

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ 300-ЛЕТИЯ ВОССОЕДИНЕНИЯ УКРАИНЫ С РОССИЕЙ

На правах рукописи

КРАСНОВ Алексей Миронович

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И СВОБОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ОБЛОЧЕК

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Днепропетровск 1987

НТБ
ДНУЖТ

Работа выполнена в Одесском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени И.И.Мечникова

Научный руководитель -доктор физико-математических наук,
профессор Попов Г.Я.

Официальные оппоненты-доктор физико-математических наук,
профессор Проценко В.С.,
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник Макеев Е.М.

Ведущая организация - институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР (г. Львов)

Защита диссертации состоится "27" ноября 1987 г.
в 15 часов на заседании специализированного совета К 053.24.05
по присуждению ученой степени кандидата физико-математических
наук в Днепропетровском государственном университете:320625,
ГСП,Днепропетровск, 10, пр.Гагарина, 72, госуниверситет,
корп.3, ауд. 57.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Днепропетровского госуниверситета.

Автореферат разослан "5" октября 1987 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико - математических
наук ,доцент



Ламзих В.Д.

НТБ
ДНУЖТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

5110a

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В условиях современного научно-технического прогресса предъявляются все более высокие требования к используемым в народном хозяйстве сооружениям и конструкциям, содержащим оболочки. Развитие, в последнее время, широкой сети трубопроводов и появление первых пневмотранспортных сетей, привело к созданию разнообразных составных оболочечных конструкций, состоящих из большого числа элементов. Потребности техники привели к рассмотрению оболочек как подкрепляющих конструкций. Проектирование и создание надежных и достаточно экономичных конструкций значительно облегчается их предварительным расчетом на основе соответствующих математических моделей. Это способствовало развитию теории оболочек и методов решения возникающих в ней задач. Значительный вклад в развитие теории оболочек внесли русские и советские ученые: Б.З.Власов, А.С.Вольмир, К.З.Галимов, А.Л.Гольденвейзер, А.И.Дурье, Х.М.Муштари, В.В.Новожилов, Ю.Н.Работнов, С.П.Тимошенко и другие. Все разработанные к настоящему времени методы расчета оболочек можно разбить на три группы: точные, приближенные, аналитические и численные. Наряду с бурным развитием численных методов, получивших, в последнее время, широкое применение в связи с развитием ЭВМ, продолжают развиваться аналитические методы. Существенный вклад в разработку аналитических методов применительно к задачам теории оболочек и их исследования, основанных на использовании аппарата теории функций комплексного переменного и обобщенных функций, асимптотических методов, метода сингулярных интегральных уравнений, метода потенциала, метода интегральных преобразований, метода Фурье, ортогональных многочленов, метода коллокации внесли: Л.В. Андреев, И.А.Биргер, Ю.В.Веружский, А.В.Вестяк, Е.Д.Хвилон, С.П.Гавеля, Э.И.Григоляк, В.М.Толкачев, Я.М.Григоренко, А.Т.Василенко, С.В.Загора, В.Н.Чехов, М.С.Корнишин, Ю.А.Мельников, В.И.Моссаковский, В.С.Гудрамович, Е.М.Макеев, И.Ф.Образцов, Г.Г.Онанов, П.М.Огибалов, М.А.Колтунов, В.А.Осадчук, В.В.Панасюк, М.П.Саврук, А.П.Дацшин, Я.С.Подстригач, В.А.Ломакин, Ю.М.Коляно, В.Б.Лидский, П.Е.Товстик, С.А.Шестериков и целый ряд других исследователей.

Хотя приближенные аналитические и точные методы и уступают численным в универсальности, существует довольно широкий класс

Днепропетровский
институт инженеров
жел. дор. транспорта
им. М. И. Калинина
БИБЛИОТЕКА

НТБ
ДНУЖТ

практически важных задач, при решении которых использование приближенных аналитических и точных методов в настоящее время предпочтительнее. Это объясняется тем, что в этих методах проще учесть многие особенности рассматриваемых задач. Так в задачах для тел, состоящих из большого числа сопряженных элементов, часто удается учесть рекуррентную структуру решения и, тем самым, существенно упростить исследование. В задачах для тел, имеющих угловые точки, служащие концентраторами напряжений, точные методы дают возможность определить поведение решения в окрестности таких точек, используя которое можно строить эффективные приближенные решения.

ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ является построение точных и приближенных аналитических методов решения следующих недостаточно изученных вопросов теории оболочек: исследование напряженно-деформированного состояния составных соосных цилиндрических и конических оболочек; оболочек состыкованных под углом; конических оболочек, подкрепляющих упругий конус; свободных колебаний цилиндрических и конических оболочек.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. При решении указанных задач используется математический аппарат решения матричных дифференциальных уравнений, метод интегральных преобразований, математический аппарат решения краевых задач теории аналитических функций, метод ортогональных многочленов, метод коллокаций в сочетании с методом СВЭ-разложения, математический аппарат теории сферических функций.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ заключается в следующем.

