МПС—ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

РОЙТБУРД З. Г.

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХШАРНИРНЫХ СВОДОВ СИСТЕМЫ МАЙЯРА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1965

Публичная защита диссертации состоится на заседании Ученого совета по строительно-эксплуатационным специальностям в июне 1965 г.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого совета или прислать свои отзывы о работе по адресу: Днепропетровск, Университетская, 2, Институт инженеров железнодорожного транспорта. Ученому секретарю совета.

Автореферат разослан «14» мая 1965 года.

МПС—ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

РОЙТБУРД З. Г

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХШАРНИРНЫХ СВОДОВ СИСТЕМЫ МАЙЯРА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель —
доктор технических наук, профессор
БОНДАРЬ Н. Г.

Днепропетровск
1965

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта. Натурные испытания моста проведены мостоиспытательной станцией ДИИТ'а при участии автора. Решения на ЭЦВМ «Урал-1» и электронных моделях выполнены на вычислительном центре и в лаборатории математических машин непрерывного действия при кафедре строительной механики ДИИТ'а.

Введение

Грандиозные планы капитального строительства в нашей стране, вытекающие из Программы Коммунистической партии Советского Союза, осуществляются путем широкой индустриализации и комплексной механизации производства.

Большинство мостов, которые строятся в настоящее время или намечаются к постройке, выполняются из железобетона. Широкое применение этого строительного материала отвечает современным задачам развития народного хозяйства СССР и дает возможность применять прогрессивные (сборные и предварительно напряженные) конструкции. Эти типы конструкций позволяют индустриализовать, механизировать производство и значительно повысить темпы строительства.

В отечественном мостостроении успешно осуществляется внедрение сборных конструкций, особенно для балочных мостов при перекрытии малых и средних пролетов. При больших пролетах обычно применяют арочные системы. Но не все арочные системы приспособлены для выполнения их в сборном варианте. В этом смысле более приемлемой системой является конструкция, предложенная швейцарским инженером Майяром и несколько усовершенствованная советским инженером А. С. Бачелисом.

Пролетные строения системы Майяра представляют собой трехшарнирный свод (арку), состоящий из верхней и нижней плит, соединенных между собой продольными вертикальными ребрами (стенками). Сечения свода сильно развиты в высоту и уменьшаются от места примыкания балок к замку и пятам. Надарочным строением являются разрезные балки, опирающиеся одним концом на свод, а другим—на опору. Наличие только четырех конструктивных элементов (двух полусводов и двух балок) указывает на возможность применения сборных конструкций в пролетном строении системы Майяра.

В СССР первый мост такой конструкции пролетом $l=120$ м под железную дорогу был построен в 1936 г. (автор проекта инж. А. С. Бачелис).

В 1962 году сдан в эксплуатацию автодорожный мост. Средний пролет моста перекрыт трехшарнирной аркой системы Майяра.

Проект моста разработан Киевским филиалом Союздорпроекта.

В имеющейся литературе особо подчеркивается экономичность таких систем.

Многие вопросы, связанные со статической и динамической работой пролетных строений системы Майяра, до настоящего времени еще не исследованы. Некоторые из них рассмотрены в настоящей работе.

Реферируемая работа состоит из шести глав, заключения и приложений.

I. Современное состояние вопроса о колебаниях арочных систем

В первой главе дан краткий очерк развития отечественных и зарубежных исследований свободных и вынужденных колебаний арочных систем (работы Е. С. Сорокина, К. Федергофера, А. И. Оселедько, И. М. Рабиновича, А. Ф. Смирнова, Н. К. Снитко, А. Б. Моргаевского, Н. Г Бондаря, С. И. Конашенко, Ю. А. Радзиховского). Также дается обзор работ, посвященных вопросу учета инерции подвижной нагрузки (работы Заллера, Шалленкампа, С. А. Ильясевича, И. И. Гольденблата, В. В. Болотина, А. Б. Моргаевского, А. П. Филиппова, С. И. Конашенко, Ю. М. Майзеля, А. Д. де Патера, Е. Ф. Радзиховской).

II. Выбор основных параметров свода (арки) системы Майяра

В отличие от других арочных систем, постоянная нагрузка сводов системы Майяра состоит из распределенной по пролету и сосредоточенной в местах примыкания балок надарочного строения. Такой характер постоянной нагрузки требует определения рациональной оси свода.

Так как постоянная нагрузка является симметричной, то для получения уравнения рациональной оси в качестве расчетной схемы принята эквивалентная схема в виде полуарки с горизонтальным опорным стержнем в замке. За рациональную ось принимается кривая давления от постоянной нагрузки.

Рассмотрены три случая изменения постоянной нагрузки. Во всех случаях начало координат принято в замке.

Случай 1. Изменение интенсивности постоянной нагрузки можно выразить одним аналитическим выражением:

$$q(x) = q_з \left[1 + \frac{2x}{l} A - \frac{4x^2}{l^2} B\right] \qquad (1)$$

Здесь обозначено: $A = 4k - m - 3$, $B = 4k - 2m - 2$,

$$k = \frac{q_ч}{q_з}, \quad m = \frac{q_в}{q_з}$$

где $q_з, q_п, q_ч$ — интенсивности нагрузки в замке, пяте и в месте примыкания балки.

