

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. ЛАЗАРЯНА

ЖОВТОНОГА М.М., ПОПОВА А.С., ПЕРЦЕВИЙ В.О.

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНИХ ПРОДУКТІВ
COMSOL MULTIPHYSICS®, MATLAB®, SIMULINK® ТА SIMSCAPE™
ПРИ РОЗВ'ЯЗАНІ ЗАДАЧ ГІДРОГАЗОДИНАМІКИ ТА
ТЕПЛОМАСООБМІНУ

ДНІПРОПЕТРОВСЬК
2016

УДК 621.186.1:004.4
ББК 22.253.31c51
Ж 78

Ж 78 **Жовтонога М. М.**

Використання програмних продуктів COMSOL MULTIPHYSICS[®], MATLAB[®], SIMULINK[®] та SIMSCAPE[™] при розв'язанні задач гідрогазодинаміки та тепло масообміну: навчальний посібник / М.М. Жовтонога, А.С. Попова, В.О. Перцевий. – Д. : ЛПА, 2016. – 108 с.

Навчальний посібник присвячений застосуванню програмних продуктів COMSOL MULTIPHYSICS[®], MATLAB[®], SIMULINK[®] та SIMSCAPE[™] для розв'язання задач математичної фізики. Детально розглянуті питання коректного синтаксису диференціальних рівнянь в частинних похідних, а також граничних та початкових умов до них. Наводяться приклади стабілізації розв'язку стаціонарних та нестаціонарних задач.

УДК 621.186.1:004.4
ББК 22.253.31c51

COMSOL MULTIPHYSICS[®] є зареєстрованим знаком для товарів та послуг COMSOL AB, web: www.comsol.com.

COMSOL[®] SCRIPT[™] є знаком для товарів та послуг COMSOL AB, web: www.comsol.com.

MATLAB[®], SIMULINK[®] є зареєстрованими знаками для товарів та послуг The MathWorks, Inc., web: www.mathworks.com.

SIMSCAPE[™] є знаком для товарів та послуг The MathWorks, Inc., web: www.mathworks.com.

ISBN 978-966-383-684-3

© М.М. Жовтонога, А.С. Попова,
В.О. Перцевий, 2016

© Дніпропетровський національний
університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна, 2016

© ЛПА, 2016

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОСНОВИ СИНТАКСИСУ ЗАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ В COMSOL MULTIPHYSICS®	7
1.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання стаціонарних задач.....	7
1.2 Використання вбудованих модулів.....	17
1.3 Задання граничної умови Неймана при значеннях коефіцієнта G відмінних від нуля.....	23
1.4 Задання граничної умови Неймана при відсутності коефіцієнта G в диференціальному рівнянні.....	29
2 ОСНОВИ СИНТАКСИСУ ЗАДАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В COMSOL MULTIPHYSICS®	41
2.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання стаціонарних задач.....	41
2.2 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за відсутності в них просторових похідних.....	50
3 ПРОГРАМНИЙ ПРОДУКТ COMSOL MULTIPHYSICS® В ТЕПЛОТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ.....	57
3.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання теплотехнічних задач.....	57
3.2 Використання вбудованих модулів в теплотехнічних розрахунках.....	62
4 ПРОГРАМНИЙ ПРОДУКТ COMSOL MULTIPHYSICS® В ЗАДАЧАХ ГІДРОГАЗОДИНАМІКИ.....	71
4.1 Застосування вбудованих модулів для розв'язання задач гідрогазодинаміки.....	71
5 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ В COMSOL MULTIPHYSICS®	79
5.1 Застосування методів стабілізації розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних.....	79
5.2 Застосування методів стабілізації розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.....	86
6 ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ SIMSCAPE™ В ТЕПЛОТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ.....	89
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	104

ВСТУП

COMSOL MULTIPHYSICS® - це інтерактивне середовище для моделювання та розв'язання всіх типів наукових та інженерних задач, що ґрунтуються на звичайних диференціальних рівняннях (ЗДР) та диференціальних рівняннях в частинних похідних (ДРЧП). За допомогою цього програмного продукту також розв'язуються задачі з різних областей фізики, які пов'язані між собою одним або декількома параметрами. Наприклад, розв'язання сполученої задачі гідрогазодинаміки та теплообміну, електродинаміки та теплообміну тощо. Розв'язання задач в COMSOL MULTIPHYSICS® не вимагає поглиблених знань вищої математики, а також чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь.

Зазначимо, що за допомогою програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS® можна розв'язувати не тільки задачі, що сформульовано у вигляді ЗДР або ДРЧП, але також алгебраїчні лінійні та нелінійні рівняння.

До прикладу, в межах даного навчального посібника викладено методику розв'язання наступних ЗДР, запропонованих Флетчером, Shampine та Gordon [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} - y = 0 \\ \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \cdot y_3 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 \cdot y_3 \\ \frac{dy_3}{d\tau} = -0,51 \cdot y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

Задання диференціальних рівнянь в частинних похідних, граничних і початкових умов (у разі розв'язання нестационарної задачі) в COMSOL MULTIPHYSICS® можна здійснити за допомогою:

- графічного інтерфейсу користувача (англійською мовою цей інтерфейс має назву GRAPHICAL USER INTERFACE);
- мови програмування COMSOL® SCRIPT™;
- мови програмування MATLAB®.

Задання диференціальних рівнянь в частинних похідних в COMSOL MULTIPHYSICS® можна здійснити двома способами:

- 1) в загальному вигляді;
- 2) в коефіцієнтному вигляді.

Перевагами задання ДРЧП в загальному вигляді, який буде розглянуто в даному посібнику згодом, є лаконічність та простота синтаксису диференціальних рівнянь.

Для розв'язання рівнянь COMSOL MULTIPHYSICS® застосовує метод скінченних елементів. Сутність методу скінченних елементів для розв'язання диференціальних рівнянь докладно викладено Большаковым,

Bathe, Zienkiewicz та ін. [3-6].

Програмний продукт COMSOL MULTIPHYSICS® дозволяє розв'язувати задачі з наступних галузей науки та техніки:

- акустика;
- біотехнології;
- кінетика хімічних реакцій;
- дифузія;
- електромагнетизм;
- гідрогазодинаміка;
- електрохімія;
- геофізика;
- теплообмін;
- мікроелектромеханічні системи;
- мікрохвильові процеси;
- оптика;
- течія в пористих середовищах;
- квантова механіка;
- напівпровідникові пристрої;
- будівельна механіка;
- розповсюдження хвиль тощо.

Програмний продукт COMSOL MULTIPHYSICS® складається з низки вбудованих модулів:

- електротехнічний модуль;
- модуль акустики;
- хімічний модуль;
- геотехнічний модуль;
- модуль теплообміну;
- модуль мікроелектромеханіки;
- електромагнетичний модуль;
- модуль будівельної механіки тощо.

В тих випадках, коли задача виходить за межі вбудованих модулів, COMSOL MULTIPHYSICS® дозволяє задавати диференціальні рівняння будь-яких порядків та типів в межах підмодуля PDE Modes.

Послідовність дій при відшукуванні розв'язку задачі в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS® наведена Егоровим [7].

При цьому варто відмітити, що зазначена послідовність дій є універсальною і застосовується для розв'язання задач, сформульованих у вигляді ДРЧП, з різних галузей науки та техніки.

Робота з COMSOL MULTIPHYSICS® передбачає застосування наступних блоків програмного продукту, опис яких в достатньо докладному вигляді наведено в літературі [7]:

- навігатор моделей і головне меню;
- робоча область графічного інтерфейсу користувача і задання геометрії задачі, що розв'язується;

- задання функцій, констант та виразів;
- задання фізичних властивостей матеріалів (середовища) та початкових умов;
- задання граничних умов задачі;
- побудова сітки скінченних елементів;
- розв'язання задачі та візуалізація результатів розв'язку.

SIMSCAPE™ - це бібліотека блоків для моделювання та симуляції фізичних систем, що містять компоненти з різних галузей науки та техніки: механіки, електротехніки, гідравліки, теплотехніки тощо.

За допомогою блоків можна створити моделі різних компонентів фізичних систем, наприклад:

- насосу;
- парової турбіни;
- вітрової турбіни;
- електродвигуна тощо.

Передбачена можливість розширення існуючих бібліотек блоків за допомогою мови програмування MATLAB®.

Використання моделей SIMSCAPE™ в інших додатках MATLAB® підтримується шляхом генерації програмного коду.

Принцип створення моделі в середовищі SIMSCAPE™ подібний до механічного складання окремих компонентів фізичної системи в єдине ціле: блоки, які відносяться до фізичних елементів, таких, наприклад, як насоси, двигуни, турбіни, з'єднуються зв'язками, що становлять собою з'єднання, за допомогою яких блоки обмінюються між собою інформацією, наприклад, такою, як напір насоса, частота обертання турбіни тощо.

Для моделі SIMSCAPE™, яка близька за своїм виглядом до креслення, середовище SIMSCAPE™ автоматично виводить диференціальні рівняння, які характеризують, тобто описують поведінку фізичної системи.

1 ОСНОВИ СИНТАКСИСУ ЗАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ В COMSOL MULTIPHYSICS®

1.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання стаціонарних задач

В тих випадках, коли задача виходить за межі вбудованих модулів, COMSOL MULTIPHYSICS® дозволяє задавати диференціальні рівняння будь-яких порядків та типів в межах підмодуля PDE Modes.

При розв'язанні диференціальних рівнянь та виборі граничних і початкових умов задачі в COMSOL MULTIPHYSICS® доцільно розпочати з простого прикладу, в якості якого виступає процес дифузії в площині ємності при стаціонарному режимі.

Авторами Dixon та DiBiasio [8] наводиться приклад.

Приклад 1.1.

Потрібно знайти розподіл концентрації речовини в площині ємності довжиною 30см і висотою 10см при стаціонарному режимі проходження процесу [8]. Константа швидкості реакції дорівнює $k = 1 \cdot 10^{-3} \text{ 1/с}$. Коефіцієнт дифузії дорівнює $D = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Процес дифузії описується рівнянням:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - k \cdot C = 0 \quad (1.1)$$

де D - коефіцієнт дифузії, $\text{м}^2/\text{с}$;

$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ - похідні другого порядку масової концентрації

речовини по координатних осях x та y відповідно;

k - константа швидкості реакції, $1/\text{с}$;

C - масова концентрація речовини, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Зазначимо, що для визначення концентрації речовини в ємності самого лише диференціального рівняння недостатньо. Розподіл концентрації речовини в ємності повинен також задовольняти граничним умовам задачі, які вказують на те, що відбувається на стінках ємності. В даному випадку мається на увазі, що стінки ємності виконані з твердого непроникного матеріалу, наприклад, з металу або пластмаси.

Граничні умови задачі наведені у вигляді схеми на рисунку 1.1.

На границях 1 та 4 задано значення концентрації речовини, які дорівнюють 20 та $100 \text{ кг}/\text{м}^3$ відповідно.

На границях 2, 3 та 5 задані умови непроникності (ізоляції). Це означає, що речовина, яка знаходиться в ємності, не може витікати з неї крізь ці границі.

Зазначимо, що граничні умови для диференціальних рівнянь можуть

бути двох типів:

1) на границі задається значення розрахункової величини. Це гранична умова Діріхле.

2) на границі задається значення похідної розрахункової величини. Це гранична умова Неймана.

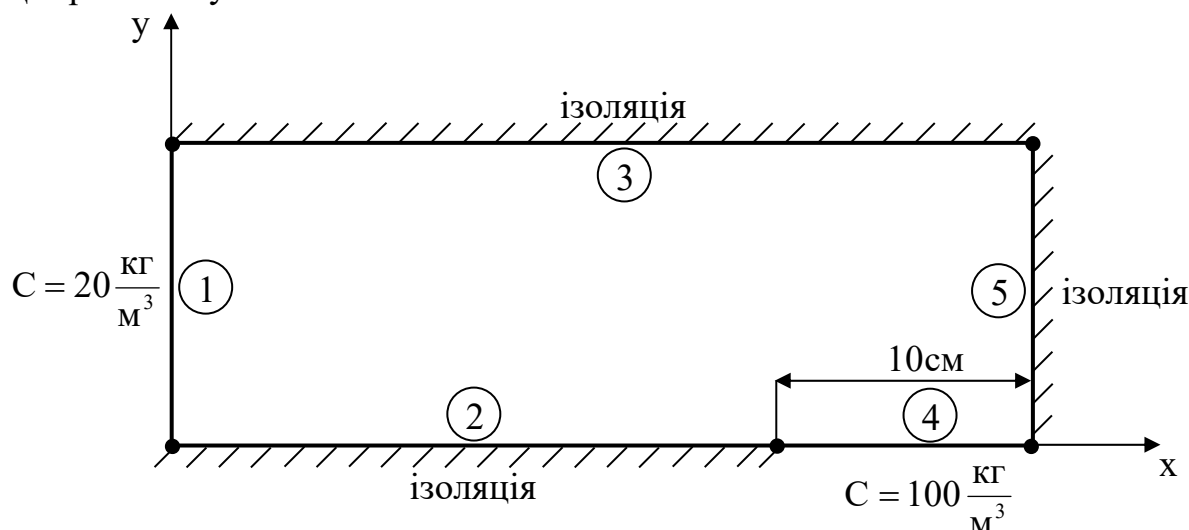


Рисунок 1.1 - Схема граничних умов задачі

Таким чином, в даній задачі на границях 1 та 4 задано граничні умови Діріхле, оскільки на цих границях відомо значення концентрації речовини:

$$C = 20 \text{ кг/м}^3 \quad (1.2)$$

$$C = 100 \text{ кг/м}^3 \quad (1.3)$$

Умова непроникності (ізоляції) на границях 2, 3 та 5 задається у вигляді рівності нулю похідної першого порядку розрахункової величини, тобто у вигляді граничних умов Неймана:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Похідна вздовж осі x задається рівною нулю. Аналогічно задається похідна вздовж осі y , оскільки ємність є двовимірною.

Більш детально опис граничних умов диференціальних рівнянь в частинних похідних наведено Пискуновим [9].

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв'язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього виконуються наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Stationary analysis**.
4. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції u (яка є такою поза вибором) потрібно написати C .

Увага! Літера **C** повинна бути великою (в даній задачі концентрація речовини позначена саме латинською великою літерою **C**) і вводити її потрібно в режимі роботи клавіатури на латиниці. Концентрацію речовини можна позначити будь-якою іншою літерою латинської абетки, але виключно латинської. Пакет COMSOL MULTIPHYSICS® є майже несумісним з кириличною абеткою, тому її використання вкрай небажано.

Ім'я файлу, що містить задачу, також має складатися з літер латинської абетки.

5. Натиснути **OK**.

Відкривається графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **diffuziya_1**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, потрібно:

6. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та висоти ємності:

Width: 0.3

Height: 0.1

Увага! Довжину та висоту ємності при її відображенні в графічному інтерфейсі користувача потрібно задавати в метрах, оскільки поза вибором COMSOL MULTIPHYSICS® використовує міжнародну систему одиниць (SI). В цьому можна переконатись, вибравши пункт меню **Physics > Model settings > Base unit system: SI**.

7. Натиснути **OK**.

В графічному інтерфейсі користувача з'явиться прямокутник довжиною 0,3м та висотою 0,1м, який поза вибором має назву **R1**.

8. Зайти в пункт меню **Options > Zoom > Zoom Extents**. Виконання цієї дії необхідно для того, щоб найкращим чином розташувати відображену фігуру в робочій області графічного інтерфейсу користувача.

Після переходу в режим відображення границь прямокутника шляхом вибору пункту меню **Physics > Boundary Settings**, видно, що кількість границь дорівнює чотирьом. Однак, відповідно до умов задачі, нижня границя ємності повинна бути розділена на дві частини довжиною 20 та 10см відповідно.

Для поділу нижньої границі ємності на дві частини потрібно виконати наступні кроки:

9. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Point**. В полі **Coordinates** потрібно ввести координати розташування точки, яка розділятиме нижню границю ємності на дві частини:

x: 0.2

y: 0

10. Натиснути **OK**.

Після виконання зазначених дій нижня границя ємності буде розділена на дві частини відповідно до умов задачі. В цьому можна переконатись, вибравши пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

Для налаштування (задання) диференціального рівняння (1.1) потрібно виконати наступні кроки:

11. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

12. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

13. На закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** поза вибором коефіцієнтам Γ , F , e_a та d_a присвоєні наступні значення (табл. 1.1).

Введення диференціального рівняння в COMSOL MULTIPHYSICS® здійснюється за допомогою задання коефіцієнтів Γ , F , e_a та d_a .

14. Виберемо пункт меню **Multiphysics > Model Navigator** для того, щоб переконаватися, що вибрано задання диференціального рівняння у вигляді **PDE, General Form**, тобто в загальному вигляді.

Таблиця 1.1- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression	
Γ	$-C_x$	$-C_y$
F	1	
e_a	0	
d_a	1	

15. Закрити вікно **Model Navigator**.

16. У вікні **Subdomain Settings** в полі **Equation** наведено диференціальне рівняння в тому вигляді, в якому його сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$\nabla \cdot \Gamma = F \quad (1.6)$$

де ∇ - оператор Гамільтона.

В розгорнутій формі оператор Гамільтона виглядає наступним чином:

- для одновимірних задач:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

- для двовимірних задач:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

- для тривимірних задач:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

В наведеному прикладі для двовимірної ємності, яка розглядається в даній задачі, формулу (1.6) можна представити наступним чином:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = F \quad (1.7)$$

Коефіцієнт Γ у формулі (1.7) є від'ємною похідною першого порядку (тобто похідною зі знаком “мінус”) розрахункової величини по координатних осях, що відображено на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** (табл. 1.1).

Рівняння (1.7) в такому випадку приймає наступний вигляд:

$$\frac{\partial\left(-\frac{\partial C}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{\partial C}{\partial y}\right)}{\partial y} = F \quad (1.8)$$

Для спрощення рівняння (1.8) виносимо знак “мінус” за межі операторів диференціювання. Після проведення відповідних дій дане рівняння матиме наступний вигляд:

$$-\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(-\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) = F \quad (1.9)$$

Співставлення рівнянь (1.6) та (1.9) засвідчує, що для двовимірної задачі символ $\nabla \cdot \Gamma$ COMSOL MULTIPHYSICS® поза вибором представляє як від’ємну похідну другого порядку розрахункової величини по координатних осях x та y .

Тепер сформулюємо правила коректного запису диференціального рівняння за допомогою коефіцієнтів Γ , F , e_a та d_a :

1) Значення коефіцієнтів e_a та d_a дорівнюють нулю, оскільки в рівнянні (1.6) або його розгорнутому аналогу - рівнянні (1.9), ці коефіцієнти відсутні.

Увага! Коефіцієнти e_a та d_a не завжди будуть дорівнювати нулю, тобто не завжди будуть відсутніми в диференціальному рівнянні (1.6).

Так, наприклад, у випадку розв’язання нестационарної задачі $e_a = 0$, $d_a = 1$, тобто коефіцієнт e_a буде відсутнім, а коефіцієнт d_a буде присутнім в рівнянні (1.6). В даному посібнику подібна задача буде розглянута згодом.

У разі розв’язання так званого хвильового рівняння $e_a = 1$ та $d_a = 1$, тобто обидва коефіцієнти будуть присутніми в рівнянні.

2) Похідні другого порядку розрахункової величини в рівнянні, яке описує задачу (для даної задачі це рівняння (1.1)), потрібно перенести в ліву частину рівняння, оскільки коефіцієнт Γ записаний в лівій частині рівняння (1.6).

Увага! В рівнянні (1.1) дані похідної другого порядку вже перенесені в ліву частину рівняння.

Після цього потрібно перейти на закладку **Coefficients** і записати в поле Γ дані похідної другого порядку розрахункової величини.

3) В полі Γ вирази для похідних першого порядку залишаються без зміни тільки тоді, коли:

- в лівій частині рівняння, яке описує задачу, дані похідної другого порядку розрахункової величини перебувають зі знаком “мінус”;
- числові коефіцієнти при цих похідних дорівнюють одиниці.

Беручи до уваги те, що в рівнянні (1.1) похідні другого порядку розрахункової величини по координатних осях знаходяться в лівій частині рівняння зі знаком “плюс”, тому знак “мінус” перед виразами похідних по координатних осях слід прибрати. Числовий коефіцієнт при даних похідних дорівнює D .

Таким чином, на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** коефіцієнт Γ потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression	
Γ	$D * C_x$	$D * C_y$

4) Решта доданків рівняння, що описує задачу, (для даної задачі це рівняння (1.1)) становлять собою коефіцієнт **F** в рівнянні (1.6).

Тому решту доданків в рівнянні, яке описує задачу, потрібно перенести в праву частину рівняння, оскільки коефіцієнт **F** знаходиться в правій частині рівняння (1.6).

Стосовно даної задачі коефіцієнт **F** на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** виглядатиме наступним чином (табл. 1.3):

Таблиця 1.3- Вікно присвоєння значень коефіцієнта

Coefficient	Value / Expression
F	$k * C$

Після задання диференціального рівняння в загальному вигляді закладка **Coefficients** меню **Physics** > **Subdomain Settings** виглядатиме так, як це показано в таблиці 1.4.

Таблиця 1.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression	
Γ	$D * C_x$	$D * C_y$
F	$k * C$	
c_a	0	
d_a	0	

Закладка **Init** в меню **Physics** > **Subdomain Settings** застосовується для задання початкових умов при розв'язанні нестационарних задач. Оскільки задача становить собою стаціонарний процес дифузії, початкове значення концентрації речовини дорівнює нулю разом з її похідною за часом. Таким чином, за рідкісним винятком (**приклад 2.1**), для стаціонарного процесу немає потреби задавати значення розрахункової величини в початковий момент часу.

Дані, які розміщено в закладках **Element** та **Weak**, в переважній більшості випадків залишаються без змін.

Наступним кроком після введення диференціального рівняння в COMSOL MULTIPHYSICS® є задання граничних умов задачі.

17. Для задання граничних умов задачі потрібно зайти в пункт меню **Physics** > **Boundary Settings**.

18. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір. Це означає, що активною в даний момент є границя 1. В робочій області графічного інтерфейсу користувача границя 1 виділена червоним кольором.

На закладці **Coefficients** в поле **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле (**Dirichlet boundary condition**), а сама закладка має наступний вигляд (табл. 1.5):

Таблиця 1.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	- C

У вікні **Boundary Settings** в полі **Equation** наведено граничну умову Діріхле в тому вигляді, в якому її сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$-n \cdot \Gamma = G + (\partial R / \partial C)^T \cdot \mu; R = 0 \quad (1.10)$$

Як видно з формули (1.10) математичне формулювання граничної умови Діріхле є досить громіздким та складним для розуміння. Зазначимо, що **n** становить собою нормаль або, іншими словами, перпендикуляр до границі (в даному випадку до границі 1). Символом **T** позначено транспонування, а μ - множник Лагранжа.

В дійсності введення граничної умови Діріхле в COMSOL MULTIPHYSICS® є достатньо простим. В даній задачі на границі 1 задано концентрацію речовини (рис. 1.1):

$$C = 20 \text{ кг/м}^3 \quad (1.11)$$

Тобто, на границі 1 задано граничну умову Діріхле, яку COMSOL MULTIPHYSICS® пропонує в якості граничної умови поза вибором.

Нехтуючи розмірністю концентрації речовини вираз (1.11) матиме вигляд:

$$C = 20 \quad (1.12)$$

В свою чергу, COMSOL MULTIPHYSICS® сприймає вираз (1.12) в наступному вигляді:

$$0 = 20 - C \quad (1.13)$$

Тобто для введення граничної умови Діріхле потрібно перенести символ **C** в праву частину виразу (1.12). Очевидно, що в лівій частині виразу залишиться нуль.

Увага ! Права частина виразу (1.13) становить собою коефіцієнт **R** в таблиці 1.5.

Повернемося до таблиці 1.5, яка ілюструє поле **Boundary conditions** на закладці **Coefficients**. Коефіцієнт **G** потрібно залишити рівним нулю (табл. 1.6).

Увага ! За рідкісним винятком коефіцієнт **G** для граничної умови Діріхле завжди дорівнює нулю.

Коефіцієнт **R** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.6.

Таблиця 1.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	20 - C

Задання граничної умови для границі 1 можна вважати завершеним.

Аналогічним чином задається концентрація речовини $C = 100 \text{ кг/м}^3$ на границі 4. Нагадаємо, для того, щоб границя 4 стала активною, на

закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** потрібно натиснути на цифру 4.

Після задання концентрації на границі 4, потрібно задати умови непроникувості (ізоляції) на границях 2, 3 та 5.

19. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** потрібно натиснути на цифру 2. Таким чином, границя 2 стає активною.

20. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Умови непроникувості (ізоляції), як вже згадувалось раніше, є граничними умовами Неймана, тому перемикач потрібно встановити навпроти граничної умови Неймана (**Neumann boundary condition**).

Закладка **Coefficients** для граничної умови Неймана має вигляд (табл. 1.7):

Таблиця 1.7- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	поле не є активним

У вікні **Boundary Settings** в полі **Equation** наведено граничну умову Неймана в тому вигляді, в якому її сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$-n \cdot \Gamma = G \quad (1.14)$$

Як видно з виразу (1.14) математичне формулювання граничної умови Неймана є “скороченим” варіантом граничної умови Діріхле (вираз (1.10)). З урахуванням цього в граничній умові Неймана одна зі складових матиме наступний вигляд:

$$(\partial R / \partial C)^T \cdot \mu = 0$$

У формулі (1.14) коефіцієнт Γ становить собою величину з умови задачі та введену в процесі розв’язання задачі в COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме від’ємну похідну першого порядку розрахункової величини по координатних осях.

21. Як вже згадувалось раніше символ $\mathbf{n}$ становить собою нормаль або, іншими словами, перпендикуляр до даної границі. Вирази для коефіцієнта Γ наведені в таблиці 1.2. Таким чином, вираз (1.14) можна переписати у вигляді:

$$-D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = G \quad (1.15)$$

$$-D \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = G \quad (1.16)$$

Увага ! Таким чином, коефіцієнт Γ спеціально для граничної умови Неймана задавати не потрібно, оскільки він вже введений в COMSOL MULTIPHYSICS®, в чому неважко переконатись, вибравши меню **Physics > Subdomain Settings** та закладку **Coefficients**.

Для наочності запишемо поруч граничні умови для даної задачі,

тобто вирази (1.4) та (1.5), а також вирази для граничних умов в тому вигляді, в якому їх сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, тобто вирази (1.15) та (1.16):

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.17)$$

$$-D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = G \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1.19)$$

$$-D \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = G \quad (1.20)$$

Порівнюючи вирази (1.17) та (1.18) можна зробити наступні висновки: на перший погляд здається, що формули (1.17) та (1.18) відрізняються коефіцієнтом “-D”, і цей коефіцієнт якимось чином потрібно врахувати, тобто ввести в COMSOL MULTIPHYSICS®. Однак, не слід поспішати з висновками.

