

Развитие многопродуктовых и многокритериальных моделей потоковых задач с учетом специализации носителей потоков

Введение. Модели задач и потоков в сетях, однородные и неоднородные потоки

При изучении характеристик транспортных и других сетей возникает необходимость вычисления оптимальных значений функции потока, протекающего от некоторого источника к стоку [1, 2, 3]. Статья посвящена проблемам анализа и оптимального планирования потоков в сетях, когда отдельные единицы потока (носители, транспортные средства) различаются своими свойствами. В качестве свойств носителей потока может быть следующее: 1) Перемещение носителей по некоторым известным маршрутам, траекториям. 2) Ограничения на возможность совместного движения единиц потока различных типов по дугам. 3) Определенные последовательности движения носителей. 4) Неоднородность единиц потока по «праву собственности», что приводит к необходимости учета индивидуальных оценок цели и допустимых перемещений носителей. Известные математические модели задач планирования и управления на основе анализа потоков лишь частично учитывают такие требования. В настоящее время управление потоками с учетом специализации свойств отдельных элементов потоков становится одной из актуальных проблем. В статье выполнен сравнительный анализ основных моделей потоковых задач и показано, что новый класс математических моделей, учитывающих специфические свойства отдельных перемещаемых элементов, является непосредственным обобщением классических моделей.

В литературе рассматривается несколько основных постановок задач о потоках в сетях, в которых учитывается неоднородность элементов. Прежде всего, это однопродуктовые (когда поток в дугах соответствует потоку некоторого однородного продукта) и многопродуктовые модели потоковых задач, которые обобщаются в форме задач о перевозках. Для однопродуктового потока исследуются две основные задачи. Первая – задача максимизации суммарного потока между двумя заданными вершинами при условии, что поток через каждую дугу ограничен сверху и снизу. Эта естественная постановка соответствует, например, максимизации транспортного потока при ограниченной пропускной способности отдельных участков дорог. Вторая задача состоит в нахождении ограниченных потоков минимальной стоимости, когда дугам приписаны стоимости передачи по ним единицы потока.

Представим формулировку задачи об однопродуктовом потоке минимальной стоимости в виде задачи ли-

нейного программирования (ЛП) [1, 2]. Рассмотрим сеть с α источниками, β стоками и φ промежуточными узлами. Предположим, что однопродуктовый поток должен протекать из источников в стоки через промежуточные узлы. Каждая дуга сети характеризуется верхней границей U_{ij} потока x_{ij} через нее и стоимостью c_{ij} единицы потока. Сеть может быть представлена в виде ориентированного графа $G = (N, A)$, где $N = N_\alpha \cup N_\beta \cup N_\varphi$, а N_α , N_β и N_φ – множества источников, стоков и промежуточных узлов соответственно. Задача нахождения потока минимальной стоимости может быть переформулирована математически следующим образом:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при условии, что

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \leq a_i, \quad i \in N_\alpha, \quad (2)$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, \quad i \in N_\varphi, \quad (3)$$

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} \geq b_i, \quad i \in N_\beta, \quad (4)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in A. \quad (5)$$

Из неравенства (2) следует, что в нашем распоряжении находится не менее $\sum_i a_i$ единиц продукта, а согласно нера-

венствам (4), в стоки должно быть доставлено не менее $\sum_i b_i$

единиц. Рассматривают несколько обобщений модели (1) – (5), которые, в целом, сохраняют ее основной смысл. Как можно установить по (1) – (5) единицами потока выступают x_{ij} , относительно которых нет никаких дополнительных требований или же условий.

Многопродуктовые и многокритериальные модели задач о потоках в сетях

Характерная особенность задач о многопродуктовом потоке состоит в том, что по дугам сети протекает, не один, а несколько неоднородных потоков, соответствующих процессам транспортировки различных продуктов. При этом суммарная величина потоков всех продуктов, перемещаемых по дугам, ограничена их пропускной способностью.