В этом случае предполагается, что балки опираются на свод в четвертях пролета. Так как там приложена сила P (половина веса балки), то уравнения рациональной оси даются по участкам.

$$y_1 = \frac{96 f \xi_1^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\xi_1}{3} \left[4k(1-\xi_1) - m(1-2\xi_1) - (3-2\xi_1) \right] \right\}}{8k + 3n + 4}$$

$$y_2 = \frac{96 f \xi_1^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\xi_1}{3} \left[4k(1-\xi_1) - m(1-2\xi_1) - (3-2\xi_1) \right] \right\} + 3fn(4\xi_1 - 1)}{8k + 3n + 4}, \tag{2}$$

где f — стрела подъема оси свода, $\xi_1 = \frac{x}{l}$ — безразмерная абсцисса, $n = \frac{q_б}{q_з}$, $q_б$ — интенсивность равномерно распределенной нагрузки от собственного веса балки.

Случай 2. Закон изменения интенсивности постоянной нагрузки нельзя выразить одним аналитическим выражением. Для разных участков его можно выразить так:

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= q_з \left[1 + (k^* - 1) \frac{x^2}{a^2} \right] \qquad (o \leqslant x \leqslant a); \\ q(x) &= q_п \left[1 + (u - 1) \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2} - a\right)^2} \right] \qquad \left(a \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $k^* = \frac{q_a}{q_з}$ $\quad u = \frac{q_a}{q_п}$

q_a — интенсивность нагрузки в месте примыкания балки, a — расстояние от замка до сечения, где примыкает балка.

После ряда преобразований получены уравнения рациональной оси по участкам:

$$y_1 = \frac{f\xi_2^2\left[6 + (k^* - 1)\,\frac{\xi_2^2}{\beta^2}\right]}{\beta^2\left[3N + M \quad Q + R + L(1-\beta)\right]} \qquad \left(O \leqslant \xi_2 \leqslant \frac{2a}{l}\right)$$

$$y_2 = \frac{f\xi_2^2\left[N(6 - 4\xi_2 + \xi_2^2) + M\right] + \xi_2 R + (\xi_2 - \beta)L + Q}{3N + M + Q + R + L(1-\beta)} \qquad \left(\frac{2a}{l} \leqslant \xi_2 \leqslant 1\right) \tag{4}$$

Здесь обозначено: $\xi_2 = \frac{2x}{l}$, $N = \frac{m\mu_2}{\beta^2}$, $M = \frac{6m}{\beta^2}$,

$$R = \frac{12}{\beta}(\psi - m\mu), \quad L = \frac{(1-\beta)\,6n}{\beta^2} \qquad Q \quad 3 - 9\psi - m\mu_1 + 12\,m\mu,$$

$$\mu_2 = \frac{u-1}{(1-\beta)^2}, \quad \psi = \frac{2+k^*}{3}, \quad \beta = \frac{2a}{l} \quad \mu \quad 1 + \frac{u-1}{2}\left[1 + \frac{\left(1 - \frac{\beta^2}{3}\right)}{(1-\beta)^2}\right]$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{u-1}{3}\left[1 + \frac{2\left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)}{(1-\beta)^2}\right]$$

Случай 3. Закон изменения интенсивности постоянной нагрузки нельзя выразить одним аналитическим выражением, и нагрузка имеет разрыв в месте примыкания балки к своду за счет резкого изменения высоты свода.

Интенсивность постоянной нагрузки распределена на полуарке по законам:

$$q(x) = q_з\left[1 + (k^* - 1)\frac{x^2}{a^2}\right] \qquad (O < x \leqslant a)$$

$$q(x) = q_п\left[1 + \frac{(u_1 - 1)\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2} \quad a\right)^2}\right] \qquad \left(a \quad x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{5}$$

где $\qquad u_1 = \frac{q_ч}{q_п}$

$q_ч$, $q_п$ — интенсивности нагрузок в месте разрыва.

В этом случае уравнения рациональной оси будут:

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{f(1-\gamma)\,\xi_2^2\left[6+(k^*-1)\,\dfrac{\xi_2^2}{\beta^2}\right]}{\beta^2\,[3N_1 \quad M+Q_1 \quad R_1 \quad L(1-\beta)]} \qquad \left(Q \leqslant \xi_2 \leqslant \frac{2a}{l}\right)\\
y_2 &= f\left\{(1-\gamma)\left[\frac{\xi_2^2[N_1(6-4\xi_2+\xi_2^2+M]+\xi^2 R_1+(\xi_2-\beta)L+Q_1}{3N_1 \quad M+Q+R_1 \quad L(1-\beta)}\right]+\gamma\right\}\left(\frac{2a}{l} \leqslant \xi_2 \leqslant 1\right)
\end{aligned}
\right\}
\tag{6}
$$

На основании анализа данных, приведенных в литературе, предлагается закон изменения моментов инерции поперечных сечений в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
J_a(x) &= \frac{J_з}{Cos\,\varphi_x\left(1+A\dfrac{x}{a}+B\dfrac{x^2}{a^2}+C\dfrac{x^3}{a^3}\right)} \qquad (O \leqslant x \leqslant a)\\
J_в(x) &= \frac{J_п{}^*}{Cos\,\varphi_x\left(1+D\dfrac{x}{b}+M\dfrac{x^2}{b^2}+N\dfrac{x^3}{b^3}\right)} \qquad (O \leqslant x \leqslant b)
\end{aligned}
\right\}
\tag{7}
$$

где $J_a(x)$, $J_b(x)$— моменты инерции поперечных сечений свода с абсциссой x (соответственно на участках «*а*» и «*в*»),

$J_з$, $J_п$ — моменты инерции поперечных сечений соответственно в замке и пяте, $J_п{}^* = J_п\,cos\,\varphi_п$, $\varphi_п$ — угол наклона к горизонту касательной к оси свода в пяте, φ_x — угол наклона к горизонту касательной к оси свода в сечении с абсциссой x; *А, В, С, Д, М, N* — постоянные коэффициенты.