- Получены точные решения задач о напряженном состоянии составных соосных цилиндрических и конических оболочек. Построен эффективный алгоритм для их численной реализации, позволяющий избежать решения больших систем алгебраических уравнений, обычно возникающих при решении таких задач.

- Получено эффективное приближенное решение задачи о напряженном состоянии двух цилиндрических оболочек состыкованных под углом при произвольных граничных условиях.

- Получены эффективные приближенные решения задач о свободных колебаниях цилиндрических и конических оболочек.

- Получены точные решения задач о напряженном состоянии бесконечных конических оболочек, подкрепляющих упругий конус. Выявлено поведение контактных напряжений в окрестности вершины и на бесконечности.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Разработанные методики и вычислительные

НТБ
ДНУЖТ

программы могут быть использованы в конструкторских бюро и проектных институтах при расчете напряженно-деформированного состояния конструкций, представляющих составные оболочки и оболочки, контактирующие с упругим наполнителем. Разработанная методика прочностного расчета корпусов аксиально-поршневых гидромашин, представляющих из себя состыкованные под углом цилиндрические оболочки, передана в соответствующее КБ.

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ. Полученные в работе результаты являются итогом применения обоснованных математических методов решению поставленных задач, а также подтверждаются сравнением частных случаев полученных решений с результатами других авторов.

ПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на отчетных научных конференциях профессорско-преподавательского состава Одесского государственного университета, на семинарах по математической физике Одесского государственного университета (рук. проф. Попов Г.Н), на проблемной семинаре по механике Киевского госуниверситета (рук. член-кор. АН УССР А.Ф. Улитко), на Втором Республиканском симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям (г. Одесса, 1978), на Второй Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемого тела (г. Днепропетровск, 1981), на Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур (г. Львов, 1984).

ПУБЛИКАЦИИ. По материалам диссертации опубликовано 6 печатных работ.

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, списка используемой литературы из 110 наименований. Общий объем работы составляет 201 с., включая 40 рисунков и 3 таблицы. Основной текст занимает 159 с. машинописи.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении дано обоснование актуальности темы, приведены краткий обзор работ, посвященных исследованию задач теории оболочек, близких к задачам, рассматриваемым в диссертации, определена цель работы, описано ее содержание.

В первой главе рассматриваются задачи о напряженно-деформированном состоянии составных замкнутых цилиндрических оболочек.

В § I все величины, входящие в полную систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние разыскиваются в виде

НТБ
ДНУЖТ

тригонометрических рядов по полярному углу. Это приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно коэффициентов этих рядов, которые записываются в матричном виде, что является принципиальным моментом для настоящего исследования.

Для задач о напряженном состоянии составных соосных цилиндрических оболочек конечной длины ($a \leq s \leq b$), в предположении, что в сечениях с координатами $s = s_k$ ($k = \overline{1, n-1}$) скачкообразно изменяются упругие параметры материала оболочки или ее толщина, матричные дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{dZ^{(k)}}{ds} + P^{(k)} Z^{(k)} = f^{(k)}; \quad s_k \leq s < s_{k+1}, k = \overline{0, n-1}; (I)$$

$$s_0 = a; \quad s_n = b$$

где $Z^{(k)}$ - вектор-функция восьмого порядка, компонентами которой являются перемещения ($U^{(k)}$ - в направлении изменения s , $V^{(k)}$ - в окружном направлении, $W^{(k)}$ - прогиб); угол поворота нормали ($\chi_s^{(k)}$); усилия ($N_s^{(k)}$ - продольное, $T_s^{(k)}$ - обобщенное сдвигающее; $Q_s^{(k)}$ - обобщенное поперечное); изгибающий момент ($M_s^{(k)}$), входящие обычно в граничные условия при $s = const$, $f^{(k)}$ - вектор нагрузки, $P^{(k)}$ - матрица-константа.

