

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Н. В. КАРЯЧЕНКО

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗДІЛ
«ДИНАМІКА»
ЧАСТИНА ІІІ

Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою ІІБТ УДУНТ
Протокол № 1 від 24.01.2022 р.

Дніпро 2022

УДК 531.8

Каряченко Н. В. Теоретична механіка. Розділ «Динаміка». Частина III : навч. посібник. — Дніпро : Україн. держ. ун-т науки і технол., 2022. — 32 с.

В третій частині навчального посібника «Теоретична механіка розділа «Динаміка» докладно розглянуті теми: «Динаміка твердого тіла», «Силове поле, потенціальне поле», «Відносний рух матеріальної точки».

Викладення теоретичних положень супроводжується необхідними ілюстраціями і розв'язанням відповідних прикладів.

Призначений для студентів спеціальностей: 131 — прикладна механіка, 133 — галузеве машинобудування та інших спеціальностей.

Іл. . Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск І. В. Добров, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: В. А. Ропай, д-р техн. наук, проф. (Дніпровський державний технічний університет)

В. О. Габрінець, д-р. техн. наук, проф. (Дніпровський національний університет ім. О. Гончара)

© Каряченко Н. В. 2022

© Український державний

університет науки і технологій, 2022

ВСТУП

Найважливішим елементом навчання сучасного інженера є прищеплення йому навичок самостійної роботи, творчого підходу, вміння швидко перелаштуватися на нове, якщо воно виявляється кращим і продуктивнішим старого, вміння не пересічно мислити. Теоретична механіка – фундаментальна дисципліна фізико-математичного циклу – розвиває не тільки загальноінженерну, а й загальнонаукову базу майбутнього фахівця.

Роль і значення теоретичної механіки полягає не тільки в тому, що вона є науковою базою багатьох областей сучасної техніки, а й в тому, що її закони і методи дозволяють вивчити і пояснити цілий ряд найважливіших явищ в навколишньому світі і сприяють подальшому зростанню і розвитку природознавства в цілому.

Теоретична механіка відноситься до розряду природничих наук, тобто наук про природу. Всі явища природи являють собою рух різних форм матерії. Одним з видів руху матерії, що виражається в зміні з плином часу взаємних положень тіл або частин тіла, є **механічний рух**. У цьому навчальному посібнику механічний рух будемо називати скорочено «рухом».

Положення і рухи тіл можуть бути визначені тільки по відношенню до будь-яких інших тіл.

У природі тіла взаємодіють один з одним. Взаємодія тіл може виражатися по-різному: наприклад, вона може полягати в передачі від одного тіла до іншого якоїсь кількості теплоти, електричного заряду та ін. **Механічною взаємодією** називають один з видів взаємодії матерії, що викликає зміну механічного руху тіл або частин тіла, а також перешкоджає зміні взаємних положень тіл або частин тіла.

Цілий комплекс дисциплін, які вивчають механічний рух і механічну взаємодію різних матеріальних тіл, об'єднують під загальною назвою механіка. До цих дисциплін відноситься, наприклад, прикладна механіка, зазвичай яка називається теорією машин і механізмів і вивчає загальні питання руху і роботи механізмів і машин. На базі механіки виникли і успішно розвиваються науки, які вивчають способи розрахунків машин і їх деталей, споруд (деталі машин, опір матеріалів, будівельна механіка). Також до механіки відносять цілий ряд наук, які займаються вивченням машин окремих галузей промисловості або

спеціальних споруд (механіка машин металургійного виробництва, механіка гірничих машин, механіка літальних апаратів і т. д. і т. п.).

Матеріальні тіла, вивченням руху яких займаються окремі з цих наук є зовсім різними між собою. Але всі ці науки мають багато спільного і об'єднані під назвою механіка не випадково: рухи матеріальних тіл, так само як і їх механічні взаємодії, мають багато загальних властивостей, незалежних від рухомих тіл. Наприклад, можна говорити про швидкість будь-якого тіла незалежно від того, що саме являє собою це тіло, будь то дощова крапля, футбольний м'яч, поршень або літак. Точно так само можна говорити про обертання матеріального тіла незалежно від того, чи є це тіло маховим колесом або планетою. Можна встановити, отже, загальні властивості руху матеріальних тіл незалежно від того, які саме матеріальні тіла здійснюють ці рухи. Аналогічно можна вивчати і механічні взаємодії, і їх загальні властивості, не цікавлячись тим, які саме фізичні тіла взаємодіють між собою.

Механічний рух і механічні взаємодії підкорюються певним законам. Ці закони носять об'єктивний характер, вони не придумані людьми і існують в природі незалежно від волі людей.

Теоретична механіка вивчає основні закономірності механічного руху і механічної взаємодії, загальні для будь-яких матеріальних тіл.

Для того щоб вивчити загальні властивості руху і взаємодії тіл, доводиться відволікатись (або, як кажуть, абстрагуватись) від несуттєвих особливостей, властивих саме даному тілу, відзначаючи лише важливе і загальне. Це призвело до понять матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.

Матеріальною точкою називають матеріальне тіло (тіло, яке має масу), розмірами якого при вивченні його руху в розглянутих конкретних умовах можна зневажати.

Практично дане тіло можна розглядати як матеріальну точку в тих випадках, коли відстані, які проходять точки тіла при його русі, дуже великі в порівнянні з розмірами самого тіла. Наприклад, матеріальною точкою можна вважати планету при вивченні її руху навколо Сонця.

Також матеріальними точками можна вважати матеріальні частинки, на які подумки розбивають будь-яке тіло при визначенні тих чи інших його динамічних характеристик.

Якщо ж нас цікавить рух одних частин тіла по відношенню до інших його частин, то неможливо, звичайно, знехтувати розмірами тіла і прийняти його за матеріальну точку. Але можна взяти за матеріальні точки окремі частини тіла і розглядати рух тіла як рух цих матеріальних точок. При вивченні руху декількох тіл часто виявляється можливим окремі тіла прийняти за матеріальні точки і тим самим значно спростити задачу. Так, наприклад, вивчаючи рухи планет навколо Сонця або супутників навколо планети, іноді приймають всі ці тіла за матеріальні точки. Таким чином, приходять до поняття механічної системи, або системи матеріальних точок.

