

## НАБЛИЖЕНА ОЦІНКА ТРИВАЛОСТІ ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ ШТУЧНИХ СУПУТНИКІВ ЗЕМЛІ З УРАХУВАННЯМ СВІТЛОВОГО ТИСКУ

М. М. Ковальчук<sup>1</sup> , Е. Б. Вовчик<sup>1</sup>, О. А. Баран<sup>1</sup> ,

А. І. Білінський<sup>1</sup>, І. П. Лаушник<sup>2</sup> , М. І. Стоділка<sup>1</sup> , М. Б. Гірняк<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Астрономічна обсерваторія Львівського національного університету імені Івана Франка,  
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна,  
e-mail: lesiaab@gmail.com,

<sup>2</sup> Львівська філія Дніпровського національного університету залізничного транспорту,  
вул. І. Блажкєвич, 12а, Львів, 79000, Україна

(Отримано 22 липня 2020 р.; в остаточному вигляді — 27 листопада 2020 р.; прийнято до друку — 03 грудня 2020 р.; опубліковано онлайн — 29 січня 2021 р.)

Проведено комплексне дослідження для встановлення впливу сонячного тиску на тривалість існування штучних супутників Землі (ШСЗ) на орбіті. Об'єктами дослідження вибрано 7 некерованих супутників, що були на орбіті протягом 2001–2020 рр. (дані з мережі станцій USSTRATCOM <http://www.space-track.org/>). Урахування впливу світлового тиску дало змогу підвищити точність розрахунків: застосування запропонованої методики дозволило зменшити різницю між розрахованим і реальним часом існування ШСЗ в межах  $\pm 2$  діб, що достатньо для отримання подібних прогнозів.

**Ключові слова:** штучні супутники Землі, орбітальний рух, світловий тиск.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.25.1901>

### I. ВСТУП

Усе більша кількість космічного сміття становить серйозний ризик для майбутніх космічних польотів. Тому ключовою вимогою до майбутніх місій став надійний розрахунок терміну експлуатації ШСЗ та їх утилізація.

Збурення орбіти ШСЗ викликане цілою низкою чинників [1–3]: несферичністю Землі, опором атмосфери, гравітаційним впливом Місяця і Сонця, світловим тиском. Зокрема, коливання періодів обертання супутників свідчать про зміну густини верхньої атмосфери Землі, пов'язану з рівнем геліомагнітного збурення [4, 5]. Світловий тиск впливає на орбітальний рух об'єктів залежно від їхньої маси, площі, а також висоти їхньої орбіти [6].

У цій праці вдосконалено емпіричну методику швидкого розрахунку орбітального руху ШСЗ з урахуванням світлового тиску, що дає змогу уточнити момент його руйнації.

### II. РІВНЯННЯ РУХУ ШСЗ

Розглянемо плоскі обертові рухи ШСЗ, центр мас якого рухається по заданій орбіті з ексцентриситетом  $e$ . На рис. 1 схематично показано положення супутника на орбіті (згідно з роботою [7]). Використано такі позначення:  $\nu$  — справжня аномалія,  $\theta$  — кут орієнтації супутника щодо інерціальної осі  $O\pi$ ,  $\phi$  — азимут розташування джерела світла (Сонця),  $\pi$  — перицентр.

Будемо вважати, що джерело світла є достатньо віддаленим від Землі. Отже, світловий промінь має однаковий напрям у всіх точках орбіти. Використовуючи відомий вираз для моменту сил світлового тиску

[8], рівняння плоских лібрацій ШСЗ можна подати у вигляді

$$\ddot{\theta} + 3 \frac{GM}{R(t)^3} \frac{A-C}{B} \sin(\theta - \nu(t)) \cos(\theta - \nu(t)) = c \sin(\theta - \phi) |\sin(\theta - \phi)|. \quad (1)$$

