

УДК 629.4.016

*Д-р техн. наук М.І. Капіца,
канд. техн. наук Д.В. Бобирь
(Дніпропетровський нац. ун-т залізн.
тр-ту ім. акад. В. Лазаряна)*

АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ РУХУ ПОЇЗДА ПРИ ВИКОНАННІ ТЯГОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Вступ. Відомо багато різних методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь. Це методи Чаплигіна, Рунге-Кутта, Адамса, Мілна та ін., що забезпечують досить високу точність розрахунків. Проте ці методи для розв'язання завдань тягових розрахунків вимагають певного обсягу підготовчих робіт. У тягових розрахунках застосовують такі методи розв'язання

диференціального рівняння руху поїзда: аналітичний, графічний, чисельний і машинний. Загальною для усіх цих методів теоретичною основою є розв'язання рівняння руху у формі задачі Коші.

Аналіз останніх досліджень. Для розв'язання цього завдання використовують ряд теоретичних підходів, відомих в прикладній математиці, механіці та

технічній кібернетиці. До них відносяться правила лінеаризації нелінійних функцій, принцип малих відхилень змінних стану об'єкта, обчислення поточних координат об'єкта, що рухається, метод спостерегаємості [1].

На сучасному рівні розвитку обчислювальної техніки та програмного забезпечення інтегрування диференціального рівняння руху можливо в явному вигляді, а точність розв'язання можна оцінити, проаналізувавши похибку, що виникає на кожному кроці інтегрування.

Основними складовими повної похибки інтегрування є:

- похибки обмеження (або похибки методу), – похибки, викликані заміною в диференціальному рівнянні похідних функції їх кінцево-різницеви аналогами. Ця похибка виникає у зв'язку із заміною функції безперервного аргументу її дискретним аналогом;

- похибки обчислення експоненти, пов'язані з похибкою округлення чисел в ЕОМ;

- похибки накопичення обчислення експоненти, пов'язані зі збільшенням повної похибки інтегрування попереднього кроку з причини того, що на даному кроці для обчислення значення інтеграла використовується не точне його значення, а наближене.

Практика розрахунку різних рівнянь на ЕОМ показує, що похибкою обчислень

експоненти, навіть в розрахунках із інженерною точністю, можна знехтувати.

Метою статті є спроба дослідити можливість інтегрування в аналітичному вигляді рівняння руху поїзда за допомогою сучасних пакетів символьних обчислень, визначити точність інтегрування різними чисельними методами шляхом порівняння результатів розв'язання з точним, а також надати основні моменти побудови програми тягових розрахунків для користувачів.

Виклад основного матеріалу. Моделюючи поїзд як гнучку нерозтяжну нитку, приходимо до рівняння руху у вигляді

$$\frac{dV}{dt} = \xi [u - \omega_0(V) - \tilde{i}(S)], \quad (1)$$

де u – питома сила тяги або гальмування;

$\omega_0(V)$ – питомий опір руху поїзда;

$\tilde{i}(S)$ – середній ухил колії під поїздом;

S – координата «голови» поїзда;

$$\tilde{i}(S) = \frac{1}{l} \int_{S-l}^S i(x), \quad (2)$$

l – довжина поїзда.

Відносно питомої сили тяги припускати, що як функція швидкості вона є кусково-неперервною і значення її знаходяться в області (рис. 1).