Систему матеріальних точок часто коротко називають системою. Якщо відстані між окремими точками системи не змінюються, то її називають незмінною матеріальною системою, або **абсолютно твердим тілом**. Вважаючи тіла абсолютно твердими, не враховують деформацій, які виникають в реальних тілах. Це значно спрощує вивчення механічного руху і механічних взаємодій.

При вивченні руху якогось тіла можна прийняти це тіло за матеріальну точку, якщо не цікавить рух одних частин тіла по відношенню до інших його частин, а цікавить лише загальний поступальний рух тіла.

Іноді ж виявляється зручним прийняти частини будь-якого тіла або ланки механізму за окремі точки і розглядати все тіло або весь механізм як систему матеріальних точок. Таким чином, в різних задачах теоретичної механіки одне і те ж матеріальне тіло може бути прийнято і за матеріальну точку, і за абсолютно тверде тіло, і за систему матеріальних точок.

Так, наприклад, при вивченні руху Землі навколо Сонця можна вважати Землю (як і Сонце) матеріальною точкою, але при вивченні обертання Землі навколо осі, Земля вважається абсолютно твердим тілом.

Теоретичну механіку зазвичай поділяють на три розділи: статику, кінематику і динаміку.

У статичі розглядаються механічні силові взаємодії матеріальних тіл в рівноважних їх станах.

У кінематиці встановлюються методи вивчення механічних рухів матеріальних тіл і їх систем, що відбуваються в просторі і в часі, але поза зв'язку з механічними взаємодіями, які зумовлюють ці рухи.

Динаміка ставить за мету вивчення руху матеріальних тіл у зв'язку з механічними взаємодіями між ними. При цьому динаміка запозичує у статичи

закони додавання сил і приведення складних їх сукупностей до найпростішого виду і користується прийнятими в кінематиці прийомами опису рухів.

Завданням динаміки є встановлення законів зв'язку діючих сил з кінематичними характеристиками рухів і застосування цих законів до вивчення окремих видів рухів.

Динаміка є основним і найбільш загальним розділом теоретичної механіки.

1. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Як відомо, частковим випадком матеріальної системи є абсолютно тверде тіло.

Подібно тому, як і в кінематиці, у динаміці твердого тіла будемо розглядати поступальний рух, обертальний рух тіла навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла і т. д.

Варто пам'ятати про те, що внутрішні сили у твердому тілі врівноважуються. Тому з усіх сил, прикладених до твердого тіла, варто розглядати тільки зовнішні сили.

Якщо ж додержуватись іншої класифікації сил, характерної для невільного твердого тіла, то сили, що діють на тверде тіло, варто поділяти на активні сили і на реакції в'язів. Застосовуючи принцип звільнення від в'язів, невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, але таке, до якого необхідно прикласти систему сил, одержану в результаті звільнення тіла від в'язів.

1.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальний рух твердого тіла характеризується рухом однієї його точки – центра інерції (центра мас). Тому, застосовуючи теорему про рух центра мас системи матеріальних точок, одержимо *диференціальне рівняння поступального руху твердого тіла*

$$M\vec{a}_c = \vec{R}^e, \quad (1.1)$$

де $\vec{a}_c$ – прискорення центра мас тіла, M – маса тіла, $\vec{R}^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

Якщо ми знайдемо прискорення центра мас, тим самим ми знайдемо прискорення всіх точок твердого тіла, тому що при поступальному русі всі точки твердого тіла мають однакові прискорення.

Спроектуємо рівність (1.1) на осі декартової системи координат

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e$$

– диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в координатному вигляді.

Інтегруючи ці диференціальні рівняння ми можемо визначити координати центра мас як функції часу, а отже, охарактеризувати цілком поступальний рух твердого тіла. Сталі інтегрування, як і раніше, визначаються з початкових умов.

1.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі ми розглядали як приклад при вивченні теореми про момент кількості руху системи матеріальних точок

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z, \quad (1.2)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, $\ddot{\varphi}$ – друга похідна за часом від кута повороту твердого тіла, M_z – сума моментів усіх сил, що діють на тверде тіло відносно осі обертання.

Інтегруючи двічі диференціальне рівняння обертання твердого тіла (1.2) за часом, знайдемо закон обертального руху твердого тіла. Довільні сталі інтегрування визначаються з початкових умов.

1.2.1. Визначення динамічних складових опорних реакцій твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Поставимо перед собою задачу визначити взаємодію твердого тіла, що обертається, з опорами нерухомої осі.

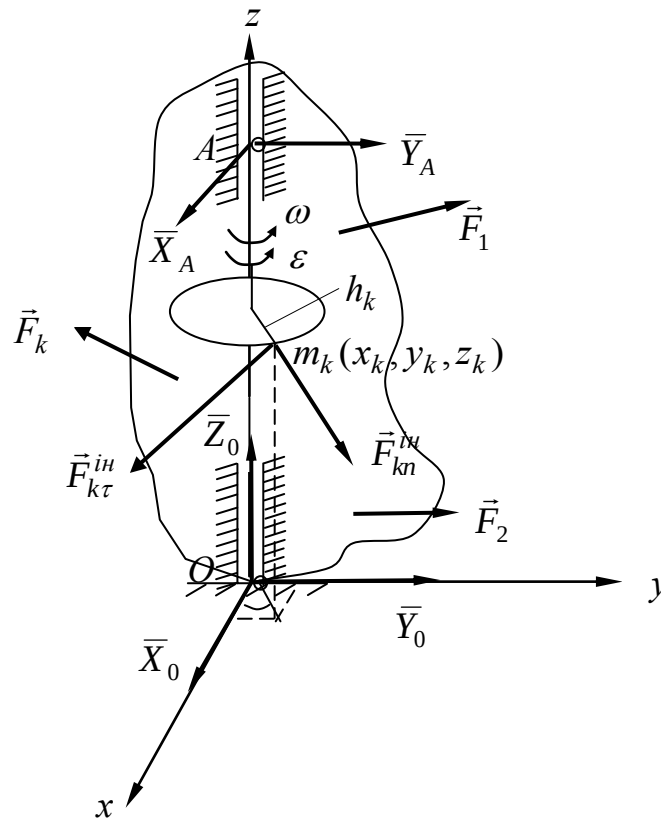


Рис.1.1

Допустимо, що тверде тіло кріпиться до нерухомої осі в двох точках O і A (рис.1.1). Це кріплення тіла до осі конструктивно оформлюється звичайно у вигляді двох підшипників, якщо вісь обертання тіла горизонтальна, або підшипника (у точці A) і підп'ятника (у точці O), якщо вісь обертання вертикальна або похила.