Кроме уравнения (I), должны удовлетворяться условия закрепления на торцах оболочки

$$AZ^{(0)}(a) + BZ^{(n-1)}(b) = \gamma \quad (2)$$

и условия сопряжения в сечениях $s = s_k$ ($k = \overline{1, n-1}$)

$$Z^{(k)}(s_k) = A^{(k)} Z^{(k-1)}(s_k) + C^{(k)} \quad (3)$$

В § 2 излагается способ решения задач (I)-(3), в идейном отношении близкий к способу, предложенному Г.Я.Половым применительно к задачам теории упругости. Как известно, путь решения подобного рода задач заключается в построении общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений (I) для каждого K . Содержащиеся в общих решениях произвольные постоянные, количество которых пропорционально

n находятся из граничных условий и условий сопряжения, что приводит, обычно, к системе алгебраических уравнений, порядок которой пропорционален n . Излагаемый в данном параграфе способ, приводящий к алгебраической системе, порядок которой не выше порядка системы дифференциальных уравнений (I), заключается в следующем. Строится матрица для системы уравнений (I), т.е. матрица, служащая решением следующего уравнения

НТБ
ДНУЖТ

$$\frac{d\bar{z}^{(k)}}{ds} + P^{(k)} \bar{z}^{(k)} = 0 \quad (4)$$

и удовлетворяющая условию $\bar{z}^{(k)}(s_k) = E$, при помощи которого записывается общее решение системы (I)

$$\bar{z}^{(k)}(s) = \bar{z}^{(k)}(s) \bar{z}^{(k)}(s_k) + \int_{s_k}^s \bar{z}^{(k)}(\eta) [\bar{z}^{(k)}(\eta)]^{-1} f^{(k)}(\eta) d\eta$$

Используя это выражение удалось получить рекуррентную связь между векторами $\bar{z}^{(k)}(s_{k+1})$ и $\bar{z}^{(k)}(s_k)$, использование которой и условия сопряжения (3) приводит к выражению вектора $\bar{z}^{(k)}(s)$ через вектор $\bar{z}^{(0)}(s_0)$. Дальнейшее удовлетворение граничного условия (2), приводит к алгебраической системе относительно компонент вектора $\bar{z}^{(0)}(s_0)$, т.е. к системе, порядок которой не превышает порядка системы дифференциальных уравнений (I).

В § 3 данной главы строится матрицант для уравнения (I) в виде матричной функции восьмого порядка

$$\bar{z}^{(k)}(s) = \exp[-P^{(k)}(s-s_k)] \quad (5)$$

Для случая осевой симметрии порядок уравнения (I) равен четырем (компонентами $\bar{z}^{(k)}(s)$ служат; прогиб $w^{(k)}$; угол поворота $\gamma_s^{(k)}$; обобщенная поперечная сила $Q_s^{(k)}$ и изгибающий момент $M_s^{(k)}$). Это позволяет представить матрицант в форме, предложенной Поповым Г.Я., не содержащей матричных функций

$$\bar{z}^{(k)}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Res} \left[\frac{\Delta^*(\zeta) e^{(\zeta-s_k)\zeta}}{Q_n(\zeta)} \right] \zeta = \zeta_j$$

Здесь $\Delta^*(\zeta)$ - матрица, транспонированная к матрице алгебраических дополнений для элементов характеристической матрицы $P^{(k)}$; $Q_n(\zeta)$ - характеристический многочлен матрицы $P^{(k)}$.

В общем случае использование этой формулы затруднительно в силу невозможности отыскания корней многочленов восьмой степени.

Построение матрицанта, позволяет получить точное решение задачи о напряженном состоянии составной цилиндрической оболочки, которое сравнительно просто реализуется на ЭВМ. В качестве численного примера была выбрана осесимметричная цилиндрическая оболочка состоящая из двух частей. При вычислениях варьировалось соотношение упругих параметров и вид граничных условий. При этом следует отметить универсальность алгоритма, по отношению к виду граничных ус-

НТБ
ДНУЖТ

ловий, условий сопряжения и вида поверхностной нагрузки.

В § 4 первой главы рассмотрена задача о напряженном состоянии двух цилиндрических оболочек состыкованных под углом при отсутствии симметрии граничных условий относительно плоскости стыковки, а именно: один край оболочки загружен, а другой защемлен. Особенность таких задач заключается в том, что сопряжение производится по линиям, не совпадающим с координатными. Эту сложность удается преодолеть при помощи метода коллокации. Решение рассматриваемой задачи строится при помощи матрицанта (4), что позволяет точно удовлетворить граничным условиям, заданным на координатных линиях. На линии стыковки оболочек, которая не совпадает с координатными линиями, условия сопряжения удовлетворяются методом коллокации. При использовании традиционной схемы этого метода, получающаяся система алгебраических уравнений, как правило, плохо обусловлена. В связи с этим, для удовлетворения условиям сопряжения применялся следующий подход. Количество точек коллокации выбиралось так, чтобы число уравнений превосходило число неизвестных. Полученная таким образом переопределенная система алгебраических уравнений решалась методом наименьших квадратов с использованием метода SVD-разложений. В качестве численных примеров рассматривались различные способы загрузки края состыкованной оболочки. Эпюры распределения изгибающих моментов, действующих в области стыковки, приведены на рис. 1 - для угла между осями оболочек 10° и для угла 20° на рис. 2.