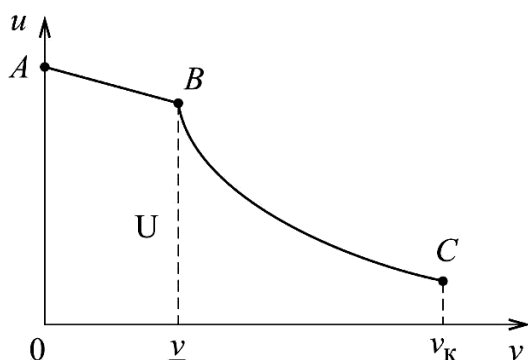


Рис. 1. Область допустимих значень питомої сили тяги

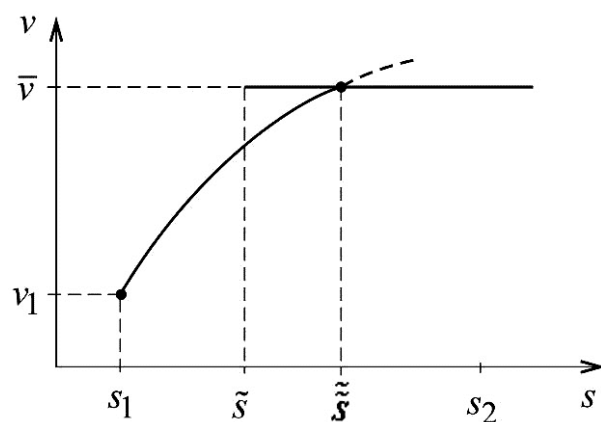


Рис. 2. Один з варіантів врахування обмеження швидкості за станом колії, \bar{V} – максимально допустима швидкість за станом колії

Криву ABC можна описати такою залежністю:

$$u(V) = \begin{cases} b - aV, & \text{і дè } 0 \leq V \leq \underline{V}; \\ \frac{\alpha}{V} + \beta, & \text{і дè } \underline{V} \leq V \leq V_{\hat{e}}. \end{cases} \quad (3)$$

У залежності (3) прийнято: \underline{V} – швидкість, що визначає закінчення дії обмеження за струмом або зчепленням, $V_{\hat{e}}$ – кінцева швидкість або максимально допустима швидкість за конструкцією локомотива.

Перейшовши від змінної t – час до S – координата колії, отримуємо рівняння руху поїзда у формі

$$V \frac{dV}{dS} = \xi [u(V) - \omega_0(V) - \tilde{i}(S)]. \quad (4)$$

Не обмежуючи спільності розгляду, вважаємо, що $\tilde{i}(S)$ є кусково-постійною функцією.

Нехай при $S \in [S_1, S_2]$ $\tilde{i}(S)$ – стала, яку записуватимемо як \tilde{i} , тоді, поділивши змінні інтегрування в рівнянні (4), приходимо до співвідношення

$$dS = \frac{VdV}{\xi [u(V) - \omega_0(V) - \tilde{i}]}$$

і, виконавши інтегрування, маємо

$$S - S_1 = \int_{V_1}^V \frac{xdx}{\xi [u(x) - \omega_0(x) - \tilde{i}]}, \quad (5)$$

де V_1 – швидкість поїзда на початку елемента, для якого $\tilde{i}(S)$ стала.

Якщо $0 \leq V_1 < \underline{V}$, то, підставивши замість u його значення з (3), після інтегрування отримуємо

$$S - S_1 = \int_{V_1}^V \frac{xdx}{\xi [b - ax - \omega_0(x) - \tilde{i}]}, \quad (6)$$

а, враховуючи, що основний питомий опір має вигляд

$$\omega_0(V) = AV^2 + BV + C,$$

інтеграл в (6) обчислюється і тоді, позначивши цей інтеграл як $F(V_1, V)$, отримаємо

$$S = S_1 + F(V_1, V). \quad (7)$$

Якщо V_2 значення швидкості у кінці елемента, то маємо

$$S_2 = S_1 + F(V_1, V_2),$$

тоді

$$F^{-1}(S - S_1) = V - V_1,$$

де F^{-1} – зворотна по відношенню до $F(V_1, V)$ функція.

Існування функції F^{-1} виходить з теореми про зворотну функцію [2], оскільки $F(V_1, V)$ – функція V є такою, що монотонно зростає в силу властивості інтеграла, підінтегральна функція якого ненегативна.