Підп'ятник у т. O не дає можливості осі обертання тіла переміщатися вертикально, а дає можливість повертатися (обертатися). Підшипник у т. A дає можливість переміщатися осі вертикально і повертатися. Реакція в підп'ятнику розкладається на 3 складових: $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$. Реакція в підшипнику – на 2 складових: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$.

Крім опорних реакцій на тіло може діяти скільки завгодно сил.

Розіб'ємо тіло на маленькі частки. Розглянемо одну частку масою m_k , що знаходиться на відстані h_k від осі обертання. Ця частка при обертанні тіла описує окружність радіуса h_k .

Застосовуючи принцип Даламбера, прикладемо до цієї частки сили інерції $\vec{F}_{kn}^{in}$ і $\vec{F}_{k\tau}^{in}$.

Зробимо попередні заготовки.

Прискорення складається з двох складових: a_{kn} – нормального $a_{kn} = \omega^2 h_k$ і $a_{k\tau}$ – тангенціального $a_{k\tau} = \varepsilon h_k$.

Нормальне прискорення направлене від точки до осі обертання, отже, $\vec{F}_{kn}^{in}$ буде направлена від осі обертання (у зворотній бік прискоренню). При прискореному обертанні $a_{k\tau}$ буде направлене у бік обертання, перпендикулярно h_k , а отже, $\vec{F}_{k\tau}^{in}$ – у зворотній бік, як показано на рисунку.

$$F_{kn}^{in} = m_k \omega^2 h_k,$$

$$F_{k\tau}^{in} = m_k \varepsilon h_k.$$

Спроекуємо ці дві сили на осі координат

$$F_{knx}^{in} = m_k \omega^2 h_k \cos \alpha = m_k \omega^2 x_k,$$

$$F_{kny}^{in} = m_k \omega^2 h_k \sin \alpha = m_k \omega^2 y_k,$$

$$F_{knz}^{in} = 0,$$

$$F_{k\tau x}^{in} = m_k \varepsilon h_k \cos(90^\circ - \alpha) = m_k \varepsilon h_k \sin \alpha = m_k \varepsilon y_k,$$

$$F_{k\tau y}^{in} = -m_k \varepsilon h_k \sin(90^\circ - \alpha) = -m_k \varepsilon h_k \cos \alpha = -m_k \varepsilon x_k,$$

$$F_{k\tau z}^{in} = 0.$$

Система сил, реакцій в'язів і сил інерції, що діють на тверде тіло буде просторовою довільною системою сил.

Умови рівноваги такої системи складають 6 рівнянь – 3 суми проекцій на осі x, y, z , 3 суми моментів відносно осей x, y, z .

Складемо ці шість рівнянь

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + X_0 + X_A + \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k \right) \omega^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k y_k \right) \varepsilon = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_0 + Y_A + \left(\sum_{k=1}^n m_k y_k \right) \omega^2 - \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k \right) \varepsilon = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kx} - Y_A l - \left(\sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \right) \omega^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \right) \varepsilon = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{ky} + X_A l + \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \right) \omega^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \right) \varepsilon = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kz} - \left(\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \right) \varepsilon = 0,$$

де $l = OA$, $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$ – сума проєкцій всіх активних сил, відповідно

на осі x , y , z , $\sum_{k=1}^n M_{kx}$, $\sum_{k=1}^n M_{ky}$, $\sum_{k=1}^n M_{kz}$ – сума моментів всіх активних сил відносно осей x , y , z відповідно.

Шосте рівняння дає диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі ($M_z = I_z \ddot{\phi}$), опорні реакції в нього не входять.

Третє рівняння $\sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_0 = 0$ дозволяє обчислити Z_0 , кутова швидкість

ω і кутове прискорення ε в нього не входять. Це рівняння статички.

Для визначення опорних реакцій при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі третє і шосте рівняння можна не розглядати.

Визначимо множники, що стоять перед ω^2 і ε через геометричні масові характеристики системи матеріальних точок.

З визначення координат центра мас

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M},$$

одержимо

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = M x_c,$$

$$\sum_{k=1}^n m_k y_k = M y_c.$$

Позначимо

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = \int_M xz dm = I_{xz} - \text{відцентровий момент інерції відносно осей } xz,$$

$$\sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = \int_M yz dm = I_{yz} - \text{відцентровий момент інерції відносно осей } yz.$$

З огляду на введені позначення перепишемо чотири рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_0 + X_A + Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_0 + Y_A + My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{kx} - Y_A l - I_{yz} \omega^2 + I_{xz} \varepsilon &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{ky} + X_A l + I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Маємо 4 рівняння відносно 4 невідомих X_0, Y_0, X_A, Y_A .

Для виділення тільки динамічної складової в кожній реакції, представимо кожен з них у вигляді суми статичної і динамічної складових

$$\begin{cases} X_0 = X_0^C + X_0^D \\ Y_0 = Y_0^C + Y_0^D \\ X_A = X_A^C + X_A^D \\ Y_A = Y_A^C + Y_A^D \end{cases}, \quad (1.4)$$

де $X_0^C, Y_0^C, X_A^C, Y_A^C$ – опорні реакції, коли $\omega = 0$ і $\varepsilon = 0$, тобто відсутнє обертання, і які задовольняють рівнянням статички

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_0^C + X_A^C = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_0^C + Y_A^C = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_{kx} - Y_A^C l = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_{ky} + X_A^C l = 0 \end{array} \right. . \quad (1.5)$$

Підставимо (1.4) у рівняння (1.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_0^C + X_A^C + X_0^D + X_A^D + Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_0^C + Y_A^C + Y_0^D + Y_A^D + My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_{kx} - Y_A^C l - Y_A^D l - I_{yz} \omega^2 + I_{xz} \varepsilon = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_{ky} + X_A^C l + X_A^D l + I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon = 0 \end{array} \right. .$$

З огляду на вираз (1.5), остаточно одержимо

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^D + X_A^D + Mx_c \omega^2 + My_c \varepsilon = 0 \\ Y_0^D + Y_A^D + My_c \omega^2 - Mx_c \varepsilon = 0 \\ -Y_A^D l - I_{yz} \omega^2 + I_{xz} \varepsilon = 0 \\ X_A^D l + I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon = 0 \end{array} \right. . \quad (1.6)$$

Якщо необхідно, щоб динамічні складові опорних реакцій були відсутні, необхідно щоб центр мас тіла лежав на осі обертання, тобто щоб $x_c = 0$, $y_c = 0$.

