

УДК 624.075.4

И. МАНЕВИЧ, д-р техн. наук, проф. (Украинский химико-технологический университет);

С. В. РАКША, канд. техн. наук (Днепропетровский инженерно-строительный институт)

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СВЯЗАННОГО ВЫПУЧИВАНИЯ СЖАТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Известно, что расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями критических нагрузок сжатых тонкостенных стержней становятся значительными при близости критических напряжений общей и местной форм. Одна из основных причин снижения несущей способности состоит в нелинейном взаимодействии этих форм, которое для стержней изучалось экспериментально и теоретически в ряде работ [1—4 и других].

Специфика стержней, имеющих поперечное сечение с двумя осями симметрии, состоит в том, что точки бифуркации для каждой из местных и общих форм в отдельности симметричны и кубические члены в энергии, отвечающие отдельным формам и взаимодействию пар форм, обращаются в нуль. Взаимодействие форм при сжатии одной общей и одной местной формы определяется членами четвертой степени, связанными с так называемыми «смешанными» полями перемещений второго порядка, которые отражают несимметрию местной формы при конечных перемещениях, обусловленную общим прогибом стержня. Как показал опыт решения подобных задач, в последние годы для подкрепленных пластин и оболочек задача определения

смешанной формы второго порядка не только весьма громоздка, но и не вполне корректна ввиду плохой обусловленности [3].

Альтернативный подход предложен в работе [5] и основан на учете, наряду с основной местной формой, «вторичной» местной формы, имеющей ту же длину волны другой характер симметрии. Наложение двух форм приводит к несимметричности суммарного местного прогиба и в потенциальной энергии появляется член третьей степени, описывающий «тройное» взаимодействие форм. В пользу идеи учета вторичной местной формы говорят следующие соображения.

1. Дополнительный местный изгиб тонкостенного стержня, вызванный конечным общим прогибом, имеет форму, подобную второй местной форме; это обстоятельство впервые, по-видимому, было отмечено Бейлардом в 1954 г. [2].

2. Вторичная местная форма, как показано в работе [3], практически совпадает со смешанной формой второго порядка, и, следовательно, ее учет делает излишним решение громоздкой задачи построения смешанной формы.

3. Критические напряжения для нескольких местных форм тонкостенного стержня, как правило, достаточно близки.

Наряду с указанным кубическим членом, в энергии необходимо в общем случае учитывать члены четвертой степени, отвечающие каждой из форм в отдельности. Однако, как показывает решение аналогичной задачи для подкрепленной пластины [6], для конструкций, близких к равноустойчивым по общей и местной формам, определяющей является кубическая нелинейность. Это позволяет существенно упростить решение задачи для этого частного, но весьма важного класса конструкций.

В данной статье, продолжающей работу [4], в рамках указанного подхода получено решение нелинейной задачи устойчивости сжатого тонкостенного стержня прямоугольного сечения и выполнен его численный анализ.

Линейный расчет. При расчете общей формы использовалась схема шарнирно-опертой эйлеровой стойки. Для местной потери устойчивости стержень рассматривался как сочленение пластин. Для каждой из пластин принимался синусоидальный закон изменения прогиба по длине, и решение уравнения устойчивости записывалось при помощи матрицы, связывающей амплитудные значения безразмерных поперечных усилий, изгибающих моментов и прогибов и их производных на продольных краях пластины [4]. Для тонкостенного стержня прямоугольного сечения прогиб каждой из составляющих пластин либо симметричен, либо антисимметричен (относительно нейтральной оси). В этих случаях можно получить соотношения между амплитудными значениями обобщенных усилий и перемещений каждого края в отдельности. Условия сопряжения, которые ввиду двойной симметрии сечения составляются только для одной пары пластин, приводят к характеристическому уравнению, определяющему критические напряжения местных форм.

Нелинейный расчет. Поле перемещений для каждой из пластин представляется в виде

$$U = \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3,$$

где $U_i = (u, v, w)_i$ — i -я собственная форма, причем индекс $i=1$ — соответствует общей форме, $i=2$ — местной форме с минимальным критическим напряжением (первая местная форма); $i=3$ — вторичной местной форме, имеющей ту же длину волны, но другой поперечный профиль; ζ_i — амплитуды этих форм, нормированных условием равенства максимального прогиба наибольшей из толщин пластин.

Как показано в общей асимптотической теории устойчивости [7], потенциальная энергия, при отбрасывании членов выше третьей степени относительно ζ_i , может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Pi = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) + \frac{1}{3} a_{111} \zeta_1^3 + a_{122} \zeta_1 \zeta_2^2 + a_{133} \zeta_1 \zeta_3^2 + a_{123} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 - \\ - \sum_{i=1}^3 a_i \zeta_i \zeta_i^* \frac{\lambda}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

где λ — параметр нагрузки, в качестве которого здесь принимается безразмерное среднее продольное напряжение $\sigma^0 = \sigma_* \cdot 10^3 / E$; λ_i — критическое значение λ .

i -й формы; ζ_i — амплитуда начальной погиби по i -й форме; коэффициенты a_i, a_{ijk} вычисляются по найденным собственным формам по известным формулам [7, 6]. Равновесные ветви определялись непосредственно минимизацией потенциальной энергии как функции параметров ζ_i ($i=1-3$) при данном λ . Для предельных точек и точек бифуркации гессиан Π обращается в нуль.

