

ТОЧНІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ В $C_{2\pi}$ У ТЕРМІНАХ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ЇХНІХ ПОХІДНИХ

For the best approximations of $e_{n-1}(f)$ functions in $C_{2\pi}^1$ by trigonometric polynomials, Zhuk proved the exact Jackson inequality $e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{4n} \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right)$. In this paper, we prove the following version of Jackson's exact inequality:

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{4n} \left(\frac{1}{2} \omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{2} \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right) \right).$$

Для найкращих наближень $e_{n-1}(f)$ функцій із $C_{2\pi}^1$ тригонометричними поліномами В. В. Жук довів точну нерівність Джексона $e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{4n} \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right)$. У даній роботі доведено такий варіант точної нерівності Джексона: $e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{4n} \left(\frac{1}{2} \omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{2} \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right) \right)$.

Нехай $C[-\pi, \pi]$ — простір дійснозначних неперервних 2π -періодичних функцій з нормою $\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in R^1\}$,

$$e_{n-1}(f) = \inf_{\{c_k\}} \left\{ \left\| f(x) - \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k e^{ikx} \right\|; c_{-k} = \bar{c}_k \right\}$$

— найкраще наближення f підпростором тригонометричних поліномів $\{T_{n-1}\}$ степеня не вищого $n-1$, $n \in \mathbb{N}$; $\omega(f, h) = \sup\{|\Delta_t f|; |t| \leq h\}$, $\Delta_t f(x) = f\left(x + \frac{t}{2}\right) - f\left(x - \frac{t}{2}\right)$ — модуль неперервності f .

Для оцінювання зверху величини $e_{n-1}(f)$ у термінах значень модуля неперервності f використовується нерівність Джексона – Корнейчука [1, 2] (§ 9.2) $e_{n-1}(f) \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$, яка для всіх $n \in \mathbb{N}$ є непокреслюваною; точніше кажучи, для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sup_{\substack{f \in C[-\pi, \pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)} \leq 1.$$

У роботі [3] доведено такий варіант оцінок зверху $e_{n-1}(f)$ у термінах лінійної комбінації двох значень модуля неперервності:

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sup_{\substack{f \in C[-\pi, \pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\frac{1}{2} \left(\omega\left(f, \frac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \right)} \leq 1.$$

Для неперервно диференційовних функцій f , $f \in C^1[-\pi, \pi]$, в [4] доведено, що для всіх n

$$\sup_{\substack{f \in C[-\pi, \pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi}{4n}. \quad (1)$$

Подальші результати для функцій f з $C^r[-\pi, \pi]$, $r \in \mathbb{N}$, див. у [4, 5].

Ми доведемо аналог рівності (1) для лінійної комбінації двох значень $\omega(f', h)$.

Теорема. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\sup_{\substack{f \in C[-\pi, \pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\frac{1}{2} \left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right) \right)} = \frac{\pi}{4n}. \quad (2)$$

Спочатку доведемо таку лему.

Лема. Нехай $\mathcal{L}$ — лінійний оператор згортки з парним ядром $K(t)$:

$$\mathcal{L}(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t) f(x+t) dt, \quad K(-t) = K(t), \quad \int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt = 1.$$

Тоді для $f \in C^1[-\pi, \pi]$ виконується нерівність

$$e_{n-1}(f - \mathcal{L}(f)) \leq \int_0^{\pi} \omega(f', t) |K(t)| \min\left(t, \frac{\pi}{n}\right) dt. \quad (3)$$

Доведення. Із властивостей ядра випливає, що

$$f(x) - \mathcal{L}(f, x) = \int_0^{\pi} K(t) (-\Delta_t^2 f(x)) dt.$$

Для оцінювання найкращого наближення використаємо співвідношення двоїстості [2] (§ 2.5)

$$\begin{aligned} e_{n-1}(f) &= \sup\{\langle f, g \rangle; g \in H_L^n\}, \\ \langle f, g \rangle &:= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx, \\ H_L^n &= \left\{ g: \|g\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)| dx = 1; g \perp \{T_{n-1}\} \right\}. \end{aligned}$$

Нехай g_1 — періодична первісна функції g з H_L^n . Тоді

$$\begin{aligned} e_{n-1}(f - \mathcal{L}(f)) &= \sup_{g \in H_L^1} \int_0^{\pi} K(t) \langle \Delta_t^2 f, g \rangle dt = \\ &= \sup_{g \in H_L^1} \int_0^{\pi} K(t) \langle \Delta_t f', \Delta_t g_1 \rangle dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{\pi} |K(t)| \omega(f', t) \sup_{g \in H_L^n} \omega(g_1, t)_1 dt,$$

де $\omega(g_1, t)_1 := \sup\{\|\Delta_y g_1\|_1; |y| \leq t\}$. Оскільки $g_1 \perp \{T_{n-1}\}$, то з нерівності Фавара [2] (§ 5.3) випливає, що $\|\Delta_t g_1\|_1 \leq 2\|g_1\|_1 \leq 2\frac{\pi}{2n}\|g\|_1 = \frac{\pi}{n}$. Окрім того, g_1 задовольняє умову Ліпшиця в L_1 : $\|\Delta_1 g_1\|_1 \leq \|g'_1\|_1 |t| = |t|$. Звідси випливає (3).

