

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ИМЕНИ М.И.КАЛИНИНА

На правах рукописи

БРЫНЗА Анатолий Александрович

624 074.4

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК
С РАЗРЫВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

(01.02.03 - Строительная механика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск - 1980

НТБ
ДНУЖТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие ряда важных отраслей современной техники, таких как авиа-, ракето-, судо- и турбиностроение, промышленное и гражданское строительство, требует совершенствования методов расчета оболочек с разрывными параметрами, к которым относятся подкрепленные оболочки, а также оболочки с разрывами кривизны и с кусочно-переменной жесткостью. Актуальность данного направления исследований обусловлена, с одной стороны, повышением внешних нагрузок, действующих на современные конструкции, и ростом требований, предъявляемых к их надежности, с другой - недостаточным количеством надежных инженерных методов расчета, которые могли бы быть использованы при проектировании.

В частности, применяемый в большинстве случаев для расчета оболочек с переменными параметрами способ построения решения по отдельным участкам с плавно меняющимися геометрией и жесткостными характеристиками с последующим сопряжением этих решений часто приводит к громоздким вычислениям и позволяет, как правило, осуществить лишь численный анализ напряженно-деформированного состояния.

Достаточно общий подход к расчету оболочек с разрывными параметрами осуществляется посредством применения аппарата обобщенных функций. С помощью этого аппарата удалось решить ряд задач по расчету пространственных конструкций с локальными особенностями. Однако проблема дальнейшей разработки удобных для практического применения методов и расчетных алгоритмов решения указанного класса задач остается актуальной и в настоящее время.

Цель работы. Настоящая работа посвящена разработке инженерных методов решения задач динамики и прочности цилиндрических оболочек с ребрами, изломами средней поверхности и с кусочно-пере-

менной жесткостью.

Научная новизна. В работе на основании технических теорий оптержней, тонкостенных цилиндрических оболочек и применения аппарата обобщенных функций и сплайнов разработаны следующие методы и алгоритмы:

- расчета на прочность подкрепленных цилиндрических оболочек;
- расчета на прочность оболочек с кусочно-переменными жесткостными параметрами;
- определения частот и форм собственных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки кусочно-переменной (в направлении образующей) толщины в упругой среде;
- определения частот собственных колебаний цилиндрических оболочек с ребрами, кусочно-переменной жесткостью и кривизной.

Их применение позволяет в некоторых случаях получать решение, имеющее одно аналитическое выражение для всей области его определения, а в других—существенно упростить вычислительную процедуру.

Решен ряд конкретных задач, на которых показано применение этих методов и алгоритмов в расчетах оболочек с разрывными параметрами.

Практическая значимость. Получены замкнутые решения некоторых задач статики и динамики оболочек с ребрами и с кусочно-переменной толщиной.

Разработаны достаточно эффективные численные методы исследования свободных колебаний оболочек с разрывными параметрами. Учитывается возможность контакта оболочки с упругой средой.

Часть исследований выполнялась по договорам о творческом сотрудничестве с институтом Днепрпроектстальконструкция и научно-производственным объединением Балтийский завод (г. Ленинград), где затем была внедрена в практику проектирования.

Апробация работы . Результаты диссертации доложены и обсуждены на заседаниях секции строительной механики и сопротивления материалов Ленинградского дома ученых им.М.Горького АН СССР (1979 г.), на городском семинаре по механике (г.Днепропетровск, 1979 г.), на IV тематической конференции по практической реализации численных методов расчета инженерных конструкций (г.Ленинград, 1979г.), на XXXVIII научно-технической конференции МАСИ (г.Москва, 1979 г.), на XXXVII научно-технической конференции ЛИСИ (г.Днепропетровск, 1979 г.), на семинаре по теории оболочек под рук. д-ра ф.-м.наук, проф. А.В.Саченкова в Казанском университете (г.Казань, 1979 г.), на XXXVIII научной конференции ЛИСИ (г.Ленинград, 1980 г.), на юбилейной научно-технической конференции ДИИТ (г.Днепропетровск, 1980 г.), на Республиканском межвузовском семинаре по сопротивлению материалов и строительной механике под рук.акад. АН УССР Г.С.Писаренко (г.Киев, 1980 г.), на Всесоюзной конференции по механике железнодорожного транспорта (г.Днепропетровск, 1980 г.), на заседании секции механики материалов в конструкциях Одесского дома ученых АН УССР (1980 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять статей.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 106 наименований и содержит 120 страниц машинописного текста, 3 таблицы и 16 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении сформулирована основная цель работы и обоснована ее актуальность; дана краткая аннотация всех глав диссертации.