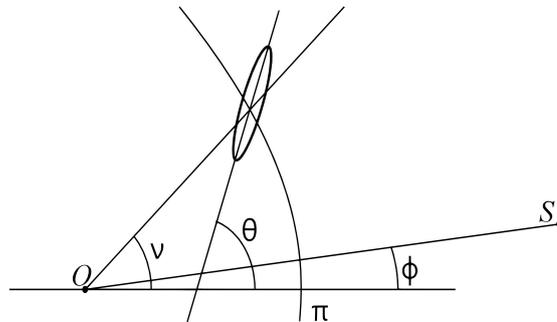


Рис. 1. Положення ШСЗ на орбіті (згідно з [7])

Fig. 1. The location of the satellite in the orbit (according to [7])

Тут  $A, B, C$  — головні центральні моменти інерції супутника,  $c$  — стала з урахуванням відбивальних властивостей поверхні супутника,  $R(t)$  — поточний орбітальний радіус,  $G$  — гравітаційна константа,  $M$  — маса Землі; причому приймаємо такі співвідношення:

$$GM = 1, \frac{p}{1+e} = 1.$$

Завдяки такому вибору одиниць вимірювання, коли  $e \rightarrow 1$ , піввісь орбіти і період обертання такі, що

$$\alpha = \frac{p}{1-e^2} \rightarrow \infty, T = 2\pi a^{3/2} \rightarrow \infty.$$



Легко бачити, що

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^{3/2}} \frac{d\theta}{d\nu}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{p^3} \left( (1 + e \cos \nu) \frac{d^2\theta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\theta}{d\nu} \right),$$

де прийнято, що

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{p^{1/2}}{R^2}, R = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \nu}.$$

Врахуємо, що  $\mu = 3(A - C)/B$ . Тоді, беручи до уваги тригонометричні тотожності, отримуємо рівняння обертального руху з новою незалежною змінною, справжньою аномалією  $\nu$  у вигляді

$$(1 + e \cos \nu) \delta'' - 2e \sin \nu \delta' + \mu \sin(\delta - 2\nu) = \frac{c(1 + e)^3}{c(1 + e \cos \nu)^3} f(\delta - 2\phi), \quad (3)$$

де  $\delta = 2\theta$  — нова невідома функція, а внесок світлового тиску враховуємо за допомогою функції

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 - \cos \alpha, & \text{коли } \sin \frac{\alpha}{2} \geq 0 \\ -1 + \cos \alpha, & \text{коли } \sin \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases}.$$

Перепишемо рівняння (1) у звичнішій формі

$$\ddot{\delta} + \frac{\mu}{2^3} (1 + \cos \nu)^3 \sin(\delta - 2\nu) = cf(\delta - 2\phi). \quad (4)$$

Справжня аномалія задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{\nu} = 2^{-3/2} (1 + \cos \nu)^2. \quad (5)$$

Рівняння (4) і (5) потрібно розглядати одночасно.

Момент часу  $t$  і момент проходження супутника через перицентр  $\tau$  пов'язані з істинною аномалією  $\nu$  рівнянням [9]:

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{fM}} \int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2}. \quad (6)$$

Оскільки за весь час життя ШСЗ може здійснити навколо Землі тисячі обертів  $N$ , а крок інтегрування обмежений, то вигідно ввести нову незалежну змінну — аргумент широти  $u$ , пов'язаний з кількістю обертів  $N$  таким співвідношенням:

$$N = \frac{u}{2\pi},$$

а з елементами орбіти — істинною аномалією  $\nu$  і кутною відстанню  $\omega$  від висхідного вузла  $\Omega$  [1]:

$$u = \nu + \omega. \quad (7)$$

Для інтегрування вибрано крок  $\Delta\nu = 6^\circ$ .