Якщо на початку елемента, де ухил сталий, швидкість $V_1 = V(S_1)$ більше або дорівнює \underline{V} , то, підставивши в (5) відповідне значення $u(V)$ з (3), отримуємо аналог правої частини із формули (6)

$$S - S_1 = \int_{V_1}^V \frac{xdx}{\xi \left[\frac{\alpha}{x} + \beta - \omega_0(x) - \tilde{i} \right]}. \quad (8)$$

Інтеграл (8) обчислюється, що дозволяє побудувати співвідношення типу (7) і тим самим визначити швидкість V_2 наприкінці елемента, а, виконуючи обернення співвідношення (7), отримати аналітичну залежність швидкості як функції шляху при $S \in [S_1, S_2]$.

Таким чином, співвідношення типу (6) і (8) дозволяють мати аналітичні залежності швидкості на кожному елементі ділянки.

Можливі ситуації, коли отримана швидкість $V(S)$ на певному елементі перевищує обмеження швидкості за станом колії. В цьому випадку, досягши

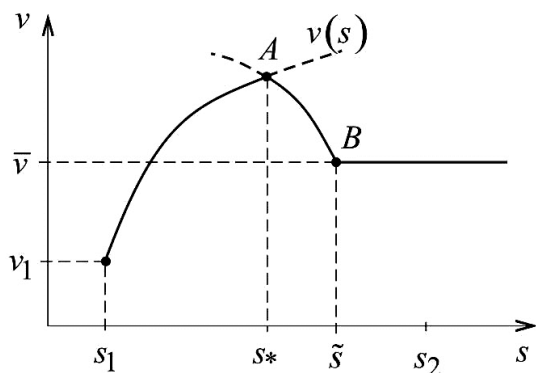


Рис. 3. Варіант, коли необхідно перейти на режим гальмування, щоб витримати обмеження швидкості за станом колії

Позначимо через $u_{\delta}(x)$ максимально допустиме гальмівне зусилля за умови експлуатації, тоді аналогом співвідношень (7) і (8) буде

$$\tilde{S} - S = \int_{\tilde{V}}^V \frac{xdx}{\xi[-u_{\delta}(x) - \omega_0(x) - \tilde{i}]}$$

обмеження, значення швидкості вважаємо рівним значенню обмеження (рис. 2).

Проте може виникнути ситуація, наведена на рис. 3. В даному випадку необхідно визначити координату S_* , в якій здійснюється перехід з режиму тяги в режим гальмування для забезпечення в точці B значення швидкості \bar{V} . Оскільки завданням є побудова кривої швидкості руху поїзда з максимально можливим найбільшим значенням, то очевидно, що на відрізку AB має бути застосоване максимальне гальмівне зусилля, припустиме за правилами експлуатації.

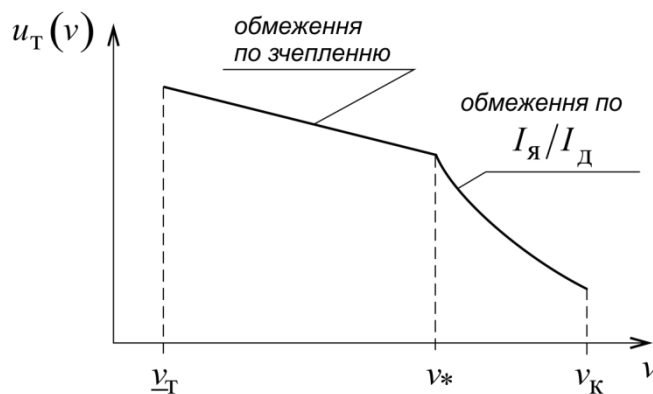


Рис. 4. Область допустимих значень питомих гальмівних зусиль:

- V_{δ} – мінімально допустима швидкість рекуперативного гальмування;
- $I_{\dot{y}}$ – струм якоря тягового двигуна;
- $I_{\hat{a}}$ – струм збудження тягового двигуна

або

$$S = \tilde{S} - \int_{\tilde{V}}^V \frac{xdx}{\xi[-u_{\delta}(x) - \omega_0(x) - \tilde{i}]}, \quad (9)$$

які дозволяють визначити координату S_* , в якій гальмівна крива AB перетинається з кривою швидкості $v(S)$ в режимі тяги.

