующим образом. При стационарных колебаниях энергия, рассеиваемая за счет трения в системе, компенсируется работой возмущающей силы, и колебания системы можно рассматривать как свободные без трения. Такой вывод является допустимым для стационарных колебаний при резонансе ( $\omega = \theta$ ). Как показано в работах М.Э. Коловского, для резонансных стационарных колебаний можно полагать, что работа возмущающей силы полностью расходуется на преодоление энергии, рассеиваемой силами трения, так как в этом случае стационарные колебания совпадают по частоте со свободными колебаниями консервативной системы.

Для стационарных колебаний системы, описываемых уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + c \operatorname{sgn} \dot{x} + \alpha x - \beta x^3 = F \cos \omega t, \quad (24)$$

кривая I-ых критических состояний описывается выражением

$$F^2 = \frac{2[(0,5\alpha - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]}{\alpha} x \times \left[ \frac{2c\sqrt{0,5\alpha} \cdot e^{\frac{n\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\pi}{\omega} \sqrt{0,5\alpha - n^2}}{\omega\sqrt{0,5\alpha - n^2} \left[ e^{\frac{n\pi}{\omega}} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} + 2 \cos \frac{\pi}{\omega} \sqrt{0,5\alpha - n^2} \right) + 1 \right]} \right]^2 + \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}} + \frac{c}{\sqrt{0,5\alpha}} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi}{\omega}} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} - 2 \frac{n}{\sqrt{0,5\alpha - n^2}} \sin \frac{\pi}{\omega} \sqrt{0,5\alpha - n^2} \right) - 1}{e^{\frac{n\pi}{\omega}} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} + 2 \cos \frac{\pi}{\omega} \sqrt{0,5\alpha - n^2} \right) + 1}} \right]^2. \quad (25)$$

Кривая I-ых критических состояний пересекается с осью  $F$  в точке, где

$$F = c + \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}$$

НТБ  
ДНУЖТ

Аналитическое выражение (25) позволяет находить практически точные критические значения  $F$  для резонансной зоны частот возмущения ( $\omega < \sqrt{\alpha}$ ). При нерезонансных частотах возмущения ( $\omega > \sqrt{\alpha}$ ) в системе могут иметь место установившиеся колебания, несимметричные относительно устойчивого положения равновесия ( $x=0$ ), которые ухудшают точность аналитических результатов. При резонансных частотах возмущения несимметричные колебания проявляются при больших значениях коэффициентов трения. Несимметрия стационарных колебаний вызывается четными субгармониками (В.Каннингхэм).

В стационарных колебаниях имеют место также II-ые критические состояния, соответствующие скачкообразному изменению амплитуды колебаний. При определенной силе возмущения в системе возможен перескок колебаний с нерезонансной ветви на неустойчивую резонансную (когда  $\lambda > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ ).

Для уравнения (24) кривая II-ых критических состояний описывается выражениями :

$$\omega^2 = \frac{1,5 \beta A^2 (\alpha - 0,5 \beta A^2)}{(\alpha - \beta A^2)(\alpha - 0,75 \beta A^2) - 0,75 \beta A^2 (\alpha - 0,5 \beta A^2)} + \alpha - 0,75 \beta A^2;$$

$$F^2 = \frac{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}{\theta^2} \times \quad (26)$$

$$\times \left\{ \frac{2c\theta e^{\frac{n\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\lambda\pi}{\omega}}{\omega\lambda \left[ e^{\frac{n\pi}{\omega}} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} + 2 \cos \frac{\lambda\pi}{\omega} \right) + 1 \right]} \right\}^2 +$$

НТБ  
ДНУЖТ

$$+ \left\{ A \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{2} A^2} + \frac{c}{\theta} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi}{\omega} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} - 2 \frac{n}{\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{\omega} \right) - 1}}}{e^{\frac{n\pi}{\omega} \left( e^{\frac{n\pi}{\omega}} + 2 \cos \frac{\lambda\pi}{\omega} \right) + 1}} - 1 \right\}^2 \right\},$$

где  $\lambda = \sqrt{\theta^2 - n^2}$ ;  $\theta = \sqrt{\alpha - 0,75\beta A^2}$

Из первого уравнения (26) определяются  $A$  и  $\omega$  соответствующие перескоку колебаний, а из второго - определяется значение  $F$

В работе приведены аналогичные исследования орбитальной устойчивости стационарных колебаний при симметричном и несимметричном импульсных возмущениях. Полученные выражения I-ых и II-ых критических состояний системы позволяют находить значения  $\frac{S}{m}$  достаточно точные в резонансных зонах.