### III. СПОСТЕРЕЖУВАНИЙ МАТЕРІАЛ

Для розрахунків рівнянь руху ШСЗ в елементах орбіти ми скористалися базою даних мережі станцій USSTRATCOM (<http://www.space-track.org/>), додаткові дані взято із сайту CalSky (<https://www.calsky.com>); перигей і апогей розраховано з використанням TLEtools (<https://tletools.readthedocs.io>). Були вибрані 6 низькоорбітальних супутників і 1 супутник з високоеліптичною орбітою, що рухалися по орбіті протягом 2001–2020 рр. Для дослідження руйнації руху ШСЗ ми використали дані за останні 2–3 місяці їх перебування на орбіті. На певний момент часу  $t$  дані щодо елементів вибраних супутників наведені в таблиці 1.

№ з/п	№ ШСЗ	Дата на момент $t$	$i$ , град	$\Omega$ , град	$e$	$\omega$ , град	$\nu$ , град	$n_o$ , витків за добу
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	27550	22.11.14	97.13	317.53	.0003	120.16	324.66	15.77
2	26953	22.11.14	97.10	035.05	.0002	194.02	306.52	15.82
3	29253	22.12.14	64.48	194.17	.0024	279.38	180.25	15.67
4	31790	03.04.15	64.48	267.67	.0023	294.89	064.99	15.69
5	9829	23.09.19	61.38	092.23	.7520	275.60	011.41	02.04
6	42800	19.02.20	98.06	257.42	.0066	134.91	225.76	15.96
7	27376	31.03.20	86.36	184.96	.0097	179.04	181.11	15.84

Примітка. Колонки: 2 — номер ШСЗ в каталозі USSTRATCOM; 3 — дата на певний момент  $t$  (число, місяць, останні цифри року); 4 — нахил орбіти  $i$ ; 5 — довгота висхідного вузла  $\Omega$ ; 6 — ексцентриситет  $e$ ; 7 — аргумент перицентра  $\omega$ ; 8 — істинна аномалія  $\nu$ ; 9 — кількість орбітальних обертів супутника за добу  $n_o$ .

Табл. 1. Елементи орбіт ШСЗ  
Table 1. Elements of satellite orbits

Усереднені значення густини атмосфери залежно від висоти, згідно з роботою [5], наведено в таблиці 2.

Густина атмосфери залежить не лише від висоти, а й від багатьох інших параметрів, як-от: пора року, час доби, рівень сонячної та геомагнітної активності. Для конкретних розрахунків ми використовуємо модель атмосфери NRLMSISE-00 [10].

$h$ , км	$d$ , г/км <sup>3</sup>	$h$ , км	$d$ , г/км <sup>3</sup>
100	497400	600	0.081...0.639
200	255...316	700	0.020...0.218
300	17...35	800	0.007...0.081
400	2.2...7.5	900	0.003...0.036
500	0.4...2.0	1000	0.001...0.018

Табл. 2. Середня густина атмосфери залежно від висоти, згідно з [5]

Table 2. Average density of the atmosphere as a function of altitude, according to [5]

#### IV. ОЦІНКА ТРИВАЛОСТІ ПЕРЕБУВАННЯ СУПУТНИКА НА ОРБИТІ

Кількість обертів  $N$  супутника на орбіті від певного моменту часу  $t$  дорівнює

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\theta \frac{\cos \nu dv}{(1 + e \cos \nu)^3}. \quad (8)$$

Для оцінки тривалості перебування супутника перейдімо до інтегрування за змінною  $u$  [співвідношення (7)] та скористаймося деякими цілком прийнятними допущеннями: 1) опір атмосфери не викликає збурень довготи вузла  $\Omega$ , тобто похідна  $\frac{d\Omega}{du} = 0$ ; 2) за малих значень ексцентриситету  $e$  унаслідок значних змін  $r$  похідна  $\frac{dr}{du} = 0$ ; 3) протягом одного оберту зміни параметра  $p$ , ексцентриситету  $e$  і віддалі перигею від вузла  $\omega$  можна вважати сталими, щоби більше,  $\Delta\omega = 0$ .