Задачи о многопродуктовом потоке так же могут быть сформулированы как задачи линейного программирования

[2]. Пусть x_{ij}^k – поток k -ого продукта из i -ого источника в j -й сток, а c_{ij}^k – стоимость транспортировки единицы этого продукта. далее пусть a_i^k и b_j^k – это предложение узла i и спрос узла j для k -ого продукта, соответственно, обозначим u_{ij} – пропускная способность дуги (i, j) . Тогда постановка многопродуктовой транспортной задачи имеет вид:

$$\min \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij}^k \quad (6)$$

при условии, что

$$\sum_i x_{ij}^k = b_j^k \quad \text{для всех } j, k, \quad (7)$$

$$\sum_j x_{ij}^k = a_i^k \quad \text{для всех } i, k, \quad (8)$$

$$\sum_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \text{для всех } i, j, \quad (9)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \text{для всех } i, j, k. \quad (10)$$

Здесь, как и в однопродуктовой модели, предполагается, что для каждого продукта суммарное предложение равно суммарному спросу, т.е.

$$\sum_i a_i^k = \sum_j b_j^k \quad \text{для всех } k. \quad (11)$$

В многопродуктовых задачах о перевозках вводятся промежуточные узлы [1, 3], которым не приписывается ни предложение, ни спрос, но требуется выполнение условия сохранения потока. Многопродуктовые задачи о перевозках могут быть представлены следующей моделью задач линейного программирования:

$$\min \sum_{k=1}^r \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k, \quad (12)$$

причем

$$1) \text{ если узел } i \text{ является источником продукта } k, \text{ то} \\ \sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = a_i^k, \quad (13)$$

$$2) \text{ если узел } i \text{ является промежуточным узлом, то} \\ \sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = 0, \quad (14)$$

$$3) \text{ если узел } j \text{ является стоком продукта } k, \text{ то} \\ \sum_i x_{ij}^k - \sum_i x_{ji}^k = -b_j^k, \quad (15)$$

также должны выполняться ограничения: вида

$$\sum_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \text{для всех } (i, j) \in A, \quad (16)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \text{для всех } k \text{ и } (i, j) \in A \quad (17)$$

Для многопродуктовой задачи можно независимо для каждого продукта решить соответствующую транспортную задачу, используя, например, алгоритм дефлекта [1].

Модели потоковых задач (1) – (5), (6) – (11) и (12) – (17) формируют оптимальные планы транспортировки на основе спросов и предложений узлов, по сути, не рассматривая процесс транспортировки, носителей потоков, неявно предполагая их однородность, эквивалентность. Легко установить, что многопродуктовые задачи являются частным случаем задач о потоках со специализацией носителей, когда единица потока (исполнитель транспортировки) могут различаться, иметь индивидуальные свойства [5, 6]. В качестве этих свойств, в частности, могут быть: перемещение по известным маршрутам (в классических моделях не рассматривается), ограничения на возможность совместного движения по дугам, задание определенной последовательности продвижения носителей, право собственности. Последнее из них задает набор индивидуальных оценок качества и цели перемещения носителей. Одной из отличительных особенностей потоковых задач со специализацией носителей является необходимость формирования набора траекторий движения единиц потока. В этом множестве и разыскиваются решение этих задач.

Заметим, что многопродуктовая задача является частным случаем потоковой задачи с индивидуальными свойствами. Таким индивидуальным свойством выступает качество – «быть продуктом типа P ». Необходимо указать, что математическая формулировка многопродуктовой задачи (6) – (11) (и ее обобщения (12) – (17)) фактически является одной из моделей компромисса многокритериальных задач оптимального планирования. А именно, если в качестве обобщенной скалярной функции (6) или (12) выступает аддитивная, причем каждый частный критерий $P_k = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$ – равноценен,

имеет один и тот же весовой коэффициент γ_k , например, единица. Разумеется, компромиссная модель содержит все ограничения в совокупности, а также включает дополнительные ограничения на общую пропускную способность. Простейшим обобщением многопродуктовой постановки, выполненной с позиций учета специализации свойств носителей потока, «право собственности», является модель типа (6) – (11), в которой частные критерии неравноценны $\gamma_k \ll \gamma_j$. $\sum \gamma_k = 1$. Разумеется, что вместо аддитивной модели скаляризации, как (6) и (12), можно использовать любые другие модели компромиссов [4, 7]; например, функцию максимума.