Справа в тому, що коефіцієнт дифузії **D** (чому він записується зі знаком “мінус” буде описано згодом) “прив’язаний” до коефіцієнта **G** (табл. 1.2), тому він залишається при коефіцієнті **G** і в граничній умові Неймана.

Покажемо тепер чому знак “мінус” присутній у виразі (1.18) і його дійсно потрібно ввести до виразу (1.17). Для цього, очевидно, потрібно помножити ліву та праву частини виразу (1.17) на “-1”:

$$(-1) \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = (-1) \cdot 0 \quad (1.21)$$

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$-\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.22)$$

Увага ! Таким чином, очевидно, що у випадку, коли коефіцієнт **G**, (тобто права частина виразу для граничної умови Неймана) дорівнює нулю знак “мінус” не відіграє ролі в синтаксисі задання граничної умови Неймана, оскільки вирази:

$$-G = 0$$

та

$$G = 0$$

є ідентичними.

Коефіцієнт **G** у виразі (1.18) дорівнює нулю, тому дані на закладці **Coefficients** для граничної умови Неймана залишаються без зміни (табл. 1.7).

Увага ! Вирази (1.17) та (1.18) відрізняються від виразів (1.19) та (1.20) тільки тим, що похідна розрахункової величини **C** визначається по іншій просторовій координаті, тобто координаті **y**. Тому висновки, що стосуються виразів (1.17) та (1.18), є справедливими також для виразів (1.19) та (1.20).

Для границь 3 та 5 граничні умови задаються аналогічним чином.

22. Закрити вікно **Boundary Settings**, натиснувши **OK**.

Після введення граничних умов потрібно ввести константи, які містить рівняння, що описує задачу.

Константами в рівнянні (1.1) є коефіцієнт дифузії **D** та константа швидкості реакції **k**.

Для введення значень **D** та **k** в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно виконати наступну послідовність дій.

23. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.8.

Увага ! Слід звернути увагу на те, яким чином вводяться показники степеня величин в таблиці 1.8. Коефіцієнт дифузії, що дорівнює $1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ вводиться в COMSOL MULTIPHYSICS® у вигляді “1e – 7”. З цього випливає, що виразу:

$$10^{-7}$$

відповідає синтаксис:

$$e - 7$$

в COMSOL MULTIPHYSICS®.

Таблиця 1.8- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
D	$1e - 7 \text{ [m}^2/\text{s]}$	$(1e - 7) \text{ [m}^2/\text{s]}$	
k	$1e - 3 \text{ [1/s]}$	0.001 [1/s]	

Після введення констант в COMSOL MULTIPHYSICS® задача повністю визначена, оскільки заданим є саме рівняння, яке описує задачу, а також її граничні умови.

Наступним етапом на шляху до розв’язання задачі є розбиття геометричної області (в даній задачі це прямокутна ємність) на скінченні елементи. При розв’язанні задачі потрібно покрити геометричну область розв’язку сіткою, що складається зі скінченних елементів.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

24. Зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**.

25. На закладці **Global** перемикач поза вибором встановлений на **Predefined mesh sizes** з якістю сітки **Normal** в меню, що розгортається. Потрібно змінити ці настройки, в іншому випадку розв’язок буде достатньо наближеним.

26. Для цього в меню, що розгортається, потрібно змінити якість сітки з **Normal** на **Extremely fine**, тобто зменшити розміри скінченних елементів, з яких складається сітка, що покриває геометричну область розв’язку.

27. Послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

Після виконання зазначеної послідовності команд в робочій області графічного інтерфейсу користувача з’явиться прямокутник, покритий сіткою, яка сформована з трикутних елементів.

Увага ! На перший погляд здається, що чим дрібнішою є сітка, тим більш точним буде розв’язок задачі. Дійсно, так воно і є. Проте, використання дрібної сітки далеко не завжди дозволяє отримати розв’язок задачі, особливо це стосується задач гідрогазодинаміки. У більшості випадків не вдається домогтися потрібної збіжності розв’язку і COMSOL MULTIPHYSICS® видає повідомлення про помилку. В таких випадках розв’язок задачі починається з використання великих розмірів скінченних

елементів сітки з подальшим її подрібненням.

Після покриття геометричної області розв'язку сіткою, що складається зі скінченних елементів, можна перейти безпосередньо до розв'язання задачі.

При цьому потрібно виконати дію:

28. Зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

Отриманий розв'язок слід порівняти з розв'язком, наведеним в літературі [8].

1.2 Використання вбудованих модулів

Розглянемо розв'язання задачі, наведеної раніше в **прикладі 1.1**, за допомогою вбудованого модуля **Diffusion** (дифузія) програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®.

З огляду на те, що дана задача досить докладно розглянута вище, розглянемо тільки хід її розв'язання з використанням вбудованого модуля дифузії, сутність якого, в свою чергу, викладена в літературі [7]. Для цього необхідно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.

2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.

3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > Convection and Diffusion > Diffusion > Steady-state analysis**.

4. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **c** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **C**.

5. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

6. Зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **diffuziya_2**.

7. Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі входимо в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та висоти ємності:

Width: 0.3

Height: 0.1

8. Натиснути **OK**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача з'явиться прямокутник довжиною 0,3м і висотою 0,1м, який поза вибором має назву **R1**.

9. Зайти в пункт меню **Options > Zoom > Zoom Extents**.

За умовами пункту меню, для поділу нижньої границі ємності на дві частини потрібно виконати наступну дію:

10. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Point**. В полі **Coordinates** потрібно ввести координати розташування точки:

x: 0.2

y: 0

11. Натиснути **OK**.

Після виконання зазначених дій нижня границя ємності буде розділена відповідно до умов задачі. Бажано зберегти даний геометричний об'єкт у файлі **Diffusion_1.mph** для подальшого використання в роботі та при подальшому розв'язанні задач.

Увага ! Незбереження геометричного об'єкта призводить до повторного виконання дій, пов'язаних з його визначенням. Збережений результат у файлі можна експортувати з файлу **Diffusion_1.mph**.

Процедура експорту (перенесення) геометричного об'єкта з графічного інтерфейсу одного файлу в інший полягає в наступному:

а) потрібно відкрити файл **Diffusion_1.mph**. Відмітимо наступну особливість програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®: активним вікном або, іншими словами, поточним файлом може бути тільки один файл. Відкриття (запуск) іншого файлу призводить до закриття попереднього. Таким чином, при відкритті файлу **Diffusion_1.mph** відбувається закриття файлу **Diffusion_2.mph**.

б) зайти в пункт меню **File > Export > Analyzed Geometry to File**. У вікні потрібно вказати директорію, а також дати ім'я файлу з розширенням * .mphbin, в якому COMSOL MULTIPHYSICS® буде зберігати геометричні об'єкти (для даної задачі це прямокутник) з файлу **Diffusion_1.mph** для перенесення їх в файл **Diffusion_2.mph**.

Файлу, в якому COMSOL MULTIPHYSICS® буде зберігати геометричний об'єкт (прямокутник), можна присвоїти ім'я, наприклад, **Geometry_1.mphbin**.

в) натиснути кнопку **Save**.

г) відкрити файл **Diffusion_2.mph** (ця дія автоматично призведе до закриття файлу **Diffusion_1.mph**).

д) зайти в пункт меню **File > Import > CAD Data From File**. У вікні в полі **Look in** потрібно вказати директорію, в якій знаходиться файл **Geometry_1.mphbin**, після чого натиснути кнопку **Import**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача файлу **Diffusion_2.mph** з'явиться прямокутник, властивості якого аналогічні властивостям прямокутника, який відображено у файлі **Diffusion_1.mph**.

Для задання диференціального рівняння (1.1) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно виконати наступні кроки:

12. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

13. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

14. На закладці **C** в полі **Species 1** поза вибором коефіцієнтам **D** та **R**, як видно з таблиці 1.9, присвоєні наступні значення:

Таблиця 1.9- Вікно значень коефіцієнтів поза вибором

	Coefficient	Value / Expression	Unit	Description
☒	D (isotropic)	1	m ² /s	Diffusion coefficient
☐	D (anisotropic)	поле не активное	m ² /s	Diffusion coefficient
	R	0	mol/(m ³ · s)	Reaction rate

Увага ! Як видно з таблиці 1.9, COMSOL MULTIPHYSICS® поза вибором передбачає, що в ємності знаходиться ізотропна речовина оскільки перемикач

встановлено навпроти саме такої речовини (isotropic).

Ізотропними називаються речовини, фізичні властивості яких не залежать від напрямку, тобто фізичні властивості таких речовин є сталими в усьому об'ємі речовини. В переважній більшості випадків речовина розглядається як ізотропна.

Навпаки, анізотропними є такі речовини, фізичні властивості яких залежать від напрямку. В якості прикладів анізотропних речовин можна привести кристали та деревину.

У відповідності з рівнянням (1.1) значення коефіцієнтів в закладку **C** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.10:

Таблиця 1.10- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

	Coefficient	Value / Expression	Unit	Description
☒	D (isotropic)	– D	m^2/s	Diffusion coefficient
☐	D (anisotropic)	поле не активне	m^2/s	Diffusion coefficient
	R	$k * C$	$\text{mol}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$	Reaction rate

15. Натиснути **OK**.

16. Для задання граничних умов потрібно зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

17. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **C** в полі **Boundary conditions** в меню, що розгортається, встановити граничну умову **Concentration**. Потрібно ввести значення коефіцієнтів в закладку **C** так, як показано в таблиці 1.11.

Таблиця 1.11- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

	Coefficient	Value / Expression	Unit	Description
	C_0	20	mol/m^3	Concentration
	N_0	поле не активне	$\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	Inward flux
	k_c	поле не активне	m/s	Mass transfer coefficient
	c_b	поле не активне	mol/m^3	Bulk concentration

18. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **4**. Граничні умови на границі **4** задаються аналогічним чином з тією лише різницею, що концентрація компонента становить $C = 100 \text{ кг}/\text{м}^3$.

19. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. Потім, утримуючи клавішу **CTRL**, натиснути на цифри **3** та **5**. В результаті активними будуть границі 2, 3 та 5. На закладці **C** в полі **Boundary conditions** в меню, що розгортається, встановити граничну умову **Insulation / Symmetry**.

Після задання граничних умов потрібно нанести скінченноелементну сітку на область розв'язку. Порядок дій для проведення цієї операції наведений вище. Відмітимо, що якість сітки повинна бути **Extremely fine**.

20. Для отримання розв'язку задачі потрібно запустити розв'язувач.

Зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**. Отриманий розв'язок порівняйте з розв'язком, який було отримано раніше, а також з розв'язком, наведеним в літературі [8].

Для закріплення вивченого матеріалу розглянемо аналогічну задачу.

Finlayson в літературі [10] наводить приклад.

Приклад 1.2.

Прямокутна плита довжиною 20см та висотою 10см нагрівається з одного боку і охолоджується з іншого в стаціонарному режимі. Технологія нагрівання схематично наведена на рисунку 1.2. На границі 3 та границі 4 температура плити дорівнює відповідно $T = 2000^{\circ}\text{C}$ та $T = 60^{\circ}\text{C}$. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу, з якого виготовлена плита, дорівнює $\lambda = 400 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Потрібно знайти розподіл температури в плиті.

Процес теплообміну описується рівнянням:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.23)$$

де λ - коефіцієнт теплопровідності матеріалу, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ - похідні другого порядку температури по координатних

осях x та y відповідно.

Граничні умови задачі наведені у вигляді схеми на рисунку 1.2.

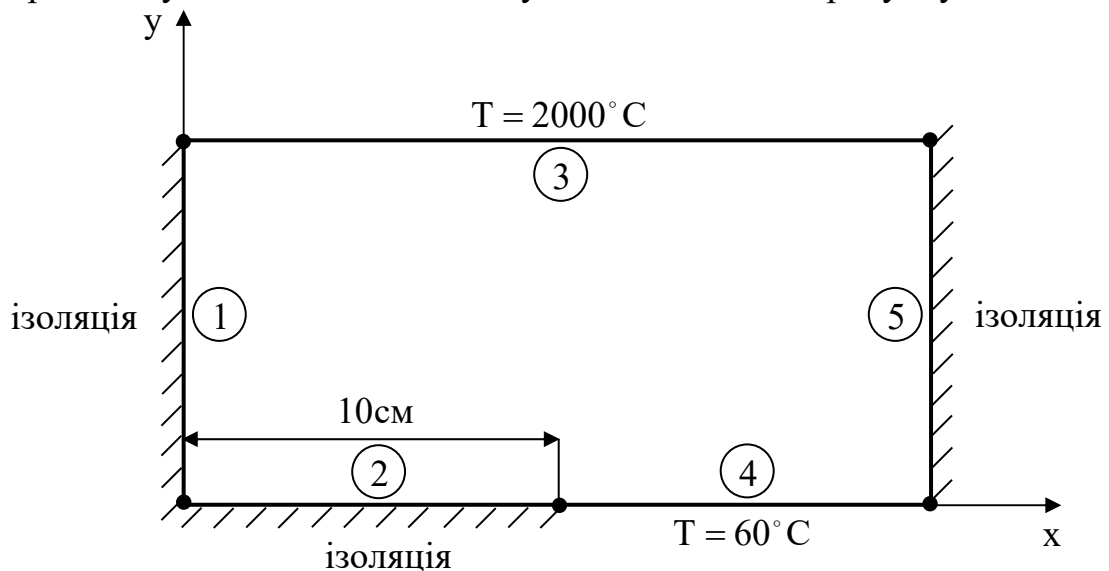


Рисунок 1.2 - Схема граничних умов задачі

На границях 3 та 4 задані значення температури плити, які дорівнюють 2000 та 60°C відповідно.

На границях 1, 2 та 5 задані умови ізоляції плити. Це означає, що границі 1, 2 та 5 плити покриті теплоізоляційним матеріалом і через ці границі плита не обмінюється теплотою із зовнішнім середовищем.

Таким чином, в даній задачі на границях 3 та 4 задані граничні умови

Діріхле, оскільки на цих границях відоме значення температури плити:

$$T = 2000^{\circ}\text{C} \quad (1.24)$$

$$T = 60^{\circ}\text{C} \quad (1.25)$$

Умова ізоляції на границях 1, 2 та 5 задається у вигляді граничних умов Неймана:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1.27)$$

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв'язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Stationary analysis**.
4. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **T**.
5. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Виберіть пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **teploprovodnost**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, потрібно:

6. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та висоти плити:

Width: 0.2

Height: 0.1

7. Натиснути **OK**.

В робочій області з'явиться прямокутник довжиною 0,2м та висотою 0,1м, який поза вибором має назву **R1**.

Для поділу нижньої границі ємності на дві частини потрібно виконати наступну дію:

8. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Point**. В полі **Coordinates** потрібно ввести координати розташування точки:

x: 0.1

y: 0

9. Натиснути **OK**.

10. Зайти в пункт меню **Options > Zoom > Zoom Extents**. Дана дія необхідна для того, щоб найкращим чином розташувати відображену фігуру в робочій області графічного інтерфейсу користувача.

Для задання диференціального рівняння (1.23) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно виконати наступні кроки:

11. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

12. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

13. На закладці **Coefficients** в полі **PDE Coefficients** поза вибором коефіцієнтам Γ , F , e_a та d_a , як видно з таблиці 1.12, присвоєні наступні значення:

Таблиця 1.12- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression	
Γ	$-T_x$	$-T_y$
F	1	
e_a	0	
d_a	1	

У відповідності з рівнянням (1.23) значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.13:

Таблиця 1.13- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression	
Γ	$-400 * T_x$	$-400 * T_y$
F	0	
e_a	0	
d_a	0	

14. Натиснути **ОК**.

Для задання граничних умов потрібно виконати наступні кроки:

15. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

16. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт G потрібно залишити без змін.

17. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection**, утримуючи клавішу CTRL, натиснути на цифри **1**, **2** та **5**. В результаті будуть виділені границі **1**, **2** та **5**. На цих границях також потрібно задати умови ізоляції плити, тобто граничну умову Неймана. Коефіцієнт G потрібно залишити без змін.

18. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **3**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.14:

Таблиця 1.14- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$2000 - T$

19. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **5**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач

поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.15:

Таблиця 1.15- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	60 – T

Після задання граничних умов потрібно накласти скінченноеlementну сітку на область розв'язку. Порядок дій для проведення цієї операції наведений вище. Зазначимо, що якість сітки повинна бути **Extremely fine**.

20. Для отримання розв'язку задачі потрібно запустити розв'язувач. Виберіть пункт меню **Solve > Solve Problem**. Отриманий розв'язок порівняйте з розв'язком, отриманим раніше, а також з розв'язком, наведеним в літературі [10].

1.3 Задання граничної умови Неймана при значеннях коефіцієнта **G** відмінних від нуля

В **Прикладі 1.1** та **прикладі 1.2** гранична умова Неймана задавалась в найпростішому вигляді:

$$-n \cdot \Gamma = 0 \quad (1.28)$$

Інакше кажучи, права частина рівності (коефіцієнт **G**) задавалась рівною нулю. Таке задання граничної умови вимагалось відповідно до умов задач, розглянутих у **прикладі 1.1** та **прикладі 1.2**. Нагадаємо, що за допомогою граничних умов Неймана в цих прикладах задавались відповідно умови непроникності стінки ємності та ізоляції поверхні плити.

Однак далеко не завжди права частина граничної умови Неймана буде дорівнювати нулю. Розглянемо в якості прикладу наступну задачу.

Приклад 1.3.

Розглянемо нестационарний процес нагрівання гранульованої магнетитової руди. Цей процес є першим етапом на шляху отримання магнетитових окотишів, які використовуються в металургії.

Сутність процесу нагрівання гранул магнетитової руди полягає в наступному. Гранули руди, що мають початкову температуру $t_{0mag} = 25^\circ \text{C}$, нагріваються гарячим газом. Температура газу постійна і дорівнює $t_{gaz} = 95^\circ \text{C}$. Тривалість процесу нагрівання становить 10с. Потрібно знайти розподіл температури за товщиною гранули магнетитової руди наприкінці процесу нагрівання.

Схема процесу нагрівання гранули магнетитової руди наведена на рисунку 1.3.

Рівняння, що описує нестационарний процес теплообміну, виглядає наступним чином:

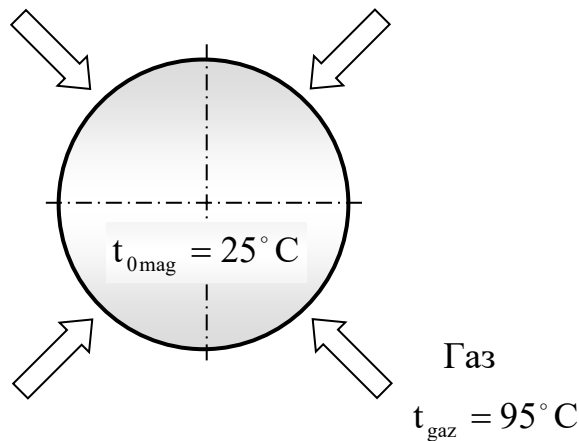


Рисунок 1.3 - Схематичне зображення процесу нагрівання гранули магнетитової руди

$$\rho_{\text{mag}} \cdot c_{p \text{ mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial \tau} - \lambda_{\text{mag}} \cdot \left(\frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.29)$$

де ρ_{mag} - густина гранули магнетитової руди, кг/м^3 ;

$c_{p \text{ mag}}$ - ізобарна теплоємність гранули магнетитової руди, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;

$\frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку температури гранули магнетитової руди за часом;

λ_{mag} - коефіцієнт теплопровідності гранули магнетитової руди, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;

$\frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial y^2}$ - похідні другого порядку температури гранули магнетитової руди по координатних осях x та y відповідно;

x, y - просторові координати, м ;

τ - час, с .

Значення наведених вище величин представлено в таблиці 1.16.

Таблиця 1.16- Вихідні дані до задачі

Позначення величини	Значення
Густина гранули магнетитової руди, ρ_{mag} , кг/м^3	2000
Ізобарна теплоємність гранули магнетитової руди, $c_{p \text{ mag}}$, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	300
Коефіцієнт теплопровідності магнетитової руди, λ_{mag} , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	0,5
Радіус гранули магнетитової руди, м	0,005
Тривалість процесу нагрівання, с	10
Початкова температура гранули магнетитової руди, $T_{0 \text{ mag}}$, К	298
Температура гарячого газу, T_{gaz} , К	368
Коефіцієнт тепловіддачі від гарячого газу до поверхні гранули магнетитової руди, α , $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$	1000

Граничні умови задачі наступні:

• на поверхні гранули:
$$-\lambda_{\text{mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial x} = \alpha \cdot (T_{\text{gaz}} - T_{\text{mag}}).$$

Увага ! Математичний сенс запису наведеної вище граничної умови полягає в наступному. Кількість теплоти, що передається гарячим газом за рахунок конвекції гранулі магнетитової руди (права частина рівняння), дорівнює кількості теплоти, що засвоюється самою гранулою шляхом процесу теплопровідності (ліва частина рівняння).

Дійсно, в правій частині граничної умови записана формула Ньютона - Ріхмана, яка описує конвективний процес теплообміну, а в лівій частині граничної умови записаний закон Фур'є (закон розповсюдження теплоти теплопровідністю).

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв'язання в COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time - dependent analysis**.
4. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **T_mag** (температура гранули магнетитової руди).
5. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Виберіть пункт меню **File > Save As**. В поле **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **nagrev_okatyshey**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі потрібно:

6. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Circle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення радіуса гранули магнетитової руди:

Radius: 0.005.

7. Натиснути **OK**.

Задаються теплофізичні властивості магнетитової руди та гарячого газу, які є константами.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

8. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.17.

Для задання диференціального рівняння (1.29) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно виконати наступні кроки:

9. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

10. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

У відповідності до рівняння (1.29) значення коефіцієнтів в закладку

Coefficients потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.18.

Таблиця 1.17- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
rho_mag	2000[kg/m ³]	2000	
lambda_mag	300[J/(kg * K)]	300	
lambda_mag	0.5[W/(m * K)]	0.5	
T0_mag	298[K]	298	
T_gaz	368[K]	368	
alfa	1000[W/(m ² * K)]	1000	

Таблиця 1.18- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Г	$-\lambda_{\text{mag}} * T_{\text{magx}} \quad \quad -\lambda_{\text{mag}} * T_{\text{magy}}$
F	0
e _a	0
d _a	$\rho_{\text{mag}} * c_{p_mag}$

11. Натиснути **OK**.

Розглянемо докладно коефіцієнти **Г**, **F**, **e_a** та **d_a** в таблиці 1.18, які описують рівняння (1.29) в тому вигляді, в якому його сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®.

Для цього порівнюємо рівняння (1.29) з рівнянням, яке наведено у вікні **Subdomain Settings** в полі **Equation**. При цьому рівняння (1.29) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{0} \cdot \frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial \tau^2} + \boxed{+ \rho_{\text{mag}} \cdot c_{p_mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial \tau} - \boxed{\lambda_{\text{mag}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial y} \right) \right] = \boxed{0} \\
 & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 & \boxed{e_a} \cdot \frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial \tau^2} + \boxed{d_a} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial \tau} + \nabla \cdot \boxed{\Gamma} = \boxed{F} \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

З порівняння рівняння (1.29) із записом цього ж рівняння в тому вигляді, в якому його сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, впливає наступне:

- похідна другого порядку розрахункової величини T_{mag} за часом в рівнянні (1.29) відсутня, тому коефіцієнт **e_a** в рівнянні (1.30) дорівнює нулю;
- коефіцієнт **d_a** в рівнянні (1.30) дорівнює добутку $\rho_{\text{mag}} \cdot c_{p_mag}$;
- перед коефіцієнтом **Г** вздовж координатних осей **x** та **y** в рівнянні (1.30) записується коефіцієнт теплопровідності λ_{mag} ;
- коефіцієнт **F** в рівнянні (1.30) дорівнює нулю, оскільки все рівняння (1.29), яке описує задачу, вже описано за допомогою коефіцієнтів

d_a та **Г**.

12. Для задання початкової температури гранули магнетитової руди у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** і ввести значення коефіцієнтів в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 1.19:

Таблиця 1.19- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

$T_{\text{mag}}(t_0)$	$T0_{\text{mag}}$
$T_{\text{mag}}(t_0)$	0

Для задання граничних умов потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

14. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection**, утримуючи клавішу CTRL, натиснути на цифри **1, 2, 3, 4**.

На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** потрібно ввести у відповідності з таблицею 1.20.

Увага ! Граничну умову Неймана для даної задачі, як уже згадувалось вище, можна представити таким чином:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{-\lambda_{\text{mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial x}} & = & \boxed{\alpha \cdot (T_{\text{gaz}} - T_{\text{mag}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{q_{\text{теплопровідність}}} & = & \boxed{q_{\text{конвекція}}} \end{array} \quad (1.31)$$

Для випадків нагрівання тіл, значення величини конвективного теплового потоку $q_{\text{конвекція}}$ має бути додатним, тобто різниця температур у формулі (1.31) повинна бути додатною. Оскільки $T_{\text{gaz}} \geq T_{\text{mag}}$ (гарячий газ може нагріти гранулу магнетитової руди до температури 95°С, але не більше) гранична умова задачі записана вірно - COMSOL MULTIPHYSICS® розуміє, що здійснюється нагрівання гранули гарячим газом.

При некоректному записі граничної умови нагрівання гранули у вигляді:

$$-\lambda_{\text{mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial x} = \alpha \cdot (T_{\text{mag}} - T_{\text{gaz}}) \quad (1.32)$$

задача матиме розв'язок, однак він не матиме сенсу, в чому неважко переконатися, задавши граничну умову (1.32).

Уявімо тепер, що умови задачі дещо змінилися. Нехай відбувається охолодження гранули магнетитової руди, яка має початкову температуру 95°С потоком холодного газу з постійною температурою 25°С. Решта умов задачі залишаються без зміни.

Для випадків охолодження тіл значення величини конвективного теплового потоку $q_{\text{конвекція}}$ повинно бути від'ємним, тобто граничні умови в цьому випадку мають виглядати наступним чином:

$$-\lambda_{\text{mag}} \cdot \frac{\partial T_{\text{mag}}}{\partial x} = \alpha \cdot (T_{\text{gaz}} - T_{\text{mag}}) \quad (1.33)$$

Величина конвективного теплового потоку $q_{\text{конвекція}}$ дійсно є від'ємною, оскільки $T_{\text{gaz}} \leq T_{\text{mag}}$ (холодний газ може охолодити гранулу магнетитової руди до температури 25°С, але не нижче).

Таблиця 1.20- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	$\alpha \cdot (T_{\text{gaz}} - T_{\text{mag}})$
R	поле не активне

15. Зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**.

16. На закладці **Global** перемикач поза вибором встановлений на **Predefined mesh sizes** з якістю сітки **Normal** в меню, що розгортається. Потрібно змінити ці налаштування. Для цього в меню, що розгортається, потрібно змінити якість сітки з **Normal** на **Extremely fine**. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

17. Зайти в пункт меню **Solve**. У списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

В полі **Time stepping** встановити параметр **Times:** 0:0.25:10.

18. Натиснути **OK**.

19. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

20. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Cross – Section Plot Parameters**. На закладці **General** в полі **Solutions to use**, утримуючи клавішу **CTRL**, вибрати наступні проміжки часу: 1, 5, 10с.

21. Перейти на закладку **Line / Extrusion**.

Переконайтесь, що в полі **y – axis data** в меню **Predefined quantities**, що розгортається, обрана температура гранули T_{mag} .

В полі **Cross–section line data** ввести значення перетину відповідно до таблиці 1.21:

Таблиця 1.21- Вікно присвоєння значень перетину

x0:	0	x1:	0.005
y0:	0	y1:	0
Line resolution			200

22. Натиснути **OK**.

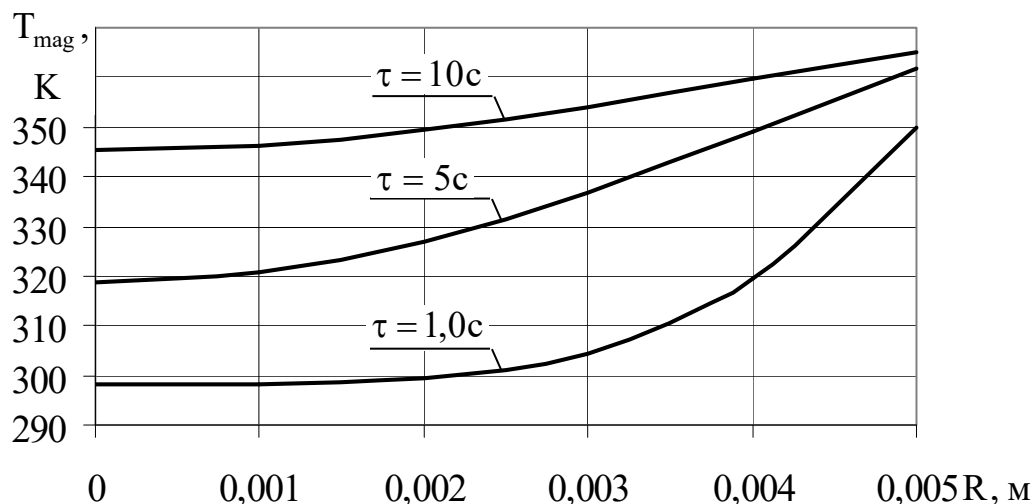


Рисунок 1.4 - Розподіл температури вздовж радіуса гранули

Порівняйте отриманий графік з розв'язком, наведеним на рисунку 1.4.

1.4 Задання граничної умови Неймана при відсутності коефіцієнта Γ в диференціальному рівнянні

В прикладах, наведених вище, розглядалось розв'язання диференціальних рівнянь, що містять похідну другого порядку розрахункової величини по одній з просторових координат.

В прикладі 1.1 такими складовими були:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \text{ та } \frac{\partial^2 C}{\partial y^2};$$

в прикладі 1.2:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ та } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

в прикладі 1.3:

$$\frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial x^2} \text{ та } \frac{\partial^2 T_{\text{mag}}}{\partial y^2}.$$

В наведених прикладах, як мінімум, на одній з границь задавалась гранична умова Неймана, яка в загальному вигляді записується таким чином:

$$-n \cdot \Gamma = 0 \quad (1.34)$$

Знову зазначимо, що гранична умова Неймана формується на основі коефіцієнта Γ .

В свою чергу, коефіцієнт Γ формується на основі тих доданків диференціального рівняння, які містять похідну другого порядку розрахункової величини по просторових координатах.

Таким чином, якщо диференціальне рівняння не містить похідної другого порядку розрахункової величини хоча б по одній з просторових координат, коефіцієнт Γ буде дорівнювати нулю.

Однак якщо для такого диференціального рівняння в якості граничної умови задана гранична умова Неймана (формула (1.34)), вона, очевидно, буде виглядати наступним чином:

$$-n \cdot 0 = 0 \quad (1.35)$$

Або, нехтуючи позначенням нормалі n до границі області розв'язку:

$$0 = 0 \quad (1.36)$$

COMSOL MULTIPHYSICS® не сприймає такого запису граничної умови Неймана і видає помилку при розв'язанні задачі.

Задання граничної умови Неймана для диференціального рівняння, що не містить похідної другого порядку розрахункової величини по просторових координатах, розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 1.4.

В процесі господарської діяльності найбільша питома вага витрат

припадає на паливо. Витрати на енергоносії в промислових теплотехнічних агрегатах в процесі виробництва металургійної продукції займають більше ніж половину всіх витрат.

Так, в сучасних умовах експлуатації промислових печей різних типів режими їх роботи є нестабільними, що пов'язано з необхідністю зміни потужності печей. Такі режими значно погіршують економічність роботи теплотехнічних установок і призводять до перевитрат енергоносіїв.

Одним з найбільш ефективних засобів зниження витрати палива в печах є нагрівання повітря, що використовується для забезпечення теплового режиму, продуктами згоряння палива.

Для нагрівання повітря використовуються компактні регенеративні теплообмінники, що дозволяє знизити витрати палива на 30...50%. Компактні регенеративні теплообмінники з кульковою насадкою мають питому поверхню нагрівання в 10...15 разів більшу, ніж теплообмінники традиційних конструкцій. Це дозволяє значно зменшити габаритні розміри теплообмінників та забезпечити повернення в піч до 90% теплоти продуктів згоряння палива.

Сутність роботи компактного регенеративного теплообмінника полягає в наступному: гарячий газ з початковою температурою $t_{\text{gaz}_0} = 1100^\circ\text{C}$, надходить в регенеративний теплообмінник з початковою температурою $t_{k_0} = 20^\circ\text{C}$, де нагріває насадку теплообмінника у вигляді кульок. Швидкість руху продуктів згоряння палива в каналах між елементами насадки регенератора (між кульками) становить $u = 0,53\text{ м/с}$. Таким чином, температура продуктів згоряння палива знижується, а температура насадки регенератора підвищується.

Необхідно знайти розподіл температури згоряння палива та насадки за висотою регенеративного теплообмінника після $\tau = 180\text{с}$ нагрівання.

Схема процесу нагрівання холодної насадки регенеративного теплообмінника гарячим газом наведена на рисунку 1.5.

За своєю сутністю задача є одновимірною, оскільки передбачається рівномірний розподіл гарячого газу та насадки у вигляді кульок за шириною регенеративного теплообмінника.

Математична модель роботи компактного регенеративного теплообмінника з кульковою насадкою складається з наступних диференціальних рівнянь теплообміну, наведену Шевченко в літературі [11]:

$$c_{\text{gaz}} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial t_{\text{gaz}}}{\partial \tau} + c_{\text{gaz}} \cdot \varepsilon \cdot u \cdot \frac{\partial t_{\text{gaz}}}{\partial y} = -\frac{\alpha_v}{m} \cdot (t_{\text{gaz}} - t_k) \quad (1.37)$$

$$c_k \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \frac{\alpha_v}{m} \cdot (t_{\text{gaz}} - t_k) \quad (1.38)$$

де c_{gaz} - питома об'ємна теплоємність гарячого газу, що нагріває насадку регенеративного теплообмінника, Дж/(м³·°C);

ε - пористість шару (пористість кулькової насадки регенеративного

теплообмінника);

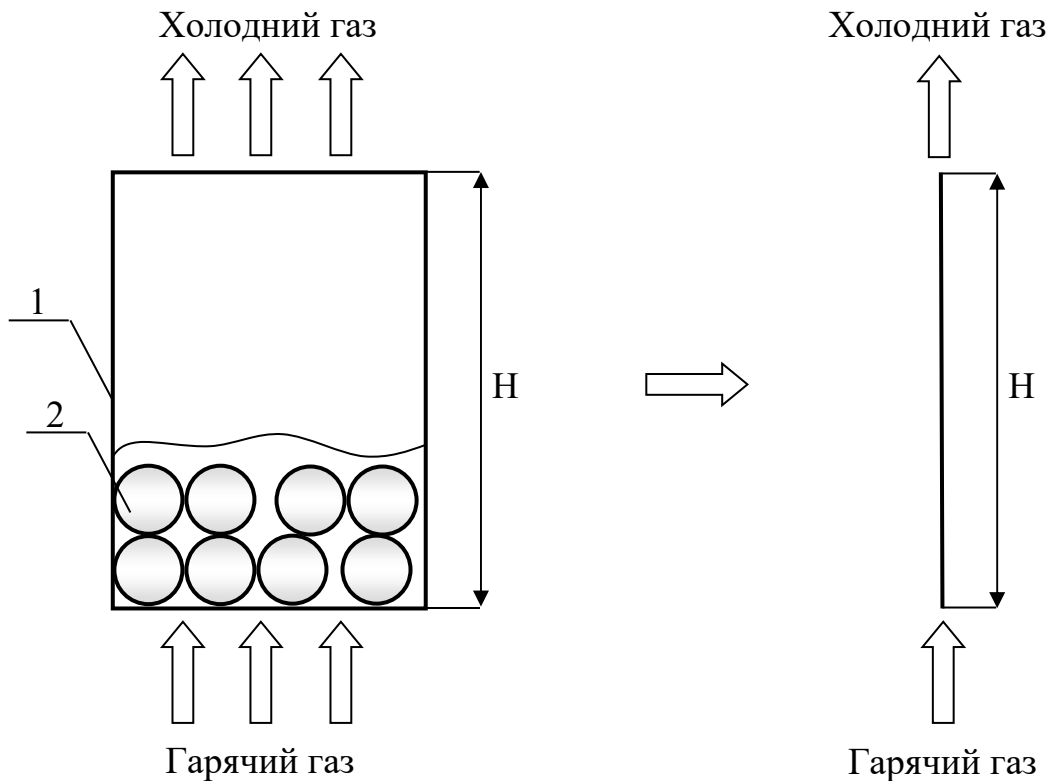


Рисунок 1.5 - Схема процесу нагрівання холодної насадки регенератора гарячими продуктами згоряння палива та переходу до одновимірної моделі

1- корпус регенеративного теплообмінника;

2- насадка регенеративного теплообмінника у вигляді кульок.

$\frac{\partial t_{\text{gaz}}}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку температури гарячого (охладжувального) газу за часом;

u - швидкість гарячого газу (холодного повітря) в каналах між елементами насадки регенеративного теплообмінника (між кульками), м/с;

$\frac{\partial t_{\text{gaz}}}{\partial y}$ - похідна першого порядку температури гарячого (охладжувального) газу по координатній осі x ;

α_v - об'ємний коефіцієнт тепловіддачі від гарячого газу до холодної насадки регенеративного теплообмінника (від гарячої насадки регенеративного теплообмінника до холодного повітря), Вт/(м³·°C);

m - коефіцієнт масивності елементів насадки (кульок);

t_{gaz} - температура гарячого (охладжувального) газу, °C;

t_k - температура холодної (гарячої) насадки регенеративного теплообмінника, °C;

c_k - питома об'ємна теплоємність матеріалу насадки (кульок) регенеративного теплообмінника, Дж/(м³·°C);

τ - тривалість димового періоду (тривалість роботи регенеративного теплообмінника в режимі нагрівання холодної насадки гарячим газом), с.

Конструктивні та теплотехнологічні характеристики регенеративного теплообмінника наведені в таблиці 1.22.

Увага ! Оскільки задача становить собою систему, що складається з двох рівнянь, які описують зміну температури газу та насадки за висотою регенеративного теплообмінника, необхідна наявність граничних умов, як для газового потоку, так і для кулькової насадки.

Таблиця 1.22- Конструктивні та теплотехнологічні характеристики регенеративного теплообмінника

Позначки	Значення
Висота регенеративного теплообмінника, Н, м	0,75
Тривалість димового періоду, τ , с	180
Швидкість гарячого газу (холодного повітря) в каналах між елементами насадки регенеративного теплообмінника (між кульками), u , м/с	0,53
Початкова температура гарячого газу, t_{gaz_0} , °C	1100
Початкова температура кулькової насадки регенеративного теплообмінника, t_{k_0} , °C	20
Порозність шару (порозність кулькової насадки регенеративного теплообмінника), ϵ	0,47
Об'ємний коефіцієнт тепловіддачі від гарячого газу до холодної насадки регенеративного теплообмінника (від гарячої насадки регенеративного теплообмінника до холодного повітря), α_v , $\frac{Вт}{м^3 \cdot ^\circ C}$	5000
Питома об'ємна теплоємність гарячого газу, що нагріває насадку регенеративного теплообмінника, c_{gaz} , $\frac{Дж}{м^3 \cdot ^\circ C}$	1400
Питома об'ємна теплоємність матеріалу насадки (кульок) регенеративного теплообмінника, c_k , $\frac{Дж}{м^3 \cdot ^\circ C}$	57000
Коефіцієнт масивності елементів насадки (кульок), m	2

Граничні умови задачі для газу:

- на вході газу в регенеративний теплообмінник задається гранична умова Діріхле: $t_{gaz} = t_{gaz_0}$;

- на виході газу з регенеративного теплообмінника задається гранична умова Неймана: $\frac{\partial t_{gaz}}{\partial y} = 0$ оскільки точне значення

температури газу на виході з регенеративного теплообмінника є невідомим.

Граничні умови задачі для кулькової насадки регенеративного теплообмінника:

- оскільки точні значення температури нижнього шару насадки (на вході в теплообмінник) і верхнього шару насадки (на виході з теплообмінника) невідомі, на вході і виході з теплообмінника задаються граничні умови Неймана:

$$\frac{\partial t_k}{\partial y} = 0.$$

Схема граничних умов наведена на рисунку 1.6.

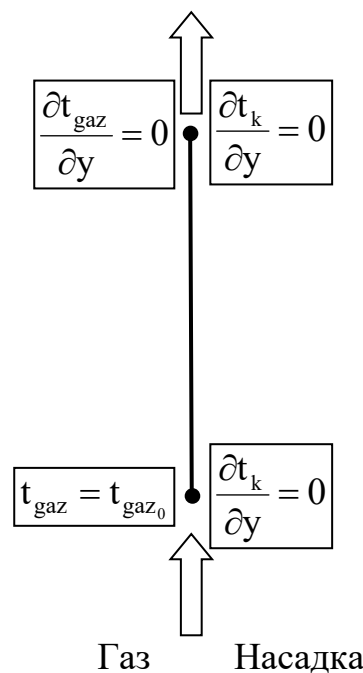


Рисунок 1.6 - Схема граничних умов до задачі

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв’язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
3. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.
4. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time - dependent analysis**.
5. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **t_gaz** (температура газу).
6. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.
7. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time - dependent analysis**.
8. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **t_k** (температура кулькової

насадки регенеративного теплообмінника).

9. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.

10. Натиснути **OK**.

Виконання перелічених вище дій призводить до формування системи, що складається з двох диференціальних рівнянь відповідно до кількості невідомих величин. В даній задачі невідомими величинами є температура газу **t_gaz** та температура кулькової насадки регенеративного теплообмінника **t_k**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **regenerativnyy_teploobmennik**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі потрібно:

11. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення висоти регенератора:

x: 0 0.75 (через пробіл).

12. Натиснути **OK**.

Задамо теплофізичні властивості газу та насадки регенератора, які є сталими (константами).

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано у вікні таблиці 1.23 за умовами даної програми.

Таблиця 1.23- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
u	0.53[m/s]	0.53	
t0_gaz	1100[deg C]	1100	
t0_k	20[deg C]	20	
epsilon	0.47	0.47	
alfa_v	5000[W/(m^3 * deg C)]	5000	
c_gaz	1400[J/(m^3 * deg C)]	1400	
c_k	57000[J/(m^3 * deg C)]	57000	
m	2	2	

14. Зайти в пункт меню **Multiphysics**. Переконавшись, що перемикач встановлено навпроти першого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **t_gaz**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
● 1 PDE, General Form (g) 2 PDE, General Form (g2)

Для задання диференціального рівняння (1.37) потрібно виконати наступні кроки.

15. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

16. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

17. На закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** поза вибором коефіцієнтам Γ , F , e_a и d_a , як видно з таблиці 1.24, присвоєні наступні значення.

Таблиця 1.24- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression
Γ	$-t_gazx$
F	1
e_a	0
d_a	1

Дотримуючись формальної логіки, коефіцієнт Γ повинен дорівнювати нулю, оскільки в рівнянні (1.37) відсутня похідна другого порядку розрахункової величини t_gaz по просторовій координаті. Проте, насправді коефіцієнт Γ в рівнянні (1.37) для умов даної задачі не дорівнює нулю.

Сформулюємо наступне правило.

Увага ! При відсутності в диференціальному рівнянні похідної другого порядку розрахункової величини по просторовим координатам, але при заданні хоча б на одній з границь області розв'язку задачі граничної умови Неймана, коефіцієнт Γ потрібно залишити таким, яким він є заданим поза вибором у COMSOL MULTIPHYSICS®.

Відповідно до цього правила значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** для рівняння (1.37) потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.25:

Таблиця 1.25- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	$-t_gazx$
F	$-(\alpha_v/m)*(t_gaz - t_k) - c_gaz * \epsilon * u * t_gazx$
e_a	0
d_a	$c_gaz * \epsilon$

18. Для задання початкової температури газу у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** і ввести значення коефіцієнтів в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 1.26:

Таблиця 1.26- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

$T_gaz(t_0)$	$t0_gaz$
$T_gazt(t_0)$	0

19. Натиснути **ОК**.

Для задання граничних умов рівняння (1.37) потрібно виконати наступні кроки:

20. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

21. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Значення коефіцієнтів **G** та **R** ввести у відповідності до таблиці 1.27.

Таблиця 1.27- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$t_{0_gaz} - t_gaz$

Увага ! Нагадаємо, що **t_gaz** становить собою розрахункову величину, тобто розрахункову температуру газу по висоті регенеративного теплообмінника, а **t0_gaz** становить собою температуру газу на вході в регенеративний теплообмінник. Значення цієї величини вже задано в меню **Options > Constants**.

22. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** залишити без зміни.

23. Натиснути **ОК**.

Виконання цього кроку завершує задання рівняння (1.37), а також початкових та граничних умов до нього в COMSOL MULTIPHYSICS®. Тепер можна перейти до введення в COMSOL MULTIPHYSICS® рівняння (1.38).

Для цього потрібно зайти в пункт меню **Multiphysics**. Встановити перемикач навпроти другого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **t_k**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
1 PDE, General Form (g)
● 2 PDE, General Form (g2)

Для задання диференціального рівняння (1.38) потрібно виконати наступні кроки.

24. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

25. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

26. На закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** поза вибором коефіцієнтам **G**, **F**, **e_a** и **d_a** (табл. 1.28) присвоєні наступні значення.

Знову зауважимо, що, дотримуючись формальної логіки, коефіцієнт **G** повинен дорівнювати нулю, оскільки в рівнянні (1.37) відсутня похідна другого порядкुरозрахункової величини **t_gaz** по просторовій координаті. Проте, насправді коефіцієнт **G** в рівнянні (1.38) для умов даної задачі не

дорівнює нулю, оскільки на границі 2 для рівняння (1.38) задано граничну умову Неймана. Тому значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** для рівняння (1.38) потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.29.

Таблиця 1.28- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Coefficient	Value / Expression
Γ	$-t_{kx}$
F	1
e_a	0
d_a	1

Таблиця 1.29- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	$-t_{kx}$
F	$(\alpha_v/m) \cdot (t_{gaz} - t_k)$
e_a	0
d_a	$c_k \cdot (1 - \epsilon)$

27. Для задання початкової температури газу у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** і ввести значення коефіцієнтів в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 1.30.

Таблиця 1.30- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

$T_{sh}(t_0)$	t_{0k}
$T_{sht}(t_0)$	0

28. Натиснути **OK**.

Для задання граничних умов рівняння (1.38) потрібно виконати наступні кроки:

29. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

30. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection**, утримуючи клавішу CTRL, натиснути на цифри **1** та **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** потрібно залишити без змін.

31. Натиснути **OK**.

Виконанням цієї дії завершується задання рівняння (1.38), а також початкових та граничних умов до нього в COMSOL MULTIPHYSICS®.

32. Для генерації сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**. На закладці **Global** в полі **Maximum element size** ввести значення $1e-3$. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

33. Зайти в пункт меню **Solve**. У списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

В полі **Time stepping** встановити параметр **Times:** 0:1:180 відповідно до тривалості димового періоду (табл. 1.22).

34. Натиснути **OK**.

35. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve**

Problem.

36. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Plot Parameters**. Переконайтесь, що на закладці **Line** в меню, що розгортається, **Predefined quantities**: обрана температура газу **t_gaz**. На закладці **Animate** в полі **Solutions to use** в меню, що розгортається, **Select via** вибрати **Interpolated times**. В полі **Times**: ввести 0:18:180.

37. Натиснути **Start Animation**. COMSOL® Movie Player відобразить динаміку зміни температури газу за висотою регенератора протягом димового періоду роботи регенеративного теплообмінника.

Для візуалізації зміни температури насадки регенеративного теплообмінника потрібно повторити кроки, які описано в пунктах 36 і 37, змінивши попередньо **t_gaz** на **t_k**.

Для закріплення вивченого матеріалу розглянемо аналогічну задачу.

Приклад 1.5.

Тепловий потік крізь стінку можна збільшити шляхом оребрення її поверхні (рис. 1.7). Ребристі поверхні нагрівання використовуються в економайзерах парових котлів, в радіаторах парових та водяних систем опалення, електротрансформаторах, двигунах внутрішнього згоряння з повітряним охолодженням циліндрів, авіаційних двигунах тощо.

Процес теплообміну в ребрі описується рівнянням [12]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - m^2 \cdot T = 0 \quad (1.39)$$

де $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ - похідна другого порядку температури ребра;

T - температура ребра, К;

x - поздовжня координата, м;

m - коефіцієнт.

Довжина ребра $L = 0,1\text{м}$.

Коефіцієнт $m = 3,0$.

Граничні умови задачі наступні:

- при $L = 0$: $T = 373\text{К}$;

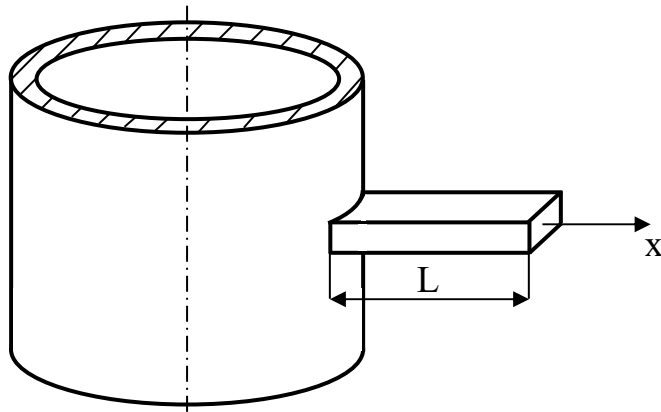


Рисунок 1.7 - Схема до задачі оребрення трубки економайзера

- при $L = 0,1\text{м}$: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

Потрібно знайти розподіл температури в ребрі при стаціонарному процесі теплообміну.

При розв'язанні цієї задачі виконується наступна послідовність дій:

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Stationary analysis**.
4. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** потрібно написати **T**.
5. Натиснути **OK**.
6. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **raspredeleniye_temperatury**.
7. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.
У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення довжини ребра:
 $x: 0 \quad 0.1$ (через пробіл).
8. Натиснути **OK**.
9. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.
10. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.
У відповідності з рівнянням (1.39) значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.31:

Таблиця 1.31- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	T_x
F	$(m^2) * T$
c_a	0
d_a	0

11. Натиснути **OK**.
Для задання граничних умов потрібно виконати наступні кроки:
12. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.
13. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**).
Значення коефіцієнтів **G** і **R** потрібно ввести у відповідності до таблиці 1.32:

Таблиця 1.32- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$373 - T$

14. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити

перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** потрібно залишити без зміни.

15. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано в таблиці 1.33.

Таблиця 1.33- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
m	3.0	3.0	

15. Зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**. На закладці **Global** в полі **Maximum element size** ввести значення $1e-4$. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

16. Для розв'язання задачі потрібно зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

17. Зайти в пункт меню **Postprocessing > Domain Plot Parameters**. На закладці **Line / Extrusion** в полі **y - axis data** в меню **Expression** ввести вираз **T-273**.

18. Натиснути **OK**.

Отриманий розв'язок відображено на рисунку 1.8.

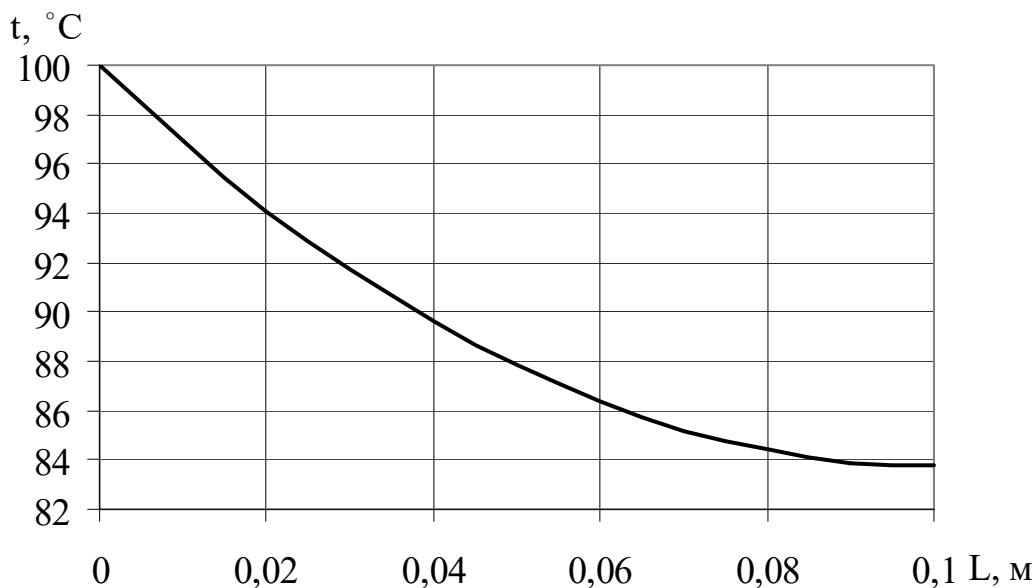


Рисунок 1.8 - Розподіл температури вздовж ребра трубки теплообмінника

Порівняйте його з розв'язком, наведеним в літературі [12].

2 ОСНОВИ СИНТАКСИСУ ЗАДАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В COMSOL MULTIPHYSICS®

2.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання стаціонарних задач

Finlayson в роботі [10] розглядає наступну задачу.

Приклад 2.1.

