

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Український державний університет науки і технологій

Кафедра «Технічна механіка»

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної роботи на тему
«Динаміка матеріальної точки»

Електронний аналог
друкованого видання

ДНІПРО
2023

УДК 531.1(075.8)

Т 33

Укладачі:

О. Л. Янгулова, Л. О. Недужа

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. *Д. Л. Колосов* (Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»),
канд. техн. наук, доц. *О. М. Гулівець* (УДУНТ)

Експерти:

канд. техн. наук, доц. *Людмила Урсуляк*,
канд. техн. наук, доц. *Олександр Шикунів*

Рекомендовано МКФ «ТІ» (протокол від 27.04.2023).

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 608 від 10.05.2023)

Теоретична механіка [Текст] : метод. рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи на тему «Динаміка матеріальної точки» / уклад.: *О. Л. Янгулова, Л. О. Недужа*; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро, 2023. – 33 с.

У методичних рекомендаціях наведено основні теоретичні відомості, які необхідні для виконання відповідної розрахунково-графічної роботи. Детально розглянуто розв'язання прикладів на тему «Динаміка матеріальної точки». Запропоновано завдання для самостійної роботи. Наведено список рекомендованої літератури, яким варто скористатися для поглибленого вивчення теоретичного матеріалу.

Видання сприяє кращому засвоєнню теми «Динаміка матеріальної точки» дисципліни «Теоретична механіка», розвитку навичок виконання інженерних розрахунків, допомагає скоротити час на виконання розрахунково-графічної роботи.

Для студентів всіх форм навчання тих спеціальностей, освітніми програмами яких передбачено вивчення дисципліни «Теоретична механіка».

Іл. 10. Табл. 1. Бібліогр.: 17 назв.

© Янгулова О. Л. та ін., укладання, 2023

© Укр. держ. ун-т науки і технологій,
оригінал-макет, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ.....	6
1.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	6
1.2. ДВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ.....	8
1.3. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ ТОЧКИ В ОКРЕМИХ ВИПАДКАХ.....	9
2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	15
Приклад 1.....	17
Приклад 2.....	21
Приклад 3.....	25
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	30
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	32

ВСТУП

Метою даних рекомендацій є допомога студенту в опануванні та систематизації знань дисципліни завдяки засвоєнню методики розв'язання задач.

Видання сприяє досягненню таких очікуваних результатів навчання: обраховувати різні параметри руху матеріальної точки за допомогою основних теорем динаміки матеріальної точки; аналізувати основні теореми динаміки й застосовувати їх для розв'язання задач. Це допоможе кращому засвоєнню основних теоретичних понять з розділу «Динаміка матеріальної точки», зокрема, визначення швидкості та прискорення будь-якого тіла під дією сил; отримання закону руху.

Особливостями видання є те, що для більш поглибленого дослідження динаміки матеріальної точки наведено основні теоретичні відомості, детально розглянуто приклади розв'язування задач; наведено завдання для самостійної роботи.

З повним теоретичним матеріалом та порядком виконання задачі можна ознайомитись у відповідному розділі 2-ї частини курсу «Теоретична механіка» у СНД Moodle (ННЦ «Лідер»), перейшовши за посиланням:

<https://lider.diit.edu.ua/course/view.php?id=352>.

Перш ніж розпочати виконання завдання, необхідно вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади, що стосуються змісту завдання. Такі приклади надані в методичних вказівках (рекомендаціях) та підручниках, які пропонуються лектором або керівником практичних занять.

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи на тему «Динаміка матеріальної точки» підготовлені для студентів денної та безвідривної форм навчання, які є здобувачами вищої освіти за спеціальностями:

133 Галузеве машинобудування

Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання

Експлуатація та ремонт техніки Держспецтрансслужби

141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Електричний транспорт

Електромеханічні системи автоматизації та електропривод

Електротехнічні системи електроспоживання

192 Будівництво та цивільна інженерія

Мости і транспортні тунелі

Промислове і цивільне будівництво

Архітектурне проектування будівель і споруд

Автомобільні дороги і аеродроми

Відновлення та будівництво штучних споруд на об'єктах національної транспортної системи

Будівництво та експлуатація будинків і споруд спеціального та загальновійськового призначення

273 Залізничний транспорт

Локомотиви та локомотивне господарство

Вагони та вагонне господарство

Залізничні споруди та колійне господарство

Відновлення та будівництво об'єктів національної транспортної системи

Морально-психологічне забезпечення підрозділів Держспецтрансслужби

274 Автомобільний транспорт

Автомобілі та автомобільне господарство

Критерії оцінювання розрахунково-графічної роботи

Критерії	Бали
1. Вибрати об'єкт дослідження та систему відліку, показати сили, які діють на матеріальну точку.	3...5
2. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки та визначити початкові умови її руху.	3...5
3. Проінтегрувати диференціальні рівняння та знайти закон руху матеріальної точки.	3...5
4. Захист розрахунково-графічної роботи.	3...5
Сума балів	12...20

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ

Теоретична або загальна механіка – це наука, яка вивчає загальні закони рівноваги, руху та взаємодії матеріальних точок і твердих тіл.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, яке має масу, але формою і розмірами якого можна знехтувати.

Тверде тіло в теоретичній механіці не характеризується його агрегатним станом (газ, рідина, тверде тіло). У цьому тілі відстань між двома будь-якими точками не змінюється ні під час руху, ні при діючих на нього силах – далі, коли ми говоримо про тіло, то маємо на увазі таке тверде тіло.

Сила – це узагальнене поняття, яке характеризує міру взаємодії двох матеріальних точок чи тіл. Загальним поняттям, що визначає стан та зміну тіла в результаті різних фізичних процесів, є енергія. Теоретична механіка виявляє зв'язок сили з енергією, тобто дозволяє знаходити сили, які виникають при будь-яких фізичних процесах. Сила характеризується точкою прикладання, величиною і напрямком.

Теоретична механіка є частиною теоретичної фізики, це основа інших розділів механіки: опору матеріалів, теорії пружності, гідродинаміки, теорії пластичності, теорії машин і механізмів та багатьох інших наук.

Теоретична механіка вивчає найпростішу форму руху – механічний **рух**, тобто зміну положення твердих тіл у просторі і часу та причини цих змін. Щоб визначити положення тіла у просторі вводиться поняття системи відліку. Системою відліку називається визначена частина простору, яка зв'язана з сукупністю нерухомих тіл відліку (тобто тіл, відносно яких вивчається зміна положення точки чи тіла) та годинником, що призначений для вимірювання часу у цій системі; за початок відліку приймається точка, пов'язана з нерухомим тілом. Положення точки відносно початку відліку характеризується напрямком і числом – відстанню; таке визначення називається *векторним способом*. Векторне визначення положення точки компактне і зручно до проведення різних *математичних перетворень* за допомогою правил векторної алгебри і графіки.

Для проведення *алгебраїчних розрахунків* (аналітичного отримання результату) використовується **координатний спосіб**. Для чого обирається система декартових координат (x, y, z) , визначається положення матеріальної точки, складаються диференціальні рівняння в проєкціях на осі. В результаті інтегрування цих рівнянь отримується закон руху матеріальної точки.

1.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.

Рух точки визначається її положенням у просторі. Згідно з *першим* законом динаміки вільна точка рухається рівномірно та прямолінійно без дії на неї будь-яких сил. Згідно з *другим* законом Ньютона $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$, коли взагалі

сила \vec{F} може бути функцією часу, координат і швидкості рухомої точки $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$, а прискорення дорівнює першій похідній від швидкості руху точки; для визначення швидкості точки та закону її руху треба розв'язати диференціальне рівняння руху точки.