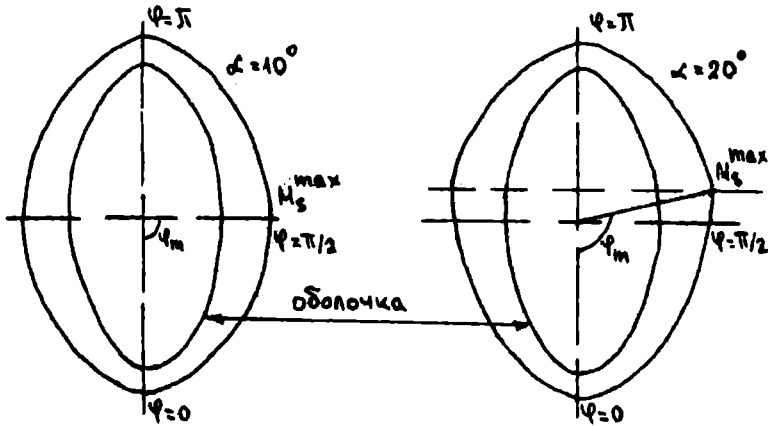


Рис. 1

Рис. 2

НТБ
ДНУЖТ

Расчеты производились для оболочки, состоящей из двух оболочек одинаковой длины l , радиуса R , толщины h , загруженной равномерно распределенно поперечной краевой силой, равной I , при $l/R = 1$; $(R/h)^2 = 100$. Выявлено, что при увеличении угла между осями оболочки, точка максимума изгибающего момента сдвигается к точке $\varphi = \pi$.

Во второй главе рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии соосных составных конических оболочек.

Для задач, рассматриваемых в данной главе, используется метод, изложенный в § 2 гл. I, поскольку они сводятся к (I)-(3). Но в этом случае, матрица $P^{(k)}$ не является постоянной, а имеет представление

$$P^{(k)}(s) = \frac{1}{s} P_{-1}^{(k)} + P_0^{(k)} \quad (6)$$

и поэтому не представляется возможным строить матрицант в виде (5). Однако, представление (6) позволяет рассматривать (I) как матричное дифференциальное уравнение с особой точкой $s=0$. В монографии Ф.Р.Гантмахера (Теория матриц. - М.:Наука, 1966. - 576 с.) предложен метод построения фундаментальной матрицы для уравнения (I) с коэффициентом вида (6). Используя этот аппарат в § 2 и § 3 данной главы, построен матрицант для задачи кручения и осесимметричного изгиба конической оболочки соответственно. Построение матрицанта позволяет получить точное решение задачи (I)-(3) для задач кручения и изгиба составных конических оболочек. Для численной реализации была выбрана задача с кручением конической оболочки, состоящей из двух частей. При вычислениях варьировались соотношения упругих параметров материалов и их способ сопряжения. Рассматривалось кручение двух оболочек, одинаковой длины, которые стыкуются при помощи упругого включения малой толщины, что позволяет принять линейный закон распределения перемещений по толщине и определить коэффициент податливости включения K и, тем самым, записать одно из условий сопряжения в таком виде $T_s^A - T_s^B = K(\psi^A - \psi^B)$. На рис. 3 приведены графики изменения сдвигающего усилия T_s , в точке закрепления, и перемещения ψ правой оболочки в точке стыковки, в зависимости от $K_1 = K/G_A(1-\nu_A)$. Здесь G_A, ν_A модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала левой оболочки.

Третья глава посвящена исследованию свободных колебаний цилиндрических и конических оболочек. Способ отыскания частот свободных колебаний оболочек, основан на методе ортогональных много-

НТБ
ДНУЖТ

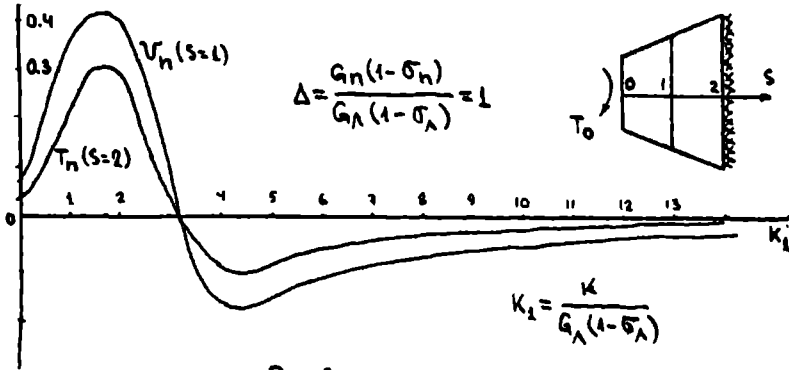


Рис. 3

членов, для рассматриваемых задач применяемый, видимо, впервые.