### З а к л ю ч е н и е

Проведенные исследования свободных и стационарных колебаний систем с сухим и вязким трением, а также исследования орбитальной устойчивости колебаний систем с мягкой кубической характеристикой, позволяют сформулировать следующие основные выводы

1. Предложен новый прием исследований свободных колебаний нелинейных систем с большим сопротивлением.
2. Выявлено качественное отличие нелинейных систем с большим вязким трением при свободных колебаниях на границе апериодичности.

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБ

Дніпропетровського на  
університету залучили  
Імені академіка Б

НТБ  
ДНУЖТ

6900 a

3. Предложена методика определения коэффициентов демпфирования по результатам экспериментальных записей графиков свободных нелинейных колебаний.
4. Показано, что в системах с гармоническим возмущением увеличение коэффициента вязкого трения существенно уменьшает значения резонансных амплитуд стационарных колебаний. Увеличение же коэффициента сухого трения оказывает большее влияние на уменьшение значений нерезонансных амплитуд колебаний.
5. В отличие от линейных систем с малым сухим трением и гармоническим возмущением, в нелинейных системах амплитуда колебаний при резонансе остается ограниченной.
6. Предложена приближенная замена сил демпфирования эквивалентным сухим трением для исследования стационарных колебаний систем с сухим и вязким трением при гармоническом и импульсном возмущениях. Это дало возможность получить практически приемлемые аналитические выражения для определения параметров колебаний.
7. Показано, что при периодическом импульсном возмущении вязкое трение оказывает большее влияние на уменьшение значений амплитуд резонансных колебаний, чем сухое.
8. Результаты аналитических исследований сопоставляются с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭЦМ "ПромІнь". При этом, как правило, наблюдается хорошее совпадение значений аналитических и машинных решений.

НТБ  
ДНУЖТ

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих статьях :

- 1.Бондарь Н.Г.,Лесюк И.И. Свободные нелинейные колебания при наличии сухого и вязкого трения.Труды ДИИТа, вып.157. Днепропетровск,1974 .
- 2.Бондарь Н.Г.,Лесюк И.И. Стационарные колебания нелинейного осциллятора при наличии вязкого и сухого трения. Труды ДИИТа, вып.157.Днепропетровск,1974 .
- 3.Лесюк И.И. Стационарные колебания нелинейного осциллятора при наличии вязкого трения произвольной величины. Труды ДИИТа, вып.157. Днепропетровск,1974 .
- 4.Лесюк И.И. Стационарные безостановочные колебания нелинейного осциллятора при сухом и вязком трении и гармоническом возбуждении. ДЭП.ЦНИИ ТЭИ МПС, № III/74 .
- 5.Лесюк И.И. Стационарные симметричные колебания нелинейного осциллятора при сухом и вязком трении и периодическом импульсном возбуждении. ДЭП.ЦНИИ ТЭИ МПС, № II2/74 .

Кроме того,результаты исследований докладывались на заседаниях кафедры "Мосты" и НИИ динамики мостов Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта в период 1971-1974 г.г.

В полном объеме диссертация доложена на заседании кафедры "Мосты" и НИИ динамики мостов ДИИТа в октябре 1974 года.

НТБ  
ДНУЖТ

Ответственный за выпуск Н. Г. Бондарь

---

БТ 19956. Подписано к печати 6.1.1975 г. Усл. печ. л. 1,25.

Тираж 200. Заказ № 7.

Областная книжная типография Днепропетровского областного управления  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
320070, г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.

Сканировала Камянская Н.А.

НТБ  
ДНУЖТ