Можна записати диференціальні рівняння руху для вільної та невольної матеріальної точки:

а) Диференціальні рівняння руху точки у декартових координатах задаються рівняннями:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1.1)$$

Прискорення точки в проєкціях на осі x , y , z запишемо так:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Використовуючи вирази проєкцій прискорень (1.2) та проєкцій сил на координатні осі F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} (літера k – це кількість сил, які діють на матеріальну точку) на підставі основного закону механіки представимо диференціальні рівняння руху **вільної** матеріальної точки у декартових координатах.

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \quad (1.3)$$

Якщо розглядається рух **невільної** матеріальної точки, то до проєкції сил (F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}), що викликають рух точки, треба додати проєкції реакцій в'язів (N_{kx}, N_{ky}, N_{kz}), які обмежують рух точки. Тобто

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \sum N_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \sum N_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \sum N_{kz}. \quad (1.4)$$

б) Диференціальні рівняння руху точки у проєкціях на природні осі.

Зпроєкуємо векторне рівняння $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ на натуральні осі τ , n , b , тобто на дотичну τ , головну нормаль n , бінормаль b . Використовуючи вирази $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, $a_b = 0$, одержимо диференціальні рівняння руху **вільної** матеріальної точки у проєкціях на природні осі.

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}, \quad (1.5)$$

де V – швидкість точки;

ρ – радіус кривизни.

Якщо розглядається рух **невільної** матеріальної точки, то до проєкцій сил $F_{k\tau}$, F_{kn} , F_{kb} треба додати проєкції реакцій в'язів $N_{k\tau}$, N_{kn} , N_{kb} , що обмежують рух точки, та одержимо диференціальне рівняння руху для невільної матеріальної точки на природні осі:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau} + \sum N_{k\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn} + \sum N_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb} + \sum N_{kb}. \quad (1.6)$$

1.2. Дві задачі динаміки точки.

При дослідженні руху матеріальної точки розглядаються дві основні задачі динаміки – пряма та зворотна.

Перша (пряма) *задача*. Знаючи закон руху матеріальної точки маси m , знайти діючі на неї сили.

1. Рух точки задається рівняннями у декартових координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Якщо двічі продиференціювати ці співвідношення за часом, то одержимо проєкції прискорення на осі координат, які записані у формі (1.2).

Тоді на підставі другого закону **Ньютона** $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$, проєкцію рівнодіючої сил \vec{F} знаходимо з диференціальних рівнянь:

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (1.7)$$

Отже, модуль рівнодійної сили буде мати вигляд:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m \sqrt{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2}}. \quad (1.8)$$

2. Рух точки задається в натуральній формі.

Застосовуючи проєкції рівнодіючої сили:

$$F_\tau = m\ddot{s}, \quad F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad (1.9)$$

(s – дугова координата; перша та друга похідна від неї: \dot{s} – швидкість та \ddot{s} – прискорення матеріальної точки), модуль рівнодіючої запишемо як:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}. \quad (1.10)$$

Таким чином, розв'язання першої задачі динаміки зводиться до знаходження проєкції прискорень, складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, обчислення величин сил.

Методика розв'язання першої задачі динаміки точки:

- 1) обрати систему відліку;
- 2) зобразити поточне положення точки;
- 3) визначити проєкції прискорення точки;
- 4) скласти рівняння руху точки відповідно до обраної системи відліку;
- 5) розв'язати рівняння відносно невідомих величин.

Друга (зворотна) *задача*. Знаючи масу точки, її початкове положення, початкову швидкість і рівнодійну діючих на точку сил, знайти рівняння руху точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Тобто, виразити її координати як функцію часу. При цьому сила може бути задана як $F = const$, $F = f(t)$, $F = f(V)$, $F = f(s)$. Взагалі сили можуть бути одночасно функціями часу t , швидкості V та відстані s .

Методика розв'язання другої (зворотної) задачі динаміки точки:

- 1) обрати об'єкт дослідження;
- 2) зобразити його в поточному положенні;
- 3) ввести систему відліку, осі якої зображуємо на рисунку;
- 4) визначити початкові умови руху точки;
- 5) зобразити на рисунку активні сили та реакції в'язей;
- 6) скласти диференціальні рівняння руху точки;
- 7) проінтегрувати отримані рівняння руху;
- 8) використовуючи початкові умови і отриманий загальний розв'язок, визначити сталі інтегрування;
- 9) записати кінематичний закон руху матеріальної точки.

1.3. Інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки в окремих випадках:

- а) Інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки у випадку *сталі сили*.

Диференціальне рівняння руху точки при $F_x = const$ має вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x \quad (1.12)$$

або

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x \text{ або } m dV_x = F_x dt . \quad (1.13)$$

Будемо вважати, що початкова швидкість співпадає з напрямком сили. Тому рух точки буде прямолінійним. Спрямуємо вісь x в напрямку руху і будемо розглядати рух точки вздовж цієї осі. Визначимо початкові умови при:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x}_0 = V_{0x}. \quad (1.14)$$

Проінтегруємо рівняння (1.13) при початкових умовах (1.14)

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} m dV_x = \int_0^t F_x dt \quad (1.15)$$

або

$$mV_x - mV_{0x} = F_x dt. \quad (1.16)$$

Це рівняння визначає швидкість точки, тобто

$$V_x = V_{0x} + \frac{F_x}{m} t. \quad (1.17)$$

Пропишемо V_x через $\frac{dx}{dt}$ і одержимо

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + \frac{F_x}{m} t \quad \text{або} \quad dx = \left(V_{0x} + \frac{F_x}{m} t \right) dt. \quad (1.18)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння в межах від x_0 до x , а праву від 0 до t

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(V_{0x} + \frac{F_x}{m} t \right) dt$$

і отримаємо

$$x - x_0 = V_{0x} t + \frac{F_x}{m} \frac{t^2}{2} \quad \text{або} \quad x = x_0 + V_{0x} t + \frac{F_x}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (1.19)$$

Це рівняння визначає рівноприскорений рух точки. Відношення $\frac{F_x}{m}$ є постійним прискоренням a_x , яке має точка у випадку дії сталої сили.

б) Інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки у випадку *змінної сили*, яка залежить від часу.

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі x під дією змінної сили, яка залежить від часу $F_x = f(t)$. Тоді диференціальне рівняння руху можна написати так:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x \text{ або } m dV_x = F_x dt .$$

Проінтегруємо це рівняння у відповідних межах, тобто ліву частину від V_0 до V_{0x} , праву від 0 до t , і одержимо

$$mV_x - mV_{0x} = \int_0^t F_x dt = \int_0^t f(t) dt .$$

Оскільки функція $f(t)$ відома, то інтеграл можна обчислити як деяку функцію часу t , яку позначимо через $S_x(t)$. Тоді

$$mV_x - mV_{0x} = S_x(t), \quad (1.20)$$

де mV_x, mV_{0x} – кількість руху точки в кінцевому і початковому станах; $S_x(t)$ – імпульс сили.