Первое выражение (7) соответствует участку «*а*», т. е. от замка до сечения, где примыкает балка. Второе выражение — участку «*в*», т. е. от пяты до сечения, где примыкает балка. Начало координат для участка «*а*» — в замке, для участка «*в*» — в пяте.

Значения коэффициентов *А, В, С, Д, М, N* определялись из условия прохождения кривой моментов инерции через четыре точки: на участке «*а*» — через точки, соответствующие моментам инерции в замке ,в месте примыкания балки, а также через две точки, лежащие внутри участка; на участке «*в*» — через точки, соответствующие моментам инерции в пяте, в месте примыкания балки, а также через две точки, лежащие внутри участка.

III. Свободные колебания

Точное решение задачи об определении частот свободных колебаний арки (свода) требует учета непрерывного распределения массы по длине арки, т. е.рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы. Относительно сложные законы распределения массы и моментов инерции поперечных сечений затрудняют получение такого решения. Поэтому при определении частот свободных колебаний в качестве расчетных схем принимаются динамически эквивалентные схемы с дискретным расположением массы с двумя и тремя степенями свободы. При этом учитывались вертикальные и горизонтальные силы инерции.

Динамически эквивалентная схема, соответствующая кососимметричным формам колебаний, представляет собой полуарку с вертикальным опорным стержнем в замке. Для прямосимметричных форм колебаний динамически эквивалентная схема имеет вид полуарки с горизонтальным стержнем в замке, так как в этом случае распор и перемещение по оси симметрии пролетного строения не равны нулю.

В системе с двумя степенями свободы масса сосредотачивалась на полусводе в месте примыкания балки (кососимметричная форма колебаний) или в замке (прямосимметричная форма). При трех степенях свободы масса сосредотачивалась в месте примыкания балки и в замке. Приведенная масса определялась по методу узловых масс*). В этих случаях влияние надарочного строения (балки) учитывалось путем присоединения половины массы балки к массе полуарки.

Определив единичные перемещения в соответствующих расчетных схемах и составив уравнения движения, исходя из условия нетривиальности решения, получим выражение для приближенного определения частоты свободных колебаний в случае системы с двумя степенями свободы.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\delta_{11} + \delta_{22}}{M\left[(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\right]}} \tag{8}$$

где M — приведенная масса, δ_{ik} — коэффициент влияния перемещений.

Для системы с тремя степенями свободы после аналогичных операций получено вековое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 D + \lambda K - P = 0 \tag{9}$$

где $D = M_1\left(\delta_{11} + \delta_{22} + \frac{M_2}{M_1}\delta_{33}\right)$ $\quad K = M_1^2\left[\frac{M_2}{M_1}(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2 + \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2) + \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right]$

---

*) Н. К. Снитко. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар, Госстройиздат, 1953.

$$P = M^2_1 M_2 (\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{13}\delta_{23} - \delta_{11}\delta^2_{23} - \delta_{22}\delta^2_{13} - \delta_{33}\delta^2_{12}) \qquad \lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Как показывают вычисления, наибольший корень уравнения (9) близок к коэффициенту при λ^2. Это обстоятельство позволяет пренебречь свободным членом, так как два остальных корня значительно меньше, и рассматривать квадратное уравнение. При этом будет потерян корень, соответствующий высшей частоте. Решая квадратное уравнение и учитывая соотношение. $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, получим приближенную формулу для определения частоты свободных колебаний.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{D^2 - K}} \tag{10}$$

С целью проверки степени точности формул (8) и (10) были определены частоты и формы колебаний для системы с семью степенями свободы при помощи метода последовательных приближений*). Масса свода и надарочного строения сосредотачивается в месте примыкания балки, в замке и в середине участков «*а*» и «*в*». Величины приведенных масс определяются по методу узловых масс.

Частоты свободных колебаний косо- и прямосимметричной форм, полученные для пролетного строения через канал Москва—Волга, приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Частоты свободных колебаний в 1/сек.				
кососимметричная форма			прямосимметричная форма	
по формуле (8)	по формуле (10)	последоват. приближен.	по формуле (10)	последоват. приближен.
12,7	12,0	11,5	10,1	14,6

Определены также значения и построены графики частот свободных колебаний косо- и прямосимметричной форм в зависимости от подъемистости свода. Во всех рассмотренных случаях при определении частот свободных колебаний расчетные схемы выбирались без полного учета надарочного строения. В этих случаях учитывалась только часть массы балки, которая приводилась к своду. Для проверки точности принятых схем определены частоты

*) И. М. Бабаков. Теория колебаний, Госиздательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.

для расчетной схемы в виде полуарки с балкой надарочного строения. Масса свода сосредотачивалась в тех же сечениях, что и для системы с семью степенями свободы, а масса надарочного строения — в середине пролета балки и в месте примыкания к своду. В этом случае система имеет восемь степеней свободы.

Первые две частоты и формы колебаний моста через канал Москва—Волга, вычисленные для расчетных схем с семью и восьмью степенями свободы, близки. Следовательно, влияние надарочного строения несущественно и им можно пренебречь.