Оскільки за один оберт елементи орбіти  $p$  і  $e$  змінюються дуже мало, можна з високою точністю прийняти, що вказані зміни цих величин за один оберт дорівнюють похідним від цих елементів за кількістю обертів супутника  $N$ :  $\frac{dp}{dN}$  і  $\frac{de}{dN}$ , де  $N$  пов'язане з  $u$ . Своєю чергою похідні  $\frac{dp}{du}$  і  $\frac{de}{du}$  містять сталий множник — балістичний параметр  $q$ , пов'язаний із кількістю обертів  $N$  супутника на орбіті множником  $\beta$  [11]:

$$N = \frac{\beta}{q}.$$

У праці [1] подано затабульовані величини  $\beta$  у точній залежності від початкових значень висоти перигею  $h_p$  і висоти апогею  $h_a$ . Для наших досліджень ми використали балістичні параметри  $q \sim \frac{1}{B}$ , розраховані в [3].

#### V. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розрахунки часу перебування в обертах  $N$  досліджуваних ШСЗ на орбіті від певного моменту часу  $t$  наведено в таблиці 3. Там також міститься перерахунок цього часу на термін існування супутника в добах  $n_{calc}$ . Для порівняння наведено реальні терміни перебування  $n_{real}$  супутників на орбіті, що дало змогу протестувати розроблену методику розрахунку.

№ з/п	№ ШСЗ	Дата на момент $t$	$h_p$ , км	$h_a$ , км	$N$	$n_{calc}$ , діб	$n_{real}$ , діб	$\Delta_{r-c}$ , діб
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	27550	22.11.14	6716	6721	946	60	61	+1
2	26953	22.11.14	6703	6705	1060	67	67	0
3	29253	22.12.14	6730	6763	972	62	63	+1
4	31790	03.04.15	6723	6754	957	61	60	-1
5	9829	23.09.19	6507	45961	210	103	105	+2
6	42800	19.02.20	6620	6709	989	62	61	-1
7	27376	31.03.20	6633	6763	974	61	60	-1

Примітка. Колонки: 2 — номер ШСЗ в каталозі USSTRATCOM; 3 — дата на певний момент  $t$  (число, місяць, останні цифри року); 4 і 5 — геоцентричні значення перигею  $h_p$  і апогею  $h_a$ ; 6 — розрахована кількість обертів  $N$  від моменту часу  $t$ ; 7 — розрахований термін існування супутника в добах  $n_{calc}$  від моменту  $t$ ; 8 — реальний час існування ШСЗ в добах  $n_{real}$  від моменту  $t$  до дати згорання; 9 — різниця між реальним і розрахованим часом існування ШСЗ в добах  $\Delta_{r-c}$ .

Табл. 3. Розраховані та реальні терміни існування ШСЗ на орбіті

Table 3. Calculated and real terms of the satellite's existence in orbit

Із таблиці 3 бачимо, що для низькоорбітальних супутників різниця між розрахованим і реальним часом перебування ШСЗ на орбіті не перевищує  $\Delta_{r-c} = \pm 1$  добу, для супутника з високоеліптичною орбітою вона становить  $\Delta_{r-c} = +2$  доби.

Отже, врахування світлового тиску дало змогу де-що підвищити точність розрахунків, проведених раніше в [9]. Зауважимо, що для об'єктів із малою масою та великою площею, що рухаються на середніх та високих (геостационарних) орбітах, вплив світлового тиску є істотнішим [6].

#### VI. ВИСНОВКИ

Ми уточнили розрахунок тривалості перебування ШСЗ на орбіті, проведений раніше в праці [9], враховуючи світловий тиск. Наше тестування підтверджує обґрунтованість розробленої методики: різниця між розрахованим і реальним часом існування орбітального руху супутників не перевищує  $\pm 2$  доби, що достатньо для отримання подібних прогнозів.