Звідси V_x дорівнює

$$V_x = V_{0x} + \frac{1}{m} S_x(t) dt . \quad (1.21)$$

Це рівняння визначає швидкість точки, як функцію від часу t . Вважаючи $V_x = \frac{dx}{dt}$, одержимо

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + \frac{1}{m} S_x(t), \quad dx = V_{0x} dt + \frac{1}{m} S_x(t) dt .$$

Нехай початкова абсциса точки при $t=0$ дорівнює x_0 . Тоді проінтегруємо ліву частину останнього рівняння в межах від x_0 до x , а праву – від 0 до t :

$$t: \quad x - x_0 = V_{0x} t + \frac{1}{m} \int_0^t S_x(t) dt \quad \text{або}$$

$$x = x_0 + V_{0x} t + \frac{1}{m} \int_0^t S_x(t) dt . \quad (1.22)$$

Це рівняння є законом руху точки під дією змінної сили, яка залежить від часу.

в) Інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки у випадках змінної сили, яка залежить від положення точки.

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі x під дією змінної сили $F_x = f(x)$, яка залежить від абсциси x точки (де $f(x)$ – деяка функція). Тоді диференціальне рівняння руху (1.12) можна написати так:

$$m \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = F_x. \quad (1.23)$$

Виразимо $\frac{dx}{dt}$ через V_x і одержимо $mV_x \cdot \frac{dV_x}{dx} = F_x$.

Звідси $mV_x \cdot dV_x = F_x \cdot dx$.

Нехай x_0 і V_{0x} є відповідно абсциса та швидкість точки в початковий момент часу (при $t=0$). Проінтегруємо рівняння (1.23) у відповідних межах, тобто ліву частину від V_0 до V_{0x} , праву від x_0 до x :

$$\frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}^2}{2} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F_x dx = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (1.24)$$

Функція $f(x)$ відома, тому інтеграл можна обчислити як деяку функцію від положення x та позначити її через $A(x)$, тоді

$$V_x^2 - V_{0x}^2 = \frac{2}{m} \cdot A(x),$$

звідки

$$V_x = \pm \sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \cdot A(x)}. \quad (1.25)$$

Ця формула визначає швидкість точки як функцію її абсциси x . Виразимо V_x через $\frac{dx}{dt}$ та розділимо змінні інтегрування. Тоді

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \cdot A(x)}} = dt, \quad (1.26)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння (1.26) в межах від x_0 до x , а праву від 0 до t :

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \cdot A(x)}} = \int_0^t dt. \quad (1.27)$$

Це рівняння встановлює залежність між x і t . Виконаємо інтегрування і розв'яжемо одержане рівняння відносно x .

Знайдемо рівняння руху точки в кінцевому вигляді: $x = \varphi(t)$.

г) Інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки у випадку змінної сили, яка залежить від швидкості.

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі x під дією змінної сили $F_x = f(V)$, яка залежить від швидкості точки.

Нехай $m = \text{const}$, $F_x = f(V)$. У цьому випадку можна запропонувати два способи інтегрування диференціального рівняння руху точки.

Перший спосіб: Запишемо диференціальне рівняння руху точки

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x = f(V).$$

Розділивши змінні, напишемо

$$m \frac{dV_x}{f(V)} = dt.$$

Проінтегруємо ліву частину в межах від V_{0x} до V , а праву – від 0 до t :

$$\int_{V_{0x}}^V \frac{m \cdot dV_x}{f(V)} = \int_0^t dt. \quad (1.28)$$

Розв'яжемо одержане рівняння відносно V і знайдемо швидкість як деяку функцію часу

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \varphi(t). \quad (1.29)$$

Повторивши інтегрування, знайдемо абсцису x як функцію часу:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \varphi(t) \cdot dt \quad (1.30)$$

або

$$x = x_0 + \int_t^t \varphi(t) dt. \quad (1.31)$$

Це рівняння встановлює залежність між x і t .

Другий спосіб: Запишемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F_x = f(V).$$

або

$$mV_x \cdot \frac{dV_x}{dx} = F_x = f(V).$$

Розділимо змінні

$$\frac{mV_x \cdot dV_x}{f(V)} = dx. \quad (1.32)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння в межах від V_{0x} до V_x , а праву – від x_0 до x :

$$x - x_0 = \int_{V_{0x}}^{V_x} \frac{mV_x \cdot dV_x}{f(V)}. \quad (1.33)$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно V . Знайдемо швидкість як деяку функцію від x :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \varphi(x).$$

Звідси $\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$ або

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x)} = t. \quad (1.34)$$

Це рівняння встановлює залежність між x і t .

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Вантаж D масою m , отримавши в точці A початкову швидкість V_0 , рухається по зігнутій трубці ABC , розташованій в вертикальній площині; ділянки труби або обидві похилі, або одна горизонтальна, а друга похила (рис. 2.1, схеми 0 – 9, таблиця 2.1).

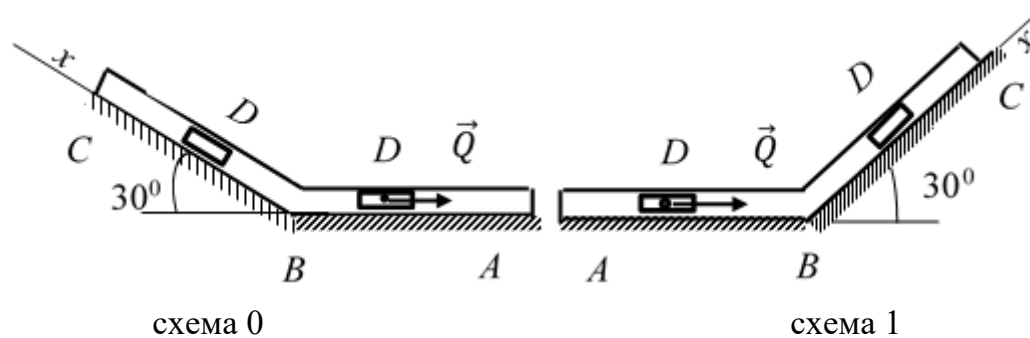
На ділянці AB на вантаж може діяти постійна сила \vec{Q} , її напрямок показано на рис. 2.1; тертям вантажу по трубці на ділянці AB нехтувати.

В точці B вантаж D , не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби. На нього діють сила тертя F_T (коефіцієнт тертя вантажу по трубці $f = 0,2$), сила тяжіння P , сила опору середовища $R = \mu V^2$ (залежить від швидкості \vec{V} вантажу, спрямована проти руху; μ див. табл. 2.1) і змінна сила \vec{F} , проекція якої F_x на ось x задана в табл. 2.1.

Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи відстань $AB = \ell$ або час t_1 руху вантажу від точки A до точки B , знайти закон руху вантажу на ділянці BC , тобто $x = f(t)$, де $x = BD$ – це відстань від точки B до положення вантажу D в залежності від часу t .

Вказівки. Для розв'язання задачі спочатку потрібно скласти та проінтегрувати диференціальне рівняння руху точки (вантаж) на ділянці AB , враховуючи початкові умови. Потім, знаючи час руху вантажу на ділянці AB або довжину цієї ділянки, визначити швидкість вантажу в точці B . Ця швидкість буде початковою для руху вантажу на ділянці BC . Після цього потрібно скласти та проінтегрувати диференціальне рівняння руху вантажу на ділянці BC з врахуванням початкових умов. Відлік часу брати від моменту, коли вантаж знаходиться в точці B , і вважати в цей момент $t = 0$. При інтегруванні рівняння руху на ділянці AB у випадку, коли задана довжина ℓ , доцільно перейти до змінної x , враховуючи, що $\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$.