Але при цьому динамічні складові не будуть дорівнювати нулю, а будуть тільки рівні по величині і протилежні по напрямку, тобто

$$X_0^D = -X_A^D,$$

$$Y_0^D = -Y_A^D.$$

Це видно з перших двох рівнянь системи (1.6).

Для того, щоб динамічні добавки дорівнювали нулю, необхідно ще щоб $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$, що видно з третього і четвертого рівнянь (1.6).

Таким чином, щоб при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі не виникали динамічні складові опорних реакцій, необхідно і досить, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції твердого тіла.

1.3. Динаміка плоскопаралельного руху твердого тіла

При плоскопаралельному русі твердого тіла відстань від будь-якої точки твердого тіла до деякої заданої площини залишається незмінною під час усього руху.

При плоскопаралельному русі досить дослідити рух плоскої фігури, яка одержана шляхом перерізу твердого тіла, площиною паралельною заданій, тим самим ми будемо знати рух усього тіла.

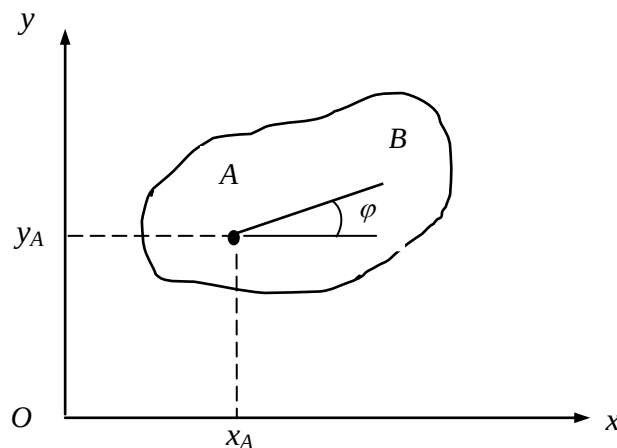


Рис.1.2

При плоскопаралельному русі рівняння руху мають вигляд

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

Щоб визначити функції часу x_A, y_A, φ необхідно зв'язати другі похідні цих функцій із силовими факторами, що діють на тверде тіло, яке здійснює плоскопаралельний рух, тобто записати диференціальні рівняння динаміки плоскопаралельного руху тіла.

Як відомо з кінематики, рух плоскої фігури в її площині можна розкласти на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. За полюс виберемо центр мас тіла. При заданих зовнішніх силах $\vec{F}_k$ нам доведеться вирішувати динамічну задачу про визначення закону руху тіла разом з центром мас і закону руху тіла відносно центра мас.

Для вирішення цієї задачі застосуємо теорему про рух центра мас системи матеріальних точок і теорему про момент кількості руху (кінетичний момент) системи матеріальних точок

$$M\vec{a}_c = \vec{R}^e, \quad \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c^e,$$

де $\vec{L}_c = I_c \vec{\omega}$ – момент кількості руху тіла відносно центра мас, отже,

$$I_c \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_c^e,$$

або

$$I_c \cdot \ddot{\varphi} = \vec{M}_c^e,$$

де $\vec{R}^e$ – головний вектор усіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла

$\vec{R}^e = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$, $\vec{M}_c^e$ – головний момент зовнішніх сил відносно центра мас.

Відповідно диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла будуть

$$\begin{aligned} M\vec{a}_c &= \vec{R}^e, \\ I_c \ddot{\varphi} &= \vec{M}_c^e. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Рівнянням (1.7) у векторній формі відповідають три рівняння у скалярній формі

$$\begin{aligned}
M \ddot{x}_c &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \\
M \ddot{y}_c &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \\
I_{cz} \ddot{\varphi} &= \sum_{k=1}^n M_{kcz}^e,
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

де I_{cz} – момент інерції відносно осі Cz , що проходить через центр мас, перпендикулярно площині XOY , $\sum_{k=1}^n M_{kcz}^e$ – сума моментів сил відносно осі Cz , що проходить через центр мас.

Інтегруючи рівняння (1.8) при даних початкових умовах, визначимо рух центра мас тіла, тобто знайдемо $x_c = x_c(t)$ і $y_c = y_c(t)$, і відносний рух тіла відносно центра мас, тобто знайдемо $\varphi = \varphi(t)$.

Приклад.

Шків радіуса r і масою m обмотаний ниткою, кінець якої прикріплений до стелі.

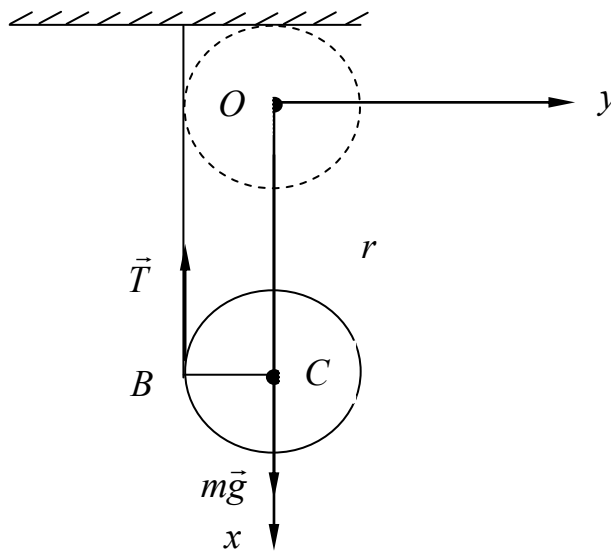


Рис.1.3

Центр шківів знаходиться в т. O . У початковий момент часу, шків відпускають, нитка починає розмотуватися, а шків рухатись вниз, виконуючи плоско паралельний рух. Знайти прискорення центра мас шківів, кутове прискорення і натяг нитки.