В первой главе приводятся соотношения теории оболочек с разрывными параметрами.

В первом параграфе приведен краткий обзор работ по расчету

оболочек с нарушениями регулярности параметров в виде ребер, изломов, переменной толщины и кривизны.

Наиболее существенный вклад в развитие теории и методов расчета оболочек с переменными параметрами внесли С.П.Тимошенко, В.З.Власов, А.И.Дурье, Э.И.Григорук, Х.М.Муштаря, С.А.Амбарцумян, Д.В.Вайнберг. В последние годы важные результаты получены в работах Е.С.Гребня, Н.П.Абовского, И.Я.Амиро, Я.М.Григоренко, В.А.Зарудного, А.И.Лиходеда, И.Е.Милейковского, И.Ф.Образцова, Г.Т.Онанова, П.А.Билина, Л.И.Маневича, Б.К.Михайлова и других авторов.

Результаты, полученные в работах различных авторов, дают возможность решать ряд практически важных задач. Однако не все они являются достаточно простыми, общими и надежными для того, чтобы ими можно было удовлетворить запросы практики.

Во втором параграфе этой главы приводятся некоторые сведения из теории обобщенных функций и сплайнов, которые неоднократно используются при изложении последующих параграфов.

Теория обобщенных функций Шварца-Соболева находит в последнее время все большее применение при решении задач строительной механики. Это нередко связано с тем, что расчетные схемы различных конструкций содержат сосредоточенные включения в распределенные параметры, которые вводятся в аналитические выражения последних при помощи дельта-функции Дирака и ее производных.

С применением обобщенных функций целесообразно связать теорию сплайнов, имея при этом в виду не только использование сплайн-аппроксимаций, а и отыскание точных решений дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами в виде некоторых сплайнов.

В третьем параграфе приводятся основные соотношения теории тонких оболочек с разрывными параметрами. Для вывода разрешающих

уравнений кусочно-постоянный радиус кривизны, изломы поперечности оболочки, жесткостные характеристики ребер в выражениях внутренних усилий, а также кусочно-постоянная толщина и жесткость обшивки представляются с помощью разрывных (единичных и импульсных) функций.

Выражения внутренних усилий и моментов подкрепленной перекрестным набором ребер оболочки переменной толщины имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + \\
 &+ \sum_{j=0}^m (E_j F_j \varepsilon_1 + E_j S_j \alpha_1) \delta(\beta - \beta_j); \\
 N_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + \\
 &+ \sum_{i=0}^n (E_i F_i \varepsilon_2 + E_i S_i \alpha_2) \delta(\alpha - \alpha_i); \\
 S &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \gamma; \\
 M_1 &= D(\alpha_1 + \mu \alpha_2) + \sum_{j=0}^m (E_j J_j \alpha_1 + E_j S_j \varepsilon_1) \delta(\beta - \beta_j); \\
 M_2 &= D(\alpha_2 + \mu \alpha_1) + \sum_{i=0}^n (E_i J_i \alpha_2 + E_i S_i \varepsilon_2) \delta(\alpha - \alpha_i); \\
 M_{12} &= D(1-\mu) \chi + \sum_{j=0}^m G_j J_{jk} \chi \delta(\beta - \beta_j); \\
 M_{21} &= D(1-\mu) \chi + \sum_{i=0}^n G_i J_{ik} \chi \delta(\alpha - \alpha_i). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь N_1, N_2 - нормальные силы; S - сдвигающая сила; M_1, M_2 - изгибающие моменты; M_{12}, M_{21} - крутящие моменты; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ - относительные удлинения и сдвиг срединной поверх-