Схеми



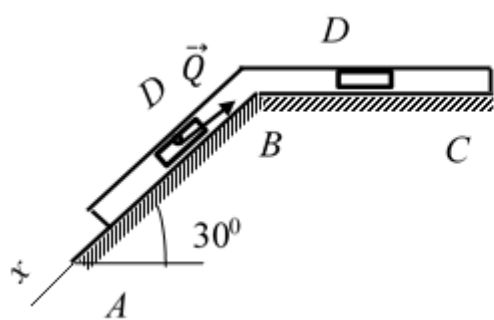


схема 2

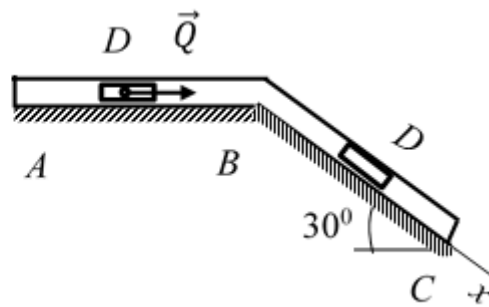


схема 3

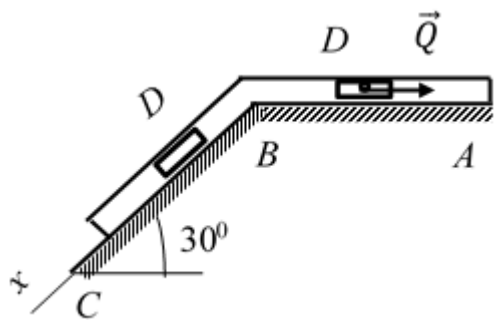


схема 4

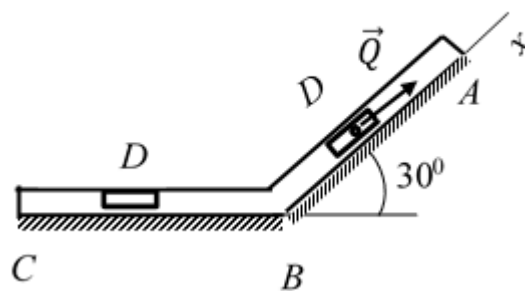


схема 5

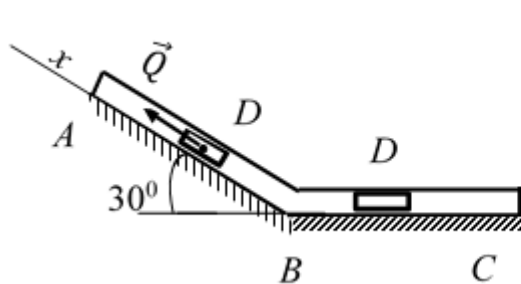


схема 6

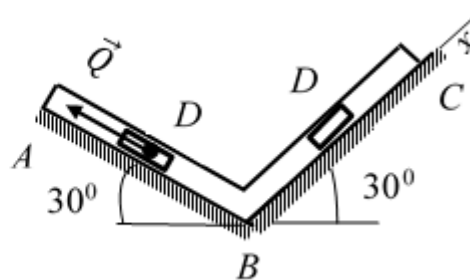


схема 7

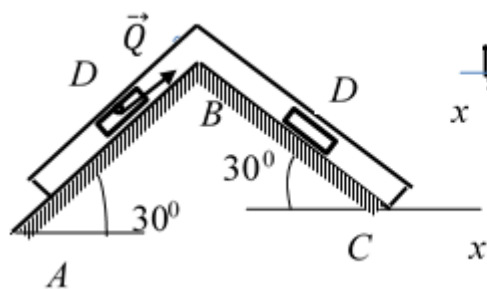


схема 8

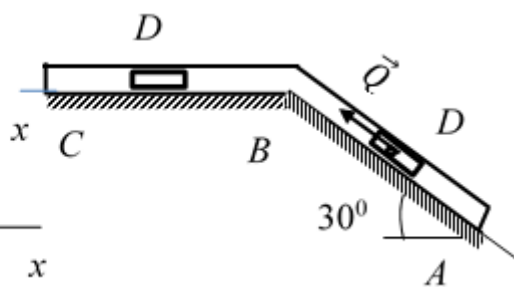


схема 9

Рис. 2.1

Таблиця 2.1

Номер схеми	m , кг	V_0 , м/с	Q , Н	R , Н	ℓ , м	t_1 , с	F_x , Н	μ , кг/м
0	2	20	6	$0,4V^2$	–	2,5	$2\sin(4t)$	0,4
1	2,4	12	6	$0,8V^2$	1,5	–	$6t$	0,8
2	4,5	24	9	$0,5V^2$	–	3	$3\sin(2t)$	0,5
3	6	14	22	$0,6V^2$	5	2	$-3\cos(2t)$	0,6
4	1,6	18	4	$0,4V^2$	–	2	$4\cos(4t)$	0,4
5	8	10	16	$0,5V^2$	4	–	$-6\cos(2t)$	0,5
6	1,8	24	5	$0,3V^2$	–	2	$9t^2$	0,3
7	4	12	12	$0,8V^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$	0,8
8	3	22	9	$0,5V^2$	–	3	$2\cos(2t)$	0,5
9	4,8	10	12	$0,2V^2$	4	–	$-6\sin(4t)$	0,2

Приклад 1

На рис. 2.2 показана труба ABC , яка має вертикальну ділянку AB і похилу ділянку BC (нахилена під кутом α до горизонтальної площини). Вантаж D масою $m = 2$ кг починає рух з ділянки AB під дією сил тяжіння \vec{P} та опору \vec{R} ($R = \mu V^2$, де $\mu = 0,4$ кг/м). Відстань від точки A (в якій $V = V_0 = 5$ м/с) до точки B дорівнює $\ell = 2,5$ м. На похилій ділянці BC на вантаж діють сила тяжіння \vec{P} , змінна сила $F = F(t)$ і сила тертя \vec{F}_T (коефіцієнт тертя вантажу по поверхні $f = 0,2$).

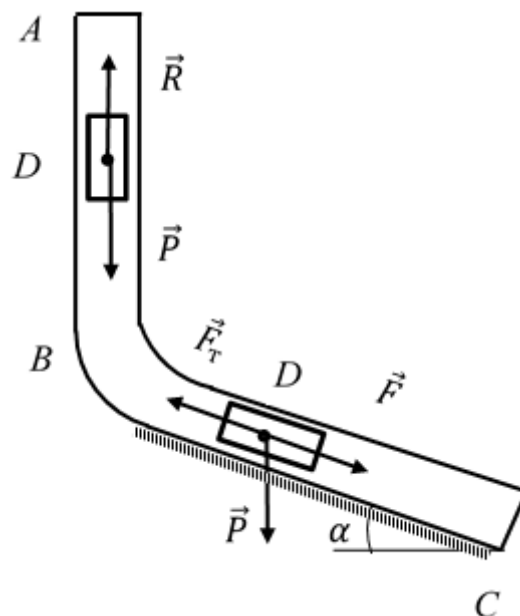


Рис. 2.2

Визначити закон руху вантажу $x = f(t)$ на ділянці BC .

Розв'язання

1.1. Розглянемо рух вантажа на ділянці AB , вважаючи вантаж матеріальною точкою.

Покажемо вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$ і \vec{R} (рис. 2.3).