В § I полные системы дифференциальных уравнений, описывающие свободные колебания цилиндрических и конических оболочек, путем конечного преобразования Фурье по окружной координате, сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной в виде

$$\frac{dZ}{ds} + PZ = 0 \quad (7)$$

где $Z(s)$ - вектор-функция, компонентами которой служат перемещения, угол поворота, усилия и изгибающий момент; P - матрица, зависящая от параметра ω - частоты свободных колебаний оболочки.

В § 2 вначале рассматриваются задачи о свободных колебаниях цилиндрической и конической оболочек, когда один их край жестко закреплен, а другой свободен. Для случая осевой симметрии вектор-функция шестого порядка $Z(s)$ рассматривается в виде:

$$Z(s) = \{Z^+; Z^-\}; Z^+ = \{u, w, \gamma_s\}; Z^- = \{N_s, Q_s, M_s\}, \quad (8)$$

где u, w - перемещение в направлении s и прогиб; γ_s - угол поворота нормали; N_s, Q_s - продольное и обобщенное поперечное усилия; M_s - изгибающий момент.

Задача о свободных колебаниях цилиндрической оболочки решается следующим образом. С учетом представления (8), уравнение (7) записывается в виде системы матричных уравнений

$$\frac{dZ^+}{ds} + P^{++}Z^+ + P^{+-}Z^- = 0 \quad (9)$$

НТБ
ДНУЖТ

$$\frac{dz^-}{ds} + P^+ z^+ + P^- z^- = 0 \quad (9)$$

которая дополняется граничными условиями

$$z^+(0) = 0; \quad z^-(\ell) = 0 \quad (10)$$

(ℓ - длина оболочки).

Для решения задачи (9)-(10) вводятся новые векторы

$$\eta^+(s) = \frac{dz^+}{ds}; \quad \eta^-(s) = \frac{dz^-}{ds} \quad (11)$$

через которые искомые функции z^+ и z^- выражаются так

$$z^+(s) = \int_0^s \eta^+(x) dx + c_1; \quad z^-(s) = \int_s^\ell \eta^-(x) dx + c_2 \quad (12)$$

Полагая произвольные константы c_1 и c_2 равными нулю, автоматически удовлетворяем граничные условия (10), и система (9) приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned} (I + P^{++} J) \eta^+ + P^{+-} J^* \eta^- &= 0 \\ (I + P^{--} J^*) \eta^- + P^{-+} J \eta^+ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

в которой J и J^* - интегральные операторы

$$J \eta^+ = \int_0^s \eta^+(x) dx; \quad J^* \eta^- = \int_s^\ell \eta^-(x) dx,$$

I - тождественный оператор.

Решение системы (13) разыскивается в виде рядов по многочленам Якоби

$$\eta^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^+ P_j^+(s); \quad \eta^- = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^- P_j^-(s); \quad (14)$$

$$P_j^+(s) = P_j^{1,0} \left(\frac{2s-\ell}{\ell} \right); \quad P_j^-(s) = P_j^{0,1} \left(\frac{2s-\ell}{\ell} \right).$$

Дальнейшее использование спектральных соотношений для многочленов Якоби и приема ортогонализации, приводит к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений. Нахождение частот свободных колебаний осуществляется методом редукции, путем приравнивания нулю определителя полученной системы. Аналогичный способ применяется при решении задачи о колебаниях осесимметричной конической оболочки, один край которой зажат, а другой свободен. В этом же параграфе изложенный способ обобщается на случай произвольных граничных условий и неосесимметричных колебаний с различным числом волн по параллели.

В § 3 гл. III проводится обоснование решения бесконечных систем алгебраических уравнений методом редукции на примере колебаний

НТБ
ДНУЖТ

цилиндрической оболочки. С это целью получена оценка для коэффициентов a_{kj} бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < \infty$$

которая позволяет заключить, что каждое из характеристических значений бесконечной системы алгебраических уравнений является пределом характеристических значений конечных алгебраических систем, получаемых при реализации метода редукции.

При численной реализации установлено, что для получения трех верхних знаков частоты колебаний, достаточно ограничиться пятью членами разложения (14).

В главе IY рассматриваются задачи о напряженно-деформированном состоянии конической оболочки, находящейся под действием осесимметричной нагрузки и подкрепляющей пружин конус. Особенность решения этих задач является то что после преобразования Меллина они сводятся к краевой задаче арлемана для полосы

$$\Phi(\nu_0+h) + K(\nu_0)\Phi(\nu_0) = G(\nu_0); \quad \nu_0 \in \Omega \quad (15)$$

Здесь $K(\nu)$ и $G(\nu)$ - известные функции, Ω - прямая, параллельная мнимой оси, а $\Phi(\nu)$ - неизвестная функция, аналитическая в полосе $c < \text{Re } \nu < c+h$, $c = \text{Re } \nu_0$.