При использовании схемы эйлеровой стойки для общей формы $a_{111}=0$; коэффициенты a_{122} и a_{133} тождественно обращаются в нуль вследствие погашения соответствующих интегралов в энергии, вычисляемых по противоположным полкам. Взаимодействие общей и местных форм в энергии описывается членом $a_{123}\zeta_1\zeta_2\zeta_3$. Коэффициент a_{123} отличен от нуля только в том случае, когда суммарная местная форма $\zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3$ асимметрична относительно оси общего изгиба. Это обстоятельство определяет выбор вторичной местной формы. Вторичная местная форма — это ближайшая после первой местная форма, антисимметричная относительно оси общего изгиба (симметричная относительно плоскости изгиба). На рис. 1 показаны профили первых трех местных форм для стержня прямоугольного сечения. Если общий изгиб происходит относительно оси наименьшей изгибной жесткости $Y-Y$, то вторичная форма совпадает со второй местной формой (рис. 1, б). Если же общий изгиб происходит относительно оси $Z-Z$, то под вторичной должна пониматься третья местная форма (рис. 1, в).

Численный эксперимент. Очевидно, что роль взаимодействия форм может быть существенной при достаточной близости критических напряжений основной и вторичной местных форм σ_2 и σ_3 и близости σ_2 к критическому напряжению общей формы σ_1 . Выполнялись расчеты значений σ_i ($i=1-3$) для стержней прямоугольного сечения с различным соотношением толщин стенок t_2/t_1 и их ширины b_2/b_1 (здесь индекс 1 относится к горизонтальной пластине-полке, индекс 2 — к вертикальной пластине-стенке). Для квадратного сечения с одинаковыми толщинами всех пластин отношение $\sigma_3/\sigma_2=1,44$ для любых значений t_1/b_1 при достаточно большой длине. Для разнотолщинного квадрата величина σ_3/σ_2 уменьшается и стремится к единице при увеличении t_2/t_1 , как видно из приведенных ниже данных:

$t_2/t_1=1,0$	1,5	2,0	2,5	3,0
$\sigma_3/\sigma_2=1,44$	1,11	1,04	1,02	1,01

(данные, приведенные здесь и далее, получены при $b_1/L=0,052$, $t_1/b_1=0,025$). Аналогичное влияние на σ_3/σ_2 оказывает уменьшение отношения b_2/b_1 , т. е. переход от квадратного сечения к прямоугольному, как видно из следующих данных для $t_2/t_1=1$:

$b_2/b_1=1,0$	0,875	0,75	0,625	0,5
$\sigma_3/\sigma_2=1,44$	1,29	1,19	1,17	1,14

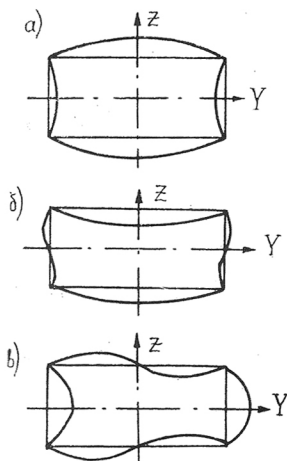


Рис. 1. Профили трех первых местных форм для стержня прямоугольного сечения

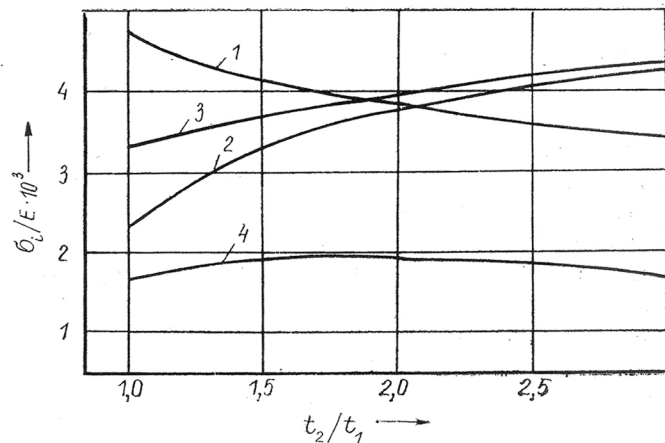


Рис. 2. Зависимость безразмерных напряжений от отношения толщин стенки и полки для стержня квадратного сечения $b_1/L=0,052$, $t_1/b_1=0,025$
1, 2, 3 — критические напряжения общей, первой и вторичной местных форм соответственно; 4 — предельное напряжение при погиби $\zeta_1^*=0,5$, $\zeta_2^*=\zeta_3^*=0,2$

Сближение σ_2 и σ_3 при увеличении жесткости стенки 2 за счет увеличения t_2/t_1 или уменьшения b_2/b_1 физически понятно — в предельном случае жесткой стенки обе величины σ_2 и σ_3 стремятся к одному и тому же значению — критическому напряжению защемленной пластины-полки 1. Из приведенных данных можно сделать вывод о том, что наименее опасно, с точки зрения взаимодействия форм, квадратное равнотолщинное сечение (при прочих равных условиях — соотношении σ_2/σ_1 , несовершенствах и т. п.). Всякая «асимметрия» — различие в ширине, толщине стенок — должна приводить к увеличению эффекта нелинейного взаимодействия форм.