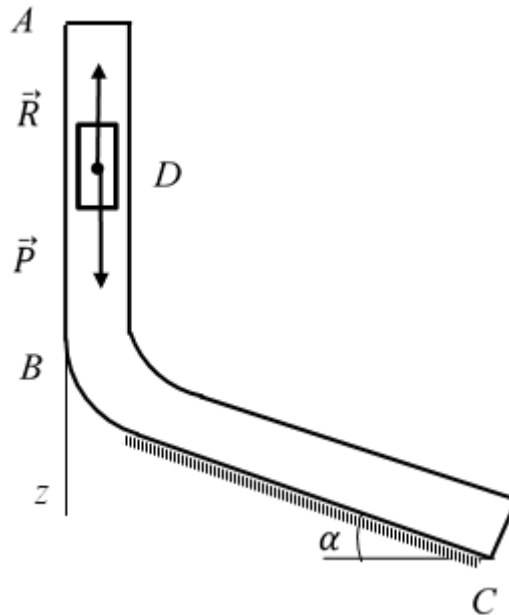


Рис. 2.3

Проведемо ось z і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на неї:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \quad \text{або} \quad m \frac{dV_z}{dt} = m \frac{dV_z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = m V_z \frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (2.1)$$

Запишемо $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu V^2$. Важливо, що в рівнянні всі змінні сили потрібно обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи, що $V_z = V$, отримаємо

$$mV \frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \quad \text{або} \quad V \frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - V^2 \right). \quad (2.2)$$

Для скорочення записів введемо позначення

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (2.3)$$

де при підрахунку прийнято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тоді рівняння (2.2) можна представити у вигляді

$$2V \cdot \frac{dV}{dz} = -2k(V^2 - n) \quad \text{або} \quad \frac{2VdV}{V^2 - n} = -2kdz. \quad (2.4)$$

Проінтегруємо обидві частини

$$\ln(V^2 - n) = -2kz + C_1, \quad (2.5)$$

де C_1 – стала інтегрування, яка знаходиться згідно з початковими умовами при $z=0$ та $V=V_0$

$$C_1 = \ln(V_0^2 - n)$$

і з рівняння (2.5) знайдемо

$$\ln(V^2 - n) = -2kz + \ln(V_0^2 - n) \quad \text{або} \quad \ln(V^2 - n) - \ln(V_0^2 - n) = -2kz.$$

Звідси

$$\ln \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz \quad \text{або} \quad \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результаті знаходимо

$$V^2 = n + (V_0^2 - n)e^{-2kz}. \quad (2.6)$$

Вважаючи, що $z = \ell = 2,5 \text{ м}$ і підставляючи до k і n їх значення з (2.3), знайдемо V_B – швидкість вантажу в точці B ($V_0 = 5 \text{ м/с}$, число $e = 2,7$):

$$V_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40,7 \quad \text{і} \quad V_B = 6,4 \text{ м/с}. \quad (2.7)$$

1.2. Розглянемо рух вантажа на ділянці BC .

Покажемо на рис. 2.4 вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{N} , \vec{F}_T , проекція змінної сили $F = F(t)$ на ось x задана як $F_x = 16\sin(4t)$.

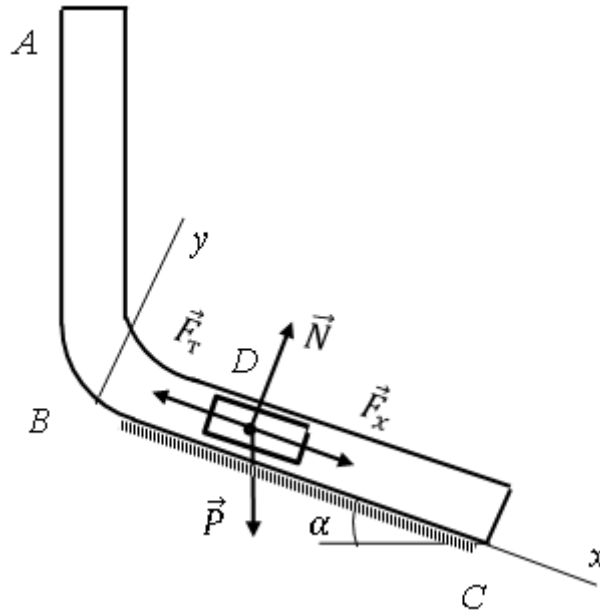


Рис. 2.4

Знайдена швидкість V_B буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$). Проведемо з точки B осі x і y , складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на ось x :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{Tx} + F_x \quad \text{або} \quad m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_T + F_x, \quad (2.8)$$

де $F_T = fN$ – добуток коефіцієнта тертя f на реакцію поверхні N .

Для знаходження \vec{N} складемо рівняння проекцій всіх сил на ось y . Так як $a_y = 0$, одержимо $0 = N - mg \cdot \cos \alpha$, звідки $N = mg \cdot \cos \alpha$. Отже $F_T = fmg \cdot \cos \alpha$. Крім того, $F_x = 16\sin(4t)$ і рівняння (2.8) матиме вигляд:

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16\sin(4t).$$

Розділимо обидві частини рівняння на m і запишемо

$$\frac{dV_x}{dt} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{16}{m} \sin(4t). \quad (2.9)$$

Результати обчислення $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$ і $\frac{16}{m} = \frac{16}{2} = 8$ підставимо до (2.9) та отримаємо

$$\frac{dV_x}{dt} = 3,2 + 8 \sin(4t). \quad (2.10)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.10) на dt і проінтегруємо:

$$V_x = 3,2t - 2 \cos(4t) + C_2, \quad (2.11)$$

де C_2 – стала інтегрування.

Для визначення C_2 врахуємо початкові умови руху вантажа на ділянці BC . Коли вантаж перебуває в точці B , приймаємо $t = 0$. Тоді $V = V_0 = V_B$, де V_B задається рівнянням (2.7). Підставляючи ці величини до (2.11), одержимо

$$C_2 = V_B + 2 \cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$$

Тоді рівняння (2.11) прийме вигляд

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2 \cos(4t) + 8,4. \quad (2.12)$$

Помноживши обидві частини рівняння (2.12) на dt і знову проінтегрувавши його, запишемо

$$x = 1,6t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t + C_3, \quad (2.13)$$

де C_3 – стала інтегрування.

Так як при $t = 0 - x = 0$, то $C_3 = 0$ і остаточно закон руху вантажу буде

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5 \sin(4t), \quad (2.14)$$

де x – в метрах, t – в секундах.

Приклад 2

На рис. 2.5 показана труба ABC , яка має дві похилі ділянки AB і BC (нахилені під кутом α до горизонтальної площини). Вантаж D масою $m = 3$ кг починає рух з ділянки AB під дією сил тяжіння \vec{P} , опору \vec{R}

($R = \mu V^2$, де $\mu = 0,5$ кг/м) та сталої сили $\vec{Q} = 9$ Н. Час руху від точки A (в якій $V = V_0$) до точки B дорівнює $t = 3$ с. На ділянці BC на вантаж діють сила тяжіння \vec{P} , змінна сила $F = F(t)$ і сила тертя \vec{F}_T (коефіцієнт тертя вантажу по поверхні $f = 0,2$).

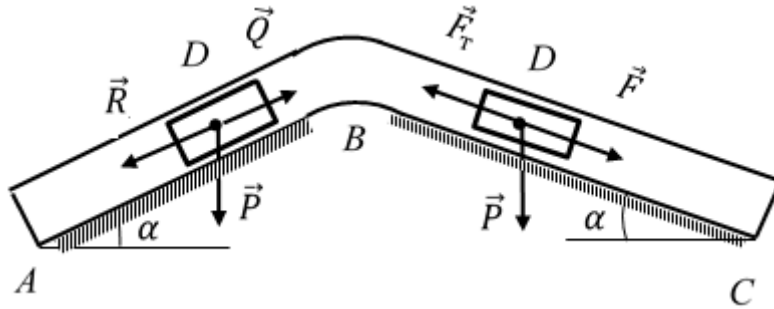


Рис. 2.5

Визначити закон руху вантажу $x = f(t)$ на ділянці BC .