У багатьох випадках, коли застосовується рекуперативне гальмування, допустимі питомі гальмівні зусилля належать області, наведеній на рис. 4.

В аналітичній формі залежність допустимого значення $u_{\delta}(V)$ можна записати у вигляді:

$$u_{\delta}(V) = \begin{cases} b_{\delta} - a_{\delta}, & \text{і дè } V_{\delta} \leq V \leq V_{*}; \\ \frac{\alpha_{\delta}}{V} + \beta_{\delta}, & \text{і дè } V_{*} \leq V \leq V_{\hat{e}}. \end{cases}$$

Викладені елементи інтегрування рівняння руху дозволяють отримувати в аналітичному вигляді залежність шляху від швидкості як в режимі тяги, так і в режимі гальмування при побудові кривої

швидкості, що забезпечує мінімальний час руху по перегону. Цей підхід інтегрування найбільш сприятливий тому, що дозволяє використати пакет символьних обчислень Maple та йому подібні і проводити дослідження в замкнутій математичній формі.

Так, наприклад, при

$$\omega_0(v) = 0,00027v^2 + 0,0045v + 1,5$$

і

$$u = \frac{25,053}{v} + 0,305; \quad i = 0$$

інтеграл (5), обчислений як невизначений, буде

$$\begin{aligned} s := & -14.6 \ln((x + 17.5)^2 + 4760.) - .260 \arctan(69.0, x + 17.5) \\ & - 833. I(-.000156 \ln((x + 17.5)^2 + 4760.) + .0175 \arctan(69.0, x + 17.5)) \\ & + .260 \arctan(-69.0, x + 17.5) \\ & - 833. I(.000156 \ln((x + 17.5)^2 + 4760.) + .0175 \arctan(-69.0, x + 17.5)) \\ & - 1.72 \ln(|x - 18.3|) - 5.39 I(.500 - .500 \operatorname{signum}(x - 18.3)). \end{aligned}$$

Такий підхід дозволяє при заданій швидкості на початку елемента v_0 і певній швидкості v визначати довжину шляху, яку проходить поїзд, набираючи швидкість від v_0 до v .

Для наведеного прикладу крива швидкості з урахуванням обернення останньої залежності має вигляд, наведений на рис. 5.

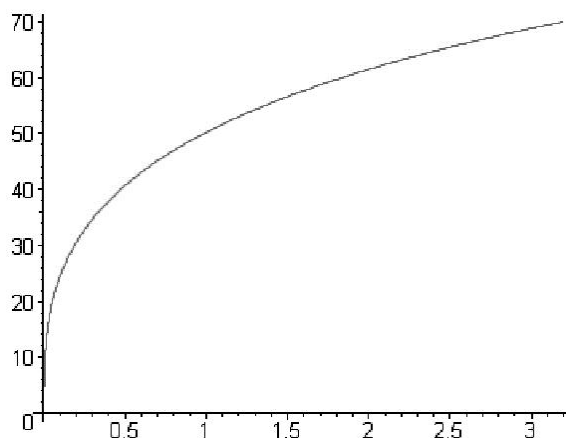


Рис. 5. Крива розгону, що реалізує максимальну швидкість руху

Для дослідження точності інтегрування чисельними методами розглянемо якісний характер залежності довжини шляху S від швидкості, рис. 6.

Перетин хорди AB з $S = l$ дає оцінку знизу для швидкості V_* наприкінці елемента, а перетин дотичної BC з $S = l$ оцінює значення V_* зверху.