ности; α_1, α_2 - изменения кривизны срединной поверхности в направлениях α и β соответственно; χ - "кручение" срединной поверхности; $E_i, F_i, S_i, J_i, G_i, J_{ik}$ - соответственно модуль упругости, площадь поперечного сечения, статический момент, момент инерции и жесткость при кручении i -го ребра; $E_j, F_j, S_j, J_j, G_j, J_{jk}$ - то же для j -го ребра, прикрепленных в направлениях α и β соответственно; $h(\alpha, \beta)$ - толщина, а $D(\alpha, \beta)$ - цилиндрическая жесткость обшивки оболочки; n, m - число подкрепляющих ребер в продольном и окружном направлениях соответственно;

$\delta(\alpha - \alpha_i), \delta(\beta - \beta_j)$ - дельта - функция Дирака.

В соотношениях (1) учитывается дискретность расположения ребер, их упругое сопротивление растяжению-сжатию, изгибу (с учетом эксцентриситета расположения) и кручению.

В случае расчета цилиндрической оболочки кусочно-постоянной кривизны с изломами поверхности кривизна задается в виде

$$\frac{1}{R(\beta)} = \frac{1}{R_0} + \sum_{j=1}^m [\eta_j \vartheta(\beta - \beta_j) + \chi_j \delta(\beta - \beta_j)], \quad (2)$$

где $\frac{1}{R_0}$ - кривизна оболочки при $\beta = 0$; η_j - скачки в значениях кривизны при переходе от одного участка к другому;

J_j - углы "переломов" срединной поверхности; $\vartheta(\beta - \beta_j)$ - единичная функция Хевисайда.

В результате подстановки выражений (1), (2) в исходные уравнения теории тонких цилиндрических оболочек получаются уравнения для оболочек с различного типа нарушениями регулярности геометрических и жесткостных параметров.

Во второй главе рассмотрены задачи определения напряженно-деформированного состояния оболочек с нарушениями регулярности параметров.

На примере подкрепленной оболочки изложена методика интегриро-

вания разрешающего уравнения цилиндрической оболочки с локальными нарушениями регулярности параметров, т.е. линейного дифференциального уравнения с коэффициентами, содержащими дельта-функцию одной переменной и ее производные. Полученное решение имеет одно аналитическое выражение для всей области его определения и выражается только через постоянные интегрирования и некоторые функции влияния, относящиеся к классу сплайнов.

Рассмотрен расчет замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами в случае действия как осесимметричной, так и неосесимметричной радиальной нагрузки. С помощью разложения в ряд по окружной координате и использования свойств сдвину-
 лярных обобщенных функций разрешающее уравнение задачи представ-
 лено в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^8 F_n}{dx^8} - 4n^2 \frac{d^6 F_n}{dx^6} + 6n^4 \frac{d^4 F_n}{dx^4} - 4n^6 \frac{d^2 F_n}{dx^2} + \frac{1-\mu}{c^2} \frac{d^4 F_n}{dx^4} = \\ & = \frac{Q_n(x)}{D} - \sum_{i=0}^d \left\{ \left[\frac{E_i J_i}{D} \frac{n^4}{R^4} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 - \frac{E_i S_i}{D} \frac{n^2}{R^2} \right. \right. \\ & \times \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right) + \left(\mu \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{G_i J_{ik}}{D} \frac{n^2}{R^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left(1 - \frac{d}{dx} \right) \right] F_n(x) \Big|_{x=x_i} \delta(x-x_i) - \frac{G_i J_{ik}}{D} \frac{n^2}{R^2} \times \\ & \left. \times \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right) F_n(x) \Big|_{x=x_i} \delta'(x-x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (3), найденное с помощью функции Грина, имеет вид

$$F_n(x) = \sum_{s=1}^d C_{sn} \psi_{sn}(x) - \sum_{i=0}^d \left\{ \left[\frac{E_i J_i}{R^4} \frac{n^4}{R^4} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{E_i S_i}{R^3 D} n^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right) + \left(\mu \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{G_i J_{ik}}{D} \frac{n^2}{R^2} \frac{d^2}{dx^2} \times \\
& \times \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left(1 - \frac{d}{dx} \right) \left] F_n(x) \right|_{x=x_i} G(x, \xi_i) + \left[\frac{G_i J_{ik}}{D} \times \right. \\
& \times \frac{n^2}{R^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 F_n(x) \Big|_{x=x_i} \left. \right] G'_\xi(x, \xi_i) \Big\} + F_{n\tau} \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь C_{sn} - постоянные интегрирования; $\psi_{sn}(x)$ - функции В.З.Власова; $G(x, \xi_i)$ - функция Грина; $F_{n\tau}$ - частное решение.