Розв'язання

2.1. Розглянемо рух вантажа на ділянці AB , вважаючи вантаж матеріальною точкою.

Покажемо вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{R} , \vec{Q} , \vec{N} (рис. 2.6).

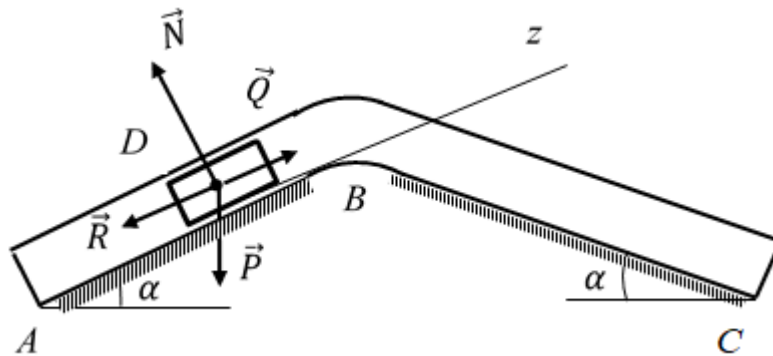


Рис. 2.6

Проведемо ось z і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проєкції на неї:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \quad \text{або} \quad m \frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z + N_z + Q_z. \quad (2.15)$$

Запишемо $P_z = P = mg \cos 60^\circ$, $R_z = -R = -\mu V^2 = -0,5V$, $Q_z = Q = 9$, $N_z = 0$. Важливо, що в рівнянні всі змінні сили потрібно обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи, що $V_z = V$, отримаємо

$$m \frac{dV}{dt} = -mg \cos 60^\circ + 9 - 0,5V \quad \text{або} \quad \frac{dV}{dt} = -g \cdot 0,5 + \frac{9}{m} - \frac{0,5}{m}V, \quad (2.16)$$

де при підрахунку прийнято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Підставимо значення $\mu = 0,5 \text{ кг/м}$ до (2.16) і отримаємо

$$V \frac{dV}{dt} = -2 - 0,17V. \quad (2.17)$$

Розділимо змінні $\frac{dV}{-(2 + 0,17V)} = dt$ і перетворимо цей вираз таким чином

$$\frac{dV}{(11,8 + V)} = -0,17 dt. \quad (2.18)$$

Проінтегруємо (2.18) і отримаємо

$$\ln(V + 11,8) = -0,17t + C_1, \quad (2.19)$$

де C_1 – стала інтегрування, яка знаходиться згідно з початковими умовами при $t = 0$ та $V = V_0$

$$C_1 = \ln(V_0 + 11,8)$$

і з рівняння (2.19) знайдемо

$$\ln(V + 11,8) = -0,17t + \ln(V_0 + 11,8) \quad \text{або} \quad \ln(V + 11,8) - \ln(V_0 + 11,8) = -0,17t.$$

Звідси

$$\ln \frac{V + 11,8}{V_0 + 11,8} = -0,17t \quad \text{або} \quad \frac{V + 11,8}{V_0 + 11,8} = e^{-0,17t}.$$

В результаті

$$V = -11,8 + (V_0 + 11,8)e^{-0,17t}. \quad (2.20)$$

При $t = 3$ с початкова швидкість дорівнює $V_0 = 22$ м/с та враховуючи, що $e^{-0,17t} = e^{-0,17 \cdot 3} = 0,6$, знайдемо:

$$V = V_B = -11,8 + (22 + 11,8) \cdot 0,6 = 8,48 \text{ м/с.}$$

2.2. Розглянемо рух вантажа на ділянці BC .

Знайдена швидкість V_B буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$). Покажемо на рис. 2.7 вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{N} , \vec{F}_T і F_x , проєкція змінної сили $F = F(t)$ на ось x задана як $F_x = 2\cos(2t)$.

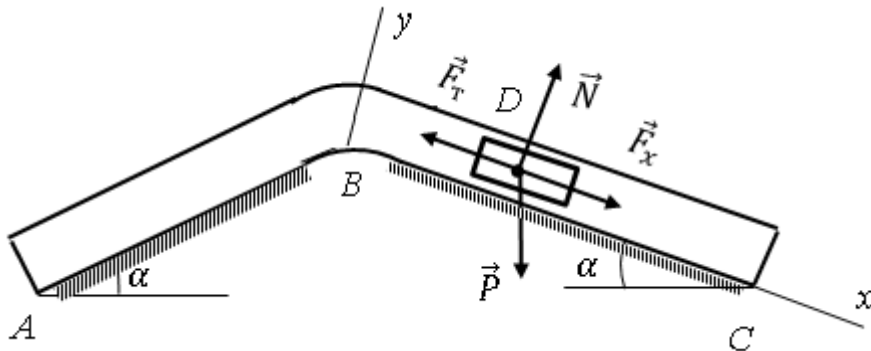


Рис. 2.7

Проведемо з точки B осі x і y і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проєкції на ось x :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{Tx} + F_x \quad \text{або} \quad m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_T + F_x, \quad (2.21)$$

де $F_T = fN$ – добуток коефіцієнта тертя f на реакцію поверхні N .

Для знаходження \vec{N} складемо рівняння проєкцій всіх сил на ось y . Так як $a_y = 0$, одержимо $0 = N - mg \cdot \cos \alpha$, звідки $N = mg \cdot \cos \alpha$. Отже $F_T = fmg \cdot \cos \alpha$. Крім того, $F_x = 2\cos(2t)$ і рівняння (2.21) матиме вигляд:

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 2\cos(2t). \quad (2.22)$$

Розділимо обидві частини рівняння на m . Результати обчислення $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$ і $\frac{2}{m} = \frac{2}{3} = 0,17$ підставимо до (2.22) та отримаємо

$$\frac{dV_x}{dt} = 3,2 + 0,17 \cos(2t). \quad (2.33)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.33) на dt і проінтегруємо:

$$V_x = 3,2t + 0,33 \sin(2t) + C_2, \quad (2.24)$$

де C_2 – стала інтегрування.

Для визначення C_2 врахуємо початкові умови руху вантажа на ділянці BC . Коли вантаж перебуває в точці B , приймаємо $t = 0$. Тоді $V = V_0 = V_B$, де V_B задається рівнянням (2.20). Підставляючи ці величини до (2.24), одержимо

$$C_2 = V_B = 8,48.$$

Тоді рівняння (2.24) прийме вигляд

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t + 0,33 \sin(2t) + 8,48. \quad (2.25)$$

Помноживши обидві частини рівняння (2.25) на dt і знову проінтегрувавши його, запишемо

$$x = 1,6t^2 - 0,17 \cos(2t) + 8,48t + C_3, \quad (2.26)$$

де C_3 – стала інтегрування.

При $t = 0$ й $x = 0$, тоді $C_3 = 0,17$ і остаточно закон руху вантажу буде

$$x = 1,6t^2 - 0,17 \cos(2t) + 8,48t + 0,17, \quad (2.27)$$

де x – в метрах, t – в секундах.