Рівняння хорди AB можна записати у вигляді

$$S = \frac{S_1 - S_0}{V_1 - V_0} (V - V_0) + S_0,$$

звідки отримуємо

$$\underline{V} = V_0 + \frac{l(V_1 - V_0)}{S_1 - S_0}. \quad (10)$$

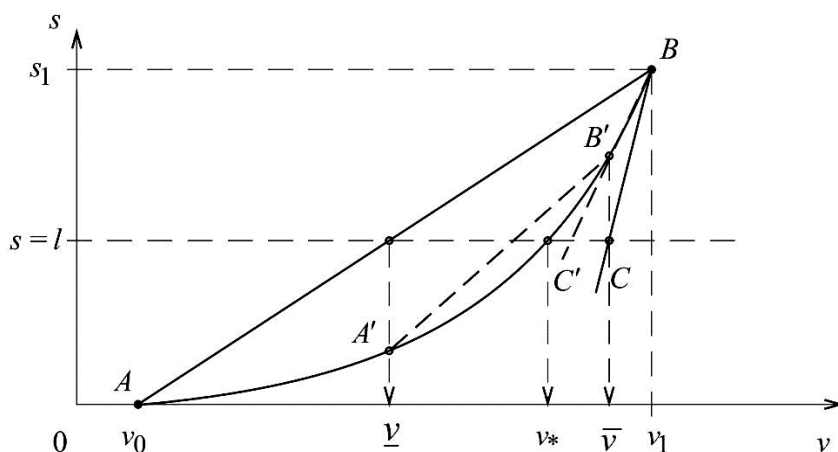


Рис. 6. Залежність довжини пройденого шляху від швидкості

Рівняння дотичної BC

$$V_* = \frac{\bar{V} + \underline{V}}{2}.$$

$$S = S_1 - S'(V_1)(V_1 - V),$$

де

$$S'(V_1) = \frac{V_1}{x[u(V_1) - \omega_0(V_1) - i]}.$$

Поклавши $S = l$, отримуємо

$$\bar{V} = \bar{V}_1 - \frac{S_1 - l}{S'(V_1)}.$$

Знаючи \underline{V} і \bar{V} , можна визначити точність обчислення V_* , тобто $\Delta V_* = \bar{V} - \underline{V}$, а оцінкою V_* є

У випадку, коли точність не досягається, то визначаємо координати точок A' і B' і розглядаємо хорду $A'B'$ і дотичну $B'C'$, які дозволяють уточнити значення V_* . Викладений метод відомий як метод хорд і дотичних [4].

Цю задачу можна звести до задачі пошуку мінімуму унімодальної функції,

$$y(V) = |S(V) - l|, \quad (11)$$

графік якої наведено на рис. 7.

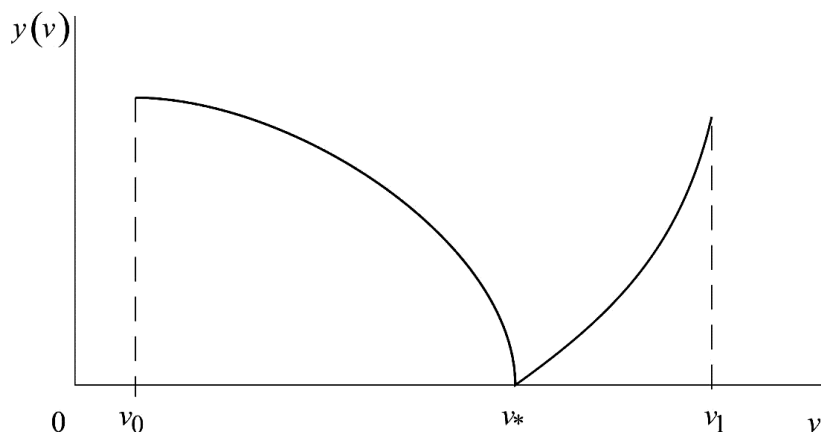


Рис. 7. Якісний характер залежності (11)

Для визначення V_* із заданою точністю ε скористаємося методом чисел Фібоначчі [5], які визначаються рекурентним співвідношенням