Для нахождения промежуточных параметров $F_n^{(k)}(x_i)$ получено следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
F_n^{(k)}(x_i) = & \sum_{s=1}^8 C_{sn} \psi_{sn}^{(k)}(x_i) - \sum_{s=1}^8 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_s(0)}{W(0)} \left\{ \left[\left[\frac{E_j J_j}{D} \frac{n^4}{R^4} \times \right. \right. \right. \\
& \times \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 - \frac{E_j S_j}{R^3 D} n^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right) + \left(\mu \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{G_j J_{jk}}{D} \frac{n^2}{R^2} \frac{d^2}{dx^2} \times \\
& \times \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left(1 - \frac{d}{dx} \right) \left] F_n(x) \Big|_{x=x_j} \right] \psi_{sn}^{(k)}(x_i - x_j) + \left[\frac{G_j J_{jk}}{D} \times \right. \\
& \times \frac{n^2}{R^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 F_n(x) \Big|_{x=x_j} \left. \right] \psi_{sn}^{(k+1)}(x_i - x_j) \Big\} + F_{n\tau}^{(k)}(x_i), \quad (5)
\end{aligned}$$

где $W(0)$ - значение вронскиана $W(\psi_{1n}, \psi_{2n}, \dots, \psi_{8n})$ при $x=0$; $A_s(0)$ алгебраические дополнения элементов последней строки и S -го столбца вронскиана при $x=0$

В качестве примера рассмотрен расчет опертого по краям трубопровода, частично заполненного жидкостью и подкрепленного в орднем сечении шпангоутом.

Во втором паґе графе рассмотрена регулярно подкрепленная перекрестным набором ребер открытая цилиндрическая оболочка. На

основе использования метода Бубнова-Галеркина и свойств сигнатурных обобщенных функций получена разрешающая система уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_z \sum_q A_{mq} \left\{ D[(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^4 + \frac{1-\mu^2}{C^2} \lambda_m^4] \delta_{mq} \delta_{nz} + \frac{2}{b} \{ E_i J_i \times \right. \\ \times \lambda_m^4 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{E_i S_i}{R} \lambda_m^4 [\lambda_m^2 (1-\mu) + \lambda_n^2] \} S_{nz}^v \delta_{mq} + \frac{2}{b} \times \\ \times \{ E_i J_i \lambda_n^4 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{E_i S_i}{R} \lambda_m^2 \lambda_n^2 [\lambda_m^2 + \lambda_n^2 (1-\mu)] \} S_{mq}^v \delta_{nz} + \\ + \frac{2}{b} G_i J_{ik} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 \lambda_n^2 \lambda_m \lambda_q C_{mq}^v \delta_{nz} + \frac{2}{b} G_i J_{ik} (\lambda_m^2 + \\ \left. + \lambda_n^2) \lambda_m^2 \lambda_n \lambda_z C_{nz}^v \delta_{mq} \right\} = Q_{mn} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\lambda_m = m\pi/a$; $\lambda_n = n\pi/b$; a, b — размеры оболочки в плане; $C^2 = h^2 R^2 / 12$; $\delta_{mq(nz)}$ — символ Кронекера; $E_i J_i$, $E_i J_i$ — жесткости ребер на изгиб; $E_{i(j)} J_{i(j)}$, $S_{i(j)}$, $G_{i(j)} J_{i(j)k}$ — жесткостные и геометрические характеристики $i(j)$ — го ребра; t, d — количества подкрепляющих ребер; $S_{mq(nz)}^v$, $C_{mq(nz)}^v$ — зависящие от $m(n)$, $q(z)$ значения интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_0^b \sum_{i=0}^d \sin \lambda_m x \sin \lambda_q x \delta(x - x_i) dx; \\ \int_0^b \sum_{i=0}^d \cos \lambda_m x \cos \lambda_q x \delta(x - x_i) dx \end{aligned} \quad (7)$$

В силу ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента разрешающая система уравнений (6) распадается на отдельные системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых обратно пропорционален значениям d и t . При $m_{\max} < d$ и $n_{\max} < t$ решение распадается на независимые для каждого значения m и n уравнения.