Процеси теплообміну та дифузії в тілі сферичної форми радіусом 1,0м (рис. 2.1) описуються наступними диференціальними рівняннями:

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \varphi^2 \cdot R \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\beta \cdot \varphi^2 \cdot R \quad (2.2)$$

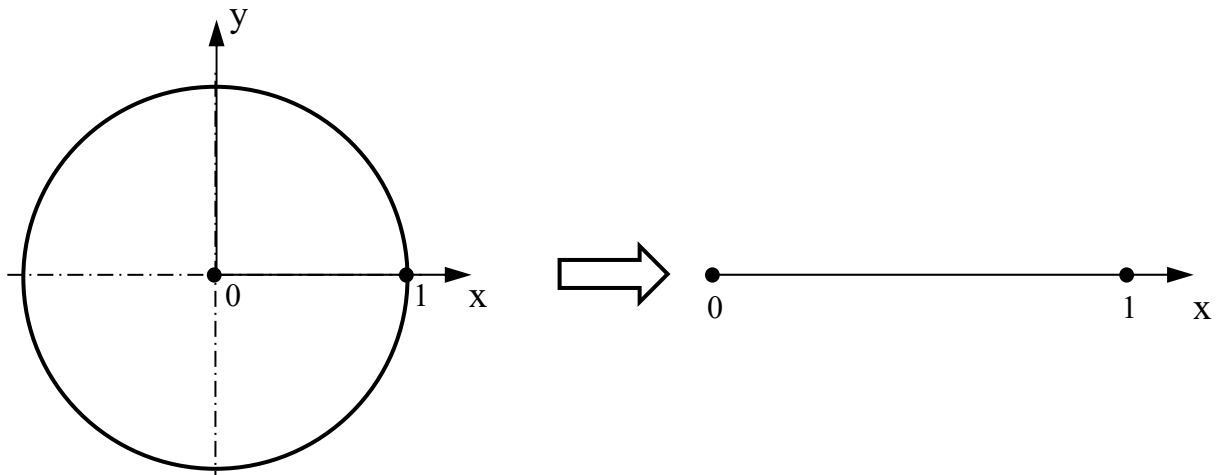


Рисунок 2.1- Схема переходу до одновимірної моделі при розв'язанні задачі теплообміну та дифузії в тілі сферичної форми

де $\frac{d^2C}{dx^2}$ - похідна другого порядку масової концентрації речовини по координатній осі x ;

φ, β - константи;

$\frac{d^2T}{dx^2}$ - похідна другого порядку температури.

Незважаючи на те, що тіло сферичної форми є двовимірним, за своєю сутністю, задача є одновимірною, оскільки передбачається рівномірний розподіл концентрації речовини та температури вздовж радіуса тіла сферичної форми.

В формулах (2.1) и (2.2) змінна R визначається за наступним виразом:

$$R = C \cdot e^{\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{T}\right)} \quad (2.3)$$

де C - масова концентрація речовини, $\text{кг}/\text{м}^3$;

γ - константа;

T - температура, К.

Значення наведених вище величин представлено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1- Значення констант

Позначення констант	Значення
Коефіцієнт ϕ , (ϕ)	1,1
Коефіцієнт γ , (γ)	30
Коефіцієнт β , (β)	0,01; 0,03; 0,07; 0,10; 0,12; 0,15

Увага ! Оскільки задача становить собою систему, що складається з двох рівнянь, які описують зміну концентрації та температури в тілі сферичної форми, необхідна наявність граничних умов як для концентрації, так і для температури речовини в тілі сферичної форми.

Граничні умови задачі для концентрації речовини:

- в центрі тіла сферичної форми задається гранична умова Неймана:

$\frac{dC}{dx} = 0$ оскільки точне значення концентрації речовини в центрі тіла сферичної форми є невідомим;

- на поверхні тіла сферичної форми задається гранична умова Діріхле: $C = 1$.

Граничні умови задачі для температури:

- в центрі тіла сферичної форми задається гранична умова Неймана:

$\frac{dT}{dx} = 0$ оскільки точне значення температури речовини в центрі тіла сферичної форми є невідомим;

- на поверхні тіла сферичної форми задається гранична умова Діріхле: $T = 1$.

Схема граничних умов наведена на рисунку 2.2.

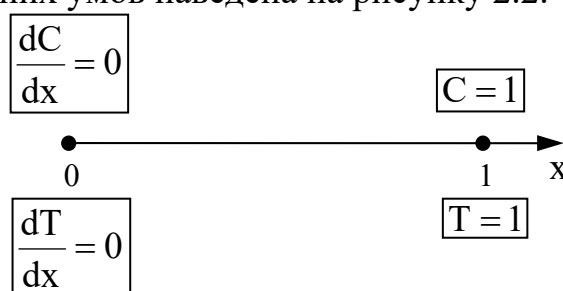


Рисунок 2.2 - Схема граничних умов задачі

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв'язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
3. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у

правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.

4. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Stationary analysis**.

5. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **C** (концентрація речовини).

6. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.

7. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Stationary analysis**.

8. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **T** (температура речовини).

9. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.

10. Натиснути **OK**.

Виконання перелічених вище дій призводить до формування системи, що складається з двох диференціальних рівнянь відповідно до кількості невідомих величин. В даній задачі невідомими величинами є концентрація **C** та температура **T** речовини.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **diffuziya_v_sfere**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, потрібно:

11. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення радіуса тіла сферичної форми:

x: 0 1.0 (через пробіл).

12. Натиснути **OK**.

Задамо константи ϕ , γ , β .

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести згідно з таблицею 2.2:

Таблиця 2.2- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
phi	1.1	1.1	
gamma	30	30	

Задамо змінну **R**, яка, потрібно зазначити, не є однією з розрахункових функцій, але залежить від них. Для цього потрібно виконати наступні кроки:

14. Зайти в пункт меню **Options > Expressions > Subdomain Expressions**.

15. У вікні в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

Значення коефіцієнтів в закладку **Subdomain Expressions** потрібно

ввести так, як показано в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Unit
R	$C * \exp(\text{gamma} * (1 - 1/T))$	[]

Увага ! Для задання змінної **R** не можна використовувати поле **Constants** в меню **Options**, а також поле **Scalar Expressions** в меню **Options > Expressions**, оскільки вираз (2.3), який визначає змінну **R**, містить розрахункові, тобто невідомі функції **C** та **T**. Для задання виразів чи змінних, які містять розрахункові функції, потрібно користуватися закладкою **Subdomain Expressions** в меню **Options > Expressions**.

16. Зайти в пункт меню **Multiphysics**. Переконаватися, що перемикач встановлено навпроти першого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **C**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
• 1 PDE, General Form (g) 2 PDE, General Form (g2)

Для задання диференціального рівняння (2.1) потрібно виконати наступні кроки.

17. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

18. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

19. На закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** поза вибором коефіцієнтам **Г**, **F**, **e_a** та **d_a**, як видно з таблиці 2.4, присвоєні наступні значення.

Таблиця 2.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Г	$-Cx$
F	1
e _a	0
d _a	1

На відміну від наведених раніше прикладів, сформульованих у вигляді ДРЧП, рівняння (2.1) являє собою звичайне диференціальне рівняння (ЗДР). У зв'язку з цим потрібно приділити увагу основам синтаксису задання ЗДР в COMSOL MULTIPHYSICS®.

Принципи задання ЗДР, в яких присутня похідна другого порядку розрахункової величини по просторовим координатам, в цілому подібні до принципів задання ДРЧП.

20. У вікні **Subdomain Settings** в полі **Equation** наведено диференціальне рівняння в тому вигляді, в якому його сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$\nabla \cdot \Gamma = F \quad (2.4)$$

В рівнянні (2.4) знак ∇ - це оператор Гамільтона, який

використовується тільки для запису ДРЧП.

В даній задачі, яка є одновимірною, формулу (2.4) можна представити наступним чином:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = F \quad (2.5)$$

Коефіцієнт Γ в формулі (2.5) є від'ємною похідною першого порядку (тобто похідною зі знаком “мінус”) розрахункової величини по координатних осях, що відображено на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** (табл. 2.4).

Рівняння (2.5) в такому випадку отримує наступний вигляд:

$$\frac{d\left(-\frac{\partial C}{\partial x}\right)}{dx} = F \quad (2.6)$$

Якщо винести знак “мінус” за межі операторів диференціювання вираз (2.6) матиме наступний вигляд:

$$-\frac{d^2 C}{dx^2} = F \quad (2.7)$$

З порівняння виразів (2.4) та (2.7) випливає, що для одновимірної задачі символ $\nabla \cdot \Gamma$ COMSOL MULTIPHYSICS® поза вибором представляє як від'ємну похідну другого порядку розрахункової величини по координатній осі x .

Тепер сформулюємо правила введення або, іншими словами, коректного запису диференціального рівняння за допомогою коефіцієнтів Γ , F , e_a та d_a :

1) Значення коефіцієнтів e_a та d_a дорівнюють нулю, оскільки в рівнянні (2.4) або його розгорнутому аналогу - рівнянні (2.7) ці коефіцієнти відсутні.

Увага! Коефіцієнти e_a та d_a не завжди дорівнюватимуть нулю, тобто не завжди будуть відсутніми в диференціальному рівнянні (2.4).

Так, наприклад, у випадку розв'язання нестационарної задачі $e_a = 0$, $d_a = 1$, тобто коефіцієнт e_a буде відсутнім, а коефіцієнт d_a буде присутнім в рівнянні (2.4). В рамках даного посібника подібна задача буде розглянута згодом.

У разі розв'язання так званого хвильового рівняння $e_a = 1$ та $d_a = 1$, тобто обидва коефіцієнти будуть присутніми в рівнянні.

2) Похідну другого порядку розрахункової величини в рівнянні (2.1) потрібно перенести в ліву частину рівняння, оскільки коефіцієнт Γ записаний в лівій частині рівняння (2.4).

Увага! В рівнянні (2.1) похідну другого порядку вже перенесено в ліву частину рівняння.

Після цього потрібно перейти на закладку **Coefficients** і записати в поле Γ похідну другого порядку розрахункової величини.

3) У полі Γ вирази для похідних першого порядку залишаються без зміни тоді, коли:

- в лівій частині рівняння, яке описує задачу, похідні другого порядку розрахункової величини перебувають зі знаком "мінус";

- числові коефіцієнти при цих похідних дорівнюють одиниці.

В даній задачі в рівнянні (2.1) похідна другого порядку розрахункової величини по осі x знаходиться в лівій частині рівняння зі знаком “плюс”, тому знак “мінус” перед виразом похідної по осі x слід прибрати. Числовий коефіцієнт при цих похідних дорівнює одиниці.

Таким чином, на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** коефіцієнт Γ потрібно ввести наступним чином (табл. 2.5):

Таблиця 2.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	C_x

4) Решта членів в рівнянні (2.1) становлять собою коефіцієнт F в рівнянні (2.4).

Тому решту членів в рівнянні (2.1) потрібно перенести в праву частину рівняння, оскільки коефіцієнт F знаходиться в правій частині рівняння (2.4).

У відповідності до рівняння (2.1) коефіцієнт F на закладці **Coefficients** в полі **PDE coefficients** буде виглядати наступним чином (табл. 2.6):

Таблиця 2.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
F	$R * (\phi^2)$

Після задання диференціального рівняння в загальному вигляді закладка **Coefficients** меню **Physics** > **Subdomain Settings** повинна виглядати наступним чином (табл. 2.7):

Таблиця 2.7- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	C_x
F	$R * (\phi^2)$
e_a	0
d_a	0

Задання другого ЗДР, яке описує задачу, тобто рівняння (2.2), аналогічно заданню рівняння (2.1). Структура обох рівнянь однакова: присутня похідна другого порядку розрахункової величини по просторовій координаті, а також доданок, в якому відсутні похідні розрахункової величини.

21. Для задання рівняння (2.2) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно зайти в пункт меню **Multiphysics** і встановити перемикач навпроти другого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції T), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
1 PDE, General Form (g)
● 2 PDE, General Form (g2)

Після задання диференціального рівняння (2.2) в загальному вигляді

закладка **Coefficients** меню **Physics** > **Subdomain Settings** повинна виглядати наступним чином (табл. 2.8):

Таблиця 2.8- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	T_x
F	$-R * \beta * (\phi^2)$
e_a	0
d_a	0

Закладка **Init** в меню **Physics** > **Subdomain Settings** призначена для задання початкових умов при розв'язанні нестационарної задачі. Оскільки задача становить собою стаціонарні процеси дифузії та теплообміну, початкові значення концентрації речовини та температури дорівнюють нулю разом з їх похідними за часом. Таким чином, дотримуючись **прикладу 1.1**, для стаціонарного процесу немає потреби задавати значення розрахункових величин в початковий момент часу. Однак, при розв'язанні даної задачі COMSOL MULTIPHYSICS® буде зупиняти розрахунок і повідомляти про помилку синтаксису при заданні початкових умов. Причина помилки та порядок її усунення будуть розглянуті згодом.

Знову відзначимо, що дані, які розміщено в закладках **Element** та **Weak**, в переважній більшості випадків залишаються без змін.

Наступним кроком після введення диференціальних рівнянь в COMSOL MULTIPHYSICS® є задання граничних умов задачі.

22. Для задання граничних умов рівняння (2.1) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно зайти в пункт меню **Multiphysics** і встановити перемикач навпроти першого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **C**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
● 1 PDE, General Form (g) 2 PDE, General Form (g2)

Для задання граничної умови в центрі тіла сферичної форми потрібно:

23. Зайти в пункт меню **Physics** > **Boundary Settings**.

24. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** потрібно залишити без зміни. Більш детально синтаксис задання граничної умови Неймана описано в **прикладі 1.4**.

25. Натиснути **ОК**.

Для задання граничної умови на поверхні тіла сферичної форми потрібно:

26. Зайти в пункт меню **Physics** > **Boundary Settings**.

27. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. Після цього поле з цифрою **2** зафарбується в синій колір. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Значення коефіцієнтів **G** та **R** ввести у відповідності до таблиці 2.9:

Таблиця 2.9- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	1 – C

28. Для задання граничних умов рівняння (2.2) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно зайти в пункт меню **Multiphysics** і встановити перемикач навпроти другого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **T**), тобто саме воно в даний момент є активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
1 PDE, General Form (g)
● 2 PDE, General Form (g2)

Для задання граничної умови в центрі тіла сферичної форми потрібно:

29. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

30. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** потрібно залишити без змін.

31. Натиснути **OK**.

Для задання граничної умови на поверхні тіла сферичної форми потрібно:

32. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

33. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. Після цього поле з цифрою **2** зафарбується в синій колір. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Значення коефіцієнтів **G** та **R** ввести у відповідності до таблиці 2.10:

Таблиця 2.10- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	1 – T

Задання граничних умов для рівнянь, що описують задачу, завершено.

34. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters > Remesh**.

35. Натиснути **OK**.

Увага ! Для зменшення розмірів одновимірного скінченного елемента у вигляді відрізка потрібно зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**. На закладці **Global** в полі **Maximum element size** ввести значення 0.001. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

Коефіцієнт β , який варіюється в певному діапазоні (табл. 2.1), зручно задати в меню самого розв'язувача.

Для цього потрібно виконати наступні кроки.

36. Зайти в пункт меню **Solve**. В списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Parametric**.

37. На закладці **General** в полі **Parameter names** ввести ім'я параметра: **beta**.

38. В полі **Parameter values** ввести низку значень коефіцієнта β : 0.01 0.03 0.07 0.10 0.12 0.15. Коректне введення значень даного коефіцієнта здійснюється через пробіл. Введення коефіцієнта іншим способом програмним продуктом не сприймається.

39. Натиснути **OK**.

40. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

При розв'язанні даної задачі COMSOL MULTIPHYSICS® зупиняє розрахунок і повідомляє про помилку синтаксису при заданні початкових умов: **Error: 7248. Undefined value found**.

Причина зупинки розрахунку полягає в тому, що у формулі (2.3) розрахункова величина **T** знаходиться в знаменнику і при підстановці нуля замість розрахункової величини **T** в процесі розв'язання COMSOL MULTIPHYSICS® повідомляє про помилку, оскільки при діленні на нуль змінна **R** прямує до нескінченності.

Некоректність задання формули (2.3) в COMSOL MULTIPHYSICS® (з математичної точки зору формула (2.3) цілком коректна) виправляється шляхом задання початкових умов для розрахункової величини **T**.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

41. Зайти в пункт меню **Multiphysics** і встановити перемикач навпроти другого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **T**), тобто саме воно є в даний момент активним.

42. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

43. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

44. На закладці **Init** в полі **Initial value** поза вибором температура $T(t_0)$ і похідна температури першого порядку $Tt(t_0)$ в початковий момент часу дорівнюють нулю (табл. 2.11).

Таблиця 2.11- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

$T(t_0)$	0
$Tt(t_0)$	0

45. Потрібно задати розподіл температури вздовж радіуса тіла

сферичної форми в початковий момент часу. Нехай температура тіла сферичної форми в початковий момент часу буде чисельно дорівнювати температурі на поверхні тіла (табл. 2.10). Таким чином, закладка **Init** меню **Physics > Subdomain Settings** повинна виглядати так, як показано в таблиці 2.12:

Таблиця 2.12

$T(t_0)$	1
$Tt(t_0)$	0

Увага ! В якості значення температури тіла сферичної форми в початковий момент часу може виступати будь-яке число, яке є відмінним від нуля. Задання довільного значення температури тіла сферичної форми в початковий момент часу не спричиняє впливу на результати розв'язку, оскільки задача є стаціонарною.

46. Тепер всі складові задачі задано в COMSOL MULTIPHYSICS® в коректній формі. Для розв'язання задачі потрібно зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

Результати розрахунку у вигляді розподілу концентрації речовини вздовж радіуса тіла сферичної форми наведені на рисунку 2.3.

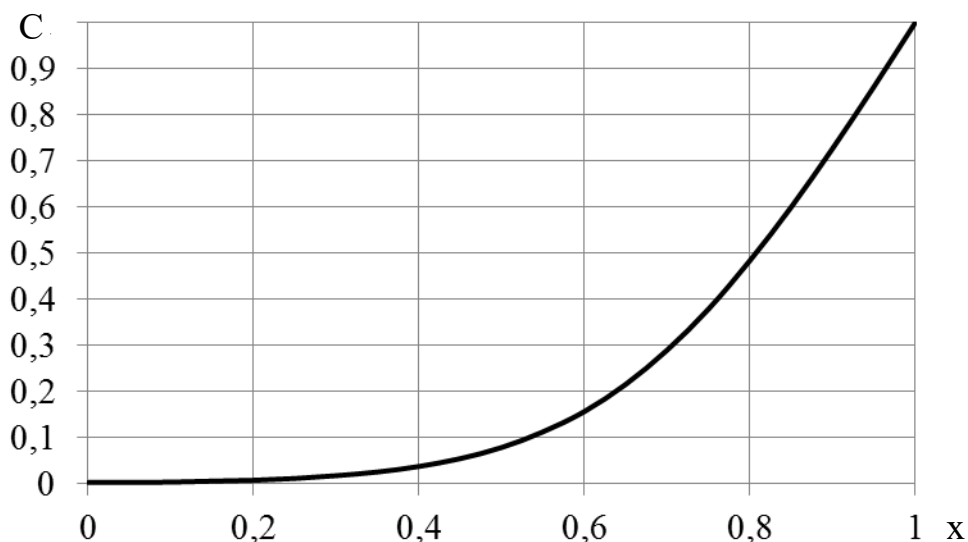


Рисунок 2.3 - Розподіл концентрації речовини вздовж радіуса тіла сферичної форми

2.2 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за відсутності в них просторових похідних

Приклад 2.2.

Вивчення коректного задання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) і початкових умов в COMSOL MULTIPHYSICS® доцільно почати з розв'язання ЗДР найпростішого виду, наведеного Флетчером [1]:

$$\frac{dy}{d\tau} - y = 0 \quad (2.8)$$

Початкові умови для рівняння (2.8) наступні:

$$y|_{\tau=0} = 1 \quad (2.9)$$

Особливістю рівняння (2.8) є відсутність похідних розрахункової величини по просторових координатах. ЗДР такого виду неможливо задати в модулі PDE Modes та вбудованих модулях програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®.

Для коректного задання рівняння (2.8), а також рівнянь подібного виду потрібно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.

2. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.

Увага ! Вибирати кількість просторових координат зі списку **Space Dimension** немає потреби, оскільки, як вже зазначалося вище, рівняння (2.8) не містить похідних розрахункової величини по просторових координатах. З рівняння (2.8) випливає, що розрахункова величина (функція) змінюється тільки в часі і не залежить від просторових координат. Поза вибором COMSOL MULTIPHYSICS® пропонує вибрати в списку **Space Dimension 1D**. Потрібно залишити кількість просторових координат такою, якою вона є поза вибором, тобто просто проігнорувати цю дію при розв'язанні задачі.

3. В полі **Multiphysics** натиснути на довгасту кнопку **Add Geometry**.

4. У вікні **Add Geometry** значення у всіх полях потрібно залишити без змін.

5. Натиснути **OK**.

Увага ! У відповідності до рівняння (2.8) в полі **Independent variables** вікна **Add Geometry** потрібно видалити незалежні просторові змінні x , y та z (які знаходяться в цьому полі поза вибором), оскільки розрахункова функція даного рівняння не залежить від просторових координат. Однак, при видаленні незалежних просторових змінних x , y та z з поля **Independent variables** та натисканні кнопки **OK**, з'являється двовимірна робоча область графічного інтерфейсу користувача з можливістю відображення одновимірної геометричної області.

При розв'язанні даної задачі в COMSOL MULTIPHYSICS® буде зупинитись розрахунок та з'являться повідомлення про помилку синтаксису при заданні геометричної області. Причина помилки та порядок її усунення розглянуті в пунктах 18...21 цього розділу.

6. Закрити вікно **Model Navigator**, натиснувши **OK**.

Відкривається графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** ввести ім'я файлу, наприклад, **obyknovennoye_diff_uravneniye**.

Для задання диференціального рівняння (2.8) потрібно виконати наступні кроки:

7. Зайти в пункт меню **Physics > Global Equations**.

8. Поля закладки **States** вікна **Global Equations** поза вибором не заповнені і мають наступний вигляд (табл. 2.13).

Таблиця 2.13- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Name (u)	Equation (u, ut, utt, t)	Init (u)	Init (ut)	Description

9. До першого стовпчика таблиці 2.13, який має назву **Name (u)**,

потрібно ввести розрахункову величину (функцію). У відповідності до рівняння (2.8) розрахунковою величиною є змінна y .

10. У вікні **Global Equations** в полі **Equation** наведено звичайне диференціальне рівняння в тому вигляді, в якому його сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$f(u, ut, utt, t) = 0 \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) складається з наступних величин:

u - розрахункова величина (функція);

ut - похідна першого порядку розрахункової величини за часом, у вигляді $\frac{dy}{dt}$;

utt - похідна другого порядку розрахункової величини за часом, у вигляді $\frac{d^2y}{dt^2}$;

t - час.

Для коректного введення рівняння (2.8) в COMSOL MULTIPHYSICS® його потрібно привести до виду рівняння (2.10), тобто рівняння (2.8) потрібно прирівняти до нуля.

Увага ! Рівняння (2.8) задано у вигляді $f(u, ut, utt, t) = 0$, тобто воно вже записано у вигляді, потрібному для коректного введення в COMSOL MULTIPHYSICS®.

Таким чином, до другого стовпчика таблиці 2.13, який має назву **Equation (u, ut, utt, t)**, потрібно ввести рівняння (2.8) у вигляді виразу (2.10). У відповідності з виразом (2.10) до другого стовпчика таблиці 2.13 вводиться вираз: $ut-y$.

11. До третього стовпчика таблиці 2.13, який має назву **Init (u)**, потрібно ввести початкові умови задачі, тобто формулу (2.9).

Сформулюємо наступне правило.

Увага ! До третього стовпчика таблиці 2.13, який має назву **Init (u)**, завжди вводиться права частина початкової умови.

Відповідно до цього правила та виду формули (2.9), до третього стовпчика таблиці 2.13 записується цифра 1.

12. До четвертого стовпчика таблиці 2.13, який має назву **Init (ut)**, за аналогією зі сформульованим вище правилом, вводиться права частина похідної другого порядку розрахункової величини за часом. В даній задачі похідна другого порядку розрахункової величини за часом відсутня, тому четвертий стовпчик таблиці 2.13 залишається незаповненим.

13. П'ятий стовпчик таблиці 2.13, який має назву **Description**, призначений для запису коментарів до рівняння. Цей стовпчик теж залишається незаповненим.

Таким чином, після задання диференціального рівняння та початкових умов поля закладки **States** вікна **Global Equations** повинні виглядати так, як це показано (табл. 2.14):

Наступною, після закладки **States**, розташована закладка **Weak**, поля якої в переважній більшості випадків залишаються без змін, тобто не

заповнюються.

Таблиця 2.14- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name (u)	Equation (u, ut, utt, t)	Init (u)	Init (ut)	Description
y	$y_t - y$	1		

Після заповнення закладки **States** вікна **Global Equations** задача повністю визначена, оскільки задано саме рівняння, яке описує задачу, а також її початкові умови.

14. Для закриття вікна **Global Equations** натиснути **OK**.

Наступним кроком на шляху до розв'язання задачі повинно було б стати розбиття геометричної області розв'язку на скінченні елементи. Оскільки в даній задачі розрахункова величина (функція) не залежить від просторових координат, цей крок при розв'язанні задачі потрібно пропустити.

15. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. В списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

В полі **Time stepping** параметр **Times** слід залишити без змін. Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде знаходити значення розрахункової величини (функції) в діапазоні 0...1 с.

16. Натиснути **OK**.

17. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

При розв'язанні даної задачі COMSOL MULTIPHYSICS® зупиняє розрахунок і повідомляє про помилку синтаксису при заданні геометричної області, в якій відшукується розв'язок задачі: **Error: 2195. No geometry defined**.

З повідомлення про помилку випливає, що причина зупинки розрахунку полягає у невизначеності геометричної області, в якій відшукується розв'язок задачі.

Помилка виправляється шляхом задання геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

18. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести розміри одновимірної геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі:

x: 0 1.

Увага ! Розміри одновимірної геометричній області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, принципового значення не мають, оскільки, як вже зазначалося раніше, розрахункова величина (функція) не залежить від просторових координат. Нехай довжина геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, дорівнює 1м.

19. Натиснути **OK**.

20. Для генерації скінченноелементної сітки виберіть пункт меню **Mesh > Initialize mesh**.

21. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

22. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Cross - Section Plot Parameters**.

23. Перейти на закладку **Point**.

24. В полі **Expression** ввести розрахункову функцію **y**.

25. Натиснути **OK**.

Результати розрахунку у вигляді залежності розрахункової величини (функції) **y** від часу представлені на рисунку 2.4.