IV. Экспериментальные исследования

С целью проверки точности формул (8) и (9) были проведены эксперименты на моделях и в натуре (автодорожный мост). При изготовлении моделей не ставилась задача моделирования реальных пролетных строений; нужно было лишь установить влияние параметров системы на частоты свободных колебаний. Всего было изготовлено четыре модели с расчетным пролетом $l=165$ см и с подъемистостью $\alpha=0{,}094$; $0{,}154$; $0{,}192$; $0{,}291$. Модели выполнены из листового органического стекла.

Свободные колебания моделей возбуждались путем мгновенного обрыва груза, подвешенного к модели. Для возбуждения прямосимметричных колебаний груз при помощи капроновой нити подвешивался к дюралевой трубке, уложенной на подвесках, прикрепленных к модели в четвертях пролета. Для кососимметричных колебаний груз подвешивался непосредственно к подзвеске, прикрепленной к модели в четверти пролета. По два проволочных датчика, образующих полумост, наклеивалось на нижнюю плиту модели в четверти пролета. Два других полумоста собраны непосредственно в усилителе. Колебания моделей записывались на пленку с помощью осциллографической установки.

Мостоиспытательной лабораторией ДИИТа (при участии автора) в 1962 году проведено обследование и испытание автодорожного железобетонного моста. Каньон реки перекрыт трехшарнирным арочным пролетным строением системы Майяра.

Испытание моста проводилось с целью выяснения работы пролетных строений под статической и динамической нагрузками. Статическими испытаниями трехшарнирного арочного пролетного строения предусматривалось определение прогибов и напряжений в арках. С этой целью измерялись прогибы арок в двенадцати сечениях и напряжения—в четырех сечениях. Для измерения прогибов применялись дистанционные прогибомеры с проволочной связью. Деформации измерялись проволочными датчиками сопротивления.

Динамические испытания арочного пролетного строения проводились с целью выяснения динамических прогибов арок, частот свободных колебаний пролетного строения, форм и декремента колебаний.

Для измерения динамических характеристик использовались те же приборы в тех же сечениях, что и при статических испытаниях.

Испытательная нагрузка при статических испытаниях состояла из восьми самосвалов (ЯАЗ-210Е и МАЗ-509), которые пропускались со скоростью 5 км/час. При динамических испытаниях нагрузка состояла из одиночного самосвала ЯАЗ-210Е (вес с грузом примерно 25 т). Самосвал пропускался со скоростью от 10 до 60 км/час.

Анализ полученных осциллограмм показал, что критическая скорость для данного типа нагрузки находится в пределах 45—60 км/час. Установлены формы упругой линии пролетного строения, по которым можно судить о формах колебаний. Частоты и декременты свободных колебаний определены по осциллограммам после схода нагрузки с пролетного строения. Среднее значение частот свободных колебаний кососимметричной формы— $\omega_1 = 2{,}5$ гц и прямосимметричной формы — $\omega_2 = 5$ гц. Установлено, что закон убывания амплитуд близок к линейному. Это свидетельствует о доминирующей роли сухого трения в шарнирах. Значение эквивалентного декремента колебаний, полученного для девяти периодов, составляет 0,223.

Для выяснения влияния возможных выбоин в проезжей части на работу пролетного строения одиночный самосвал на малой скорости пропускался через искусственний порог высотой 14 см. В этой же главе приводятся результаты испытаний моста через канал Москва—Волга, проведенные ЦНИИСом в 1954 г. На основании дополнительного анализа резонансных виброграмм установлено значение частот свободных колебаний прямосимметричной формы $\omega_2 = 1{,}8$ гц. Частоты свободных колебаний, полученные в результате проведенных экспериментов на моделях и в натуре, позволяют оценить степень точности приближенных формул (8) и (10). В табл. 2 приведены значения первых двух частот свободных колебаний, полученных по формулам (8) и (10) и на основании опытов.

V. Вынужденные колебания

При прохождении подвижной нагрузки по мосту пролетные строения подвергаются динамическому воздействию. Такого рода воздействия вызываются наличием вращающихся неуравновешенных частей подвижного состава, колебаниями подрессоренных частей вагонов и локомотива, ударами колес подвижного состава в стыках рельсов и неровностями пути.

Одновременный учет всех факторов сильно усложняет задачу тем более, что степень влияния отдельных факторов на вынужденные колебания количественно и качественно различна.

В настоящей главе рассмотрены вынужденные колебания пролетного строения системы Майяра только от воздействия движущихся с постоянной скоростью пульсирующей и постоянной сил. В качестве расчетной схемы принимается трехшарнирная арка с тремя степенями свободы. Учитываются только вертикальные силы инерции. Масса пролетного строения сосредотачивается в замке и в местах примыкания балок надарочного строения.