Рассмотрен расчет оболочки, подкрепленной в каждом из направлений одинаковыми равноотстоящими ребрами, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Приведенные результаты показывают, что при отыскании напряжений в подкрепленной оболочке необходимо учитывать дискретное расположение ребер даже при сравнительно большом их числе.

В третьей главе рассмотрены задачи статики цилиндрических оболочек с кусочно-переменными параметрами вдоль образующей. Для удобства алгоритмизации кусочно-переменные параметры заменяются кусочно-постоянными, при этом с увеличением числа участков разбивания приближенное решение стремится к точному. Решения полученных разрешающих уравнений типа обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными и сингулярными коэффициентами находятся с помощью метода сплайн-преобразования аргумента, предложенного С.И.Конашенко.

Приведен расчет осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины при произвольных граничных условиях.

Дифференциальное уравнение осесимметричной деформации подобной оболочки

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vartheta(x-x_i) \right] \frac{d^2 w}{dx^2} \right\} + \frac{E h_0}{D_0 R^2} \left[1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \vartheta(x-x_i) \right] w = \frac{q}{D_0} \quad (8)$$

при помощи полиномиального сплайна первой степени

$$\alpha = \gamma_0 u + \sum_{i=1}^n (u-u_i) \gamma_i \vartheta(u-u_i) \quad (9)$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами и сингулярной правой частью

$$w'' + 4k^4 w(u) = \sum_{z=2}^4 \sum_{i=1}^n C_{zi} \delta^{(4-z)}(u-u_i), \quad (10)$$

где C_{zi} — некоторые постоянные.

Решение уравнения (10) находится с помощью интегрального преобразования Лапласа. Далее с помощью обратного сплайн-преобразования можно перейти к аргументу x и получить искомое решение уравнения (8), имеющее единое аналитическое выражение для всего промежутка определения.

В третьем параграфе рассмотрен расчет несимметрично нагруженной цилиндрической оболочки переменной толщины при произвольных граничных условиях.

Как известно, напряженное состояние достаточно тонкой круговой цилиндрической оболочки средней длины можно приближенно представлять в виде двух компонентов: основного полубезмоментного состояния и краевого эффекта. Соответственно этому расчет таких оболочек складывается из двух независимых частей.

Краевой эффект, возникающий вблизи торцевых диафрагм, учитывается при помощи методов, приведенных в работах А.Л. Гольденвейзера.

При расчете цилиндрической оболочки переменной толщины, находящейся в условиях полубезмоментного напряженного состояния, закон изменения толщины приближенно заменяется кусочно-постоянным. После разделения переменных разрешающее уравнение приводится к виду

$$\left[1 + \sum_{i=1}^m \beta_i \theta(\xi - \xi_i) X''\right]' + 4k^4 [1 +$$

НТБ
ДНУЖТ

$$+ \sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(\xi - \xi_i)] X = \frac{R^2}{E h_0} \left(-\frac{dX}{d\xi} + \bar{Y} + \bar{Z} \right). \quad (II)$$

Здесь $4K^2 = \frac{R_0^3 E J_0}{R^2 E h_0}$; $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ — компоненты внешней нагрузки. Уравнение (II) решается методом сплайн-преобразования аргумента.

В качестве примера рассмотрен расчет консольной открытой цилиндрической оболочки с линейным законом изменения толщины, нагруженной равномерной радиальной нагрузкой.

Результаты найденных решений показывают, что даже при разбиении на десять участков получается хорошее соответствие полученных результатов с известными. Учитывая, что по предлагаемой методике производится расчет оболочки с любым законом изменения толщины (жесткости) в направлении образующей, можно утверждать, что она достаточно эффективна при решении данного класса задач.