Известны два метода решения задачи (15) для полосы: метод сведения к задаче Римана и метод конических решений. Первый метод был предложен Ю.И.Черским и основан на сведении задачи к задаче Римана на разомкнутом контуре. Согласно второму методу, решение задачи (15) ищется в виде

$$\Phi(\nu) = \Phi_1(\nu) \chi(\nu) \quad (16)$$

где $\chi(\nu)$ и $\Phi_1(\nu)$ решения двух канонических задач: задачи актори-зации

$$K(\nu_0) = \chi(\nu_0) \cdot \chi^{-1}(\nu_0+h) \quad (17)$$

и задачи о скачке

$$\Phi_1(\nu_0+h) + \Phi_1(\nu_0) = G_1(\nu_0); \quad G_1(\nu) = G(\nu) \chi(\nu+h)$$

Решение этих задач было получено Р.Л.Банцури в виде

$$\chi(\nu) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \ln K(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h}(s-\nu) ds \right] \quad (18)$$

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} G_1(s) / \sin \frac{\pi}{h}(s-\nu) ds$$

в случае $K(\nu)$ и $G(\nu)$ удовлетворяющих условию Гельдера, включая бесконечно удаленную точку, на прямой $\text{Re } \nu = c$, $K(\nu) \neq 0$ и

$$K(c-i\infty) = K(c+i\infty); \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} G_1(\nu) = 0.$$

НТБ
ДНУЖТ

В данной главе получены точные решения задач о контакте конической оболочки и упругого конуса, путем сведения к задаче арлемана. Первый параграф является вспомогательным, в котором приводится форма решения задач теории упругости в сферической системе координат, которая используется для описания напряженного состояния конуса. Перемещения и напряжения разыскиваются в виде, предложенном Гутманом С.Г.

$$2Gu = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2(1-\sigma_k)r\Delta F; \quad 2Gw = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad \Phi = r \frac{\partial F}{\partial r} + (3-4\sigma_k)F$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \sigma_k \frac{\partial(r\Delta F)}{\partial r} - 2(1-\sigma_k)\Delta F \quad (19)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{r} \right) - (1-\sigma_k)\Delta F \right]$$

где u, w - перемещения в направлении r и θ соответственно;
 σ_k, G - коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала конуса;
 $F(r, \theta)$ - решение бигармонического уравнения в сферической системе координат.

В § 2 решается задача кручения упругого бесконечного конуса, подкрепленного конической оболочкой. Требуется найти функцию $U(r, \theta)$ (перемещение в окружном направлении) - ограниченную в области $0 < r < \infty; 0 < \theta < \alpha$ - удовлетворяющую в этой области уравнению

$$\Delta U - \frac{U}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (20)$$

и граничному условию

$$\frac{d(rT_r)}{dr} + T_r + r \left[(q_\varphi - \tau_{\theta\varphi}) + (q_\varphi + \tau_{\theta\varphi}) \frac{h}{2r \operatorname{tg} \theta} \right] = 0; \quad \theta = \alpha \quad (21)$$

$$T_r = \gamma r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right); \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{G}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta U \right)$$

Здесь: T_r - сдвигающее усилие в конической оболочке; q_φ - поверхностная нагрузка, действующая на ее внешнюю поверхность; h - толщина оболочки; γ, G - упругие постоянные.

Кроме этого, должно удовлетворяться условие равновесия

$$\pi \sin^2 \alpha \int_0^r q_\varphi r (r \operatorname{tg} \alpha + h) dr + M = \pi \sin^2 \alpha \int_0^r \tau_{\theta\varphi} r (r \operatorname{tg} \theta - h) dr \quad (22)$$

(M - момент, сосредоточенный в вершине).

С помощью интегрального преобразования Меллина задача (20)-(22) сводится к краевой задаче Карлемана для полосы (15), с функцией $K(\nu)$, имеющей вид

$$K(\nu) = [-\lambda(\nu+2)\nu P_{\nu}^1(x) + h/2 \operatorname{tg} \alpha P_{\nu}^2(x)] / P_{\nu}^2(x) \quad (23)$$