Таблица 2

№№ п/п	Объект		Значения частот кососимметричных колебаний в гц.			Значения частот прямосимметричных колебаний в гц.		
			по формуле (8)	по формуле (9)	экспери-мент	по формуле (8)	по формуле (9)	экспе-римент
1.	Модель	0,094	47,50	49,00	50,00	30,40	41,00	43,50
2.	Модель	0,154	53,00	54,00	55,00	32-00	48,00	44,50
3.	Модель	0,192	44,50	42.00	44,50	36,50	39,60	50,00
4.	Модель	0,291	34,00	31,60	33, 0	31,80	39,40	38,50
5.	Мост через канал Москва Волга	0,146	2,02	1,91	1,94		1,60	1,80
6.	Автодорожный мост	0,434	1,94	2,07	2,50	—	4,69	5,00

Вынужденные колебания для принятой расчетной схемы описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)+\sum_{i=1}^{3}\delta_{1i}\left[M_i\ddot{y}_i(t)+k\dot{y}_i(t)\right]&=f_1(t)\\ y_2(t)+\sum_{i=1}^{3}\delta_{2i}\left[M_i\ddot{y}_i(t)+k\dot{y}_i(t)\right]&=f_2(t)\\ y_3(t)+\sum_{i=1}^{3}\delta_{3i}\left[M_i\ddot{y}_i(t)+k\dot{y}_i(t)\right]&=f_3(t)\end{aligned}\right| \qquad (11)$$

Используя способ приведения к главным координатам *), после аппроксимации правых частей уравнений получим уравнения движения в следующем виде.

*) Н. Г Бондарь. Динамика арочных пролетных строений массивных железнодорожных мостов, Труды ДИИТ, вып. 25. 1956.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\ddot{F}_1(t) + 2\varepsilon_1 \dot{F}_1(t) + \omega_1^2 F_1(t) = N_1 \operatorname{Cos} \theta t \operatorname{Sin} \nu t \\
&\ddot{F}_2(t) + 2\varepsilon_2 \dot{F}_2(t) + \omega_2^2(t) F_2(t) = N_2 \operatorname{Cos} \theta t\, [\operatorname{Sin} \nu t - k_2 t - \\
&- 2 \operatorname{Sin} \nu (t - \tau) + 2 k_2 (t - \tau)] \\
&\ddot{F}_3(t) + 2\varepsilon_3 \dot{F}_3(t) + \omega_3^2 F_3(t) = N_3 \operatorname{Cos} \theta t\, (\operatorname{Sin} \nu_1 t - 2 \operatorname{Sin} \nu_1 (t - \tau)]
\end{aligned}
\right\} \qquad (12)
$$

где F_i $(i = 1,2,3)$ — главные координаты, ε_i $(i = 1,2,3)$ — коэффициенты затухания, которые можно считать пропорциональными частоте свободных колебаний, ω_i $(i = 1,2,3)$ — круговые частоты свободных колебаний соответствующей формы, $N_i = Q\omega_i^2 A_i$, $\nu = \dfrac{2\pi V}{l}$

$\nu_1 = \dfrac{4\pi V}{l}$, θ — частота возмущающей силы.

Решение уравнений (12) получено с помощью операционного метода. По причине громоздкости полученные решения не приводятся. По той же причине для вычислений была использована ЭЦВМ «Урал-1». Для выяснения влияния форм колебаний, частоты которых близки к резонансной, был сделан расчет на ЭЦВМ «Урал-1» для моста через канал Москва—Волга. Рассмотрен случай резонанса по частоте свободных колебаний кососимметричной формы. Анализ полученных данных говорит о том, что прямосимметричная форма колебаний, частота которой близка к резонансной, значительно влияет на перемещения и ею пренебрегать нельзя.

При помощи предельного перехода получено решение для случая движения постоянной силы. В этой же главе определяются динамические коэффициенты по прогибам при движении постоянной силы для системы с двумя степенями свободы. Задача решена на структурной модели МПТ-9 м.

На основании обработки осциллограмм построены графики наибольших значений динамических коэффициентов для диапазона отношения скоростей $\beta_1 = \dfrac{V}{V_{кр}} = 0{,}1 \div 0{,}9$.

Динамические коэффициенты по прогибам, согласно решения, не являются монотонно возрастающей функцией скорости движения силы.

VI. Вынужденные колебания с учетом массы подвижной нагрузки

В настоящей главе рассмотрены задачи о колебаниях трехшарнирного свода системы Майяра под действием движущейся нагрузки с учетом ее массы.

В случае учета только одной формы колебания расчетная схема взята в виде пологого трехшарнирного свода (с надсводным строением) с двумя степенями свободы. Масса пролетного строения сосредотачивается на своде в местах примыкания балок, и учитываются только вертикальные силы инерции. Предполагается, что балки абсолютно жесткие.

Движение такой системы под воздействием одиночного груза описывается двумя дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Получить точное аналитическое решение этой системы не представляется возможным. Поэтому нагрузка разложена на кососимметричную и прямосимметричную, после чего использована динамически эквивалентная схема, соответствующая кососимметричной форме колебаний.

Так как фундаментальная функция в пределах балки и свода имеет разные аналитические выражения, то уравнения движения составлены по участкам:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{y}_1 + \frac{\dot{k}_1(t)}{k_1(t)}\,\dot{y}_1 + \frac{\omega^2}{k_1(t)}\,y_1 = \frac{\omega^2\delta_{ст}\dfrac{t}{T}}{2\,k_1(t)} && (0 \leqslant t \leqslant T)\\
&\ddot{y}_2 + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\,\dot{y}_2 \quad \left[\frac{\omega^2 S^2}{p(t)} + \frac{\ddot{p}(t)}{4\,p(t)}\right] y_2 = \frac{\omega^2\delta_{ст}\,Sin\,\varepsilon_1 t}{2\,p(t)} && (T \leqslant t \leqslant 3T)\\
&\ddot{y}_3 \quad \frac{\dot{k}_3(t)}{k_3(t)}\,\dot{y}_3 + \frac{\omega^2}{k_3(t)}\,y_3 = \frac{\omega^2\delta_{ст}\dfrac{(t-4T)}{T}}{2\,k_3(t)} && (3T \leqslant t \leqslant 4T)
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где y_i $(i=1, 2, 3)$ — перемещение сечения свода, где сосредоточена масса, соответственно при движении груза по балке, своду и по второй балке, Т — время прохода груза по балке,