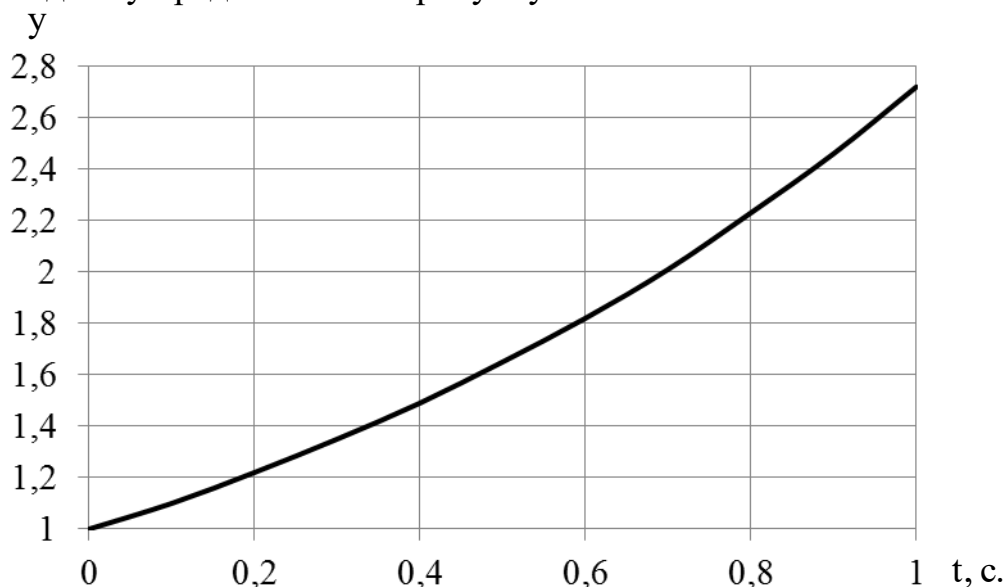


Рисунок 2.4 - Залежність розрахункової величини (функції) **y** від часу

Для закріплення вивченого матеріалу розглянемо ще одну задачу, наведену Shampine та Gordon [2].

Приклад 2.3.

Розглянемо порядок розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \cdot y_3 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 \cdot y_3 \\ \frac{dy_3}{d\tau} = -0,51 \cdot y_1 \cdot y_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Початкові умови для рівняння (2.11) мають вигляд:

$$y_1|_{\tau=0} = 0 \quad (2.12)$$

$$y_2|_{\tau=0} = 1,0 \quad (2.13)$$

$$y_3|_{\tau=0} = 1,0 \quad (2.14)$$

Для коректного задання системи ЗДР (2.11), а також початкових умов потрібно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.

2. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.

3. В полі **Multiphysics** натиснути на довгасту кнопку **Add Geometry**.
 4. У вікні **Add Geometry** значення у всіх полях потрібно залишити без змін.

5. Натиснути **OK**.

6. Закрити вікно **Model Navigator**, натиснувши **OK**.

Відкривається графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **sistema_ODU**.

Для задання диференціального рівняння (2.11) потрібно виконати наступні кроки:

7. Зайти в пункт меню **Physics > Global Equations**.

Після задання диференціального рівняння і початкових умов поля закладки **States** вікна **Global Equations** повинні виглядати наступним чином (табл. 2.15):

Таблиця 2.15- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name (u)	Equation (u, ut, utt, t)	Init (u)	Init (ut)	Description
y1	$y1t - y2 * y3$	0		
y2	$y2t + y1 * y3$	1		
y3	$y3t + 0.51 * y1 * y2$	1		

Закладка **Weak** залишається без змін, тобто не заповнюється.

Після заповнення закладки **States** вікна **Global Equations** задача повністю визначена, оскільки задана сама система ЗДР, що описує задачу, а також її початкові умови.

14. Для закриття вікна **Global Equations** натиснути **OK**.

Для задання геометричної області, в якій відшукується розв'язок задачі, потрібно виконати наступні кроки:

15. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести розміри одновимірної геометричній області, в якій відшукується розв'язок задачі:

x: 0 1.0 (через пробіл).

16. Натиснути **OK**.

17. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh > Initialize mesh**.

18. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. В списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

19. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times:** range (0,0.1,12).

Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде знаходити значення розрахункової величини (функції) в діапазоні 0...12с. з шагом 0,1с.

20. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

22. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Global Variables Plot**.

23. За допомогою кнопки  перенести розрахункові величини (функції) з поля **Predefined quantities** в поле **Quantities to plot**.

24. Натиснути **OK**.

Отриманий розв'язок потрібно порівняти з розв'язком, наведеним у літературі [2].

3 ПРОГРАМНИЙ ПРОДУКТ COMSOL MULTIPHYSICS® В ТЕПЛОТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

3.1 Використання модуля PDE Modes для розв'язання теплотехнічних задач

Як зазначалось раніше, в тих випадках, коли задача виходить за межі вбудованих модулів, COMSOL MULTIPHYSICS® дозволяє задавати диференціальні рівняння будь-яких порядків та типів в межах підмодуля PDE Modes.

Приклад 3.1.

Розглянемо задачу математичного моделювання лазерного термічного зміцнення сталевих деталей.

Основною метою лазерного термічного зміцнення сплавів є підвищення зносостійкості деталей, що працюють в умовах тертя. Зменшення величини зносу відбувається за рахунок збільшення твердості та дисперсності структури металу, збільшення несучих властивостей його поверхні тощо.

Одновимірною математичною моделлю лазерного термічного зміцнення сталевих деталей становить собою систему ДРЧП, наведену Веселовским та Губиным [13]:

$$\tau_r \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau} + q = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial q}{\partial x} + F(x, \tau) \quad (3.2)$$

де τ_r - час релаксації теплового потоку, с;

$\frac{\partial q}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку щільності теплового потоку за часом;

q - щільність теплового потоку, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$;

τ - час, с;

λ - коефіцієнт теплопровідності сталі, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$;

$\frac{\partial t}{\partial x}$ - похідна першого порядку температури по координатній осі x ;

t - температура сталі, °С;

x - просторова координата;

c - середня масова теплоємність сталі, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;

ρ - густина сталі, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$\frac{\partial t}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку температури за часом;

$\frac{\partial q}{\partial x}$ - похідна першого порядку щільності теплового потоку по координатній осі x ;

$F(x, \tau)$ - потужність джерел теплоти всередині сталеві деталі, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.

Значення наведених вище величин представлено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1- Значення величин

Позначення величини	Значення
Час релаксації теплового потоку, τ_r (τ_r), с	10^{-9}
Коефіцієнт теплопровідності сталі, λ (λ), Вт/(м · К)	23
Середня масова теплоємність сталі, c , Дж/(кг · К)	670
Густина сталі, ρ (ρ), кг/м ³	7500
Потужність джерел теплоти всередині сталеві деталі, $F(x, \tau)$, Вт/м ³	0

Товщина зони лазерного впливу на деталь становить $L = 7 \cdot 10^{-7}$ м.

Граничні умови задачі для щільності теплового потоку:

- на лівій границі задається гранична умова Діріхле:

$$q = 10^{11} \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \tau}{2 \cdot \tau_r};$$

- на правій границі задається гранична умова Діріхле: $q = 0$.

Граничні умови задачі для температури:

- на лівій границі задається гранична умова Неймана: $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$;
- на правій границі задається гранична умова Неймана: $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$.

Схема граничних умов наведена на рисунку 3.1.

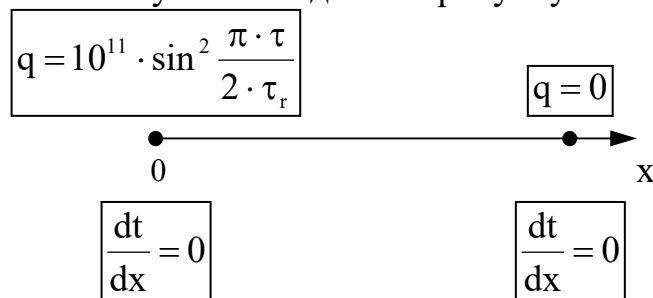


Рисунок 3.1 - Схема граничних умов задачі

Початкові умови для рівняння (3.1) та рівняння (3.2) наступні:

$$q|_{\tau=0} = 0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \quad (3.3)$$

$$t|_{\tau=0} = 0^\circ \text{C} \quad (3.4)$$

Період часу лазерного впливу на деталь становить $\tau = 5 \cdot 10^{-9}$ с.

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв'язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
3. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.
4. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time - dependent analysis**.
5. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **q** (щільність теплового потоку).
6. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.
7. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time - dependent analysis**.
8. В області **Dependent variables** замість розрахункової функції **u** (яка є такою поза вибором) потрібно написати **T** (температура сталі).
9. Натиснути на кнопку **Add** в полі **Multiphysics**.
10. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **lazernyy_nagrev**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, потрібно:

11. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення товщини зони лазерного впливу на деталь:

x: 0 $7e - 7$ (через пробіл).

12. Натиснути **OK**.

Задамо значення констант в рівнянні (3.1) та (3.2).

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести згідно з таблицею 3.2.

Таблиця 3.2- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
Lambda	$23[\text{W}/(\text{m} * \text{K})]$	23	
rho	$7500[\text{kg}/\text{m}^3]$	7500	
c	$670[\text{J}/(\text{kg} * \text{K})]$	670	
tau _ r	$1e - 9[\text{s}]$	$1e - 9$	

14. Зайти в пункт меню **Multiphysics**. Потрібно переконатися, що перемикач встановлений навпроти першого диференціального рівняння

(диференціального рівняння для розрахункової функції **q**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
• 1 PDE, General Form (g) 2 PDE, General Form (g2)

Для задання диференціального рівняння (3.1) потрібно виконати наступні кроки.

15. Зайти в пункт меню **Physics** > **Subdomain Settings**.

16. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

17. Значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** для рівняння (3.1) потрібно ввести так, як показано в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	0
F	$-\text{Lambda} * T_x - q$
e_a	0
d_a	τ_r

18. Початкове значення щільності теплового потоку у відповідності до рівняння (3.3) дорівнює нулю, тому закладка **Init** у вікні **Subdomain Settings** залишається без змін.

19. Натиснути **OK**.

Для задання граничних умов рівняння (3.1) потрібно виконати наступні кроки:

20. Зайти в пункт меню **Physics** > **Boundary Settings**.

На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Значення коефіцієнтів **G** та **R** ввести у відповідності до таблиці 3.4.

Таблиця 3.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$\text{lel1} * \sin(0.5 * \pi * t / \tau_r)^2 - q$

На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Діріхле (**Dirichlet boundary condition**). Значення коефіцієнтів **G** та **R** ввести у відповідності до таблиці 3.5.

Таблиця 3.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$-q$

21. Для задання рівняння (3.2) в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно зайти в пункт меню **Multiphysics** і встановити перемикач навпроти другого диференціального рівняння (диференціального рівняння для розрахункової функції **T**), тобто саме воно є в даний момент активним.

Пункт меню **Multiphysics** повинен виглядати наступним чином:

Model Navigator...
1 PDE, General Form (g)
● 2 PDE, General Form (g2)

Після задання диференціального рівняння (3.2) в загальному вигляді закладка **Coefficients** меню **Physics** > **Subdomain Settings** повинна виглядати наступним чином (табл. 3.6).

Таблиця 3.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	$-T_x$
F	$-q_x$
e_a	0
d_a	$c \cdot \rho$

22. Початкове значення температури сталі відповідно до рівняння (3.4) дорівнює нулю, тому закладка **Init** у вікні **Subdomain Settings** залишається без змін.

23. Натиснути **OK**.

Для задання граничних умов рівняння (3.2) потрібно виконати наступні кроки:

24. Зайти в пункт меню **Physics** > **Boundary Settings**.

На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** залишити без змін.

На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** встановити перемикач на граничну умову Неймана (**Neumann boundary condition**). Коефіцієнт **G** залишити без змін.

25. Натиснути **OK**.

Таким чином, задача повністю визначена, оскільки задана система ДРЧП, які описують задачу, а також граничні та початкові умови задачі.

26. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh** > **Free Mesh Parameters** > **Remesh**.

27. Натиснути **OK**.

28. Зайти в пункт меню **Solve** > **Solver Parameters**.

29. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times**: range (0,1e-11, 5e-9).

Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде відшукувати значення розрахункової величини (функції) в діапазоні $0 \dots 5 \cdot 10^{-9}$ с. з кроком $1 \cdot 10^{-11}$ с.

30. Для продовження розв'язання задачі заходимо в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

31. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Plot Parameters**. Переконайтесь, що на закладці **Line** в меню, що розгортається, **Predefined quantities**: обрана розрахункова функція **T**.

32. Натиснути **OK**.

Отриманий розв'язок потрібно порівняти з розв'язком, наведеним в літературі [13].

3.2 Використання вбудованих модулів в теплотехнічних розрахунках

Розглянемо розв'язання однієї з задач теплотехніки за допомогою вбудованого модуля **General Heat Transfer** (система диференціальних рівнянь теплообміну) програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®.

Приклад 3.2.

При проектуванні та експлуатації теплотехнічного обладнання, що застосовується в металургії, часто виникає необхідність вивчення процесів безконтактного нагрівання деталей вузлів та установок. Розглянемо процес нестационарного нагрівання деталі товщиною 0,2м за рахунок теплообміну випромінюванням нагрівачем у вигляді молібденового муфеля циліндричної форми товщиною 0,1м, на зовнішній поверхні якого знаходиться рівномірно розподілене джерело теплоти. Висота деталі та нагрівача дорівнює 1,0м. Потужність нагрівача становить $q = 100000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Степінь чорноти поверхонь деталі (ϵ_d) та нагрівача (ϵ_n) дорівнюють 0,3. Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією з торця деталі та муфеля дорівнює $\alpha = 9,31 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$. Нагрівання деталі здійснюється вісесиметрично протягом $\tau = 5,0$ год.

Теплообмін між нагрівачем та деталлю описується системою диференціальних рівнянь теплопровідності, конвективного та радіаційного теплообміну, наведеної Тимошпольским, Беляевым та Рядно [14].

Схема процесу нагрівання деталі нагрівачем у вигляді муфеля наведена на рисунку 3.2.

За своєю сутністю задача є вісесиметричною, оскільки здійснюється рівномірне нагрівання зовнішньої поверхні деталі.

Конструктивні та теплотехнологічні характеристики деталі і нагрівача наведені в таблиці 3.7.

Схема граничних умов наведена на рисунку 3.3.

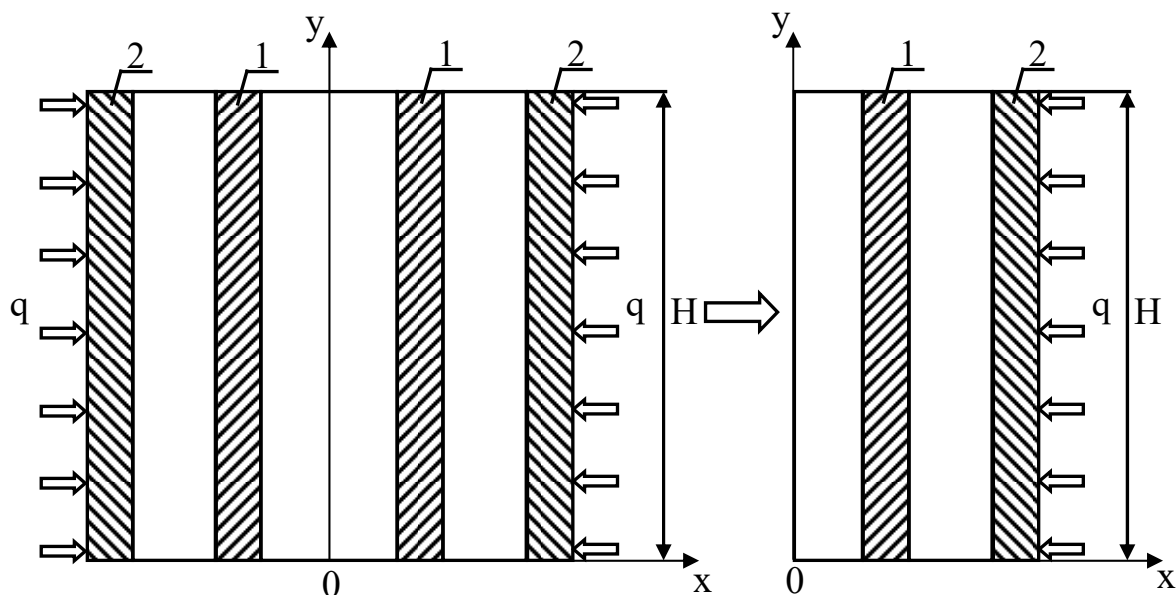


Рисунок 3.2 - Схема процесу нагрівання деталі та переходу до вісесиметричної моделі
1- деталь, 2- нагрівач

Таблиця 3.7- Конструктивні та теплотехнологічні характеристики деталі і нагрівача

Позначення величини	Значення
Висота деталі та нагрівача, Н, м	1
Час нагрівання деталі, τ , ч	5
Потужність нагрівача, q , Вт/м ²	100000
Степінь чорноти поверхні деталі, ε_d	0,3
Степінь чорноти поверхні нагрівача, ε_n	0,3
Теплоємність матеріалу деталі, c_d , Дж/(кг · К)	330
Коефіцієнт теплопровідності матеріалу деталі, λ_d , Вт/(м · К)	60
Густина матеріалу деталі, ρ_d , кг/м ³	5300
Теплоємність матеріалу нагрівача, c_n , Дж/(кг · К)	249,8
Коефіцієнт теплопровідності матеріалу нагрівача, λ_n , Вт/(м · К)	139,8
Густина матеріалу нагрівача, ρ_n , кг/м ³	10200
Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією з торця деталі та муфеля, α , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	9,31
Температура навколишнього середовища, $t_{\text{нав}}$, К	300

Граничні умови задачі наступні:

- на кордоні 1: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;

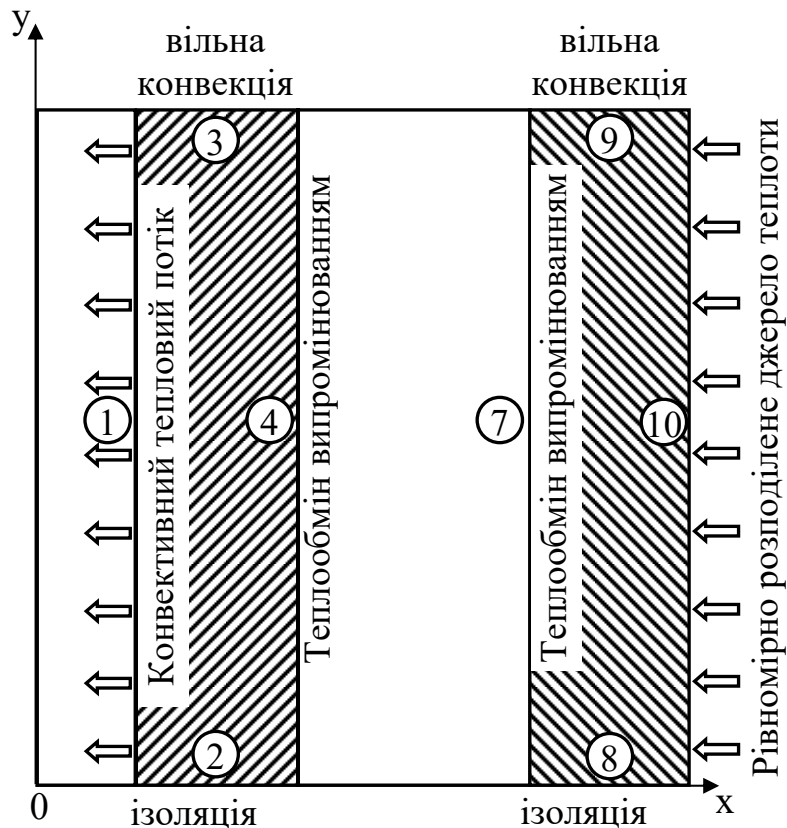


Рисунок 3.3 - Схема граничних умов задачі

- на кордоні 2: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;
- на кордоні 3: $-\lambda_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \cdot (T_{\text{окр}} - T)$;
- на кордоні 4: $-\lambda_d \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \varepsilon_d \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$;
- на кордоні 7: $-\lambda_n \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \varepsilon_n \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$;
- на кордоні 8: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;
- на кордоні 9: $-\lambda_n \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \cdot (T_{\text{окр}} - T)$;
- на кордоні 10: $-\lambda_n \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = q$.

Температура деталі та нагрівача в початковий момент часу дорівнює 27°C .

Формулювання задачі, таким чином, завершено і можна розпочати її розв’язання в середовищі COMSOL MULTIPHYSICS®. Для цього потрібно виконати наступні кроки.

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.

3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Heat Transfer Module > General Heat Transfer > Transient analysis**.

4. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

5. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **mufelnaya_pech**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі потрібно:

6. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та товщини деталі, що нагрівається:

Width: 0.2

Height: 1.0

7. Натиснути **OK**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача з'явиться прямокутник довжиною 0,2м та висотою 1,0м, який поза вибором має назву **R1**.

8. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення розмірів прямокутної області, яка відокремлює нагрівач від деталі:

Width: 0.3

Height: 1.0

В полі **Position** ввести значення зсуву прямокутника, що відображається, щодо координати лівого нижнього кута прямокутника **R1**:

x: 0.2

y: 0

9. Натиснути **OK**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача з'явиться прямокутник довжиною 0,3м та висотою 1,0м, який поза вибором має назву **R2**.

10. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та товщини нагрівача:

Width: 0.1

Height: 1.0

В полі **Position** ввести значення зсуву прямокутника, що відображається, щодо координати лівого нижнього кута прямокутника **R1**:

x: 0.5

y: 0

11. Натиснути **OK**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача з'явиться прямокутник довжиною 0,3м та висотою 1,0м, який поза вибором має назву **R3**.

12. Зайти в пункт меню **Options > Zoom > Zoom Extents**.

Для задання системи диференціальних рівнянь теплопровідності, конвективного та радіаційного теплообміну в COMSOL MULTIPHYSICS®

необхідно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

14. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

15. Поле **Thermal properties and heat sources / Sinks** на закладці **General** поза вибором виглядає наступним чином (табл. 3.8):

Таблиця 3.8- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
k	400	W/(m · K)	Thermal conductivity
ρ	8700	kg/m ³	Density
C _p	385	J/(kg · K)	Heat capacity at constant pressure
q _s	0	W/(m ³ · K)	Production / absorption coefficient
Q	0	W/m ³	Heat source

Як видно з таблиці 3.8 до неї потрібно ввести значення теплопровідності матеріалу (в даному випадку це деталь, що нагрівається), його густини, теплоємності при постійному тиску, коефіцієнта абсорбції та потужності джерела теплоти.

Відповідно до таблиці 3.7, в поле **Thermal properties and heat sources / Sinks** на закладці **General** значення коефіцієнтів потрібно ввести наступним чином (табл. 3.9):

Таблиця 3.9- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
k	60	W/(m · K)	Thermal conductivity
ρ	5300	kg/m ³	Density
C _p	330	J/(kg · K)	Heat capacity at constant pressure
q _s	0	W/(m ³ · K)	Production / absorption coefficient
Q	0	W/m ³	Heat source

Дані, які розміщено в закладках **Convection, Infinite Elements** та **Element**, залишаються без змін.

16. Для задання початкової температури деталі у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** та ввести значення коефіцієнта в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 3.10.

Таблиця 3.10- Вікно присвоєння значення коефіцієнта

T(t ₀)	300	K	Temperature
--------------------	-----	---	-------------

17. Натиснути **OK**.

18. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

19. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на

цифру **2**. Після цього поле з цифрою **2** зафарбується в синій колір.

20. Прибрати маркер навпроти **Active in this domain** в полі **Subdomain selection**.

Увага ! Пасивність (прибирання маркера навпроти **Active in this domain** в полі **Subdomain selection**) простору між нагрівачем та деталлю означає, що теплообмін між ними здійснюється тільки за рахунок теплообміну випромінюванням. Теплопровідність та конвективний теплообмін відсутні.

21. Натиснути **ОК**.

22. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

23. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **3**. Після цього поле з цифрою **3** зафарбується в синій колір.

Відповідно до таблиці 3.7, значення коефіцієнтів в поле **Thermal properties and heat sources / Sinks** на закладці **General** потрібно ввести наступним чином (табл. 3.11):

Таблиця 3.11- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
k	139.8	W/(m · K)	Thermal conductivity
ρ	10200	kg/m ³	Density
C _p	249.8	J/(kg · K)	Heat capacity at constant pressure
q _s	0	W/(m ³ · K)	Production / absorption coefficient
Q	0	W/m ³	Heat source

Дані, які розміщено в закладках **Convection, Infinite Elements** та **Element**, залишаються без змін.

24. Для задання початкової температури нагрівача у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** та ввести значення коефіцієнта в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 3.12.

Таблиця 3.12- Вікно присвоєння значення коефіцієнта

T(t ₀)	300	K	Temperature
--------------------	-----	---	-------------

25. Натиснути **ОК**.

Після задання констант, що входять в систему диференціальних рівнянь теплообміну, можна приступити до задання граничних умов задачі, оскільки сама система диференціальних рівнянь теплообміну вже введена до вбудованого модуля, за допомогою якого здійснюється розв'язання даної задачі.

Для задання граничних умов потрібно виконати наступні кроки:

26. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

27. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. Потім, утримуючи клавішу CTRL, натиснути на цифру **8**. В результаті активними будуть границі **2** та **8**.

На закладці **Boundary condition** в полі **Boundary sources and constraints** в меню **Boundary condition** що розгортається, встановити тип

граничної умови **Insulation / Symmetry**.

28. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **3**. Потім, утримуючи клавішу **CTRL**, натиснути на цифру **9**. В результаті активними будуть границі **3** та **9**.

На закладці **Boundary condition** в полі **Boundary sources and constraints** в меню **Boundary condition** що розгортається, встановити тип граничної умови **Heat flux**.

Поза вибором поле **Boundary sources and constraints** на закладці **Boundary condition** виглядає наступним чином (табл. 3.13).

Таблиця 3.13- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
q_0	0	W/m^2	Inward heat flux
h	0	$W/(m^2 \cdot K)$	Heat transfer coefficient
T_{inf}	273.15	K	External temperature
Radiation type	None		

Відповідно до граничних умов, які задано на границях **3** та **9**, значення коефіцієнтів в поле **Boundary sources and constraints** на закладці **Boundary condition** потрібно ввести наступним чином (табл. 3.14).

Таблиця 3.14- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
q_0	0	W/m^2	Inward heat flux
h	9.31	$W/(m^2 \cdot K)$	Heat transfer coefficient
T_{inf}	300	K	External temperature
Radiation type	None		

29. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **4**. Потім, утримуючи клавішу **CTRL**, натиснути на цифру **7**. В результаті активними будуть границі **4** та **7**.

На закладці **Boundary condition** в полі **Boundary sources and constraints** в меню **Boundary condition**, що розгортається, встановити тип граничної умови **Heat flux**.

Відповідно до граничних умов, які задано на границях **4** та **7**, значення коефіцієнтів в поле **Boundary sources and constraints** на закладці **Boundary condition** потрібно ввести так, як показано в таблиці 3.15.

30. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **10**. В результаті активною буде границя **10**.

На закладці **Boundary condition** в полі **Boundary sources and constraints** в меню **Boundary condition**, що розгортається, встановити тип граничної умови **Heat flux**.

Відповідно до граничної умови, яку задано на границі **10**, значення коефіцієнтів в поле **Boundary sources and constraints** на закладці **Boundary condition** потрібно ввести так, як показано в таблиці 3.16.