Здесь λ - константа, зависящая от материала оболочки и конуса; h - толщина оболочки; α - угла конусности; $x = \cos \alpha$; $P_{\nu}^1(x)$ - функции Лежандра. Поскольку функция $K(\nu)$ не обладает свойством $K(c-i\infty) = K(c+i\infty)$, применяется прием "частичной" факторизации, т.е. $K(\nu)$ представляется в виде

$$K(\nu) = K_1(\nu) \chi(\nu+1) / \chi(\nu) \quad (24)$$

К такому представлению приводит введение новых функций

$$K_1(\nu) = -K(\nu) [(\nu+2)\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \nu]^{-1}; \quad \Psi(\nu) = \Phi(\nu) [\Gamma(\nu+2) \lambda^{\nu} \cos^{\pi/2} \nu]^{-1}$$

$$G_1(\nu) = G(\nu) [\Gamma(\nu+3) \lambda^{\nu+1} \cos^{\pi/2} (\nu+1)]^{-1}$$

После чего, дело сводится к задаче Карлемана

$$K_1(\nu_0) \Psi(\nu_0) + \Psi(\nu_0+1) = G_1(\nu_0), \quad \operatorname{Re} \nu_0 = c \quad (25)$$

в которой $K_1(\nu)$ удовлетворяет требуемому свойству. Вследствии этого, задача (25) допускает точное решение, при помощи которого записывается выражение контактного напряжения

$$\tau_{\theta\varphi}(r, \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \Gamma(\nu+2) \lambda^{\nu} \Psi_{+}(\nu) \cos^{\frac{\pi}{2}} \nu r^{-\nu-2} d\nu,$$

$\Psi_{+}(\nu)$ - предельное значение $\Psi(\nu)$ справа от прямой Σ .

В § 3 гл. IV рассматривается задача о напряженном состоянии осесимметричной конической оболочки, подкрепляющей упругий конус. На внешнюю поверхность оболочки действует касательная нагрузка q_n в направлении образующей и сосредоточенная сила P в вершине. Оболочка и конус находятся в состоянии идеального контакта, т.е. предполагается совпадение перемещений точек оболочки с перемещениями на поверхности конуса. Данная задача формулируется так

$$\Delta^2 F(r, \theta) = 0; \quad 0 < \theta < \alpha, \quad 0 < r < \infty \quad (26)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \sigma_{\kappa} \frac{\partial(\kappa \Delta F)}{\partial r} - 2(1-\sigma_{\kappa}) \Delta F = 0, \quad \theta = \alpha \quad (27)$$

$$\frac{d(\kappa N_n)}{dr} + r [(q_n - \tau_{r\theta}) + (q_n + \tau_{r\theta}) \frac{h}{2r \operatorname{tg} \theta}] = 0, \quad \theta = \alpha \quad (28)$$

$$2\pi \sin \alpha \int_0^{\infty} q_n r \left(1 + \frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha}\right) dr + P = 2\pi \sin \alpha \int_0^{\infty} \tau_{\theta r} r \left(1 - \frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha}\right) dr \quad (29)$$

Где N_n - продольное усилие; $\tau_{r\theta}$ - контактное напряжение. В этом же параграфе рассматривается задача о напряженном состоянии кони-

НТБ
ДНУЖТ

ческой оболочки, подкрепляющей упругий конус, в предположении, что на внешнюю поверхность оболочки действует осесимметричная нагрузка в нормальном к ее поверхности направлении. В этом случае требуется найти функцию $F(r, \theta)$, удовлетворяющую уравнению (26) и следующим граничным условиям

$$u(r, \theta) = 0, \quad \theta = \alpha \quad (30)$$

$$\frac{d(Nr)}{dr} + r \operatorname{tg} \alpha [(q_0 - \sigma_0) + (q_0 + \sigma_0) \frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha}] + r \tau_{r\theta} \left[\frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha} - 1 \right] = 0, \quad \theta = \alpha \quad (31)$$

При этом следует иметь в виду соотношения (19). Кроме того, должны удовлетворяться условия равновесия оболочки

$$\int_0^{\infty} q_0 r \left(1 + \frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha}\right) dr = \int_0^{\infty} \tau_{r\theta} r \left(1 - \frac{h}{2r \operatorname{tg} \alpha}\right) dr \quad (32)$$

Сформулированные задачи (26)-(29) и (26), (30)-(32) решается аналогично задаче о кручении конической оболочки, контактирующей с упругим конусом, т.е. сводятся к решаемой точно задаче Карлемана для полой (15) с более сложными, чем в (23) коэффициентами, также выражающимися через сферические функции.