$$k_1(t) \quad 1 + a_2\frac{t^2}{T^2} \qquad p(t) = 1 + a_1\,Sin^2\,\varepsilon_1\,t \qquad S^2 = 1 - \frac{a_1\,\varepsilon_1^2}{2\,\omega^2}$$

$$k_3(t) = 1 \quad a_1\frac{(t-4T)^2}{T^2} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2T} \qquad a_1 = \frac{M_к}{M}$$

Решения уравнений (13) получены с помощью метода переменного масштаба времени *). Для оценки точности полученных результатов эта же задача была решена на электронной модели ЛМУ-1.

Результаты аналитического решения и решения на электронной модели для динамических прогибов приведены в табл. 3.

---

*) Бондарь Н. Г. Решение задач нелинейных колебаний методом переменного масштаба времени, Труды ДИИТ, вып. 38, 1962.

Бондарь Н. Г. Колебания нелинейных систем, содержащих малый параметр, Труды ДИИТ, вып. 38, 1962.

Таблица 3

$\frac{V}{V_{кр}}$	Максимальные положительные прогибы		Максимальные отрицательные прогибы	
	ЛМУ—1	аналитич. решение	ЛМУ—1	аналитич. решение
0,196	1,13	1,06	1,21	1,19
0,386	1,26	1,34	1,33	1,14
0,750	1,63	2,05	3,10	3,14
1,00	1,55	1,80	3,59	3,02

Далее рассмотрен случай движения пульсирующей нагрузки $Q\,Cos\Theta t$, связанной с массой $M_к$. Уравнения движения массы M_1 в этом случае аналогичны уравнениям (13), только их правые части следует умножить на $Cos\,\Theta t$. Решение для этого случая получено на электронной модели ЛМУ-1.

Так как для пролетного строения моста через канал Москва—Волга частоты свободных колебаний по первым двум формам очень близки друг к другу, то в этой же главе рассмотрена задача о динамических коэффициентах при движении груза с учетом двух форм колебаний.

Расчетная схема принята как для случая движения пульсирующей силы (гл. V). После линейных преобразований получена система дифференциальных уравнений, описывающих изменение динамических коэффициентов по прогибам.

$$
\left.
\begin{aligned}
&[1+\alpha^* k_1 (b_1 X^2{}_1 + \lambda b_2 X^2{}_2)]\ddot{\mu}_1 \quad 2\alpha^* k_1 b_1 \dot{X}_1 X_1 \dot{\mu}_1 + \\
&\left[\frac{\pi^2}{\beta^2{}_1} + \frac{\pi^2}{\beta_1{}^2} \quad \alpha^* k_1 \lambda b_2 X^2{}_2 + \alpha^* k_1 b_1 \ddot{X}_1 \quad X_1\right]\mu_1 + \alpha^* C\,[2k_1 b_2 \dot{X}_2 X_1 \dot{\mu}_2 + \\
&\qquad + k_1 b_2 (\ddot{X}_2 X_1 - \omega^2 \frac{\pi^2}{\beta^2{}_1} \quad X_2 X_1)\,\mu_2] \qquad \frac{\pi^2 X_1}{\beta^2{}_1 (X_1)_{max}} \\
&\left[1 \quad \frac{\alpha^* k_2}{\lambda}\left(b_1 X^2{}_1 + \lambda\, b_2 X_2{}^2\right)\right]\ddot{\mu}_2 \quad 2\alpha^* k_2 b_2 \dot{X}_2 X_2 \mu_2 + \\
&\quad \left[\frac{\pi^2}{\beta_1{}^2}\,\omega^2 + \frac{\pi^2 \alpha^* k_2}{\beta_1{}^2 \lambda} \quad \omega^2 b_1 X^2{}_1 + \alpha^* k_2 b_2 \quad \ddot{X}_2 X_2\right]\mu_2 \\
&+ \frac{\alpha^*}{C}\left[2\,k_2 b_1 \dot{X}_2 X_2 \dot{\mu}_1 \qquad k_2 b_1 \left(\ddot{X}_1 X_2 - \frac{\pi^2}{\beta^2{}_1} X_1 X_2 \right)\mu_1\right] = \frac{\omega^2 \pi^2 X_2}{\beta^2{}_1 (X_2)_{max}}
\end{aligned}
\right\} \qquad (14)
$$

где $\mu_1 = \frac{F_i}{(F_i)_{ст}^{max}}$, $(i = 1,2)$ F_i $(i = 1,2)$ — обобщенные координаты, $\alpha^* = \frac{M_к}{M_1}$ X_1, X_2—соответственно косо- и прямосимметричная формы колебаний, $\beta_1 = \frac{V}{V_{кр}}$ V — скорость движения груза, $V_{кр}$ — критическая скорость движения силы, соответствующая кососимметричной форме колебаний.