Таблиця 3.15- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
q_0	0	W/m^2	Inward heat flux
h	0	$W/(m^2 \cdot K)$	Heat transfer coefficient
T_{inf}	300	K	External temperature
Radiation type	Surface-to-surface		
ε	0.3		Surface emissivity
T_{amb}	300	K	Ambient temperature
J_0	J	W/m^2	Surface radiosity expression
Member of group(s)	1		

Таблиця 3.16- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
q_0	100000	W/m^2	Inward heat flux
h	0	$W/(m^2 \cdot K)$	Heat transfer coefficient
T_{inf}	300	K	External temperature
Radiation type	None		

31. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. В результаті активною буде границя **1**.

На закладці **Boundary condition** в полі **Boundary sources and constraints** в меню **Boundary condition** що розгортається, встановити тип граничної умови **Convective flux**.

Таким чином, задача повністю визначена, оскільки задана система ДРЧП, яка описують задачу, а також її граничні умови.

32. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters > Remesh**.

33. Натиснути **OK**.

34. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. В списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

19. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times:** range (0,10,18000).

Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде відшукувати значення розрахункової величини (функції) в діапазоні 0...5год. з кроком 10с.

35. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

36. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Cross - Section Plot Parameters**.

37. Перейти на закладку **Point**.

Переконайтесь, що в полі **Expression** в меню **Predefined quantities**,

що розгортається, обрана температура **T**.

В полі **Coordinates** ввести значення координат точки на поверхні деталі:

x: 0.199

y: 0.5

38. Натиснути **OK**.

Отриманий розв'язок потрібно порівняти з розв'язком, наведеним у літературі [14].

4 ПРОГРАМНИЙ ПРОДУКТ COMSOL MULTIPHYSICS® В ЗАДАЧАХ ГІДРОГАЗОДИНАМІКИ

4.1 Застосування вбудованих модулів для розв'язання задач гідрогазодинаміки

Розглянемо розв'язок однієї з задач гідрогазодинаміки за допомогою вбудованого модуля **Incompressible Navier-Stokes** (система диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини) програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®.

Приклад 4.1.

Розглянемо задачу про рух рідини всередині ємності квадратної форми.

Задача про розвиток рециркуляційної вихрової течії всередині квадратної ємності з рухомою верхньою границею (кришкою) є тестовою задачею для обчислювальних методів гідрогазодинаміки. Розв'язання тестових задач дозволяє визначити адекватність методу (в даному випадку - методу скінченних елементів на базі програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS®), що застосовується для розв'язання диференціальних рівнянь гідрогазодинаміки.

Квадратна ємність довжиною і висотою 1см заповнена ньютонівською рідиною (водою).

Рух води всередині ємності описується системою диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини, яку наведено Zienkiewicz, Taylor, Nithiarasu [15, 16].

Граничними умовами для цієї задачі є рівність нулю нормальної (у відношенні до відповідної границі ємності) складової швидкості рідини на всіх чотирьох стінках, а також рівність нулю тангенціальної складової швидкості на трьох нерухомих стінках [17].

Таким чином, граничні умови для даної задачі записуються у вигляді:

- при $x = 0$: $u = 0$; $v = 0$;
- при $x = 1$: $u = 0$; $v = 0$;
- при $y = 0$: $u = 0$; $v = 0$;
- при $y = 1$: $u = 1\text{м/с}$; $v = 0$;

де u , v - складові швидкості вздовж осі x та y відповідно, м/с.

Граничні умови задачі наведені у вигляді схеми на рисунку 4.1.

Нижче наведена послідовність розв'язання задачі з використанням вбудованого модуля **Incompressible Navier-Stokes** (система диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини).

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 2D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > Fluid Dynamics > Incompressible Navier-Stokes > Steady-state analysis**.

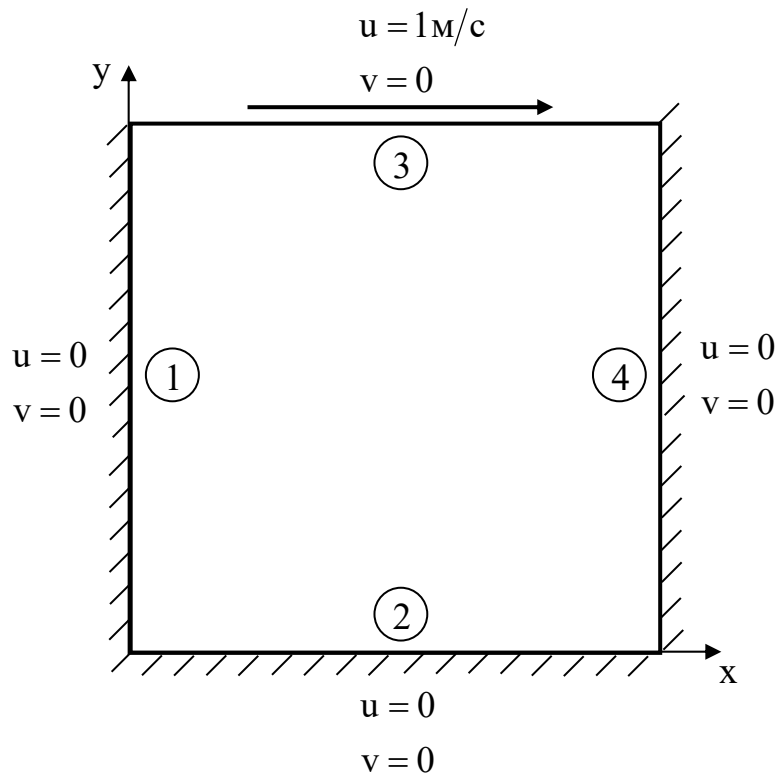


Рисунок 4.1 - Схема граничних умов задачі

Увага ! В полі **Dependent variables** розрахунковим функціям проєкцій швидкості на координатні осі x та y , а також абсолютного тиску нестисливої рідини поза вибором присвоєно імена u , v та p відповідно.

В полі **Application mode name** (ім'я модуля додатку, ім'я вбудованого модуля) вказано ім'я вбудованого модуля (**ns**), яке присвоєно модулю поза вибором.

В полі **Element** зазначено тип двовимірних скінченних елементів, на який буде розбита двовимірна область під час генерації сітки. Поза вибором COMSOL MULTIPHYSICS® пропонує розбити область розв'язку задачі на трикутні елементи лагранжева сімейства квадратичного типу для розрахункових функцій проєкцій швидкості u та v , а також лінійного типу для розрахункової функції тиску p .

Імена розрахункових функцій, вбудованого модуля, а також тип двовимірних скінченних елементів можна змінити, однак при розв'язанні задачі у них залишаються імена, присвоєні поза вибором COMSOL MULTIPHYSICS®.

4. Натиснути **OK**.

Відкриється графічний інтерфейс користувача (GUI).

5. Зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В поле **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **retsirkulyatsiya**.

Для відображення геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі потрібно:

6. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Rectangle**.

У вікні в полі **Size** ввести значення довжини та висоти ємності:

Width: 0.01

Height: 0.01

7. Натиснути **OK**.

В робочій області графічного інтерфейсу користувача з'явиться квадрат довжиною та висотою 0,01м, який поза вибором має назву **R1**.

8. Зайти в пункт меню **Options > Zoom > Zoom Extents**.

Для задання системи диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини в COMSOL MULTIPHYSICS® потрібно виконати наступні кроки:

9. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

10. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

11. Поле **Fluid properties and sources / Sinks** на закладці **Physics** поза вибором виглядає наступним чином (табл. 4.1).

Як видно з таблиці 4.1 до неї потрібно ввести значення густини рідини (в даній задачі це вода), динамічного коефіцієнта в'язкості рідини, а також проекції об'ємних сил на координатні осі.

Таблиця 4.1- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
ρ	1	kg/m ³	Density
η	1	Pa · s	Dynamic viscosity
F_x	0	N/m ³	Volume force, x dir.
F_y	0	N/m ³	Volume force, y dir.

Існує три способи задання цих значень:

1) Безпосередньо в полі **Fluid properties and sources / Sinks**.

2) На закладці **Constants** в пункті меню **Options**, якщо розв'язується стаціонарна задача гідрогазодинаміки і густина та динамічний коефіцієнт в'язкості рідини не залежать від температури рідини, тобто є константами.

3) В пункті меню **Options > Expressions**, якщо розв'язується нестационарна спряжена задача гідрогазодинаміки та тепломасообміну. В такому випадку температура рідини буде змінюватися в часі, у зв'язку з чим будуть змінюватися в часі значення густини та динамічного коефіцієнта в'язкості рідини, оскільки вони є функціями температури, тобто залежать від неї.

Оскільки дана задача є стаціонарною і не пов'язана з задачею тепломасообміну, для введення значення густини рідини, динамічного коефіцієнта в'язкості рідини, а також проекцій об'ємних сил на координатні осі потрібно скористатись закладкою **Constants** в пункті меню **Options**.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

12. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Позначимо густину води через **rho**, динамічний коефіцієнт в'язкості рідини через **eta**, проекції об'ємних сил на координатні осі **x** та **y** через **F_x** та **F_y** відповідно.

Увага ! При позначенні проекцій об'ємних сил на координатні осі бажано використовувати символ підкреслення “_”, оскільки при позначенні проекцій об'ємних

сил на координатні осі x та y через F_x та F_y COMSOL MULTIPHYSICS® може сприйняти їх як похідні першого порядку об'ємних сил за відповідними координатними осями.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2.- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
rho	$1000[\text{kg}/\text{m}^3]$	$1000[\text{kg}/\text{m}^3]$	
eta	$1\text{e}-3[\text{J}/(\text{Pa} \cdot \text{s})]$	$0.001[\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$	
F_x	0	0	
F_y	$-1000 \cdot 9.81[\text{N}/\text{m}^3]$	$-9810[\text{N}/\text{m}^3]$	

Увага ! Проекції об'ємних сил на координатні осі x та y становлять собою проекції сил, віднесених до одиниці об'єму рідини. Стосовно даної задачі об'ємні сили, що діють на рідину вздовж осі x , відсутні, а вздовж осі y на рідину діє сила тяжіння, проекція якої на вісь y буде дорівнювати:

$$F_y = -\frac{m \cdot g}{V} = -\frac{\rho \cdot V \cdot g}{V} = -\rho \cdot g = -1000 \cdot 9.81 = -9810 \frac{\text{H}}{\text{м}^3}$$

Перед значенням проекції об'ємної сили (сили тяжіння), що діє на рідину вздовж осі y , розташовується знак “мінус”, оскільки напрям координатної осі y і напрям дії об'ємної сили не співпадають.

Відповідно до введення закладки **Constants** (табл. 4.2), значення коефіцієнтів в поле **Fluid properties and sources / Sinks** на закладці **Physics** потрібно ввести наступним чином (табл. 4.3).

Таблиця 4.3- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
ρ	rho	kg/m^3	Density
η	eta	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	Dynamic viscosity
F_x	F_x	N/m^3	Volume force, x dir.
F_y	F_y	N/m^3	Volume force, y dir.

Після задання констант, що входять до системи диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини, можна перейти до задання граничних умов задачі, оскільки сама система диференціальних рівнянь Нав'є - Стокса для нестисливої рідини вже введена у вбудований модуль, за допомогою якого здійснюється розв'язання даної задачі.

Для задання граничних умов потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

14. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. Потім, утримуючи клавішу CTRL, натиснути на цифри **2** та **4**. В результаті активними будуть границі **1, 2** та **4**.

На границях **1, 2** та **4** потрібно встановити граничну умову у вигляді рівності нулю складових швидкості вздовж осі x та y .

На закладці **Coefficients** в полі **Boundary type** (тип граничної умови) у меню, що розгортається, встановити тип граничної умови **Wall** (стіна). В

полі **Boundary condition** (гранична умова) в меню, що розгортається, встановити граничну умову **No slip** (ковзання відсутнє).

Увага ! Гранична умова **No slip** (ковзання відсутнє) означає, що відбувається “прилипання” молекул рідини до стінки ємності, тобто ковзання молекул рідини в поперечному та поздовжньому напрямку в області стінки рідини відсутнє.

У вікні **Subdomain Settings** в полі **Equation** наведено математичний запис граничної умови **No slip**, при якому складові швидкості вздовж осі **x** та **y** дорівнюють нулю ($u = 0$; $v = 0$):

$$u = 0$$

15. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **3**. На границі **3** потрібно встановити граничну умову у вигляді рівності нулю складової швидкості вздовж осі **y** та рівності одиниці складової швидкості вздовж осі **x**.

На закладці **Coefficients** в полі **Boundary type** (тип граничної умови) в меню, що розгортається, встановити тип граничної умови **Wall** (стіна). В полі **Boundary condition** (гранична умова) в меню, що розгортається, встановити граничну умову **Sliding wall** (ковзна стіна).

Поза вибором поле **Boundary conditions** на закладці **Coefficients** виглядає так, як це показано в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
U_w	0	m/s	Velocity of the tangentially moving wall

Відповідно до граничної умови, яку задано на границі **3**, значення коефіцієнтів в поле **Boundary conditions** на закладці **Coefficients** потрібно ввести згідно з таблицею 4.5.

Таблиця 4.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Quantity	Value / Expression	Unit	Description
U_w	U_w	m/s	Velocity of the tangentially moving wall

Для введення величини швидкості ковзання стінки, тобто тангенціальної складової швидкості руху рідини вздовж стінки (гранична умова для границі **3**) потрібно додати величину швидкості U_w , яка є константою, до закладки **Constants**.

Остаточний вигляд закладки **Constants** наведений в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
rho	$1000[\text{kg}/\text{m}^3]$	$1000[\text{kg}/\text{m}^3]$	
eta	$1e-3[\text{J}/(\text{Pa} \cdot \text{s})]$	$0.001[\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$	
F_x	0	0	
F_y	$-1000 * 9.81[\text{N}/\text{m}^3]$	$-9810[\text{N}/\text{m}^3]$	
U_w	$-1.0[\text{m}/\text{s}]$	$-1[\text{m}/\text{s}]$	

Увага ! Потрібно пояснити, чому на границі **3** задається від’ємне значення

величини швидкості ковзання стінки, тобто тангенціальної складової швидкості руху рідини U_w вздовж стінки.

У вікні **Subdomain Settings - Incompressible Navier-Stokes (ns)** в полі **Equation** наведено математичний запис граничної умови **Sliding wall** в тому вигляді, в якому її сприймає COMSOL MULTIPHYSICS®, а саме:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = U_w, \mathbf{t} = (-n_y, n_x) \quad (4.1)$$

З формули (4.1) випливає, що тангенціальна складова швидкості руху рідини вздовж стінки (вздовж границі **3**) має вигляд (рис. 4.2):

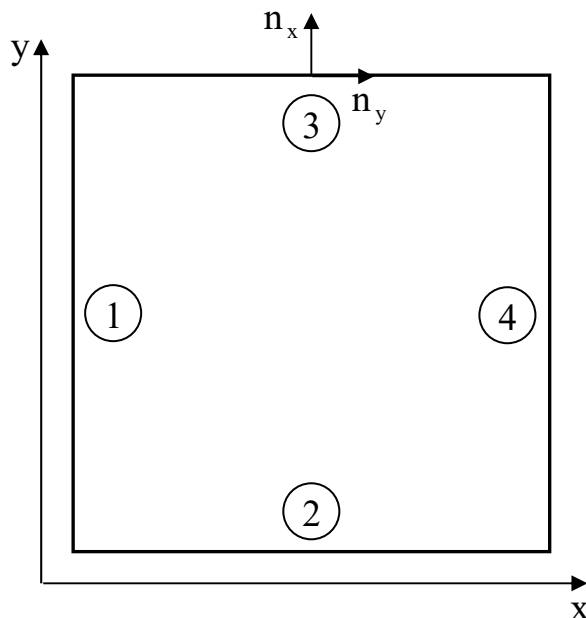


Рисунок 4.2 – Схематичне задання тангенціальної складової швидкості руху рідини

$$-n_y \cdot \mathbf{u} = U_w \quad (4.2)$$

У зв'язку з тим, що в лівій частині формули (4.2) знаходиться знак “мінус”, для задання додатного значення тангенціальної складової швидкості руху рідини вздовж стінки (вздовж границі **3**) потрібно задати від'ємне значення швидкості U_w в закладці **Constants**.

Тоді:

$$-n_y \cdot \mathbf{u} = -1.0[\text{m/s}] \quad (4.3)$$

Звідки випливає:

$$n_y \cdot \mathbf{u} = 1.0[\text{m/s}] \quad (4.4)$$

Таким чином, тангенціальна складова швидкості руху рідини вздовж стінки (вздовж границі **3**) збігається з напрямом осі абсцис.

Таким чином, задача повністю визначена, оскільки задана система ДРЧП, які описують задачу, а також її граничні умови.

16. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters > Remesh**.

17. Натиснути **OK**.

18. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

При розв'язанні даної задачі COMSOL MULTIPHYSICS® зупиняє розрахунок і у вікні **Progress-Solve Problem** на закладці **Log** повідомляє

про помилку при відшукуванні розв'язку задачі: **Error:** Failed to find a solution: No convergence, even when using the minimum damping factor. Returned solution has not converged.

Причина зупинки розрахунку полягає в тому, що збіжність розв'язку даної задачі відсутня.

Увага ! Теоретичні аспекти, що стосуються проблеми збіжності розв'язку задачі, детально викладено Smith та Griffiths [18].

Як вже згадувалось раніше (**приклад 1.1**), в деяких випадках розв'язок задачі потрібно починати з використання великої сітки з подальшим її подібненням. Задачі з області гідрогазодинаміки відносяться саме до такого типу задач.

Для вибору сітки, яка складатиметься зі скінченних елементів максимально великого розміру, потрібно виконати наступні кроки:

19. Зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**.

20. У вікні **Free mesh parameters** на закладці **Global** в списку **Predefined mesh sizes** замість розміру кінцевих елементів **Normal** (нормальний) вибрати **Extremely coarse** (надзвичайно грубий).

21. Натиснути **Remesh** та **OK**.

Крім зміни розміру скінченних елементів для досягнення збіжності розв'язку потрібно внести зміни в алгоритм розв'язання задачі, а також змінити значення відносної помилки обчислення.

Увага ! Опис різних алгоритмів розв'язання задач, а також впливу відносної помилки на точність обчислення та збіжність розв'язку детально викладено Галушкиным та Язвинской [19].

Для внесення змін до алгоритму розв'язання даної задачі, а також для зміни значення відносної помилки обчислення потрібно виконати наступні кроки:

22. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. На закладці **General** в полі **Linear system solver** вибрати **FGMRES** (замість **Direct PARDISO** поза вибором). В полі **Drop tolerance** змінити значення на **0.001** (замість **0.01** поза вибором). На закладці **Stationary** в полі **Relative tolerance** змінити значення на **1.0E-2** (замість **1.0E-6** поза вибором).

23. Натиснути **OK**.

24. Зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

Отриманий розв'язок є доволі наближеним, оскільки область розв'язку була розбита на малу кількість скінченних елементів великого розміру. Наступною дією при розв'язанні задачі є зменшення розмірів скінченних елементів, тобто подібнення сітки.

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

25. Зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**.

26. У вікні **Free mesh parameters** на закладці **Global** в списку **Predefined mesh sizes** замість розміру скінченних елементів **Extremely coarse** вибрати **Extra coarse** (достатньо великі розміри скінченних елементів).

27. Натиснути **Remesh** та **OK**.

Для прискорення процесу розв'язання та досягнення його збіжності потрібно виконати наступні кроки:

28. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Manager**. На закладці **Initial value** (початкове значення) в полі **Initial value** встановити перемикач навпроти **Initial value expression evaluated using current solution** (початкове значення з урахуванням поточного розв'язку). Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде відшукувати розв'язок задачі в геометричній області, яку розбито на скінченні елементи розміру **Extra coarse**, на підставі розв'язку, отриманого в геометричній області, яку розбито на скінченні елементи розміру **Extremely coarse**, тобто на підставі результатів попереднього розв'язку.

29. Натиснути **OK**.

30. Натиснути **Solve > Restart**.

31. Повторити послідовність дій, які описано в пунктах 25-27, 29, 30, поступово зменшуючи розмір скінченних елементів до **Extremely fine**.

Після отримання розв'язку задачі з розміром скінченних елементів **Extremely fine** потрібно зменшити значення відносної помилки обчислення. Для цього потрібно виконати наступні кроки:

32. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. На закладці **Stationary** в полі **Relative tolerance** змінити значення на **1.0E-6**, тобто зробити його таким, яким воно було поза вибором.

33. Натиснути **Solve > Restart**.

Отриманий розв'язок потрібно порівняти з розв'язком, наведеним в літературі [17].

З результатів розрахунку видно, що руху рідини притаманний циркуляційний характер.

Увага ! Інтенсивність руху визначається за щільністю розташування ліній течії.

Область з найбільшою щільністю ліній течії розташована у верхній частині ємності, в якій рідина захоплюється за рахунок сил тертя між рідиною та рухомою верхньою границею (кришкою) ємності.

В ємності утворюється течія зі спадними потоками біля правої стінки та висхідними потоками біля лівої стінки. Внаслідок захоплення рідини кришкою рух є несиметричним.

5 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ В COMSOL MULTIPHYSICS®

5.1 Застосування методів стабілізації розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних

При розв'язанні задач з переважанням конвективної складової переносу часто виникають значні коливання розрахункових величин (функцій) в сусідніх вузлах скінченноелементної або скінченнорізницевої сітки. З метою усунення або, принаймні, значного зниження коливань розв'язку задачі в сусідніх вузлах сітки можна зменшити крок сітки за часом та просторовими координатами, що призведе, однак, до істотного збільшення витрат часу на процес розв'язання задачі. Цей недолік призвів до пошуку інших способів усунення коливань розв'язку, які не вимагають зменшення кроку сітки та не призводять до збільшення витрат часу на розв'язання задачі.

Такі способи усунення коливань розв'язку називаються методами стабілізації розв'язку і широко застосовуються при розв'язанні задач гідрогазодинаміки.

У вбудованому модулі **Incompressible Navier-Stokes** програмного продукту COMSOL MULTIPHYSICS® можна застосовувати наступні методи стабілізації розв'язку:

- Streamline diffusion (GLS);
- Crosswind diffusion;
- Isotropic diffusion.

Увага ! Опис різних методів стабілізації розв'язку докладно викладено Harari та Hughes [20].

У разі розв'язання задач з використанням модуля PDE Modes застосувати перелічені вище методи стабілізації розв'язку неможливо, що вимагає програмування методу стабілізації розв'язку вручну.

Розглянемо кілька задач, в яких потрібно застосовувати стабілізацію розв'язку.

Приклад 5.1.

Розглянемо розв'язок одновимірного рівняння Бюргерса, в якому потрібно застосування стабілізації розв'язку. Рівняння Бюргерса є окремим випадком рівнянь Нав'є - Стокса і становить собою нелінійне рівняння дифузії, наведене Donea, Huerta [21]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

де $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку розрахункової величини за часом;

u - розрахункова величина, м/с ;

$\frac{\partial u}{\partial x}$ - похідна першого порядку розрахункової величини по

координатній осі x .

Рівняння (5.1) можна інтерпретувати також як нелінійне хвильове рівняння, при цьому швидкість поширення хвилі в різних її точках буде різною. Довжина одновимірної геометричній області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, дорівнює $L = 1,0\text{м}$.

Граничні умови задачі наступні:

- при $L = 0$: $u = 1,0$;
- при $L = 1,0\text{м}$: $u = 0$.

Початкові умови для рівняння (5.1) наступні:

$$u|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq 0,64 \\ 1 - \frac{x - 0,64}{0,20}, & \text{при } 0,64 \leq x \leq 0,84 \\ 0, & \text{при } 0,84 \leq x \leq 1,0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Потрібно знайти розподіл розрахункової величини (функції) u в період часу $0 \dots 0,19\text{с}$.

Для задання рівняння (5.1), граничних та початкових умов задачі в COMSOL MULTIPHYSICS®, потрібно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.
 2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
 3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time-dependent analysis**.
 4. В області **Dependent variables** залишити без зміни в якості розрахункової функцію u .
 5. Натиснути **OK**.
 6. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В полі **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **uravneniye_Byurgersa**.
 7. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.
- У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення довжини геометричній області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі:
- $x: 0 \quad 1.0$ (через пробіл).

8. Натиснути **OK**.
9. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.
10. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

У відповідності до рівняння (5.1) значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	0
F	$-u * u_x$
e_a	0
d_a	1

11. Для задання початкових умов задачі у вікні **Subdomain Settings**

потрібно перейти на закладку **Init** і ввести значення коефіцієнтів в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 5.2.

Розглянемо докладно коректний синтаксис введення початкових умов задачі, наведених в рівнянні (5.2), в COMSOL MULTIPHYSICS®.

Таблиця 5.2- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

$u(t_0)$	$1 * ((x \geq 0) * (x \leq 0.64)) + (1 - (x - 0.64)/0.20) * ((x \geq 0.64) * (x \leq 0.84)) + 0 * ((x \geq 0.84) * (x \leq 1))$
$u_t(t_0)$	

Початкова умова задачі становить собою розподіл розрахункової величини (функції) в геометричній області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, в початковий момент часу, тобто тоді коли $\tau = 0$ с.

Як видно з таблиці 5.2 в тому випадку, коли в початковий момент часу розрахункова функція має різні значення в різних частинах геометричної області розв'язку, порядок введення початкових умов задачі наступний:

1) Вводиться значення розрахункової функції в першій частині геометричної області розв'язку (в даній задачі це область $0 \leq x \leq 0,64$ м), яке дорівнює 1,0.

2) Ставиться знак множення.

3) Після знака множення в дужках вказується добуток двох нерівностей, які вказують межі першої частини геометричної області розв'язку. Введення першого рядка початкових умов в COMSOL MULTIPHYSICS® завершено.

Порівняння математичної форми запису першого рядка початкових умов, наведених в рівнянні (5.2), та синтаксис їх задання в COMSOL MULTIPHYSICS® наведено в таблиці 5.3.

Таблиця 5.3- Порівняння математичної форми запису першого рядка початкових умов задачі та синтаксису їх задання в COMSOL MULTIPHYSICS®

Перший рядок початкових умов задачі	
Математична форма запису	Синтаксис в COMSOL MULTIPHYSICS®
$u _{t=0} = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 0,64$	$1 * ((x \geq 0) * (x \leq 0.64))$

4) Для введення другого рядка початкових умов в COMSOL MULTIPHYSICS® після завершення введення першого рядка початкових умов ставиться знак додавання, після чого повторюється послідовність дій, яку описано в пунктах 1...3.

Аналогічним чином вводиться третій рядок початкових умов задачі.

12. Натиснути **ОК**.

Для задання граничних умов задачі потрібно виконати наступні кроки:

13. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

14. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на

цифру 1. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Потрібно ввести значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** так, як показано в таблиці 5.4.

Таблиця 5.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$1 - u$

15. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру 2. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Потрібно ввести значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** так, як показано в таблиці 5.5.

Таблиця 5.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$-u$

16. Для генерації сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**. На закладці **Global** в полі **Maximum element size** ввести значення $1e-3$. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

17. Зайти в пункт меню **Solve**. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times: 0:0.001:0.19** відповідно до умов задачі.