Точка B – точка сходу нитки зі шківів – є миттєвим центром швидкості шківів при його плоско паралельному русі.

Для визначення кутового прискорення шківів і прискорення центра ваги шківів застосуємо диференціальні рівняння руху (1.8).

На шків діє сила ваги і натяг нитки.

Початок координат сумістимо з початковим положенням центра мас шківів.

Спроектуємо перші два рівняння (1.8) на осі x і y

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_c &= mg - T, \\m\ddot{y}_c &= 0.\end{aligned}$$

Складемо обертальне рівняння руху відносно центра мас

$$I_c\ddot{\varphi} = T \cdot r,$$

де $I_c = \frac{mr^2}{2}$ – момент інерції суцільного однорідного диска.

Швидкість центра мас $\dot{x}_c = \omega \cdot r = \dot{\varphi} r$, тоді $\ddot{x}_c = \ddot{\varphi} \cdot r$, отже $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_c}{r}$.

Підставляємо I_c й $\ddot{\varphi}$ у диференціальне рівняння обертання відносно центра мас

$$\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_c}{r} = T \cdot r,$$

звідси

$$T = \frac{m\ddot{x}_c}{2}.$$

Складемо отриманий вираз з диференціальним рівнянням, спроектованим на вісь x , щоб виключити натяг нитки

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_c = mg,$$

отже,

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3}g,$$

$$T = \frac{m}{2} \frac{2}{3} g = \frac{1}{3} mg,$$

$$\varepsilon = \frac{\ddot{x}_c}{r} = \frac{2}{3} \frac{g}{r}.$$

Розглянемо як буде рухатися центр мас шків по осі y .

З рівняння

$$m \ddot{y}_c = 0$$

виходить, що $\ddot{y}_c = 0$.

Інтегруючи це диференціальне рівняння, одержимо

$$\dot{y}_c = C_1, \quad y_c = C_1 t + C_2.$$

При $t = 0$, $y_c = 0$, $\dot{y}_c = 0$, звідси $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Таким чином, підставивши довільні сталі у вираз y_c , одержимо $y_c = 0$ у будь-який момент часу, тобто центр мас диска по осі y не переміщується.

2. СИЛОВЕ ПОЛЕ, ПОТЕНЦІАЛЬНЕ ПОЛЕ

Силовим полем називається обмежена чи необмежена частина простору, в якій на матеріальну точку діє сила, що є однозначною функцією координат точки і яка не залежить від швидкості точки.

Прикладом силових полів можуть служити відомі з фізики поле земного тяжіння, електростатичне, магнітне, електромагнітне поля і т. п.

Розрізняють стаціонарні і нестаціонарні силові поля.

Стаціонарним силовим полем називається таке поле, в якому сила явно не залежить від часу, у противному випадку силове поле називається *нестаціонарним*.

Ми будемо розглядати тільки стаціонарні силові поля.

У стаціонарному силовому полі сила, а, значить і її проекції на осі координат, є функціями координат, тобто

$$F_x = F_x(x, y, z); \quad F_y = F_y(x, y, z); \quad F_z = F_z(x, y, z).$$

Стационарне силове поле називається *потенціальним*, якщо в ньому можна побудувати таку функцію $U(x,y,z)$, що частинна похідна від цієї функції по будь-якій координаті буде дорівнювати проекції сили поля, що діє на дану матеріальну точку, на цю координатну вісь, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \quad (2.1)$$

Елементарна робота від сили поля на будь-якому переміщенні буде дорівнювати:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

звідси

$$A = \int_0^A dA = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1,$$

$$A = U_2 - U_1. \quad (2.2)$$

$U(x,y,z)$ – скалярна функція координат точок поля, названа *силовою функцією* або *потенціалом*.

З (2.2) видно, що робота сили потенціального силового поля не залежить від форми траєкторії переміщення матеріальної точки, а залежить тільки від її кінцевого і початкового положення.

Крім того, звідси виходить, що робота сили потенціального силового поля на замкнутій траєкторії дорівнює нулю, тому що $U_2 = U_1$ як значення силової функції в одній і тій же точці.

1) Вигляд силової функції в полі *сил земного тяжіння* буде

$$U = -mgz + C,$$

тому що $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$, тоді $dA = -mgdz = d(-mgz)$.

2) Силова функція *лінійної сили пружності* визначається по формулі

$$U = -\frac{cr^2}{2} + C = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C.$$

При лінійному розтяганні пружини ($y = 0, z = 0$)

$$U = -\frac{cx^2}{2} + C,$$

тому що $F_x = -cx = \frac{\partial U}{\partial x}$, а $dA = -cxdx = d\left(-\frac{cx^2}{2}\right)$.

Якщо силова функція $U(x, y, z)$ дорівнює сталій величині, тобто $U(x, y, z) = \text{const} = C$, то отримаємо рівняння поверхні, для всіх точок якої силова функція має одне і те ж значення. Така поверхня називається еквіпотенціальною поверхнею або поверхнею рівного рівня для даної сили $\vec{F}$. Надаючи сталій C різних значень, одержимо сімейство еквіпотенціальних поверхонь.

2.1. Потенціальна енергія матеріальної точки

У випадку потенціального силового поля поряд із силовою функцією можна ввести іншу функцію, що характеризує запас енергії в даній точці поля – потенціальну енергію в цій точці, або потенціальну енергію матеріальної точки в розглянутій точці силового поля.

Потенціальною енергією Π матеріальної точки в даному її положенні називається робота, яку виконують сили поля, при переміщенні точки з даного положення в положення з «нульовим» потенціалом.

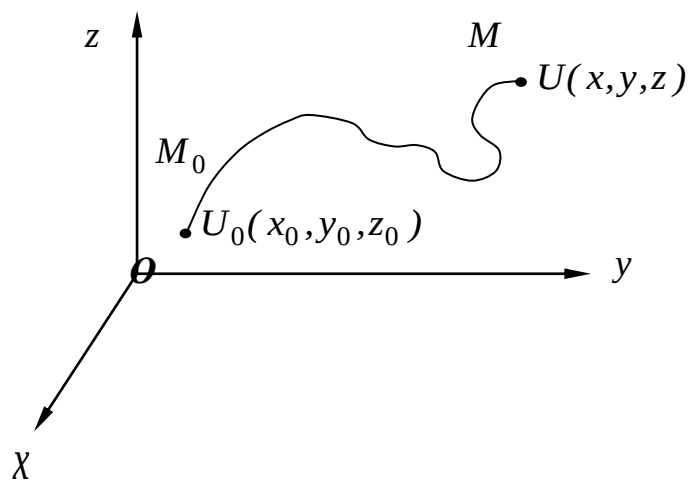


Рис.2.1

$U_0(x_0, y_0, z_0)$, $U(x, y, z)$ – значення силових функцій у точці з «нульовим» потенціалом і в довільній точці.