Ссистема дифференциальных уравнений; (14) не интегрируется в замкнутой форме. Поэтому для ее решения были использованы электронные модели МПТ-9 и ЛМУ-1. При решении на электронных моделях целесообразно ввести замену переменных*): $\dot\mu_1 = \eta_1$ $\dot\eta_1 = \eta_2$, $\mu_2 = \eta_3$, $\dot\eta_3 = \eta_4$. Тогда вместо системы уравнений (14) получим систему дифференциальных уравнений первого порядка.

Полагая $\eta_1 = N_1 y_1$, $\eta_2 = N_2 y_2$, $\eta_3 = N_3 y_3$, $\eta_4 = N_4 y_4$, $\varepsilon = N_0\tau$, перейдем к машинным уравнениям.

$$\dot y_1 \quad \frac{N_2 N_0}{N_1} y_2$$

$$[1 + \alpha_1^* \gamma^* k_1 (b_1 X^2_1 + \lambda b_2 X_2^2)]\, \dot y_2 = \frac{1}{\beta_1^2}\left[\left(\frac{N_0 \overline{X_1}\pi^2}{N_2 (X_1)_{max}}\right) X_1 -\right.$$

$$\left.- \frac{N_1 N_0 \pi^2}{N_2} y_1\right] + \alpha_1^* \gamma^* \left\{\left[-\left(\frac{N_1 N_0}{N_2}\pi^2 k_1 \lambda b_2 \overline{X}^2_2\right) X_2^2 y_1 +\right.\right.$$

$$\left.+ \left(\frac{C N_3 N_0}{N_2}\omega^2 \pi^2 k_1 b_2 \overline{X}_2 \overline{X}_1\right) X_2 X_1 y_3\right]\frac{1}{\beta^2_1} - 2 N_0 k_1 b_1 (\overline{\dot X_1}\ \overline{X_1})\, \dot X_1 X_1 y_2 -$$

$$- \frac{N_1 N_0}{N_2} k_1 b_1 (\overline{\dot X_1}\ \overline{X_1})\, \dot X_1 X_1 y_1 - 2 C k_1 b_2 (\overline{\dot X_2}\,\overline{X_1}) \frac{N_4 N_0}{N_2} \dot X_2 X_1 y_4 -$$

$$\left.- \frac{C N_3 N_0}{N_2} k_1 b_2 (\overline{\dot X_2}\,\overline{X_1})\, \dot X_2 X_1 y_3 \right\}$$

$$\dot y_3 = \frac{N_4 N_0}{N_3} y_4$$

$$\left[1 \quad \frac{\alpha^*_1 \gamma^* k_2}{\lambda} (b_1 X^2_1 \quad \lambda b_2 X_2^2)\right] \dot y_4 = \frac{1}{\beta^2_1}\left[\left(\frac{N_0 \omega^2 \pi^2 \overline{X_2}}{N_4 (X_2)_{max}}\right) X_2\right.$$

---

*) В. А. Лазарян. Применение математических машин непрерывного действия к решению задач динамики подвижного состава железных дорог, Трансжелдориздат, 1962.

$$- \left(\frac{N_1 N_0}{N_4} \pi^2 \omega^2 \right) У_3 + \alpha^*_1 \gamma^* \left\{ \left[- \left(\frac{N_3 N_0 \pi^2 k_2 \omega^2 b_1 \overline{X}^2_1}{N_4 \lambda} \right) X^{\cdot}_1 У_3 + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{N_1 N_0}{N_4 C} \pi^2 k_2 b_1 \overline{X_1} \overline{X_2} \right) X_2 X_1 У_1 \right] \frac{1}{\beta^2_1} - 2 N_0 k_2 b_2 (\overline{\dot{X}_2} \overline{X_2}) X_2 \dot{X}_2 У_4 -$$

$$- \frac{N_3 N_0}{N_4} k_2 b_2 (\overline{\ddot{X}_2} \overline{X_2}) \ddot{X}_2 X_2 У_3 - \frac{N_2 N_0 2 k_2 b_1}{N_4 C} (\overline{\dot{X}_1} \overline{X_2}) \dot{X}_1 X_2 У_2 -$$

$$\left. - \frac{N_1 N_0 k_2 b_1}{N_4 C} (\overline{\ddot{X}_1} \overline{X_2}) \ddot{X}_1 X_2 У_1 \right\} \qquad (15)$$

где N_i $(i=1,2,3,4)$ — масштабные коэффициенты, $У_i$ $(i=1,2,3,4)$ — машинные переменные (электрические напряжения), N_0 — масштаб времени, τ машинное время, $\alpha_1^* = \frac{\alpha^*}{\gamma^*}$, $\gamma^* = \frac{M}{M_1}$, M — масса пролетного строения, M_1 — приведенная масса. Чертой, расположенной сверху, обозначены максимальные значения соответствующих величин.

В системе машинных уравнений (15) имеется 16 переменных коэффициентов. В том случае, когда уравнения (15) рассматривались как несвязанные, дополнительно использовались два других переменных коэффициента.

На основании машинных уравнений (15) составлена блок-схема решения.

Решения задачи фотографировались с экрана электонно-лучевого индикатора И-5м, а также записывались на ленте шлейфного осциллографа типа 9SO—1, на входы которых подавались машинные переменные $У_1$, $У_3$, $У^*_1$ и $У^*_3$. Для получения значений $У^*_1$ и $У^*_3$, которые моделируют динамические коэффициенты по прогибам y_1 и y_3, использовалась дополнительная блок-схема. Всего было сфотографировано около 90 решений и записано на ленту, примерно, 200 решений при разных сочетаниях параметров α_1^* и β_1.