Приклад 3

На рис. 2.8 показана труба ABC , яка має горизонтальну ділянку AB і похилу ділянку BC (нахилена під кутом α до горизонтальної площини). Вантаж D масою $m = 2,4$ кг починає рух з ділянки AB під дією сил тяжіння \vec{P} , опору \vec{R} ($R = \mu V^2$, де $\mu = 0,8$ кг/м) та \vec{Q} . Відстань від точки A (в якій $V = V_0 = 5$ м/с) до точки B дорівнює $\ell = 1,5$ м. На похилій ділянці BC на вантаж діють сила тяжіння \vec{P} , змінна сила $F = F(t)$ і сила тертя \vec{F}_T (коефіцієнт тертя вантажу по поверхні $f = 0,2$).

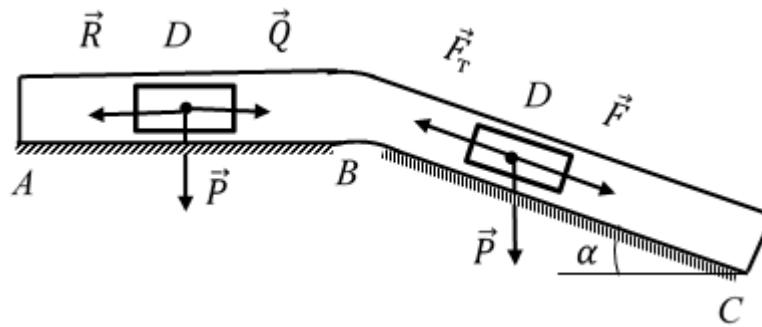


Рис.2.8

Визначити закон руху вантажу $x = f(t)$ на ділянці BC .

Розв'язання

3.1. Розглянемо рух вантажу на ділянці AB , вважаючи вантаж матеріальною точкою.

Покажемо вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{R} і \vec{Q} (рис. 2.9).

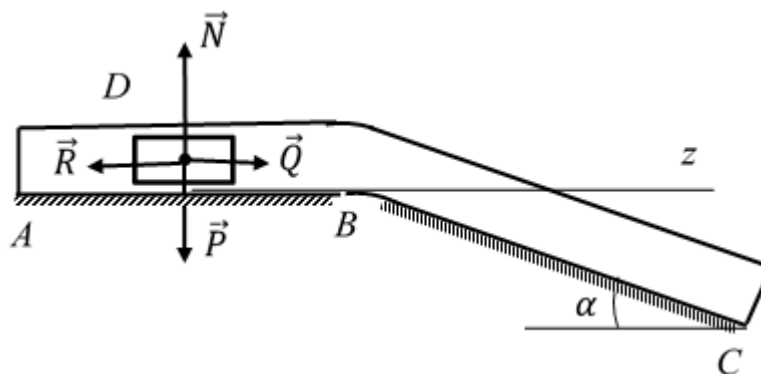


Рис. 2.9

Проведемо ось z і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проєкції на неї:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \quad \text{або} \quad m \frac{dV_z}{dt} = m \frac{dV_z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = mV_z \frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z + N_z + Q_z. \quad (2.28)$$

Запишемо $P_z = 0$, $R_z = -R = -\mu V^2$, $Q_z = Q = 6$, $N_z = 0$. Важливо, що в рівнянні всі змінні сили потрібно обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи, що $V_z = V$, отримаємо

$$mV \frac{dV}{dz} = -\mu V^2 + 6, \quad (2.29)$$

де при підрахунку прийнято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Підставимо значення $\mu = 0,8 \text{ кг/м}$ до (2.29) і отримаємо

$$V \frac{dV}{dz} = \frac{1}{3}(7,5 - V^2). \quad (2.30)$$

Для скорочення записів введемо позначення

$$k = \frac{1}{3}, \quad n = 7,5, \quad (2.31)$$

Тоді рівняння (2.30) можна представити у вигляді

$$2V \cdot \frac{dV}{dz} = -2k(V^2 - n). \quad (2.32)$$

Розділимо змінні та проінтегруємо обидві частини

$$\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2k dz \text{ і } \ln(V^2 - n) = -2kz + C_1, \quad (2.33)$$

де C_1 – стала інтегрування, яка знаходиться згідно з початковими умовами при $z = 0$ та $V = V_0$

$$C_1 = \ln(V_0^2 - n)$$

і з рівняння (2.33) знайдемо

$$\ln(V^2 - n) = -2kz + \ln(V_0^2 - n) \quad \text{або} \quad \ln(V^2 - n) - \ln(V_0^2 - n) = -2kz.$$

Звідси

$$\ln \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz \quad \text{або} \quad \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результаті знаходимо

$$V^2 = n + (V_0^2 - n)e^{-2kz}. \quad (2.34)$$

Вважаючи, що $z = \ell = 1,5$ м і підставляючи до k і n їх значення з (2.31), знайдемо V_B – швидкість вантажу в точці B ($V_0 = 12$ м/с, число $e = 2,7$):

$$V_B^2 = 7,5 + (144 - 7,5)e^{-\frac{2}{3} \cdot 1,5} = 58,06 \quad \text{і} \quad V_B = 6,4 \text{ м/с.} \quad (2.35)$$

3.2. Розглянемо рух вантажа на ділянці BC .

Знайдена швидкість V_B буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$). Покажемо на рис. 2.10 вантаж D (в довільному положенні) і діючі на нього сили $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{N} , \vec{F}_T , проєкція змінної сили $F = F(t)$ на ось x задана як $F_x = 6t$.

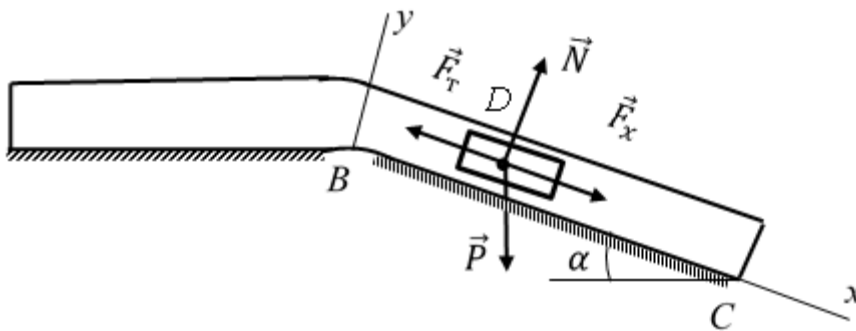


Рис. 2.10

Проведемо з точки B осі x і y , складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проєкції на ось x :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{Tx} + F_x \quad \text{або} \quad m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_T + F_x, \quad (2.36)$$

де $F_T = fN$ – добуток коефіцієнта тертя f на реакцію поверхні N .

Для знаходження \vec{N} складемо рівняння проєкцій всіх сил на ось y . Так як $a_y = 0$, одержимо $0 = N - mg \cdot \cos \alpha$, звідки $N = mg \cdot \cos \alpha$. Отже $F_T = fmg \cdot \cos \alpha$. Крім того, $F_x = 6t$ і рівняння (2.36) матиме вигляд:

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) + 6t. \quad (2.37)$$

Розділимо обидві частини рівняння на m . Результати обчислення $g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = g (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$ і $\frac{6t}{m} = \frac{6t}{2,4} = 2,5t$ підставимо до (2.37) та отримаємо

$$\frac{dV_x}{dt} = 3,2 + 2,5t. \quad (2.38)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.38) на dt і проінтегруємо:

$$V_x = 3,2t + 1,25t^2 + C_2, \quad (2.39)$$

де C_2 – стала інтегрування.