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ при } F_1 = F_2 = 1. \quad (12)$$

Необхідне число ітерацій для визначення V_* із заданою точністю за методом Фібоначчі визначається з нерівності

$$\varepsilon_v \leq 2(V_1 - V_0) / F_{n+2}. \quad (13)$$

Числа Фібоначчі можна обчислювати за точною формулою, що є рішенням рекурентного співвідношення (12)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Так, наприклад, якщо $\varepsilon_v = 0,1$ км/год, а $V_1 - V_0 = 10$ км/год, тоді з нерівності (13) маємо

$$F_{n+2} = \frac{2(V_1 - V_0)}{\varepsilon_v} = \frac{2 \cdot 10}{0,1} = 200,$$

таким чином $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$, отже, $n = 13 - 2 = 11$, тобто за 11 ітерацій отримаємо V_* з точністю до 0,1 км/год.

Не зупиняючись на описі самого методу Фібоначчі, відмітимо, що він дозволяє визначати значення швидкості V_* наприкінці елемента довжиною l . Отже, якщо є набір елементів, довжини яких l_k , $k = 1, 2, \dots$ з ухилом i_k , то для кожного елемента викладена методика дозволяє визначати значення швидкості на початку та наприкінці елемента і тим самим визначати час руху по k -му елементу t_k .

Для розрахунку часу руху можна скористатися формулою

$$t = \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{\xi [u(V) - \omega_0(V) - i]}.$$

Чисельна реалізація з визначення швидкості наприкінці елемента для режиму тяги виконана в середовищі Maple, а графічна інтерпретація порівняння точності рішення рівняння руху подана на рис. 8, 9.

На рис. 8 і 9 під наближеними рішеннями розуміються рішення рівняння руху поїзда у вигляді ряду з порядком наближення 3, 4, 5 і 7. Наближені рішення можуть розташовуватися як з одного боку

від точного (рис. 9), так і по різні боки (рис. 8).

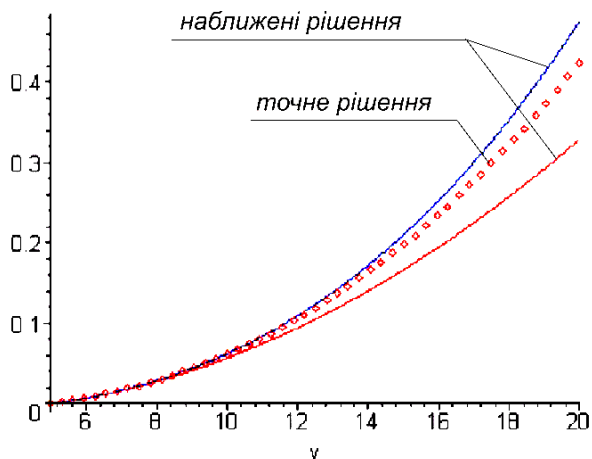


Рис. 8. Співвідношення наближених рішень третього і четвертого порядку з точним

Використання методу Рунге-Кутта четвертого порядку дає цілком задовільний збіг з точним рішенням, рис. 10.