Чтобы продолжить сравнение моделей многопродуктовых задач о потоках в сетях с моделями задач с индивидуальными свойствами, при специализации носителей потоков, подробней рассмотрим такое свойство, как «право собственности». Для наглядности считаем, что каждый продукт принадлежит отдельному собственнику, характеризуется своей функцией цели. То есть в задачу типа (6) – (17) первоначально вводится вектор частных целей, отдельных для каждого собственника. Для решения такой теперь уже многокритериальной задачи могут быть использованы различные модели и методы, в том числе и скаляризация, в частности, приводящая к критерию (6). Кроме того при таком рассмотрении задачи как многокритериальной, предполагающей формирование компромисса, естественно может быть расширена система ограничений, подобных (9), (16). На допустимую область

решения могут быть наложены новые, дополнительные требования. Например:

$$x_{ij}^k \leq u_{ij}^k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (18)$$

хотя

$$\sum_{k=1}^m x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \text{для всех } (i, j) \in A, \quad (19)$$

где m - количество различных продуктов.

В настоящее время известен ряд алгоритмов для решения многопродуктовых потоковых задач (алгоритм Ху, метод «агрегирования» и др. [2]). Эти методы прямо не могут быть использованы для потоковых задач со специализацией носителей, при задании для них индивидуальных свойств. Они непосредственно не учитывают дополнительные ограничения типа (18) и др., а также возникающую при определенных условиях многокритериальность, а значит и качественно новый аспект проблемы – компромиссный характер функции цели и решения в целом.

О реализации многокритериальных потоковых задач с использованием клеточных автоматов

Неоднородность элементов, определяющих решения предложенного класса математических моделей задач о потоках в сетях, делает актуальными разработки некоторого достаточно общего метода, по крайней мере, определения общего подхода, к их численной реализации. Решение этой задачи осложняется тем, что индивидуальные свойства носителей потока вводят в модель многочисленные неоднородные в математическом и логическом плане условия. Исследования показали, что одним из общих методов реализации рассматриваемого класса потоковых задач может быть модель клеточных автоматов [4]. Особенностью решения задач в приложении к транспортным, в том числе и к железнодорожным сетям, является большое число вершин и значительная вычислительная сложность применения известных алгоритмов. В то же время модели клеточных автоматов позволяют организовать эффективное распараллеливание процессов расчетов характеристик сети. Вычислительная система, организованная в соответствии с архитектурой клеточных автоматов, характеризуется функционированием всех элементов системы по единому набору правил, что позволяет описать свойства всей системы на основе локальных зависимостей [4].

Для демонстрации примера применения моделей клеточных автоматов рассмотрим известную модель задачи поиска кратчайших путей в транспортных сетях. Задача, как известно, состоит в нахождении путей минимального «веса» от некоторой заданной вершины до всех имеющихся в сети вершин. Решение подобных задач имеет важное практическое значение в различных приложениях, когда веса дуг означают время, стоимость, расстояние, затраты и др. [1, 3].

Для решения этой задачи предлагается в качестве

первичного элемента модели транспортной сети использовать клеточный автомат. Автомат представлен равномерной сеткой, каждая ячейка которой (клетка) содержит несколько элементов данных; структура сети представляет набор клеточных автоматов. Время в системе, представляет этапы итерационного процесса, изменяется дискретно, любая клетка модели на каждом шаге вычисляет по единственному набору правил свое новое состояние, используя значения параметров состояний соседних клеток. Таким образом, законы функционирования транспортной системы с учетом всех требований и ограничений выполняются единообразно. Локальный характер модели клеточных автоматов означает требование одновременного изменения всех узлов-клеток на основе значений параметров (состояний) соседних. Развитие процессов в этих моделях идет поэтапно. В качестве клетки была выбрана вершина транспортной сети. Для каждой вершины известно множество клеток, с которыми она связана (соседние вершины), а также расстояние, «веса дуг», между ними. На каждом этапе любая клетка модели вычисляет свое новое состояние (длину кратчайшего пути) по состояниям «соседних».