Для визначення C_2 врахуємо початкові умови руху вантажа на ділянці BC . Коли вантаж перебуває в точці B , приймаємо $t = 0$. Тоді $V = V_0 = V_B$, де V_B задається рівнянням (2.35). Підставляючи ці величини до (2.39), одержимо

$$C_2 = V_B = 7,62.$$

Тоді рівняння (2.39) прийме вигляд

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t + 1,25t^2 + 7,62. \quad (2.40)$$

Помноживши обидві частини рівняння (2.40) на dt і знову проінтегрувавши його, запишемо

$$x = 1,6t^2 - \frac{1,25}{3}t^3 + 7,62t + C_3, \quad (2.41)$$

де C_3 – стала інтегрування.

При $t = 0$ й $x = 0$, тоді $C_3 = 0$ і остаточно закон руху вантажу буде

$$x = 0,42t^3 + 1,6t^2 + 7,62t, \quad (2.42)$$

де x – в метрах, t – в секундах.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Чим відрізняється форма запису диференціальних рівнянь матеріальної точки від форми запису другого закону Ньютона?
2. У чому суть прямої та оберненої задач динаміки точки?
3. Чим відрізняються диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки від невільної?
4. Як записати диференціальне рівняння руху у проєкціях на декартові осі?
5. Як записати диференціальне рівняння руху у проєкціях на природні осі?
6. Матеріальна точка рухається зі стану спокою вниз по гладкій площині, нахиленій під кутом 10° до горизонталі. Визначити, за який час точка пройде шлях 30 м.
Відповідь: $t = 5,93$ с.
7. Тіло масою $m = 200$ кг зі стану спокою рухається вгору вздовж гладкої похилої площини під кутом 25° до горизонталі під дією сили $F = 1$ кН. Визначити час, за який тіло переміститься на відстань 8 м.
Відповідь: $t = 4,33$ с.
8. Матеріальна точка масою $m = 50$ кг зі стану спокою рухається по гладкій горизонтальній площині під дією сили $F = 50$ кН, вектор якої утворює постійний кут $\alpha = 20^\circ$ з напрямляючою. Визначити шлях, пройдений точкою за час $t = 20$ с.
Відповідь: $s = 188$ м.
9. Матеріальна точка масою $m = 900$ кг рухається по гладкій горизонтальній прямій під дією сили $F = 270t$, яка залежить від часу та направлена вздовж тієї прямої. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 10$ с, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 10$ м/с.
Відповідь: $V = 25$ м/с.
10. Матеріальна точка масою $m = 25$ кг почала рух зі стану спокою по гладкій горизонтальній прямій під дією сили $F = 20t$, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити шлях, пройдений точкою за 4 с.
Відповідь: $s = 8,53$ м.
11. Матеріальна точка масою $m = 100$ кг рухається по гладкій горизонтальній прямій під дією сили $F = 10t$, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити час, за який швидкість точки збільшиться з 5 до 25 м/с.
Відповідь: $t = 20$ с.

12. Визначити шлях, пройдений матеріальною точкою m вздовж осі Ox за час $t = 1$ с, якщо вона рухається під дією сили $F_x = 12mt^2$. В момент часу $t_0 = 0$ координата $x_0 = 3$ м, швидкість $V_{x0} = 6$ м/с.
Відповідь: $s = 10$ м.
13. На матеріальну точку масою $m = 20$ кг, яка рухається по горизонтальній прямій, діє сила опору $R = 0,2V^2$. За скільки секунд швидкість точки зменшиться з 10 до 5 м/с.
Відповідь: $t = 10$ с.
14. На матеріальну точку масою $m = 250$ кг, яка рухається по горизонтальній прямій, діє сила опору $R = 5V^2$. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 6$ с, якщо $t_0 = 0$ її швидкість $V_0 = 20$ м/с.
Відповідь: $V = 5,88$ м/с.
15. Матеріальна точка масою $m = 4$ кг рухається по горизонтальній прямій. Через скільки секунд швидкість точки зменшиться в 10 раз, якщо сила опору рухові $R = 0,8V^2$?
Відповідь: $t = 11,5$ с.
16. Матеріальна точка масою $m = 0,2$ кг рухається вздовж осі Ox під дією сили $F_x = -0,4t$. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 2$ с, якщо її початкова швидкість $V_{x0} = 6$ м/с.
Відповідь: $V = 2$ м/с.
17. Матеріальна точка масою $m = 25$ кг почала рух зі стану спокою по гладкій горизонтальній прямій під дією сили $F = 20t$, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити шлях, пройдений точкою за 4 с.
Відповідь: $s = 8,53$ м.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Янгулова О.Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка / навч. посіб. – Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. ак. В. Лазаряна – Д., 2019. – 75 с.
2. Теоретична механіка: підручник / І.В Кузько та ін. – Х.: Фолія, 2017. – 576 с.
3. Теоретична механіка. Конспект лекцій: Динаміка, ч. 3 / Л.А. Манашкін, М.Л. Коротенко та ін. – Д., 1998. – 80 с.
4. Векерик В.І. Теоретична механіка. – І.-Ф., 2006. – 459 с.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
6. Теоретична механіка: Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; за ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
7. Теоретична механіка. Ч.2. Динаміка / уклад. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. – 2004. – 590 с.
8. Теоретична механіка: розділ «Динаміка» : методичні вказівки до виконання курсової роботи / уклад. О.Л. Янгулова. – Д.: Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2015. – 42 с.
9. Теоретична механіка: Збірник задач з прикладами розв'язання із розділу «Динаміка точки та системи» / уклад. С.В. Мямлін, О.Л. Янгулова. – Д.: Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2004. – 32 с.
10. Методичні вказівки до виконання розрах.-граф. робіт з дисципліни «Теоретична механіка» розділ «Динаміка» / уклад. О.Л. Янгулова, В.В. Колбун. – Д.: Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. ак. В. Лазаряна, 2015. – 48 с.
11. Теоретична механіка. Розділ «Динаміка точки»: методичні вказівки та завдання для самостійної підготовки студентів до тестового контролю / уклад. Маслєєва Л.Г., Татарінова В.А., Янгулова О.Л., Недужа Л.О., Ахметова О.І. – Д.: Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2012. – 39 с.
12. Теоретична механіка: Методичні вказівки та приклади розв'язування задач / уклад. В.С. Буров. – Д.: Вид-во Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2008. – 39 с.
13. Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка. Методичні вказівки до виконання РГР для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / уклад. В.Г.Савін та ін. – К.:НТУУ «КПІ», 2013. – 35 с.
14. Кільчевський М.О. Курс теоретичної механіки. Підручник у 2 т. – Вид-во Київський університет. – К.: Київ. – 2009.
15. Комп'ютерне моделювання залізничних транспортних засобів: метод. вказівки до виконання практичних робіт, курсового та дипломного проектування / уклад.: М.І. Капіца, Я. Калівода, Л.О. Недужа, О.Б. Очкасов, Д.В. Черняєв. – Д.: Дніпр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2018. – 59 с.

Інформаційні ресурси

16. Дистанційний курс «Теоретична механіка». Режим доступу: <http://lider.diit.edu.ua>
17. Бібліотека університету та її депозитарій. Режим доступу: <https://library.diit.edu.ua/uk/catalog>,
<https://library.diit.edu.ua/uk/catalog?category=books-and-other>

Навчально-методичне видання

Янгулова Ольга Леонідівна
Недужа Лариса Олександрівна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації
до виконання розрахунково-графічної роботи на тему
«Динаміка матеріальної точки»

Редактор А. В. Безверхня
Комп'ютерна верстка В. В. Бердо

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,88.
Зам. № 41

Український державний університет науки і технологій
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010