Потенціальна енергія в будь-якій точці дорівнює

$$\Pi = A = U_0 - U.$$

2.2. Закон збереження механічної енергії матеріальної точки

Якщо на матеріальну точку не діють ніякі сили, крім сил потенціального силового поля, то сума кінетичної і потенціальної енергії точки (повна механічна енергія) під час усього руху залишається величиною постійною

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const}.$$

Доказ.

Потенціальна енергія в початковій точці Π_1 дорівнює

$$\Pi_1 = U_0 - U_1,$$

у кінцевій точці

$$\Pi_2 = U_0 - U_2,$$

звідси

$$U_1 = U_0 - \Pi_1,$$

$$U_2 = U_0 - \Pi_2.$$

При переміщенні точки з початкового положення в кінцеве, теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки запишеться у вигляді

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A = U_2 - U_1 = U_0 - \Pi_2 - (U_0 - \Pi_1) = -\Pi_2 + \Pi_1.$$

Переносячи Π_2 в ліву частину, а $\frac{mv_1^2}{2}$ – у праву частину, одержимо,

$$\frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1.$$

Внаслідок того, що початкова і кінцева точки обрані довільно, то звідси виходить, що в будь-якій точці

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const},$$

що і було потрібно довести.

Приклад.

Головну частину установки для випробування матеріалів ударом складає важка сталева виливка M , прикріплена до стержня, що може обертатися, майже без тертя, навколо нерухомої горизонтальної осі O . Нехтуючи масою стержня, розглядаємо виливку M як матеріальну точку, для якої відстань $OM = 0,981$ м. Визначити швидкість v цієї точки в нижньому положенні B , якщо вона падає з верхнього положення A з мізерно малою початковою швидкістю.

Для розв'язання задачі застосуємо закон збереження механічної енергії

$$\frac{mv_B^2}{2} + \Pi_B = \frac{mv_A^2}{2} + \Pi_A,$$

де $\Pi_B = 0$, тому що вважаємо точку B – точкою з нульовим потенціалом.

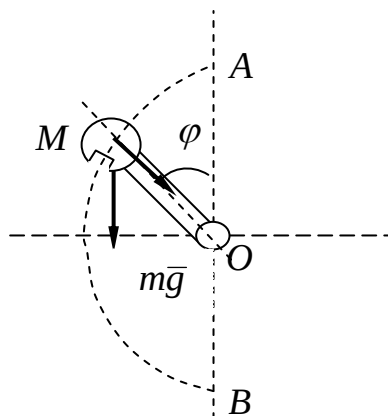


Рис.2.2

$$П_A = mg2l.$$

Підставимо вираз для $П_A$ в закон збереження механічної енергії

$$\frac{mv_B^2}{2} = mg2l, \Rightarrow v_B = 2\sqrt{gl} = 2\sqrt{0,981 \cdot 9,81} = 6,2 \text{ (м/с)}.$$

2.3. Рух системи матеріальних точок у силовому потенціальному полі

Із визначення силового поля виходить, що якщо в силовому полі знаходиться система, що складається з n матеріальних точок, то сила, що діє на кожну точку системи, буде функцією $3n$ координат.

Так само і її проекції на координатні осі будуть виражатися однозначними і безперервними функціями $3n$ координат

$$\left. \begin{aligned} F_{kx} &= F_{kx}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \\ F_{ky} &= F_{ky}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \\ F_{kz} &= F_{kz}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \right\}, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Тоді можна побудувати функцію

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \quad (2.3)$$

яка також залежить від $3n$ координат.

Якщо нам вдасться побудувати таку функцію, що

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = F_{kx}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_k} = F_{ky}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_k} = F_{kz}, \quad (2.4)$$

то таке поле буде *силовим потенціальним полем*.

Таким чином, *силовим потенціальним полем* називається таке силове поле, в якому можна побудувати функцію U – (2.3), що залежить від усіх координат точок, таку, що частинні похідні від цієї функції по відповідній

координаті дорівнюють проекції сили поля, що діє на k -ту точку системи на відповідну вісь – (2.4).

Функцію $U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, як і відповідну функцію для однієї матеріальної точки, називають *силовою функцією системи матеріальних точок*.

Обчислимо роботу сил поля.

Елементарна робота всіх сил поля, що діють на систему матеріальних точок, буде дорівнювати

$$dA = \sum_{k=1}^n (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right) = dU.$$

Елементарна роботи всіх сил поля, що діють на механічну систему, дорівнює повному диференціалу силової функції.

Повна робота дорівнює

$$A = \int_0^A dA = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1, \quad (2.5)$$

де U_2 – значення силової функції U у кінцевому положенні системи, U_1 – у початковому положенні.

З (2.5) видно, що робота всіх сил потенціального силового поля прикладених до системи матеріальних точок, при переміщенні системи з одного положення в інше не залежить від траєкторії переміщення точок системи, а залежить від початкового і кінцевого її положення.

2.4. Потенціальна енергія системи матеріальних точок

Потенціальною енергією системи матеріальних точок називають роботу, що можуть виконати сили поля, які діють на точки системи, при переміщенні системи з даного положення в положення з «нульовим» потенціалом

$$П = U_0 - U,$$

де U – значення силової функції, що відповідає положенню де система знаходиться; U_0 – значення силової функції в положенні з «нульовим» потенціалом.

2.5. Закон збереження механічної енергії системи матеріальних точок

Якщо на систему матеріальних точок не діють ніякі сили, крім сил потенціального силового поля, то сума кінетичної і потенціальної енергії системи (повна механічна енергія системи) зберігає постійне значення під час усього руху системи

$$T + \Pi = \text{const} . \quad (2.6)$$

Доказ.