В четвертой главе рассмотрены колебания цилиндрических оболочек с разрывными параметрами.

В первом параграфе предложен алгоритм определения собственных частот и форм осесимметричных колебаний конструктивно-ортоотропной цилиндрической оболочки, толщина которой меняется вдоль образующей по любому закону (в том числе может быть кусочно-непрерывной) и которая соприкасается с упругой средой по наружной поверхности. Предполагается, что упругая среда работает на растяжение-сжатие в радиальном направлении, толщину оболочки и коэффициент упругости среды можно приближенно представить кусочно-постоянными функциями x . При этом, когда число участков системы неограниченно возрастает, решение задачи отремится к точному для системы с кусочно-непрерывными параметрами. В общем случае кроме этого предполагается, что в некоторых радиальных сечениях оболочка имеет упругие опоры, которые учитываются путем введения

в выражение коэффициента упругости среды дельта-функция Дирака.

Для решения дифференциального уравнения форм собственных колебаний

$$[D_c(x)W']' - [\Omega^2 m(x) - c(x)]W = 0, \quad (12)$$

где $\Omega^2 = \omega^2 - \frac{E \vartheta}{\gamma R^2}$ - частотный параметр; $m(x) = \frac{\gamma h_w(x)}{g}$, применяется численный алгоритм.

Предполагается, что оболочка свободна по краям. Если края ее оперты на упругие (жесткие) опоры, то в этом случае можно "сдвинуть" опоры на бесконечно малые расстояния от краев таким образом, чтобы они оказались свободными. Тогда решение дифференциального уравнения (12) запишем так:

$$W(x) = W(0)Y_0 + W'(0)Y_1,$$

где Y_0, Y_1 - обобщенные функции А.Н.Крылова.

Частотное уравнение и уравнение форм колебаний соответственно имеют вид

$$Y_0'(e)Y_1''(e) - Y_0''(e)Y_1'(e) = 0; \quad (13)$$

$$W(x) = Y_0(x) - \frac{Y_0'(e)}{Y_1''(e)} Y_1(x) \quad (14)$$

Обобщенные функции А.Н.Крылова Y_0 и Y_1 и их производные определяются методом Рунге-Кутты.

В уравнение (12) входят сингулярные функции δ и δ' , появившиеся при введении реакций опор и дифференцировании выражения цилиндрической жесткости $D_c(x)$. При численном интегрировании реализация этих функций вызывает известные трудности, поэтому новые переменные выбраны таким образом, чтобы в систему уравнений первого порядка не входили импульсивные функции.

Исследованы свободные колебания опертой по краям оболочки кусочно-переменной толщины. Получено несколько первых частот и соответствующие им формы.

Дополнительно исследовались колебания этой же оболочки при двух промежуточных опорах.

Из анализа полученных результатов следует, что для оболочек средней длины с кусочно-переменным законом изменения толщины учет переменной толщины не вносит заметного уточнения при определении ряда низших частот. Однако формы колебаний существенно зависят от закона изменения толщины оболочки и вида ее закрепления.

Необходимо отметить, что при использовании предложенного алгоритма учет переменной толщины оболочки, а также влияния промежуточных опор, подкреплений, упругой среды не приводят к существенному усложнению задачи и что в этом смысле достигается унификация схемы решения задачи о свободных осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки переменной толщины.

Далее для исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с разрывными параметрами в общем случае применяется метод Рунге-Кутты. Для описания геометрии оболочки, ее жесткостных параметров используются соотношения (1), (2). В качестве координатных (базисных) функций применяются тригонометрические, а в некоторых случаях сплайн-функции.

Решение задачи состоит из следующих основных этапов: выбора соответствующих координатных функций, подсчета элементов матриц однородной системы уравнений и вычисления собственных чисел (частот).