Лему доведено.

Доведення теореми. За допомогою доведеної леми оцінимо величину $e_{n-1}(f - S_h(f))$, де $S_h(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t) dt$ — середнє Стеклова f із кроком $h > 0$. Якщо $h \leq \frac{2\pi}{n}$, то

$$e_{n-1}(f - S_h(f)) \leq \frac{1}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \omega(f', t) t dt \leq \frac{h}{8} \omega\left(f', \frac{h}{2}\right).$$

Далі, за теоремою Фавара [2] (§ 5.3)

$$e_{n-1}(S_h f) \leq \frac{\pi^2}{8n^2} \frac{\omega(f', h)}{h}.$$

Тому при $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right]$

$$e_{n-1}(f) \leq e_{n-1}(f - S_h f) + e_{n-1}(S_h f) \leq \frac{h}{8} \left(\omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \omega(f', h) \right). \quad (4)$$

У випадку $h = \frac{\pi}{n}$ отримуємо оцінку

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{8n} \left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right) \right). \quad (5)$$

Із (1) випливає, що сталу $\frac{\pi}{8n}$ у (5) зменшити не можна.

Теорему доведено.

Наведемо кілька зауважень.

1. Співвідношення (1) справедливе і в просторі $L_1[-\pi, \pi]$ [4]. Доведені тут співвідношення (2), (3) також виконуються і в $L_1[-\pi, \pi]$.

2. Покладемо в (4) $h = \frac{\pi}{n(2k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тоді

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{8n(2k+1)} \left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n(2k+1)}\right) + (2k+1)^2 \omega\left(f', \frac{\pi}{n(2k+1)}\right) \right).$$

Сталу $\frac{\pi}{8n(2k+1)}$ у правій частині зменшити не можна. Це випливає з відомого результату [6]

$$\sup_{\substack{f \in C[-\pi, \pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f', \frac{\pi}{n(2k+1)}\right)} = \frac{\pi}{8n(2k+1)} (1 + (2k+1)^2).$$

3. При доведенні теореми ми використали оператор S_h усереднення за Стекловим. Розглянемо тепер для проміжного наближення оператор S_h^2 усереднення за Стекловим другого порядку:

$$S_h^2(f, x) = \int_{-h}^h \frac{h - |t|}{h^2} f(x + t) dt.$$

При $h \leq \frac{\pi}{n}$ використаємо лему:

$$\begin{aligned} e_{n-1}(f - S_h^2 f) &\leq \int_0^h \frac{h-t}{h^2} \omega(f', t) t dt \leq \omega\left(f', \frac{h}{2}\right) \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{h-t}{h^2} t dt + \omega(f', h) \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{h-t}{h^2} t dt = \\ &= \frac{h}{12} \omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{12} \omega(f', h). \end{aligned}$$

Далі, за теоремою Фавара

$$e_{n-1}(S_h^2 f) \leq \frac{\pi^3}{24n^3} \frac{\|\Delta_h^2 f'\|}{h^2} \leq \frac{\pi^3}{12n^3} \frac{\omega(f', h)}{h^2}.$$

В результаті для довільного $h \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$ отримуємо аналогічну (4) оцінку

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{h}{12} \left(\omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \left(1 + \left(\frac{\pi}{nh}\right)^3\right) \omega(f', h) \right).$$

Зокрема, при $h = \frac{\pi}{n}$

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{12n} \left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + 2\omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right) \right). \quad (6)$$

Стало $\frac{\pi}{12n}$ зменшити не можна, оскільки з (6) впливає точна нерівність

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{4n} \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right).$$

Література

1. Н. П. Корнейчук, Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций, Докл. АН СССР, **145**, 514–515 (1962).
2. Н. П. Корнейчук, Экстремальные задачи теории приближения, Наука, Москва (1976).
3. С. А. Пичугов, Вогнутые оболочки модулей непрерывности, Укр. мат. журн., **71**, № 5, 716–720 (2019).
4. В. В. Жук, Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций, Докл. АН СССР, **201**, 263–266 (1967).
5. А. А. Лигун, О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций, Мат. заметки, **14**, № 1, 21–30 (1973).
6. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, Точные неравенства, связанные с оценками приближений периодических функций посредством модулей непрерывности нечетных производных с различным шагом, Проблемы мат. анализа, вып. **19**, 69–88 (1999).

Одержано 22.01.21