18. Натиснути **OK**.

19. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

20. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Plot Parameters**. Переконавшись, що на закладці **Line** в меню, що розгортається, **Predefined quantities:** обрана розрахункова функція **u**. На закладці **Animate** в полі **Solutions to use** в меню **Select via**, що розгортається, вибрати **Interpolated times**. В полі **Times:** ввести **range (0:0.01:0.19)**.

21. Натиснути **Start Animation**. COMSOL® Movie Player відобразить динаміку зміни розрахункової функції **u** в діапазоні часу 0...0,19с.

З результатів розв'язку видно, що в області значення розрахункової величини $u \approx 1,0$ спостерігаються коливання розрахункової величини в часі. Усунути або помітно знизити амплітуду коливань розрахункової величини шляхом зменшення розмірів скінченних елементів або кроку за часом не вдається. В цьому легко переконатися змінивши максимальний розмір скінченного елемента на закладці **Global** в полі **Maximum element size** з $1e-3$, наприклад, на $1e-4$. А в полі **Time stepping** встановити параметр **Times: 0:0.0001:0.19** замість 0:0.001:0.19.

Очевидна необхідність застосування стабілізації розв'язку.

Для усунення коливань розрахункової величини, тобто стабілізації

розв'язку потрібно виконати наступні кроки:

22. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

23. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

24. На закладці **Weak** значення коефіцієнтів в закладку **Weak form contributions** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

weak	$(-u * u_x) * h * (u * u_x_test)$	Weak term
dweak	0	Time-dependent weak term
bnd. weak	0	Ultraweak term
constr	0	Constraint (constr = 0)
Constraint type	Ideal	
constrf	0 (поле не активно)	Constraint force

З таблиці 5.6 видно, що для стабілізації розв'язку потрібно внести зміни в поле **weak**, тобто задати так званий “слабкої” складової. Всі інші поля закладки **Weak form contributions** залишаються без змін, тобто такими, якими вони є поза вибором.

25. Натиснути **OK**.

26. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

Увага ! З таблиці 5.6 випливає, що “слабка” складова становить собою вираз:

$$F * h * |F_test| \quad (5.3)$$

де **F**- коефіцієнт (рівняння 1.6);

h- розмір скінченного елемента;

F_test- тестова функція (у виразі 5.3 наведено модуль тестової функції).

Основні теоретичні положення, що стосуються тестових функцій, детально викладено Bazilevs, Calo, Tezduyar та ін. [22, 23].

27. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Plot Parameters**.

28. Натиснути **Start Animation**. COMSOL® Movie Player відобразить динаміку зміни розрахункової функції **u** в діапазоні часу 0...0,19с.

Для закріплення вивченого матеріалу розглянемо декілька задач.

Приклад 5.2.

Розглянемо розв'язання рівняння конвекції, наведеного Donea та Huerta [21]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

де $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ - похідна першого порядку розрахункової величини за часом;

$\frac{\partial u}{\partial x}$ - похідна першого порядку розрахункової величини по

координатній осі **x**;

a- константа. Нехай, наприклад, **a** = 1.

Довжина одновимірної геометричній області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, дорівнює $L = 1,0\text{м}$.

Граничні умови задачі наступні:

- при $L = 0$: $u = 0$;
- при $L = 1,0\text{м}$: $u = 0$.

Початкові умови для рівняння (5.4) наступні:

$$u|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & \text{при } |x - x_0| \geq \sigma \\ 0,5 \cdot \left(1 + \cos \left(\pi \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right) \right) \right) & \end{cases} \quad (5.5)$$

Потрібно знайти розподіл розрахункової величини (функції) u в період часу $0 \dots 0,6\text{с}$.

Для задання рівняння (5.4), граничних та початкових умов задачі в COMSOL MULTIPHYSICS®, потрібно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Вибрати в списку **Space Dimension 1D**.
3. В **Application Modes** зайти в пункт меню **Comsol Multiphysics > PDE Modes > PDE, General form > Time-dependent analysis**.
4. В області **Dependent variables** залишити без зміни в якості розрахункової функцію u .
5. Натиснути **OK**.
6. Зайти в пункт меню **File > Save As**. В поле **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **rasprostraneniye_profilya_kosinusa**.
7. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.
- У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести значення довжини геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі:
 x : 0 1.0 (через пробіл).

8. Натиснути **OK**.
9. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.
10. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

У відповідності до рівняння (5.4) значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.7.

Таблиця 5.7- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
Γ	0
F	$-a * u_x$
c_a	0
d_a	1

11. Для задання початкових умов задачі у вікні **Subdomain Settings** потрібно перейти на закладку **Init** і ввести значення коефіцієнтів в поле **Initial value** так, як показано в таблиці 5.8.

Для усунення коливань розрахункової величини, тобто стабілізації розв'язку, потрібно виконати наступні кроки:

Таблиця 5.8- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

$u(t_0)$	$0 * ((\text{abs}(x - x_0)) > \text{sigma}) +$ $+(0.5 * (1 + \cos(\pi * (x - x_0) / \text{sigma}))) * ((\text{abs}(x - x_0)) \leq \text{sigma})$
$ut(t_0)$	

12. Зайти в пункт меню **Physics > Subdomain Settings**.

13. На закладці **Subdomains** в полі **Subdomain selection** натиснути на цифру **1**. Після цього поле з цифрою **1** зафарбується в синій колір.

14. На закладці **Weak** значення коефіцієнтів в закладку **Weak form contributions** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.9.

Таблиця 5.9- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

weak	$-a * u_x * h * 0.1 * (a * u_x_test)$	Weak term
dweak	0	Time-dependent weak term
bnd. weak	0	Ultraweak term
constr	0	Constraint (constr = 0)
Constraint type	Ideal	
constrf	0 (поле не активно)	Constraint force

15. Натиснути **ОК**.

Для задання граничних умов задачі потрібно виконати наступні кроки:

16. Зайти в пункт меню **Physics > Boundary Settings**.

17. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **1**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Потрібно ввести значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** так, як показано в таблиці 5.10.

Таблиця 5.10- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$-u$

18. На закладці **Boundaries** в полі **Boundary selection** натиснути на цифру **2**. На закладці **Coefficients** в полі **Boundary conditions** перемикач поза вибором встановлений на граничній умові Діріхле. Потрібно ввести значення коефіцієнтів в закладку **Coefficients** так, як показано в таблиці 5.11.

Таблиця 5.11- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Coefficient	Value / Expression
G	0
R	$-u$

19. Задаються константи, що входять до рівняння (5.4), та початкові умови задачі (5.5).

Для цього потрібно виконати наступні кроки:

20. Зайти в пункт меню **Options > Constants**.

Значення коефіцієнтів в закладку **Constants** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.12.

Таблиця 5.12- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name	Expression	Value	Description
a	1	1	
sigma	0.12	0.12	
x0	0.2	0.2	

21. Для генерації сітки зайти в пункт меню **Mesh > Free Mesh Parameters**. На закладці **Global** в полі **Maximum element size** ввести значення **0.0001**. Потім потрібно послідовно натиснути кнопки **Remesh** та **OK**.

22. Зайти в пункт меню **Solve**. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times: range (0,0.01,0.6)** відповідно до умов задачі.

23. Натиснути **OK**.

24. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

25. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Plot Parameters**. Переконайтесь, що на закладці **Line** в меню, що розгортається, **Predefined quantities:** обрана розрахункова функція **u**. На закладці **Animate** в полі **Solutions to use** в меню **Select via**, що розгортається, вибрати **Interpolated times**. В полі **Times:** ввести **range (0:0.05:0.6)**.

26. Натиснути **Start Animation**. COMSOL® Movie Player відобразить динаміку зміни розрахункової функції **u** в діапазоні часу 0...0,6с.

5.2 Застосування методів стабілізації розв'язку звичайних диференціальних рівнянь

Приклад 5.3.

Розглянемо розв'язання рівняння [2]:

$$\frac{dy}{d\tau} = -|y| \quad (5.6)$$

де $\frac{dy}{d\tau}$ - похідна першого порядку розрахункової величини;

y - розрахункова величина.

Початкові умови для рівняння (5.6) наступні:

$$y|_{\tau=0} = 1,0 \quad (5.7)$$

Для коректного задання рівняння (5.6), а також початкових умов задачі потрібно виконати наступні кроки:

1. Відкрити **Model Navigator**.
2. Натиснути на довгасту кнопку **Multiphysics**, яка знаходиться у правому нижньому кутку меню **Model Navigator**.
3. В полі **Multiphysics** натиснути на довгасту кнопку **Add Geometry**.
4. У вікні **Add Geometry** значення у всіх полях слід залишити без

змін.

5. Натиснути **OK**.

6. Закрити вікно **Model Navigator**, натиснувши **OK**.

Відкривається графічний інтерфейс користувача (GUI).

Тепер потрібно зберегти файл, попередньо присвоївши йому ім'я. Для цього потрібно зайти в пункт меню **File > Save As**. В поле **File name** потрібно ввести ім'я файлу, наприклад, **stabilizatsiya_resheniya_uravneniya**.

Для задання диференціального рівняння (5.6) потрібно виконати наступні кроки:

7. Зайти в пункт меню **Physics > Global Equations**.

Після задання диференціального рівняння та початкових умов, поля закладки **States** вікна **Global Equations** повинні виглядати наступним чином (табл. 5.13):

Таблиця 5.13- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Name (u)	Equation (u, ut, utt, t)	Init (u)	Init (ut)	Description
y	$yt + \text{abs}(y)$	1	0	

Значення коефіцієнтів в Закладку **Weak** потрібно ввести так, як показано в таблиці 5.14:

Таблиця 5.14- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Weak term
$-(yt_test + \text{abs}(y)) * h * (yt + \text{abs}(y))$

Для закриття вікна **Global Equations** натиснути **OK**.

Для задання геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі, потрібно виконати наступні кроки:

8. Зайти в пункт меню **Draw > Specify Objects > Line**.

У вікні в полі **Coordinates** потрібно ввести розміри одновимірної геометричної області, в якій буде відшукуватись розв'язок задачі:

x: 0 1.0 (через пробіл).

9. Натиснути **OK**.

10. Для генерації скінченноелементної сітки зайти в пункт меню **Mesh > Initialize mesh**.

11. Зайти в пункт меню **Solve > Solver Parameters**. В списку розв'язувачів **Solver:** вибрати **Time dependent**.

12. В полі **Time stepping** встановити параметр **Times:** range (0,0.001,40).

Це означає, що COMSOL MULTIPHYSICS® буде відшукувати значення розрахункової величини (функції) в діапазоні 0...40с. з кроком 0,1с.

13. Для розв'язання задачі зайти в пункт меню **Solve > Solve Problem**.

14. Для візуалізації результатів розрахунку зайти в пункт меню **Postprocessing > Global Variables Plot**.

15. За допомогою кнопки  перенести розрахункові величини

(функції) з поля **Predefined quantities** в поле **Quantities to plot**.

16. Натиснути **OK**.

Отриманий розв'язок необхідно порівняти з розв'язком, наведеним в літературі [2].

6 ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ SIMSCAPE™ В ТЕПЛОТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

До складу MATLAB® входить програмний продукт Simulink®, який застосовується для моделювання динамічних систем з різних галузей науки та техніки. Основою Simulink®, так само, як і COMSOL MULTIPHYSICS®, є графічний інтерфейс користувача. За своєю сутністю програмний продукт Simulink® є засобом візуального моделювання.

Для моделювання теплотехнічних систем найбільш корисним є програмний продукт Simscape™, який, в свою чергу, входить до складу Simulink®.

Потрібно стисло пояснити відмінності Simscape™ від Simulink®. Відмінностей, в цілому, небагато і вони не є принциповими. За аналогією з моделями Simulink®, моделі Simscape™ "конструюються" в mdl - файлах. Simscape™ є відгалуженням Simulink®, в свою чергу, Simulink® входить до складу основного ядра MATLAB®.

Середовище Simscape™ дозволяє моделювати задачі з таких областей науки та техніки:

- електротехніка;
- гідравліка;
- механіка;
- теплотехніка тощо.

Основною відмінністю Simscape™ від Simulink® є те, що бібліотеки Simulink® містять набір блоків, які генерують або обробляють сигнали, в той час як блоки, що входять до складу Simscape™ становлять собою окремі компоненти системи, що моделюється, або явища.

Так, наприклад, до складу блоків для моделювання гідравлічних систем входять:

- набір гідравлічних опорів;
- гідромеханічний конвертер (перетворювач) для зв'язку гідравлічних моделей з механічними моделями і навпаки;
- віртуальні прилади для вимірювання швидкості руху потоку та його тиску, а також блоки, за допомогою яких задаються швидкість та тиск потоку рідини або газу;
- трубопроводи різних типів;
- насоси, клапани тощо.

В якості прикладу розглянемо наступну теплотехнічну систему та методику її моделювання в Simscape™.

Приклад 6.1.

Металевий стрижень круглого перетину (циліндр) нагрівається з лівого торця тепловим потоком, потужність якого дорівнює $Q = 120\text{Вт}$ за законом теплопровідності. Правий торець та бокова поверхня циліндра охолоджуються. Закон перенесення теплоти - вимушена конвекція.

Вихідні дані задачі:

- стрижень (рис. 6.1) виконано з металу, що має теплоємність

$$c = 447 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

- коефіцієнт теплопровідності металу $\lambda = 80,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$

- довжина стрижня $L = 20\text{см};$

- діаметр стрижня $d = 2,25\text{см};$

- густина металу $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$

- температура повітря навколишнього середовища дорівнює $T_{\text{нав}} = 300\text{К};$

- коефіцієнт тепловіддачі від стрижня до повітря навколишнього середовища дорівнює $\alpha = 32,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$

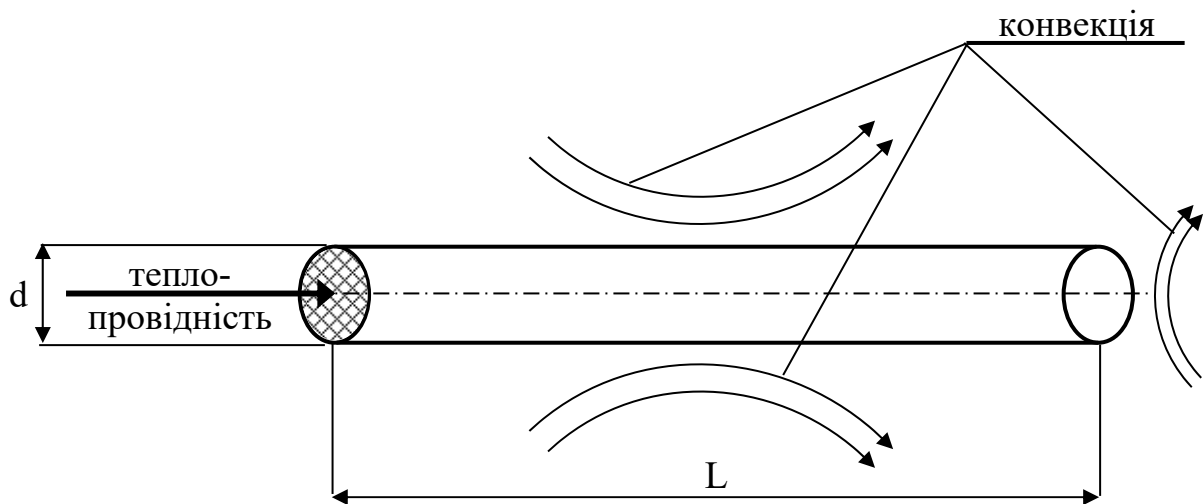


Рисунок 6.1 – Схема теплообміну

Період симуляції (нагрівання та охолодження металевого циліндра) становить 2000с.

Для побудови моделі в Simscape™ потрібно виконати наступні кроки:

1) Запустити бібліотеку Simulink®.

а) для цього в робочому вікні програмного продукту MATLAB® натиснути на кнопку **Start**, яка розташована в лівому нижньому кутку монітора.

б) у списку, що розгортається, вибрати Simulink®.

в) при наведенні курсору на слово Simulink® автоматично відкривається додатковий список, в якому вибирається **Library browser** (переглядач бібліотек).

Натисканням лівої кнопки миші на словосполучення **Library browser** виконується відкриття бібліотек Simulink®. На екрані відкривається нове вікно, яке має назву **Simulink library browser**. Вікно розділене вертикально на дві частини: в лівій частині знаходиться загальний список бібліотек Simulink®, а в правій частині - вміст певної

Увага !

Відкрити бібліотеки Simulink® можна також шляхом натискання на відповідну піктограму, що знаходиться в меню робочого вікна MATLAB®.

2) Створити mdl - файл, тобто файл з розширенням *.mdl, в якому і буде здійснюватись моделювання процесу теплообміну металевого стрижня.

а) створити mdl - файл можна, як мінімум, трьома різними способами:

- в **Simulink library browser** натиснути на піктограму чистого аркуша паперу;

- в **Simulink library browser** увійти послідовно в меню **File > New > Model**;

- в робочому вікні MATLAB® увійти послідовно в меню **File > New > Model**.

б) відкритий файл має вигляд білого поля. Для збереження mdl - файлу на жорсткому диску комп'ютера в меню **File** вибирається рядок **Save As...** після чого mdl - файлу потрібно дати назву (наприклад, **nagrev_tsilindra.mdl**) і вказати директорію, в якій його потрібно зберегти. Після збереження на жорсткому диску комп'ютера поки що порожнього mdl - файлу все готове до початку моделювання.

3) Моделювання починається з визначення бібліотек Simulink®, які необхідні для розв'язання даної задачі.

4) Для розв'язання даної задачі, а також задач, пов'язаних з теплообміном, потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal (Simscape > Foundation library > Thermal)**. Розглянемо зміст бібліотеки **Thermal** більш детально.

Зазначена бібліотека складається з двох розділів:

а) бібліотека **Thermal elements** (теплові елементи), до складу якої входять наступні блоки:

- блок **Conductive heat transfer** (теплообмін теплопровідністю), за допомогою якого моделюється закон перенесення теплоти теплопровідністю;

- блок **Convective heat transfer** (конвективний теплообмін), за допомогою якого моделюється закон перенесення теплоти конвекцією;

- блок **Radiative heat transfer** (променевий теплообмін), за допомогою якого моделюється закон перенесення теплоти випромінюванням;

- блок **Thermal mass** (теплова маса), за допомогою якого моделюється тіло, що нагрівається або охолоджується в процесі теплообміну (в даній задачі - це металевий стрижень);

- блок **Thermal reference** (теплове посилення). Принцип дії цього блоку буде розглянутий згодом;

- блок **Perfect insulator** (ідеальний ізолятор). При конструюванні даної моделі цей блок задіяний не буде. У зв'язку з цим розгляд принципу

дії блоку виходить за рамки даної книги;

б) бібліотека **Thermal sensors** (теплові прилади), до складу якої входять наступні блоки:

- блок **Ideal heat flow sensor** (сенсор ідеального теплового потоку), який становить собою прилад для вимірювання кількості підведеної або відведеної теплоти в процесах теплообміну;

- блок **Ideal temperature sensor** (сенсор температури), який становить собою прилад для вимірювання температури, тобто термометр;

в) бібліотека **Thermal sources** (джерела теплоти), до складу якої входять наступні блоки:

- блок **Ideal heat flow source** (ідеальне джерело теплового потоку), за допомогою якого моделюється джерело теплоти, тобто, іншими словами, задається тепловий потік на границях тіла, що моделюється, в якості якого в даному випадку виступає металевий стрижень;

- блок **Ideal temperature source** (ідеальне джерело температури), за допомогою якого моделюється джерело температури, тобто іншими словами задається температура на границях тіла, що моделюється, в якості якого в даному випадку виступає металевий стрижень.

Крім бібліотеки **Thermal** розглянемо бібліотеку блоків **Utilities**. Для цього потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Utilities (Simscape > Foundation library > Utilities)**, в якій знаходяться блоки, загальні для електричних, гідравлічних, механічних та теплових задач.

В бібліотеці **Utilities** (корисні речі) знаходяться наступні блоки:

- блок **PS – Simulink converter**, за допомогою якого сигнал від блоку з бібліотек Simscape™ передається до блоку з бібліотек Simulink®;

- блок **Simulink – PS converter**, за допомогою якого сигнал від блоку з бібліотек Simscape™ передається до блоку з бібліотек Simscape™;

- блок **Solver configuration**, який є необхідним у кожному mdl - файлі Simscape™ і приєднується до моделі довільним чином. Без цього блоку розв'язання задачі неможливе, оскільки при запуску симуляції задачі буде з'являтися повідомлення про помилку;

- блоки **Connection port** та **Two – way connection**. При конструюванні моделі ці блоки задіяні не будуть. У зв'язку з цим розгляд принципу дії цих блоків виходить за рамки даного посібника;

5) Першим кроком побудови моделі є “конструювання” металевого стрижня в полі mdl - файлу.

Для цього потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal elements (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal elements)** і з бібліотеки **Thermal elements** в поле mdl – файлу перенести блок **Thermal mass**.

Після подвійного натискання лівої кнопки миші на піктограмі цього блоку відкривається вікно, яке називається **Block parameters** (параметри блоку). Параметри блоку розміщені у двох закладках:

- а) Закладка **Parameters** (параметри);

- б) Закладка **Variables** (змінні).

На закладці **Parameters** розміщено наступні параметри блоку:

- **Mass** - маса тіла, що нагрівається або охолоджується;
- **Specific heat** - теплоємність тіла.

На закладці **Variables** розміщено наступні параметри блоку:

- **Heat flow** - тепловий потік;
- **Temperature** - початкова температура тіла.

Поза вибором закладка **Parameters** в полі **Settings** виглядає наступним чином (табл. 6.1):

Таблиця 6.1- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Mass:	1	kg
Specific heat:	447	J/kg/K

Дані коефіцієнти необхідно привести до умов задачі. Для цього потрібно обчислити масу стрижня, яка визначається за відомою формулою:

$$M = \rho \cdot V \quad (6.1)$$

де значення густини металу відоме з умов задачі і становить

$$\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Об'єм металевого стрижня визначається за формулою:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L \quad (6.2)$$

де d - діаметр стрижня, значення якого відомо з умов задачі і становить $d = 0,0225\text{м}$;

L - довжина стрижня, значення якої відомо з умов задачі і становить $L = 0,2\text{м}$.

Таким чином, маса стрижня дорівнює:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L = 7850 \cdot \frac{3,14 \cdot (0,0225)^2}{4} \cdot 0,2 = 0,624\text{кг} \quad (6.3)$$

Відповідно до умов задачі, закладку **Parameters** в полі **Settings** потрібно ввести наступним чином (табл. 6.2):

Таблиця 6.2- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Mass:	0.624	kg
Specific heat:	447	J/kg/K

Поза вибором закладка **Variables** в полі **Settings** виглядає наступним чином (табл. 6.3):

Таблиця 6.3- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Specify	Variable	Priority	Value	Unit
	Heat flow	Unused	Unused	Unused
	Temperature	Unused	Unused	Unused

Для задання початкової температури стрижня потрібно поставити маркер в стовпчику **Specify** навпроти рядка перемінної **Temperature**. Після цього закладка **Variables** в полі **Settings** прийме наступний вигляд (табл. 6.4):

Таблиця 6.4- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Specify	Variable	Priority	Value	Unit
	Heat flow	Unused	Unused	Unused
☒	Temperature	High	300	K

Оскільки поза вибором встановлюється значення початкової температури, що дорівнює 300K, тобто таке саме значення, як і в умові задачі, змінювати значення стовпчика **Value** немає потреби.

Таким чином, всі параметри блока **Thermal mass** визначені і його можна закрити, натиснувши на кнопку **OK**.

б) До лівого торця стрижня підводиться тепловий потік, потужність якого дорівнює $Q = 120\text{Вт}$. Отже, для моделювання джерела теплового потоку необхідним є блок **Ideal heat flow source**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal sources**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal sources (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal sources)**. Блок **Ideal heat flow source** переноситься з бібліотеки **Thermal sources** в поле mdl - файлу і розміщується зліва від блоку **Thermal mass**, оскільки нагрівається лівий торець стрижня.

Увага ! Розміщення блоків в полі mdl - файлу може бути довільним, проте “логічне” розміщення блоків в полі mdl - файлу, (в даній задачі нагрівається ліва сторона стрижня, тому блок **Ideal heat flow source** розташовується зліва від блоку **Thermal mass**, що імітує металевий стрижень), є більш зручним.

Перенесення теплоти від джерела, тобто від блоку **Ideal heat flow source** до металевому стрижню здійснюється за законом теплопровідності. Тому, між блоками, які моделюють джерело теплоти та металевий стрижень, повинен розташовуватись блок, який моделює закон перенесення теплоти від джерела теплоти до стрижня. Таким блоком є блок **Conductive heat transfer**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal elements (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal elements)**. Блок **Conductive heat transfer** переноситься з бібліотеки **Thermal elements** в поле mdl - файлу.

Отже, в полі mdl - файла знаходяться три блоки, а саме, блоки **Thermal mass**, **Ideal heat flow source** та **Conductive heat transfer**. Після з'єднання цих блоків один з одним певним чином утворюється частина моделі, яка імітує підведення теплоти до металевому стрижню.

Оскільки джерело теплоти потужністю 120Вт передає теплоту металевому стрижню за допомогою закону перенесення теплоти теплопровідністю, послідовність з'єднання трьох блоків повинна бути наступною: блок, що імітує джерело теплоти, з'єднується з блоком, що імітує закон перенесення теплоти, який, в свою чергу, з'єднується з блоком, що симулює сам металевий стрижень. Розміщення блоку, який симулює джерело теплоти лівіше блоку, що імітує закон перенесення теплоти, є цілком логічним.

Розглянемо більш детально блоки **Ideal heat flow source** та

Conductive heat transfer.

На торцях блоку **Ideal heat flow source** розташовуються три виводи. При цьому два виводи мають на кінцях заштриховані квадрати, а один вивід - незаштрихований трикутник. Ці виводи називаються сполучними портами. За допомогою таких портів блоки з'єднуються один з одним і передають сигнали один одному.

Очевидно, що порти з заштрихованими квадратами на кінцях і порт з незаштрихованим трикутником на кінці мають різне призначення.

Крім того, порти мають назви у вигляді латинських літер. Так, порти з заштрихованими квадратами мають назви **A** та **B**, а порт з незаштрихованим трикутником має назву **S**.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Ideal heat flow source** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі. Однак, після відкриття вікна **Block parameters** видно, що цей блок не має активних вічок, значення яких можна було б змінювати. У вікні **Block parameters** знаходиться інформація- підказка про те, яким чином правильно з'єднати цей блок з іншими блоками.

Назва блоку **Ideal heat flow source** не зовсім відповідає дійсності. Параметри цього блоку не дозволяють встановити величину теплового потоку, за допомогою якого здійснюється нагрівання лівого торця металевого стрижня. Даний блок за своєю сутністю є перетворювачем вхідного сигналу величиною 120 одиниць в сигнал, величиною 120Вт. Тобто, блок **Ideal heat flow source** потрібен тільки для того, щоб Simscape™ було зрозуміло, що під сигналом, величиною 120 одиниць мається на увазі саме тепловий потік потужністю 120Вт.