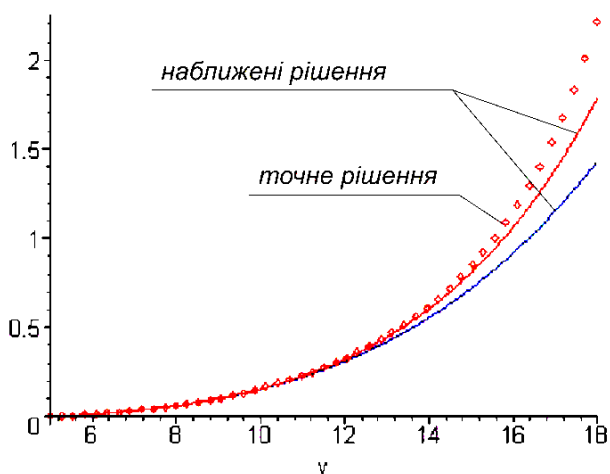


Рис. 9. Співвідношення наближених рішень п'ятого і шостого порядку з точним

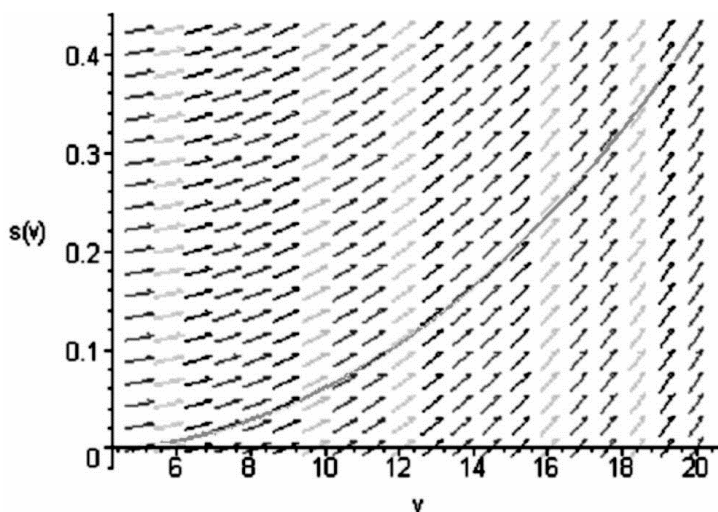


Рис. 10. Залежність шляху від швидкості за методом Рунге-Кутта четвертого порядку

Висновки:

1. Викладені елементи інтегрування рівняння руху, за допомогою прикладного пакета символьних перетворень, дозволяють отримувати в аналітичному вигляді залежність шляху від швидкості, як в режимі тяги, так і в режимі гальмування при побудові кривої швидкості, що

забезпечує мінімальний час руху по перегону. Цей підхід інтегрування рівняння руху поїзда найбільш сприятливий, оскільки дозволяє проводити дослідження в замкнутій математичній формі, отримати рішення у вигляді аналітичних залежностей шляху від швидкості, значно скоротити час та збільшити точність обчислень.

2. У загальному випадку можна стверджувати, що при різниці швидкостей від 3 до 5 км/год наближеними рішеннями можна користуватися, коли порядок наближення рівний трьом, а при перепаді

швидкостей до 10 км/год можна використати наближення близько п'яти. Якщо похибка обчислень швидкостей має бути не більше ніж 2%, то краще користуватися методом золотого перерізу.

Список літератури

1. Деев, В.В. Тяга поездов [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.В. Деев, Г.А.Ильин, Г.С. Афонин; под ред. В.В. Деева. – М.: Транспорт, 1987. – 264 с.
2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Гостехиздат, 1956. – Т. 1. – 440 с.
3. Васильев, А.Н. Самоучитель Maple 8 [Текст] / А.Н. Васильев. – М.–С.-П.–К.: Вильямс, 2003. – 382 с.
4. Крылов, А.Н. Лекции о приближенных вычислениях [Текст] / А.Н. Крылов. – М.–Л.: Гостиздат, 1950. – 400 с.
5. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

Ключові слова: тягові розрахунки, інтегрування рівняння руху поїзда

Анотації

Запропонована методика інтегрування рівняння руху в аналітичному вигляді та надані основні моменти побудови програми тягових розрахунків для користувачів. Досліджена точність інтегрування рівняння руху різними чисельними методами шляхом порівняння результатів рішення з точним.

Предложена методика интегрирования уравнения движения в аналитическом виде и представлены основные моменты для построения пользовательской программы тяговых расчетов. Исследована точность интегрирования уравнения движения поезда разными численными методами путем сравнения результатов решения с точным.

Offered methodology of integration of equalization of motion in an analytical kind and basic moments are presented for the construction of the user program of hauling calculations. Exactness of integration of equalization of motion of train different numeral methods is investigational by comparing of results of decision to exact.