Во втором параграфе рассмотрены колебания цилиндрической оболочки с дискретно изменяющимся радиусом кривизны в осевом направлении

$$R = R_0 \left[1 + \sum_i \gamma_i \Phi(S - S_i) \right] \quad (15)$$

При подстановке соотношения (15) в выражение энергии деформации

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{S_0} \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + (1 - \right. \\ & \left. - \mu) \frac{\partial u}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx ds + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{S_0} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} w^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} U^2 \left(\frac{\partial R}{\partial S} \right)^2 + \frac{2}{R^4} w v \frac{\partial R}{\partial S} + \frac{2}{R^2} w \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{2}{R^2} v \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \frac{\partial R}{\partial S} + \right. \\ & \left. + 2\mu \frac{v}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial R}{\partial S} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + (3 - \right. \\ & \left. - 2\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \right)^2 + 2 \frac{1-\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial S} \right] dx ds, \quad (16) \end{aligned}$$

за счет дифференцирования функции Хевисайда появятся коэффициенты типа дельта-функции Дирака δ (они подчеркнуты чертой) а также δ^2 (двумя чертами).

Из теории обобщенных функций известно, что интеграл от произведение "хорошей" функции на δ^2 равен бесконечности, т.е. он не существует. Вследствие этого энергия деформаций становится бесконечно большой. Так как энергия деформаций в реальных конструкциях конечна, то отсюда следует, что координатные функции не могут быть все "гладкими" функциями и их необходимо соответствующим образом подбирать. Итак, они должны помимо удовлетворения кинематическим граничным условиям отвечать требованию ограниченности энергии системы.

Координатные функции U и W (продольная и радиальная) задаются в следующем виде:

$$U = \sum_n A_n \cos \lambda_n x \sin \lambda_n x ;$$

$$W = \sum_n B_n \sin \lambda_n x \left\{ \sin \lambda_n S + \sum_i \sin^3 \frac{n\pi(S-S_i)}{S_i} [1 - \phi(S-S_i)] \right\}. \quad (17)$$

Функция V подбирается из условия, чтобы сумма коэффициентов при δ^2 в выражении энергии деформации равнялась нулю при $S=S_i$. Тогда

$$V = \sum_n B_n R_n \sin \lambda_n x \sum_i \frac{1}{\gamma_i} [1 - \phi(S-S_i)]^2 (1 + (2(\mu-1)))^{1/2} D, \quad (18)$$

$$\text{где } D = 3 \frac{n^2 \pi^2}{S_i^2} \left[\sin 2 \frac{n\pi(S-S_i)}{S_i} - \sin^3 \frac{n\pi(S-S_i)}{S_i} \right].$$

Подобранные таким образом координатные функции удовлетворяют граничным условиям задачи. Приводится числовой пример.

В третьем параграфе рассмотрены колебания цилиндрической оболочки с толщиной, дискретно меняющейся по окружной координате.

Координатные функции взяты в следующем виде:

$$\begin{aligned} U &= \cos m\pi \frac{x}{l} \sum_n A_n \sin n\pi \frac{S}{S_c} e^{-\alpha\pi(S-S_c)^2} \\ V &= \sin m\pi \frac{x}{l} \sum_n B_n \cos n\pi \frac{S}{S_c} e^{-\alpha\pi(S-S_c)^2} \\ W &= \sin m\pi \frac{x}{l} \sum_n C_n \sin n\pi \frac{S}{S_c} e^{-\alpha\pi(S-S_c)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь S_c — координата середины панели меньшей жесткости; α — коэффициент увеличения амплитуды колебаний на участке меньшей жесткости.

Приведены результаты вычислений внешней частоты колебаний обо-

лочка талпа котла восьмислойной железнодорожной цистерны без подкреплений и подкрепленной посредине шпангоутом. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными Т.А.Осиповым.

В четвертом параграфе исследованы колебания цилиндрической оболочки с переменной вдоль образующей жесткостью. Вначале рассмотрена задача определения собственных частот и форм осесимметричных колебаний такой оболочки. Решение находится с использованием сплайн-преобразования аргумента.

Далее, с использованием решения для осесимметричных колебаний, имеющего единое выражение для всей области его определения, и принципа Релея исследовались неосесимметричные колебания.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основные результаты работы сводятся к следующему:

1. Разработана методика интегрирования разрешающих уравнений с сингулярными нарушениями регулярности параметров цилиндрических оболочек типа линейных уравнений с коэффициентами, содержащими дельта-функцию Дирака одной переменной и ее производные.