Увага ! Для всіх блоків з бібліотек Simscape™ справедливо правило: додатне значення сигналу передається від порту **A** до порту **B**.

Для того щоб задати додатне значення теплового потоку, який підводиться до лівого торця металевого стрижня, потрібно виконати наступні кроки:

- а) до порту **S** потрібно підвести сигнал величиною 120 одиниць;
- б) передати сигнал величиною 120 одиниць від блоку з бібліотеки Simulink® до блоку з бібліотек Simscape™;
- в) порт **A** потрібно з'єднати з нульовим рівнем температури та теплового потоку;
- г) порт **B** блоку **Ideal heat flow source** потрібно з'єднати з портом **A** блоку **Conductive heat transfer** для передачі позитивного значення сигналу від блоку **Ideal heat flow source** до блоку **Conductive heat transfer**.

Розглянемо вказану послідовність дій детальніше.

Для задання джерела сигналу величиною 120 одиниць можна скористатись блоком **Constant**, який знаходиться в бібліотеці **Constant**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Constant (Simulink > Sources > Constant)**. Блок **Constant** переноситься з

бібліотеки **Constant** в поле mdl - файлу.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Constant** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі.

В полі **Constant value** (значення константи) на закладці **Main** (головна) записується значення величини сигналу, яка дорівнює 120 одиниць. Поле **Sample time** (зразковий, шаблонний час) закладки **Main**, а також поля закладки **Attributes** залишаються без змін.

Для передачі сигналу величиною 120 одиниць від блоку з бібліотеки Simulink® до блоку з бібліотек Simscape™ потрібно скористатися блоком **Simulink – PS converter**, який знаходиться в бібліотеці **Utilities**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Utilities (Simscape > Foundation library > Utilities)**.

Блок **Simulink – PS converter** переноситься з бібліотеки **Utilities** в поле mdl - файлу. Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Simulink – PS converter** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі.

В полі **Input signal unit** (одиниці вимірювання вхідного сигналу) закладки **Units** (одиниці вимірювання) можна ввести одиниці вимірювання теплового потоку - вати, однак можна не вносити змін до цього поля і залишити ті одиниці вимірювання вхідного сигналу, які пропонуються поза вибором, тобто одиницю.

Інші поля закладки **Units** і закладки **Input handling** залишаються без змін.

Увага ! В англomовному варіанті міжнародної системи одиниць (SI) вати позначаються латинською літерою **W**.

Порт **A** потрібно з'єднати з нульовим рівнем температури та теплового потоку. Нульовий рівень теплового потоку симулюється блоком **Thermal reference**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal elements**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal elements (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal elements)**. Блок **Thermal reference** переноситься з бібліотеки **Thermal elements** в поле mdl - файлу.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Thermal reference** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі. Однак, після відкриття вікна **Block parameters** видно, що цей блок не має активних вічок, значення яких можна було б змінювати.

Оскільки до порту **S** блоку **Ideal heat flow source** підводиться сигнал у вигляді теплового потоку, а порт **B** блоку **Ideal heat flow source** з'єднується з портом **A** блоку **Conductive heat transfer**, очевидно що блок **Thermal reference** потрібно з'єднати з портом **A** блоку **Ideal heat flow source**.

Увага ! За допомогою порту **A** блок **Ideal heat flow source** може бути

з'єднаний не тільки з блоком **Thermal reference**, але і з іншими блоками, що входять до бібліотеки **Simscape**.

Порт **B** блоку **Ideal heat flow source** потрібно з'єднати з портом **A** блоку **Conductive heat transfer** для передачі додатного значення сигналу у вигляді значення величини теплового потоку від блоку **Ideal heat flow source** до блоку **Conductive heat transfer**.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Conductive heat transfer** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі. Поза вибором закладка **Parameters** в полі **Settings** виглядає наступним чином (табл. 6.5):

Таблиця 6.5- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Area:	1e - 4	m^2
Thickness:	0.1	m
Thermal conductivity:	401	W/(m * K)

На закладці **Parameters** в полі **Area** (площа) потрібно ввести значення площі торця металевго стрижня, до якого підводиться тепловий потік величиною 120Вт.

Площа торця металевго стрижня визначається за формулою:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,0225)^2}{4} = 0,000397 \text{ м}^2 \quad (6.4)$$

В полі **Thickness** (товщина) потрібно ввести довжину стрижня, яка, відповідно до умов задачі, становить $L = 0,2 \text{ м}$.

В полі **Thermal conductivity** потрібно ввести значення коефіцієнта теплопровідності, який, відповідно до умов задачі, дорівнює $\lambda = 80,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

Таким чином, відповідно до умов задачі, закладки **Parameters** в полі **Settings** потрібно ввести наступним чином (табл. 6.6):

Таблиця 6.6- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Area:	0.000397	m^2
Thickness:	0.2	m
Thermal conductivity:	80.2	W/(m * K)

Закладка **Variables** в полі **Settings** залишається без змін.

Таким чином, завершено конструювання тієї частини моделі, яка імітує підведення теплоти до металевго стрижня (рис. 6.2).

7) Після завершення конструювання частини моделі, яка імітує підведення теплоти до металевго стрижня, потрібно сконструювати частину моделі, яка буде імітувати відведення теплоти від металевго стрижня.

Відповідно до умов задачі правий торець та бокова поверхня циліндра охолоджуються. Закон перенесення теплоти - вимушена конвекція. Температура повітря навкруги металевго стрижня дорівнює $T_{\text{нав}} = 300 \text{ К}$; коефіцієнт тепловіддачі від стрижня до повітря

навколишнього середовища дорівнює $\alpha = 32,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

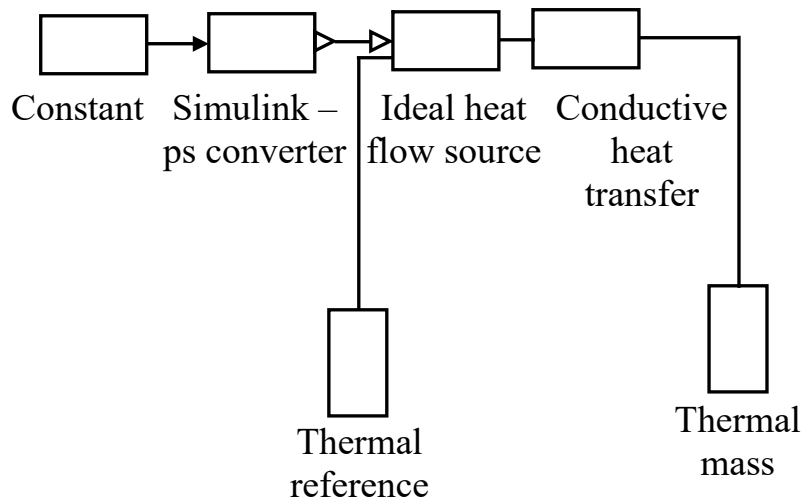


Рисунок 6.2 - Частина моделі, що імітує підведення теплоти до металевого стрижня

Для моделювання відведення теплоти від металевого стрижня необхідний блок **Ideal temperature source**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal sources**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal sources (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal sources)**. Блок **Ideal temperature source** переноситься з бібліотеки **Thermal sources** в поле mdl - файлу і розміщується праворуч від блоку **Thermal mass**, оскільки охолоджується правий торець стрижня, а також його бічна поверхня.

Закон перенесення теплоти від металевого стрижня до повітря, навколо стрижня, тобто від блоку **Ideal temperature source** – вимушена конвекція. Тому, між блоками, що моделюють відведення теплоти та металевий стрижень, повинен розташовуватися блок, що моделює закон перенесення теплоти від стрижня до повітря навколишнього середовища. Таким блоком є блок **Convective heat transfer**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal elements**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки (**Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal elements**). Блок **Convective heat transfer** переноситься з бібліотеки **Thermal elements** в поле mdl - файлу.

Отже, в полі mdl - файлу переносяться два блоки, а саме, блоки **Ideal temperature source** та **Convective heat transfer**. Після з'єднання цих блоків один з одним певним чином утворюється частина моделі, яка імітує відведення теплоти від металевого стрижня до повітря навколишнього середовища.

Оскільки стрижень передає теплоту повітрю за допомогою вимушеної конвекції, послідовність з'єднання блоків повинна бути наступною: блок, що імітує відведення теплоти, з'єднується з блоком, що імітує закон перенесення теплоти, який, в свою чергу, з'єднується з

блоком, що імітує металевий стрижень. Розміщення блоку, що імітує відведення теплоти правіше блоку, що імітує закон перенесення теплоти, є цілком логічним.

Розглянемо більш докладно блоки **Ideal temperature source** та **Convective heat transfer**.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Ideal temperature source** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі. Однак, після відкриття вікна **Block parameters** видно, що цей блок не має активних вічок, значення яких можна було б змінювати. У вікні **Block parameters** знаходиться інформація- підказка про те, яким чином правильно з'єднати цей блок з іншими блоками.

Потрібно пояснити спосіб задання відведення теплоти від стрижня. Ця інформація міститься у вікні **Ideal temperature source**, мова про який йшла вище.

Для “з'єднання” металевого стрижня з температурою повітря навколишнього середовища, потрібно виконати наступні кроки:

а) До порту **S** блока **Ideal temperature source** потрібно підвести сигнал величиною 300 одиниць, що відповідає температурі навколишнього середовища, яка дорівнює 300K;

б) Передати сигнал величиною 300 одиниць від блоку з бібліотеки Simulink® до блоку з бібліотек Simscape™;

в) Порт **A** потрібно з'єднати з нульовим рівнем температури;

г) Порт **B** блока **Ideal temperature source** потрібно з'єднати з портом **B** блоку **Convective heat transfer** для передачі теплоти від блоку **Convective heat transfer** до блоку **Ideal temperature source**.

Розглянемо вказану послідовність дій більш докладно.

Для задання джерела сигналу величиною 300 одиниць знову можна скористатись блоком **Constant**, який знаходиться в бібліотеці **Constant**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Constant (Simulink > Sources > Constant)**.

Блок **Constant** переноситься з бібліотеки **Constant** в поле mdl - файлу. Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Constant** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі.

В полі **Constant value** (значення константи) на закладці **Main** (головна) записується значення величини сигналу, яке дорівнює 300 одиниць. Поле **Sample time** (зразковий, шаблонний час) закладки **Main**, а також поля закладки **Attributes** залишаються без зміни.

Для передачі сигналу величиною 300 одиниць від блоку з бібліотеки Simulink® до блоку з бібліотек Simscape™ потрібно скористатись блоком **Simulink - PS converter**, який знаходиться в бібліотеці **Utilities**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Utilities (Simscape > Foundation library > Utilities)**.

Блок **Simulink - PS converter** переноситься з бібліотеки **Utilities** в

поле mdl - файлу. Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Simulink – PS converter** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі.

В полі **Input signal unit** (одиниці вимірювання вхідного сигналу) закладки **Units** (одиниці вимірювання) можна ввести одиниці вимірювання температури - Кельвіни, проте можна не вносити змін до цього поля і залишити одиниці вимірювання вхідного сигналу, які пропонуються поза вибором, тобто одиницю.

Інші поля закладки **Units** та закладки **Input handling** залишаються без змін.

Порт **A** потрібно з'єднати з нульовим рівнем температури. Нульовий рівень температури симулюється блоком **Thermal reference**, який знаходиться в бібліотеці **Thermal elements**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal elements (Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal elements)**. Блок **Thermal reference** переноситься з бібліотеки **Thermal elements** в поле mdl - файлу.

Оскільки до порту **S** блоку **Ideal temperature source** підводиться сигнал у вигляді температури, а порт **B** блоку **Ideal temperature source** з'єднується з портом **B** блоку **Convective heat transfer**, очевидно що блок **Thermal reference** потрібно з'єднати з портом **A** блоку **Ideal heat flow source**.

Увага ! За допомогою порту **A** блок **Ideal temperature source** може бути з'єднаним не тільки з блоком **Thermal reference**, але й з іншими блоками, що входять до бібліотеки **Simscape**.

Порт **B** блоку **Ideal heat flow source** потрібно з'єднати з портом **B** блоку **Convective heat transfer** для передачі сигналу у вигляді значення температури повітря навколишнього середовища від блоку **Conductive heat transfer** до блоку **Ideal temperature source**.

Подвійним натисканням лівої кнопки миші на піктограмі блоку **Convective heat transfer** потрібно відкрити вікно **Block parameters** (параметри блоку) для того, щоб змінити його налаштування відповідно до умов задачі.

Поза вибором закладка **Parameters** в полі **Settings** виглядає наступним чином (табл. 6.7):

Таблиця 6.7- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів поза вибором

Area:	1e – 4	m ²
Heat transfer coefficient:	20	W/(m ² * K)

На закладці **Parameters** в полі **Area** (площа) потрібно ввести значення площі торця та бічної поверхні металевого стрижня, від яких відводиться теплота до повітря навколишнього середовища.

Площа торця та бічної поверхні металевого стрижня визначається за формулою:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot L = \frac{3,14 \cdot (0,0225)^2}{4} + 3,14 \cdot 0,0225 \cdot 0,2 = 0,014527 \text{ м}^2 \quad (6.5)$$

В полі **Heat transfer coefficient** потрібно ввести значення коефіцієнта тепловіддачі, який, відповідно до умов задачі, дорівнює $\alpha = 32,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

Відповідно до умов задачі закладки **Parameters** в полі **Settings** потрібно ввести наступним чином (табл. 6.8):

Таблиця 6.8- Вікно присвоєння значень коефіцієнтів

Area:	0.014527	m^2
Heat transfer coefficient:	32.1	W/(m^2 * K)

Закладка **Variables** в полі **Settings** залишається без змін.

Таким чином, завершено конструювання тієї частини моделі, яка імітує відведення теплоти від металевого стержня до повітря навколишнього середовища (рис. 6.3).

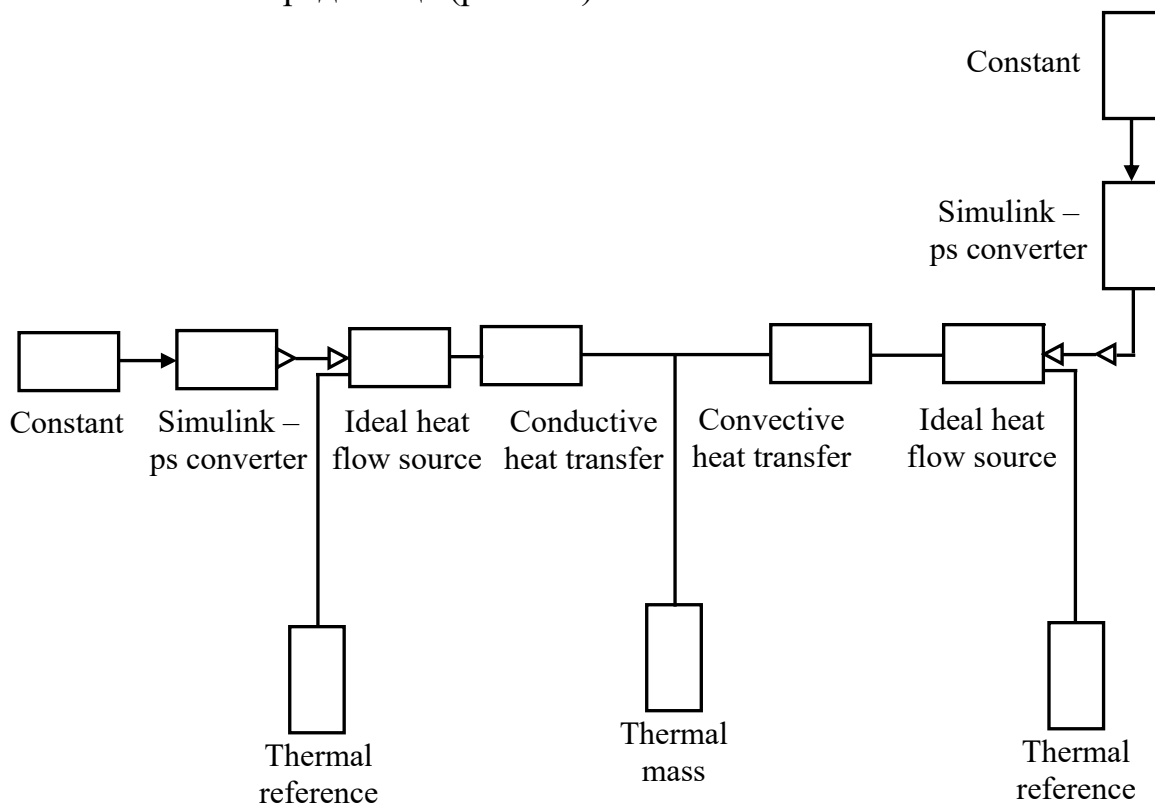


Рисунок 6.3 - Частина моделі, що імітує підведення теплоти до металевого стрижня та відведення теплоти від нього до повітря навколишнього середовища

Для візуалізації процесу теплообміну між джерелом теплоти, металевим стрижнем та повітрям навколишнього середовища можна скористатись блоком **Scope** (спостереження), який знаходиться в бібліотеці **Sinks**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Sinks** (**Simulink** > **Sinks**). Блок **Scope** переноситься з бібліотеки **Sinks** в поле mdl - файлу. Приєднання блоку **Scope** до моделі здійснюється

за допомогою блоку **Ideal temperature sensor** (сенсор температури), який становить собою прилад для вимірювання температури, а також блок **PS – Simulink converter**, за допомогою якого сигнал від блоку з бібліотек Simscape™ передається до блоку з бібліотек Simulink®. Блок **Ideal temperature sensor** знаходиться в бібліотеці **Thermal sensors**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Thermal sensors** (**Simscape > Foundation library > Thermal > Thermal sensors**). Блок **Ideal temperature sensor** переноситься з бібліотеки **Thermal sensors** в поле mdl - файлу.

Блок **PS – Simulink converter** знаходиться в бібліотеці **Utilities**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Utilities** (**Simscape > Foundation library > Utilities**). Блок **PS – Simulink converter** переноситься з бібліотеки **Utilities** в поле mdl - файлу.

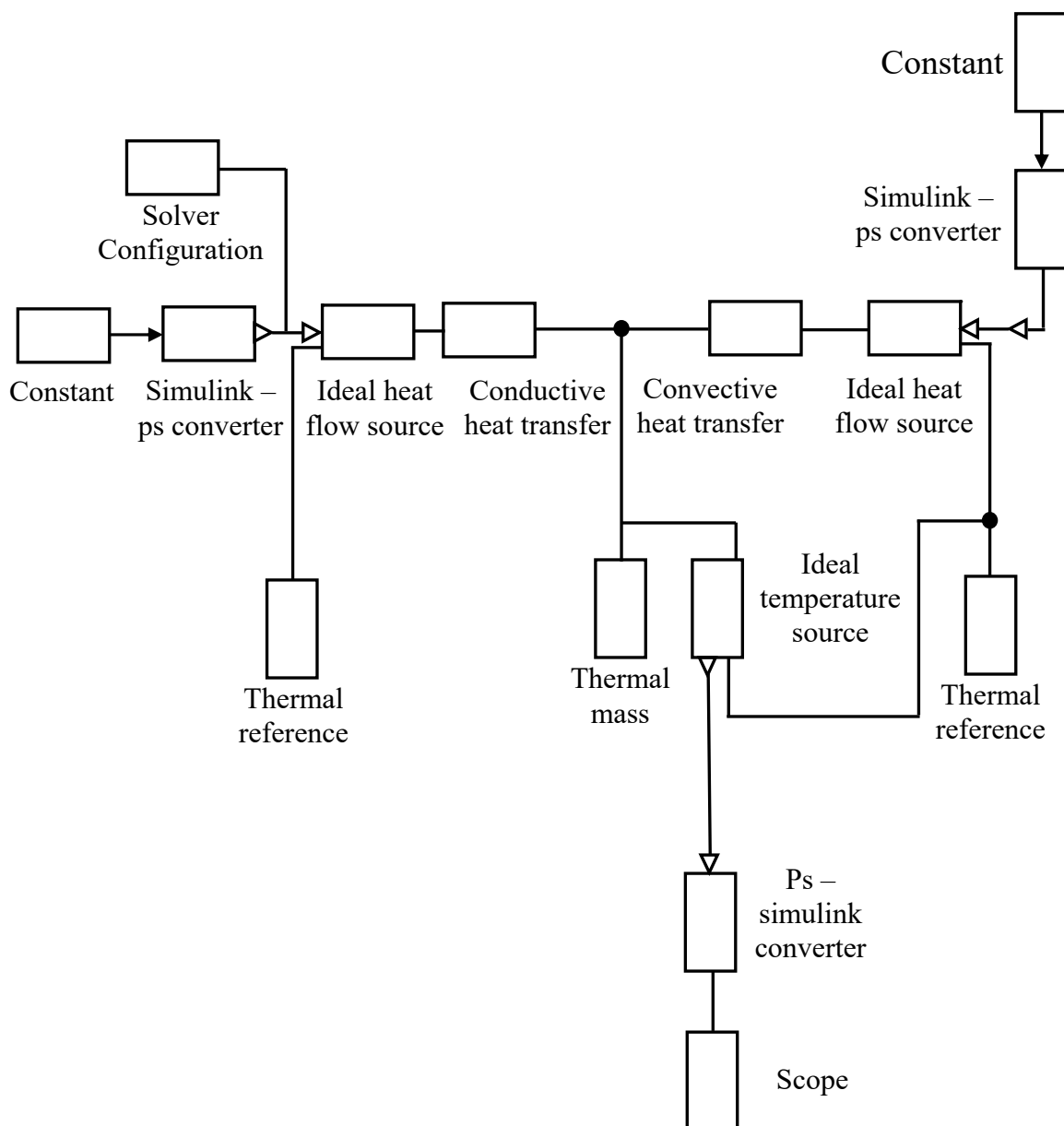


Рисунок 6.4 - Модель, що імітує підведення теплоти до металевго стрижня та відведення теплоти від нього до повітря навколишнього середовища

Для успішної симуляції моделі потрібно додати блок **Solver configuration**, який повинен міститись в кожному mdl - файлі Simscape™. Цей блок знаходиться в бібліотеці **Utilities**. Для відшукування цього блоку потрібно послідовно увійти до бібліотеки **Utilities (Simscape > Foundation library > Utilities)**. Блок **Solver configuration** переноситься з бібліотеки **Utilities** в поле mdl - файлу і приєднується до моделі довільним чином.

Остаточний вигляд моделі наведений на рисунку 6.4.

У вікні **Simulation stop time** mdl – файлу потрібно ввести проміжок часу симуляції (період нагрівання та охолодження металевого циліндра), який становить 2000с.

Запустити симуляцію моделі можна шляхом введення в командному рядку **MATLAB®**: run nagrev_tsilindra та натискання на клавіатурі кнопки **Enter**.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2т. / К. Флетчер.- М.: Мир, 1991.-Т 1.- 504с.
2. Shampine, L.F. Computer solution of ordinary differential equations / L.F. Shampine, M.K. Gordon.- W.H. Freeman & Co., 1975.
3. Большаков, В.И. Основы метода конечных элементов / В.И. Большаков, Е.А. Яценко, Г. Соссу.- Днепропетровск: Gaudeamus, 2000.- 256с.
4. Bathe, K.-J. Finite element procedures / K.J. Bathe.- New Jersey: Prentice Hall, 1996.- 1037p.
5. Zienkiewicz, O.C. The finite element method: 2 Volumes / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor.- Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.- Volume 1.- 689p.
6. Агипов, В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В.П. Агипов.- М.: АСВ, 2000.- 152с.
7. Егоров, В.И. Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности / В.И. Егоров.- СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2006.- 77с.
8. Dixon, A. Integrating COMSOL into a mathematical modeling course for chemical engineers / A. Dixon, D. Di Biasio // Proceedings of the COMSOL conference, october 9-11, 2008.- Boston.
9. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: в 2т. / Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 1985.- Т.2.- 560с.
10. Finlayson, B. Introduction to chemical engineering computing / B. Finlayson.- Hoboken, Wiley- Interscience, 2006.
11. Шевченко, Г.Л. Эффективные режимы работы и конструкции компактных регенераторов промышленных печей: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук : спец. 05.14.06 „Техническая теплофизика и промышленная теплоэнергетика” / Г.Л. Шевченко.- Днепропетровск, 2001.- 17с.
12. Geike, R. Comsol Multiphysics in education- chemical reactions, heat and mass transfer / R. Geike // Proceedings of the COMSOL conference, november 4-6, 2008.- Hannover.
13. Веселовский, В.Б. Математическое моделирование лазерного термического упрочнения без плавления поверхности / В.Б. Веселовский, А.И. Губин // Металургійна теплотехніка: Збірник наукових праць Національної металургійної академії України.- Дніпропетровськ: “Нова ідеологія”, 2008.- С. 47- 54.
14. Прикладные задачи металлургической теплофизики / В.И. Тимошпольский, Н.М. Беляев, А.А. Рядно [и др.]- Мн.: Наука и техника, 1991.- 320с.
15. Zienkiewicz, O. The finite element method for fluid dynamics / O. Zienkiewicz, R. Taylor, P. Nithiarasu.- Amsterdam: Elsevier / Butterworth-Heinemann, 2005.- 451p.

16. Johnson, C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method / C. Johnson.- Dover Publications, 2009.- 288p.
17. Белов, И.А. Моделирование турбулентных течений / И.А. Белов, С.А. Исаев.- СПб.: Питер, 2001.- 108с.
18. Smith, I.M. Programming the finite element method / I.M. Smith, D.V. Griffiths.- Chichester: John Wiley & Sons, 1988.- 469p.
19. Галушкин, Н.Е. Решатель пакета моделирования технических процессов / Н.Е. Галушкин, Н.Н. Язвинская, Д.Н. Галушкин.- Шахты: ИСОиП (филиал) ДГТУ, 2013.
20. Harari, I. What are C and h? Inequalities for the analysis and design of finite element methods / I. Harari, T. Hughes // Computer methods in applied mechanics and engineering.- 1992.- Vol. 97.- P. 157-192.
21. Donea, J. Finite element methods for flow problems / J. Donea, A. Huerta.- Chichester: John Wiley & Sons, 2003.- 350p.
22. YZ β discontinuity capturing for advection-dominated processes with application to arterial drug delivery / Y. Bazilevs, V. Calo, T. Tezduyar [et al.] // International journal for numerical methods in fluids // 2007.- Vol. 54.- P. 593-608.
23. Flow field and noise characteristics of a supersonic impinging jet [Text] / A. Krothapalli, E. Rajkuperan, F.Alvi [et al.] // Journal of Fluid Mechanics.- 1999.- Vol. 392.- P. 155-181.

ДЛЯ НОТАТКІВ

ДЛЯ НОТАТКІВ

Підписано до друку 12.04.2016 р. Формат 60х84\16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк.арк. 6,28.
Наклад 300 пр. Зам. № 50.

Видавництво і друкарня «Ліра».
49050, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 5.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
ДК № 188 від 19.09.2000.