В результате обработки осциллограмм построены графики наибольших значений динамических коэффициентов по прогибам y_1, y_2, y_3 при различных α_1^* и β_1.

Заключение

1. Аналитические выражения для рациональной оси, полученные в гл. II, могут быть рекомендованы для практического пользования при проектировании пролетных строений системы Майяра. В случае, если пролет не более 50 м и высота сечения свода (арки) в месте примыкания балки изменяется незначительно, рекомендуются формулы (4). При пролетах более 50 м, когда это изменение значительно, следует пользоваться формулами (6).

2. Так как полученные законы (7) изменения моментов инерции поперечных сечений вполне удовлетворительно отражают действительный закон изменения, то они могут быть использованы при статических и динамических расчетах трехшарнирных сводов (арок) системы Майяра.

3. Относительно сложные законы распределения массы и моментов инерции поперечных сечений усложняют задачи по определению частоты свободных колебаний для расчетной схемы с бесконечно большим числом степеней свободы. Это обстоятельство заставляет применять приближенные способы решений.

В качестве расчетных схем рекомендуются динамически эквивалентные схемы с дискретным расположением масс. Приведенная масса в этих случаях определяется по способу узловых масс. При необходимости получения ориентировочного значения первых двух частот свободных колебаний для пролетных строений с характеристикой пологости $\alpha \leqslant 0{,}15$ предлагается формула (8).

Для получения более точных значений первых двух частот следует вычисления производить по выражению (10).

В случае, если требуется определить частоты свободных колебаний для пролетных строений с характеристикой пологости $> 0{,}15$ (для системы Майяра это встречается редко), необходимо переходить к расчетным схемам с большим числом степеней свободы и использовать метод последовательных приближений.

4. Результаты решения задачи о движении пульсирующей силы, полученные в гл. 5, указывают на то, что в случае близости частот свободных колебаний необходимо учитывать две формы колебаний. Неучет второй формы влечет за собой искажение качественной стороны процесса.

5. При движении по пролетному строению силы динамические коэффициенты по прогибам не являются монотонно возрастающей функцией скорости движения силы.

6. Математические трудности, встречающиеся при решении задачи о движении груза, могут быть преодолены, если применить ЭЦВМ или электронные модели.

Учет массы движущейся нагрузки позволяет получить более точные значения динамических коэффициентов.

Как и при движении силы, динамический коэффицент не является монотонно возрастающей функцией скорости груза. Это также справедливо по отношению к параметру α_1^* (отношение масс груза и пролетного строения).

7 Осциллограммы динамических коэффициентов при малых скоростях движения груза имеют волнистый характер. Такой характер осциллограмм является результатом наложения свободных колебаний, поскольку в этом случае время движения груза по пролетному строению значительно больше периода свободных колебаний. При увеличении скоростей осциллограммы все более сглаживаются

и при больших скоростях представляют собой плавные кривые с резко выраженными экстремумами. В диапазоне реальных скоростей динамический коэффициент по прогибам мало изменяется в зависимости от параметра α_1*.

Анализ полученных результатов говорит о том, что влияние связанности колебаний, т. е. учет двух форм колебаний, может быть различным. Для большинства значений параметров учет связанности увеличивает максимальные значения динамических коэффициентов. Однако возможны и такие сочетания параметров, когда учет связанности уменьшает максимальные значения динамических коэффициентов.

Диссертация изложена на 155 страницах и содержит 101 фигуру, 11 таблиц в тексте и 3 таблицы в приложениях. Библиография — 162 названий.

Основное содержание диссертации опубликовано в статьях.

1. Ройтбурд З. Г Рациональная ось трехшарнирных сводов системы Майяра, Труды ДИИТ, вып. 32, Днепропетровск, 1961.

2. Ройтбурд З. Г Исследование свободных колебаний трехшарнирных сводов системы Майяра, Труды ДИИТ, вып. 38, Днепропетровск, 1962.

3. Ройтбурд З. Г Вынужденные колебания трехшарнирных сводов системы Майяра, Труды ДИИТ, вып. 45, 1963.

4. Бондарь Н. Г Дорошенко Е. В., Ройтбурд З. Г Эйхе Г Н. Результаты испытания железобетонного моста, Бетон и железобетон, № 10, 1963.

5. Ройтбурд З. Г Работа сводов системы Майяра под динамической нагрузкой, Известия Ясского политехнического института, Т. X. (XIV), вып. 1-2, 1964.

6. Ройтбурд З. Г Определение динамических прогибов сводов системы Майяра, Труды ДИИТ, вып. 49, «Транспорт», 1965.

7. Ройтбурд З. Г Музыкин В. А., Сокол Л. С. Определение динамических прогибов сводов системы Майяра на электронной модели. Труды ДИИТ, вып. 49, «Транспорт», 1965.

Результаты работы были доложены:

1. На IV научно-технической конференции мостостроителей УССР. Харьков. 1962.

2. На Всесоюзном совещании по некоторым вопросам динамики машин и сооружений. Днепропетровск. 1964.

3. На объединенном заседании семинара по механике и кафедры мостов Днепропетровского института инженеров железнодоржного транспорта. 1965.

БТ 08930. Областная книжная типография
Днепропетровского областного управления по печати,
г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.
Заказ 970-м. Тираж 200. Объем 1,25 п. л. Подписано к печати 7.V-65 г.