В рассмотренных задачах для практических целей (расчет прочности и надежности системы конус-оболочка) наибольший интерес представляют контактные напряжения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta\theta}$, σ_{θ} . Для этих величин получены выражения в виде квадратур, содержащих сингулярные интегралы. Это позволяет исследовать поведение функций $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta\theta}$ и σ_{θ} в вершине конуса ($r \rightarrow 0$) и на бесконечности ($r \rightarrow \infty$). Поведение этих функций определяется корнями трансцендентного уравнения $K(\nu) = 0$, причем, следует отметить, что функция $K(\nu)$ по своему виду очень сложна, в ее выражения входят функции Лежандра $P_{\nu}^{\alpha}(x)$, как функции своего индекса. Все это не позволяет аналитически исследовать положение корней полученных уравнений и для их нахождения использовалась ЭВМ. Так для задачи (20)-(21) решалось уравнение $K(\nu) = 0$ где $K(\nu)$ представлено формулой (23). Показано, что исследуемое уравнение имеет только действительные корни. Для контактного напряжения $\tau_{r\theta}$ получено следующее асимптотическое представление

$$\tau_{r\theta} = A_1 r^{\tau_1} + A_2 r^{\tau_2} + O(r^{\tau_3}); \quad r \rightarrow 0; \quad \tau_1, \tau_2 < 0; \quad \tau_3 > 0,$$

значения τ_1 и τ_2 для различных углов конусности α и отношения

$$\Delta = E / [2(1 + \sigma_0) G] \quad (\text{где } E, \sigma_0 - \text{модуль упругости и}$$

коэффициент Пуассона материала оболочки, G - модуль сдвига материала конуса) приведены в виде таблиц.

Выявление характера особенности контактных напряжений в вершине конуса особенно важно. Так как выявив особенность искомого решения, можно построить хорошо сходящееся приближенное решение ра-

НИИ
ДНУЖТ

смаатриваемой задачи.

В ПРИЛОЖЕНИЯХ приведены справочные сведения по теории матричных функций, формулы решения задачи Карлемана для полосы, численные результаты в виде графиков и таблиц.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем.

1. Предложен эффективный аналитический подход к решению задач о напряженно-деформированном состоянии составных соосных цилиндрических и конических оболочек, основанный на построении точного решения матричных дифференциальных уравнений и использовании рекуррентных соотношений, позволяющий избежать решения систем алгебраических уравнений высокого порядка, возникающих при использовании традиционных методов.

2. Предложена методика решения задач о напряженно-деформированном состоянии двух цилиндрических оболочек состыкованных под углом, основанная на точном решении системы дифференциальных уравнений теории оболочек и использовании модифицированного метода граничной коллокации.

3. Получено дальнейшее развитие метода ортогональных многочленов применительно к задачам о свободных колебаниях цилиндрических и конических оболочек.

4. Поставлены новые контактные задачи о напряженно-деформированном состоянии осесимметричной конической оболочке, подкрепляющей упругий конус. Получены их точные решения.

5. Для задач о контакте конической оболочки, подкрепляющей упругий конус, исследована асимптотика поведения контактных напряжений в вершине конуса. Изучен характер влияния упругих и геометрических параметров на поведение контактных напряжений в вершине конуса.

6. Проведено строгое математическое обоснование приведенных построений. Дан численный анализ поставленных в работе задач, подтверждающий эффективность полученных решений и разработанных методик.

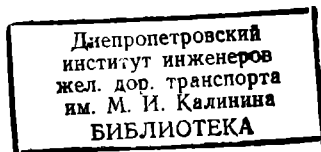
Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Краснов А.М., Радиолло М.В. Напряженное состояние неоднородной цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами //Тез. докладов II Респ. симпозиума по дифференциальным и интегральным уравнениям. Одесса, 1978. - с.154-155.

НТБ
ДНУЖТ

2. Краснов А.М., Тихоненко Л.Я. Задача о контакте тонкой конической оболочки, сцепленной с упругим конусом //Тез. докладов II Всесоюз. конф. "Смешанные задачи механики деформируемого тела. Днепропетровск, 1981. - с. III.
3. Краснов А.М., Попов Г.Я. Свободные колебания усеченной конической оболочки. //Гидроаэромеханика и теория упругости, 1982, вып. 29. - с. 87-95.
4. Краснов А.М., Тихоненко Л.Я. Краевые задачи теории упругости для конических областей, приводящиеся к задаче Карлемана /ОГУ им. И.И. Мечникова. - Одесса, 1983. - 33 с. - Леп. в УкрНИИТИ, 30.05.83, №707 к - 3.
5. Краснов А.М., Попов Г.Я. Изгиб и кручение кусочно-однородной конической оболочки/ Тез. докладов I всесоюзной конференции по механике неоднородных структур. Львов, 1984. - с. 181
6. Краснов А.М., Попов Г.Я. Изгиб и кручение кусочно-однородной конической оболочки //Математические методы и физико-механические поля. - 1986, вып. 24. - с. 90-94.

Краснов



НТБ
ДНУЖТ

БР 03461. Подл. и печати 27.08.87 г. Формат 80 x 84 1/16.
Об'єм 0,7 уч.изд.л., 1,0 ц. л. Заказ № 5084. Тираж 100 экз.
Гортипografía Одесского облполнграфиздата, пек № 3,
Ленна, 49.

Сканировала Камянская Н.А.

НТБ
ДНУЖТ