Аналогічно, як і для однієї матеріальної точки, маємо

$$\Pi_1 = U_0 - U_1, \Rightarrow U_1 = U_0 - \Pi_1;$$

$$\Pi_2 = U_0 - U_2, \Rightarrow U_2 = U_0 - \Pi_2.$$

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок

$$T_2 - T_1 = A = U_2 - U_1 = U_0 - \Pi_2 - (U_0 - \Pi_1) = -\Pi_2 + \Pi_1,$$

або

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1.$$

Внаслідок того, що положення системи матеріальних точок взяті довільно, то

$$T + \Pi = \text{const} ,$$

що і було потрібно довести.

У випадку абсолютно твердого тіла робота всіх внутрішніх сил дорівнює нулю, і отже, потенціальна енергія внутрішніх сил є сталою величиною, яку можна вважати рівною нулю. Тоді в (2.6) за потенціальну енергію варто

прийняти тільки потенціальну енергію зовнішніх сил, що разом з кінетичною енергією є сталою величиною. При русі змінюваної механічної системи сума кінетичної енергії системи і потенціальної енергії зовнішніх сил не є сталою. Вона стає постійною тільки разом з потенціальною енергією внутрішніх сил. Механічні системи, для яких виконується закон збереження механічної енергії, називаються *консервативними*.

3. ВІДНОСНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Нехай система координатних осей $O_1x_1y_1z_1$ (система відліку) має відомий нам рух відносно «нерухомої» системи відліку $Oxyz$. Під *нерухомою системою відліку* розуміється інерціальна система відліку, тобто така система, в якій застосовуються закони Ньютона. Знаючи сили, що діють на дану матеріальну точку, потрібно знайти рух цієї точки відносно рухомої системи $O_1x_1y_1z_1$, тобто знайти її відносний рух. Для вирішення цієї задачі потрібно спочатку скласти диференціальні рівняння *відносного руху точки*, проінтегрувавши ці рівняння, знайдемо шуканий рух.

Відповідно до другого закону Ньютона при русі матеріальної точки відносно *нерухомої* (інерціальної) системи відліку маємо

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N},$$

де $\vec{a}$ позначає абсолютне прискорення точки (прискорення відносно нерухомої системи відліку), $\vec{F}$ – задану силу, що діє на цю точку, $\vec{N}$ – реакцію в'язів.

З кінематики відомо, що абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

де $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_c$ – позначають відповідно відносне, переносне і коріолісове прискорення точки.

Підставляючи це значення $\vec{a}$ в попередню рівність, одержимо

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c.$$

Векторна величина $-m\vec{a}_e$, яка дорівнює по модулю добутку маси точки на модуль її переносного прискорення і направлена протилежно переносному прискоренню називається *переносною силою інерції*; точно так само векторна величина $-m\vec{a}_c$ називається *коріолісовою силою інерції*.

Якщо ввести позначення

$$-m\vec{a}_e = \vec{F}_e^{in}, \quad -m\vec{a}_c = \vec{F}_c^{in},$$

то попереднє рівняння прийме наступний вигляд:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_c^{in}. \quad (3.1)$$

Це і є диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки у векторній формі.

Проектуючи це рівняння на рухомі осі $O_1x_1y_1z_1$, і беручи до уваги, що

$$a_{rx_1} = \ddot{x}_1, \quad a_{ry_1} = \ddot{y}_1, \quad a_{rz_1} = \ddot{z}_1$$

одержимо диференціальні рівняння відносного руху в координатній формі

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1} + N_{x_1} + F_{ex_1}^{in} + F_{cx_1}^{in} \\ m\ddot{y}_1 &= F_{y_1} + N_{y_1} + F_{ey_1}^{in} + F_{cy_1}^{in} \\ m\ddot{z}_1 &= F_{z_1} + N_{z_1} + F_{ez_1}^{in} + F_{cz_1}^{in} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Звідси приходимо до наступного висновку.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки варто писати в тому ж вигляді, як і рівняння її руху відносно нерухомої системи відліку, але тільки, до діючих на точку заданої сили і реакції в'язів, потрібно приєднати ще переносну силу інерції і силу інерції Коріоліса, або іншими словами:

відносно рухомих осей матеріальна точка рухається так само, як якби ці осі були нерухомі і якби до цієї точки, крім сил, що діють на неї, були прикладені ще сили $\vec{F}_e^{in}$ і $\vec{F}_c^{in}$.

Розглянемо деякі окремі випадки відносного руху матеріальної точки.

1) Нехай рухома система відліку має поступальний рух.

У цьому випадку $\vec{a}_c = 0$, і отже, $\vec{F}_c^{in} = 0$, а тому будемо мати

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in}.$$

Відповідно спрощуються в цьому випадку диференціальні рівняння (3.2), в яких зникають члени, що виражають проекції сили інерції Коріоліса на рухомі осі.

2) Нехай рухома система відліку рухається поступально, прямолінійно і рівномірно.

Тоді

$$\vec{a}_c = \vec{a}_e = \vec{0}$$

і

$$\vec{F}_c^{in} = \vec{F}_e^{in} = \vec{0}.$$

У цьому випадку будемо мати

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N}.$$

Це рівняння показує, що в системі відліку, що має відносно нерухомої системи рівномірний, прямолінійний поступальний рух, другий закон Ньютона застосовується в тій же самій формі, як і в нерухомій системі, і що, отже, така система відліку є інерціальною.

Звідси виходить, що *всі механічні явища в системі відліку, що має відносно нерухомої системи прямолінійний рівномірний поступальний рух, відбуваються так само, як і в нерухомій системі*, і тому ніякими спостереженнями в даній системі над цими явищами такого руху системи відліку знайти не можна. Так, наприклад, спостерігач, що знаходиться в трюмі теплохода, що рухається поступально, прямолінійно і рівномірно, не зможе встановити чи рухається теплохід чи стоїть на місці. Цей важливий результат, указаний ще Галілеєм, виражає собою *принцип відносності класичної механіки*.

Розглянемо ще випадок *відносної рівноваги матеріальної точки*, тобто припустимо, що точка під дією прикладених до неї сил знаходиться в спокої

відносно системи осей $O_1x_1y_1z_1$, яка рухається. У цьому випадку, очевидно, $\vec{v}_r = \vec{a}_r = \vec{0}$, і, отже

$$\vec{a}_c = \vec{0},$$

тому що $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ і $\vec{F}_c^{in} = \vec{0}$.