Перейдем к данным нелинейного расчета. Принимались следующие значения амплитуд общей и местных погибей: $\zeta_1^* = 0,5$; $\zeta_2^* = \zeta_3^* = 0,2$ (одни и те же для всех вариантов). Данные расчета безразмерных предельных напряжений $\sigma_*^0 = \sigma_* \cdot 10^3/E$, приведенные в таблице и на графике (рис. 2), показывают, что наиболее опасен, как и следовало ожидать, случай близости всех трех критических напряжений (вариант 2 в таблице, точка $t_2/t_1=2$ на рис. 2). Предельное напряжение σ_* при данных погибях, в сумме не превышающих толщины стенки, падает почти вдвое по сравнению с критическими напряжениями в линейном расчете. При удалении от точки «тройной равноустойчивости», но при достаточной близости σ_2 и σ_1 , величина $\sigma_*/\sigma_{кр}^{\min}$, где $\sigma_{кр}^{\min} = \min \sigma_i$ ($i=1-3$), составляет 0,8...0,7 для реальных амплитуд погибей. Заметим, что в экспериментальных исследованиях тонкостенных стоек квадратного поперечного сечения отмечалось снижение напряжений примерно на 20...25% [8].

Критические и предельные напряжения

№ варианта	Параметры стержня				Критическое напряжение $\sigma_i^0 = \sigma_i \cdot 10^3/E$			Относительное предельное напряжение σ_*/σ_2
	b_1/L	b_2/b_1	t_1/b_1	t_2/t_1	σ_1^0	σ_2^0	σ_3^0	
1	0,052	1	0,025	1	4,61	2,26	3,26	0,75
2	0,052	1	0,025	2	3,81	3,71	3,78	0,47
3	0,052	0,75	0,025	1	2,82	2,70	3,21	0,63

Приведенные данные относятся к случаю, когда общий изгиб стержня происходит относительно оси наименьшей изгибной жесткости. Если это условие не выполняется (стержню «навязывается» изгиб относительно оси большей жесткости), то, как указано выше, в качестве вторичной местной формы следует принять третью или последующую форму с соответствующей симметрией (рис. 1, в), имеющую, как правило, более высокое критическое напряжение. В этом случае, как показывают расчеты, эффект взаимодействия форм относительно невелик.

Выводы. Несущая способность сжатых тонкостенных стержней прямоугольного сечения при наличии начальных несовершенств может существенно снижаться (на 20...30% и более) из-за нелинейного взаимодействия общих и местных форм потери устойчивости.

Расчет этого взаимодействия может быть относительно просто выполнен в рамках первого асимптотического приближения при учете вторичной местной формы. Близость критических напряжений вторичной и основной местных форм, а также общей формы является основным фактором, определяющим значимость взаимодействия форм.

Увеличение «асимметрии» сечения (соотношения толщин стенок t_2/t_1 , отношения ширины b_2/b_1) приводит, как правило, к увеличению эффекта взаимодействия по сравнению с равнотолщинным квадратным сечением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skaloud M., Zornerova M. Experimental investigation into the interaction of the buckling of compressed thin-walled columns with the buckling of their plate elements//Acta technica, CSAV.— 1970.— N 4.— P. 389—424.
2. Little G. H. The strength of square steel box columns — design curves and their theoretical basis//The Structural Engineer.— 1979, part. 2.— 57A, N 2.— P. 49—61.

- Sridharan S., Ali M. A. An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections//Int. J. Solids and Structures.—1986.—22, N 4.—P. 429—443.
- Маневич А. И., Ракша С. В. Связанная потеря устойчивости тонкостенных стержней закрытого поперечного сечения//Прикладная механика.—1993.—Т. 29.—С. 62—68.
- Koiter W. T., Neut A., van der. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels//Thin-Walled Structures.—1980: part. 1.—P. 51—66; part 2.—P. 66—86.
- Маневич А. И. Связанная потеря устойчивости сжатой подкрепленной панели//Изв. АН СССР.—Механика твердого тела.—1988.—№ 5.—С. 152—159.
- Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем//Механика: Период. сб. перев. иностр. статей.—1960.—№ 5.—С. 99—110.
- Benito R., Sridharan S. Mode interaction in thin-walled structural members//Struct. Mech.—1985.—12, N 4.—P. 517—542.

■учено 14.09.93