Для задачи о нахождении путей «минимального веса» предложен следующий клеточно-автоматный алгоритм. В алгоритме i - номер текущей вершины; L_i - длина пути к i -ой вершине; Q_i - вершина, из которой есть дуга в i ; $\Gamma^{-1}(i)$ - множество вершин, из которых есть дуги в i ; s - заданная вершина, из которой находятся кратчайшие пути; c_{ij} - длина дуги (i, j) .

Шаг №1

$$L_s = 0; Q_s = 0;$$

$$L_i = \infty, Q_i = \infty \quad \text{для всех } i \neq s.$$

Шаг №2

$$flag = true;$$

для каждого i находим множество $\Gamma^{-1}(i)$;

для всех $u \in \Gamma^{-1}(i)$ вычисляем $r = L_u + c_{ui}$;

если $r < L_i$, то $L_i \leftarrow r$; $Q_i \leftarrow u$; $flag = false$.

Шаг №3

Если $flag = true$, то Конец,

иначе переходим на Шаг №2.

В итоге вектор L будет содержать кратчайшие пути к соответствующим вершинам, при этом, используя вектор Q , можно найти все пути, которые соответствуют кратчайшим расстояниям вектора L .

Представленный клеточно-автоматный алгоритм за конечное число шагов находит все пути «минимального веса» от некоторой заданной вершины до всех остальных вершин.

Перспективность применения моделей клеточных автоматов в многокритериальных потоковых задачах со специализацией носителей обусловлена возможностью локальной проверки требуемых свойств потоков. За счет этого при соблю-

дении требований модели локально, для каждой клетки автомата на всех этапах вычислительного процесса, они будут выполнены и в целом. Кроме того, при этом подходе достаточно просто могут быть применены параллельные алгоритмы.

Выводы

В работе получено обобщение многопродуктовых и многокритериальных моделей оптимизационных задач о потоках в сетях, прежде всего – транспортных. Отличие предлагаемых обобщенных моделей состоит в учете специализации единиц потоков, носителей, как новых компонентов задач о потоках в сетях. Предложен общий подход к реализации таких оптимизационных задач нового класса на основе клеточных автоматов.

Литература

1. Форд Л. Р. Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. М.: Мир. 1966. – 276 с.
2. Филлипс Д. И. Методы анализа сетей / Д. И. Филлипс, А. Гарсиа–Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с..
3. Басакер Р. Введение в теорию исследования операций / Р. Басакер, Т. Саати. Москва. Наука. 1974. – 366 с..
4. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. - М.: «Издательство Машиностроение». 2004. – 278 с.
5. Скалозуб В. В. Моделирование и анализ потоковых задач с неоднородными носителями /В.В. Скалозуб, Л.А. Паник. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. №19. 2009. С. 76 – 83.
6. Скалозуб В. В Многокритериальные модели задачи анализа транспортных сетей с учетом специализированных свойств носителей потоков / В. В. Скалозуб, Л. А. Паник. Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2010. №4. – С. 15-21.
7. Ehrgott M. Multicriteria optimization . Springer, 2005. – 328 p.

Резюме

Выполнен анализ и получено обобщение многопродуктовых и многокритериальных моделей потоковых задач в сетях, которое учитывает дополнительные требования специализации носителей потоков. Учет набора индивидуальных свойств отдельных единиц потоков приводит к многокритериальным задачам с дополнительными ограничениями. В качестве основной вычислительной модели, используемой для реализации пред-

ложенных многокритериальных потоковых задач, выбраны клеточные автоматы.

Виконано аналіз та отримано узагальнення багато продуктових і багатокритеріальних моделей потокових задач у мережах, які ураховують додаткові вимоги щодо спеціалізації носіїв потоків. Урахування наборів індивідуальних властивостей окремих елементів потоків приводить до багатокритеріальних задач із додатковими обмеженнями. У якості основної обчислювальної моделі, яка застосовується для реалізації запропонованих багатокритеріальних потокових задач, використано клітинні автомати.

The analysis and generalization of multicriteria models and multicommodity flow problems in networks, which takes into account the additional requirements of specialized media streams. Accounting set individual properties of individual units of flow leads to a multi-criteria problems with additional constraints. As a basic computer model used for the implementation of the proposed multiobjective streaming tasks selected cellular automata.