Полученные решения имеют одно аналитическое выражение для всей области его определения и выражаются только через постоянные интегрирования и некоторые функции влияния, относящиеся к классу сплайнов.

2. Предложен метод решения задач статики и динамики цилиндрических оболочек с переменной в направлении образующей толщиной, основанный на применении сплайн-преобразования аргумента при интегрировании разрешающих уравнений и позволяющий получать решение в виде единого аналитического выражения, пригодного для всей области его определения.

3. Разработана методика нахождения частот свободных колеба-

ний цилиндрических оболочек с разрывными параметрами, основанная на применении аппарата обобщенных функций и сплайнов в процедуре Рунге-Кутты.

4. Построены численные алгоритмы нахождения частот и форм осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с кусочно-переменным законом изменения толщины в упругой среде.

5. Из анализа результатов, полученных при исследовании осесимметричных колебаний, следует, что для оболочек средней длины с кусочно-переменным законом изменения толщины учет переменности толщины не вносит заметного уточнения при определении ряда низших частот. Однако формы колебаний существенно зависят от закона изменения толщины оболочки и вида ее закрепления.

6. Получены аналитические решения для ребристых цилиндрических оболочек с учетом дискретности размещения ребер, их упругого сопротивления изгибу и кручению, а также эксцентриситета расположения. Приведенные результаты показывают, что при отыскании напряжений в подкрепленной оболочке необходимо учитывать дискретное расположение ребер даже при сравнительно большом их числе.

7. На основе метода расчета цилиндрических оболочек с переменной и направленной образующей толщиной, основанного на применении сплайн-преобразования аргумента при интегрировании разрывных уравнений, разработана программа расчета консольной оболочки переменной толщины.

8. Предложен способ отыскания частот собственных колебаний оболочек с кусочно-переменной толщиной и кривизной.

Показано, что развитие в диссертации методы и алгоритмы дают возможность существенно упростить решения некоторых известных задач и построить эффективные решения многих новых задач теории оболочек с разрывными параметрами.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Брынза А.А. К вопросу о собственных колебаниях кузова цельнометаллического вагона. - В кн.: Исследования по динамике рельсовых экипажей. Труды ДИИТа, вып. 169/21, Днепропетровск, 1975, с. 134-138.

2. Брынза А.А. Определение частот свободных колебаний некоторых типов оболочечных конструкций. - Днепропетровск, 1977.-10с.- Рукопись представлена ДИИТ. Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 26 авг. 1977, 532-77.

3. Брынза А.А. К расчету подкрепленной цилиндрической оболочки при асимметричном нагружении. - В кн.: Проблемы динамики и прочности железнодорожного подвижного состава. Межвузовский тематический сборник трудов. Днепропетровск, Изд. ДИИТа, вып. 205/26, 1979, с. 118-122.

4. Дорябин И.С., Брынза А.А., Работягов Д.Д. Определение собственных частот цилиндрических оболочек с разрывными параметрами. - В кн.: Исследования по расчету строительных конструкций. (Статика и динамика сложных механических систем и строительных конструкций). Межвузовский тематический сборник трудов. Д., ЛИСИ, 1979, с. 41-48.

5. Брынза А.А. Некоторые вопросы динамики и прочности цилиндрических оболочек с разрывными параметрами. - В кн.: Проблемы механики железнодорожного транспорта: Тез. докл. Всесоюзной конференции по проблемам механики железнодорожного транспорта. Днепропетровск, май 1980 г., с. 27.



БРЫНЗА Анатолий Александрович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ
ОБОЛОЧЕК С РАЗРЫВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.02.03 - Строительная механика

БТ 62570. Подписано к печати 23.09.1980г.

Формат бумаги 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Ротапринт. Усл.печ.л. I,30. Уч.-изд.л. I. Тираж 160 экз.

Заяв № 1329. Бесплатно.

Участок оперативной полиграфии. ДИП,320629,
ГСП, Днепропетровск, 10, ул. Лазаряна, 2.