- [1] Д. Е. Охочимский, Т. М. Энеев, Г. П. Таратинова, Усп. физ. наук **63**, 33 (1957).
- [2] Г. Н. Дубошин, *Небесная механика* (Наука, Москва, 1983).
- [3] Н. С. Бритаевский, Н. Н. Кошкин, Л. С. Шакур, в *Изучение объектов околоземного пространства и малых тел Солнечной системы: Межд. науч. конф.* (Атолл, Николаев, 2007), с. 142.
- [4] В. В. Virgili *et al.*, in: *Proc. 65th International Astronaut. Congress* (Toronto, Canada2014), paper IAC-14-A6.2.5; <https://doi.org/10.13140/2.1.4902.2721>.
- [5] V. P. Zhaborovskyi, *Kinem. Phys. Celest. Bodies* **30**, 308 (2014); <https://doi.org/10.3103/S0884591314060087>.
- [6] Ch. Lüking, C. Colombo, C. R. McInnes, *Acta Astronaut.* **77**, 197 (2012); <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.03.026>.
- [7] I. I. Kosenko, *Cosm. Res.* **40**, 581 (2002); <https://doi.org/10.1023/A:1021509930945>.
- [8] R. C. Flanagan, V. J. Mondt, *Aeronaut. J.* **74**, 835 (1970); <https://doi.org/10.1017/S0001924000048454>.
- [9] М. М. Ковальчук *та ін.*, *Вісник КНУ ім. Т. Г. Шевченка: Астрон.* **55**, 39 (2017); <https://doi.org/10.17721/BTSNUA.2017.55.39-43>
- [10] J. M. Picone, A. E. Hedin, D. P. Dro, A. C. Aikin, *J. Geophys. Res.* **107**, SIA 15 (2002); <https://doi.org/10.1029/2002JA009430>.
- [11] В. К. Абалакин *и др.*, *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* (Наука, Москва, 1976).

#### APPROXIMATE EVALUATION OF THE DURATION OF THE ORBITAL MOTION OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITES TAKING INTO ACCOUNT LIGHT PRESSURE

М. М. Koval'chuk<sup>1</sup>, Ye. B. Vovchik<sup>1</sup>, O. A. Baran<sup>1</sup>, A. I. Bilinsky<sup>1</sup>, I. P. Laushnyk<sup>2</sup>, M. I. Stodilka<sup>1</sup>, M. B. Hirnyak<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Astronomical Observatory, Ivan Franko National University of Lviv,  
8, Kyrylo & Mefodiy St., Lviv, UA-79005, Ukraine,  
e-mail: lesiaab@gmail.com,*

<sup>2</sup>*Lviv branch of Dnipro National University of Railway Transport,  
12-A, I. Blazhkevych St., Lviv, UA-79000, Ukraine*

A comprehensive research was conducted to establish the influence of solar pressure on the existence of artificial Earth satellites in their orbit. Six low-orbit satellites and one satellite with a high-elliptical orbit moving in orbit during 2001–2020 were selected for the study. We used the USSTRATCOM database of the satellites' orbital elements (<http://www.space-track.org/>), additional data were taken from CalSky (<https://www.calsky.com>) and TLEtools (<https://tletools.readthedocs.io>).

Taking into account light pressure, we refined the calculation of the duration of a satellite's orbital motion, which we had performed earlier [M. M. Koval'chuk, *Bull. Natl. Univ. Kyiv. Astron.* **55**, 39 (2017)], and clarified the moment of its destruction. Using the proposed method allowed us to reduce the difference between the calculated and the real lifetime of satellites: for low-orbit satellites, the difference between the calculated and the real time of their existence in orbit does not exceed  $\pm 1$  day, for a satellite with a highly elliptical orbit it is  $+2$  days. Such accuracy is sufficient to produce proper forecasts.

Thus, consideration of light pressure gives a small correction in the calculations in the case of low-orbit satellites, but this correction can be significant for low-mass and large-surface objects moving in medium and high (geostationary) orbits [Ch. Lucking, C. Colombo, C. R. McInnes, *Acta Astronaut.* **77**, 197 (2012)].

**Key words:** artificial Earth satellites, orbital motion, light pressure.