Тому рівняння (3.1) приймає вигляд

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} = \vec{0},$$

тобто у випадку відносної рівноваги матеріальної точки задана сила, реакція в'язі і переносна сила інерції взаємно врівноважуються.

До цього висновку можна, очевидно, прийти і безпосередньо з принципу Даламбера.

Приклад.

У кабіні ліфта, що опускається з постійним прискоренням $a < g$, підвішений простий (математичний) маятник. Знайти період малих коливань цього маятника T .

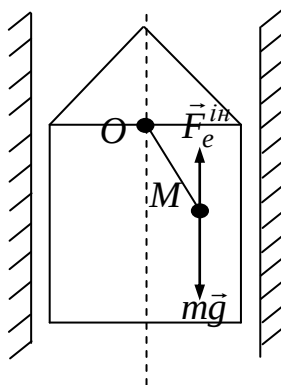


Рис.3.1

Щоб знайти відносний рух маятника, досить прикласти до маятника переносну силу інерції $\vec{F}_e^{in}$, направлену по вертикалі вгору, яка дорівнює по модулю ma , де m – маса маятника. Тому маятник відносно ліфта буде рухатися так само, як він рухався б у тому випадку, якби точка підвісу була нерухома, і

якби на нього діяла вертикальна сила, яка дорівнює по модулю $m(g - a)$ і направлена вниз (рівнодіюча сили ваги маятника $m\vec{g}$ і сили інерції $\vec{F}_e^{in}$).

Звідси виходить, що для того щоб знайти шуканий період T коливань маятника, досить у відомій формулі для періоду коливань простого маятника, при нерухомій точці підвісу, прискорення сили ваги g замінити через $g - a$, а тому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}},$$

де l – позначає довжину нитки маятника. Якби ліфт піднімався з постійним прискоренням a , то переносна сила інерції $\vec{F}_e^{in}$ була б направлена вниз, і в попередній формулі можна було $-a$ змінити на $+a$. При вільному падінні ліфта, тобто при $a=g$, сили $m\vec{g}$ і $\vec{F}_e^{in}$ будуть врівноважуватися: маятник, відведений від вертикалі на будь-який кут, буде залишатися у відносній рівновазі. Для спостерігача, що знаходиться в кабіні ліфта, усі оточуючі тіла в цьому випадку здавалися б невагомими.

3.2. Теорема про кінетичну енергію матеріальної точки у відносному русі

Ми бачимо, що диференціальне рівняння (3.1) відносного руху матеріальної точки має той же вигляд, що і диференціальне рівняння руху точки відносно нерухомої системи відліку; відмінність між цими рівняннями полягає лише в тому, що в рівняння відносного руху, крім заданих сил і реакцій в'язів, входять ще переносна і коріолісова сили інерції.

З іншого боку, всі загальні теореми динаміки матеріальної точки (теорема про кількість руху, теорема про момент кількості руху, теорема про кінетичну енергію) є наслідком основного диференціального рівняння динаміки матеріальної точки, що виражає другий закон Ньютона.

Звідси виходить, що всі ці загальні теореми застосовуються і до відносного руху матеріальної точки, але зрозуміло, що застосовуючи ці теореми до відносного руху, ми повинні взяти до уваги переносну і коріолісову сили інерції.

Зокрема, при розв'язанні задач, що відносяться до відносного руху матеріальної точки, нерідко доводиться користатися теоремою про кінетичну енергію. При складанні рівняння кінетичної енергії у відносному русі необхідно прийняти до уваги роботу переносної і коріолісової сил інерції на відносному переміщенні точки.

Але тому що прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$ завжди перпендикулярно відносній швидкості $\vec{v}_r$, тому що $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, то $\vec{F}_c^{in} \perp \vec{v}_r$, отже, робота коріолісової сили інерції у відносному русі дорівнює нулю, і ця сила в рівняння кінетичної енергії не ввійде. Тому це рівняння в диференціальній формі буде мати наступний вигляд

$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = (F_{x_1} + F_{ex_1}^{in})dx_1 + (F_{y_1} + F_{ey_1}^{in})dy_1 + (F_{z_1} + F_{ez_1}^{in})dz_1.$$

Права частина цього рівняння виражає елементарну роботу сил $\vec{F}$ і $\vec{F}_e^{in}$ на відносному переміщенні матеріальної точки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики : В 2-х т. М. : Наука, 1979. 816 с.
2. Воронков И. М. Курс теоретической механики. М. : Наука, 1974. 596 с.
3. Гернет М. М. Курс теоретической механики. М. : Высшая школа, 1973. 464 с.
4. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Курс теоретической механики. М. : Высшая школа, 1983. 575 с.
5. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. Курс теоретической механики : В 2-х т. Т. II. Динамика. М. : Наука, 1983. 640 с.
6. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М. : Наука, 1986. 416 с.
7. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика. М. : Высшая школа, 1984. 423 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Динаміка твердого тіла.....	6
1.1. Поступальний рух твердого тіла.....	6
1.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.....	7
1.2.1. Визначення динамічних складових опорних реакцій твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	7
1.3. Динаміка плоско паралельного руху твердого тіла.....	13
2. Силове поле, потенціальне поле.....	17
2.1. Потенціальна енергія матеріальної точки.....	19
2.2. Закон збереження механічної енергії матеріальної точки.....	20
2.3. Рух системи матеріальних точок у силовому потенціальному полі.....	22
2.4. Потенціальна енергія системи матеріальних точок.....	23
2.5. Закон збереження механічної енергії системи матеріальних точок.....	24
3. Відносний рух матеріальної точки.....	25
3.1. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки.....	25
3.2. Теорема про кінетичну енергію матеріальної точки у відносному русі .	29

Навчальне видання

Каряченко Наталія Василівна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

РОЗДІЛ

«ДИНАМІКА»

ЧАСТИНА III

Навчальний посібник

Тем. план 2022, поз. 148

Підписано до друку 05.12.2022. Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Папір друк. Друк
плоский. Облік.-вид. арк. 1,88. Умов. друк. арк. 1,86. Замовлення № 126.

Український державний університет науки і технологій
49010, м. Дніпро, вул. Лазаряна, 2

Редакційно-видавничий відділ УДУНТ