

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Економічної інформатики»

В авторській редакції

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Навчально-методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань та індивідуальні завдання

ДНІПРО
2024

УДК 517(076.1)
В 55

Упорядник:
А. Г. Моня

*Електронний аналог
друкованого видання*

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
126 «Інформаційні системи та технології»
Протокол № 3 від 22.10.2024

В 55 Вища математика. Частина 1 : навчально-методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань та індивідуальні завдання / упоряд. А. Г. Моня ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 90 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» та інших інженерних спеціальностей заочної форми навчання під час виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Вища математика».

Навчально-методичні рекомендації містять основні теоретичні положення для засвоєння матеріалу, зразки розв'язування прикладів, інструкції до виконання індивідуальних завдань, індивідуальні завдання, вимоги оформлення робіт.

Бібліогр.: 11 назв.

© Моня А. Г , упорядкування, 2024

© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2024

З М І С Т

Вступ	4
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	5
Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ	8
Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	17
Пряма лінія на площині	17
Криві другого порядку	28
Розділ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	39
Обчислення границь	39
Неперервність функції в точці і на відрізку	45
Розділ 5. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ, ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ	49
Похідна і диференціал функції	49
Застосування диференціального числення	52
Розділ 6. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ..	58
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	67
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА	83
СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	84
ЛІТЕРАТУРА	88

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після набуття достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами університету згідно з затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку автора джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Література: [1] глава 1, §§ 1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3.

Вивчивши цей розділ студент повинен застосовувати поняття матриці і визначника, виконувати дії над матрицями, обчислювати визначники. Знаходити розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера та матричним методом.

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність $m \cdot n$ величин, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що складається з m рядків і n стовпців. Матриці позначаються великими літерами A, B, C, \dots і записуються у вигляді

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Якщо число рядків матриці не дорівнює числу її стовпців ($m \neq n$), то така матриця називається *прямокутною*, а якщо дорівнює ($m = n$), то *квадратною*. Квадратна матриця, яка має n рядків і n стовпців, називається *матрицею n -го порядку*.

Квадратна матриця має *визначник (детермінант)*. Визначник числової матриці – це число, яке ставиться у відповідність матриці і може бути обчислене за її елементами. Визначник матриці A

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ позначається } \det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник другого порядку дорівнює різниці між добутками елементів, розташованих на головній і побічній діагоналях

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$$\text{де } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - (1 - 4 + 1) = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$$

система має єдиний розв'язок,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 + 6 - (4 - 12 + 5) = 12 + 3 = 15,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 8 - (6 + 20 + 4) = 25 - 30 = -5,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 10 - (5 - 8 + 6) = 8 - 3 = 5.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 + 1 + 1 = 5, \\ 2 \cdot 3 - 1 + 1 = 6, \\ 3 - 1 + 2 \cdot 1 = 4. \end{cases}$$

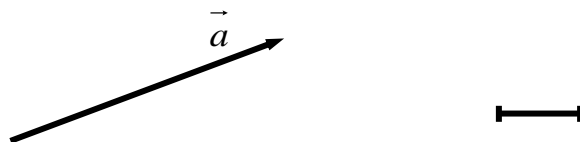
Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Література: [1] глава 2, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.4, 2.7, 3, 4, 5, 6.

Вивчивши цей розділ студент повинен застосовувати лінійні операції над векторами, поняття базиса вектора, декартову систему координат. Знаходити скалярний добуток двох векторів, ілюструвати його властивості. Знаходити векторний та мішаний добуток векторів, демонструвати їхні властивості. Застосовувати векторну алгебру до розв'язування деяких задач геометрії, фізики та механіки.

Векторну величину (вектор) можна зобразити у вигляді відрізка у просторі, якщо задані масштаб, початок і кінець цього відрізка.



Геометричним вектором (або просто вектором) називається напрямлений відрізок (або впорядкована пара точок). Вектор, початок якого знаходиться в точці A , а кінець – у точці B , позначається символом \overrightarrow{AB} або просто \vec{a} . Напрямок вектора на рисунку показують стрілкою.

Відстань між початком і кінцем вектора називається його довжиною або модулем і позначається $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора \vec{a} , називається ортом вектора \vec{a} і позначається \vec{a}^0 .

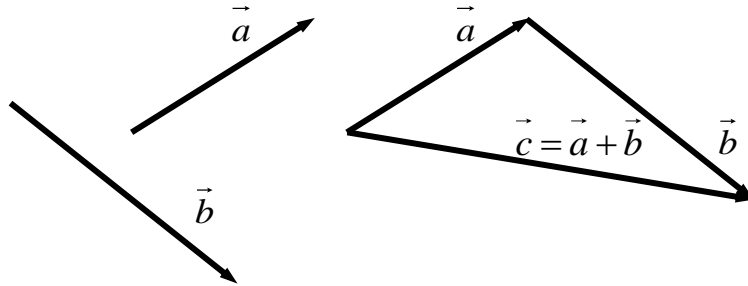
Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, тобто якщо існує пряма, якій вони паралельні. Колінеарні вектори напрямлені або однаково, або в протилежні сторони. Нульовий вектор вважається *колінеарним* по відношенню до будь-якого вектора.

Лінійні операції (дії) над векторами.

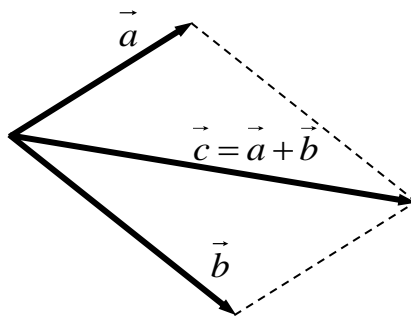
До лінійних операцій над векторами належать додавання і пов'язане з ним віднімання векторів, множення вектора на число (скаляр).

Додавання векторів.

Правило трикутника. Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор \vec{c} , який йде з початку вектора \vec{a} у кінець вектора \vec{b} , за умови, що початок вектора \vec{b} прикладений до кінця вектора \vec{a} .

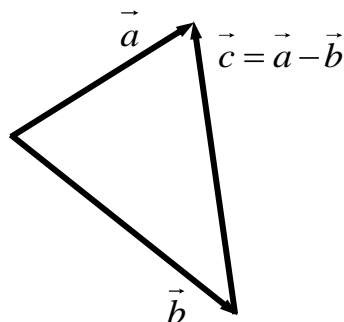


Правило паралелограма. Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} приведені до спільного початку та на них побудований паралелограм, то їх сумою $\vec{a} + \vec{b}$ називається вектор \vec{c} , що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка проходить через спільний початок векторів \vec{a} і \vec{b} , і що йде з нього.



Віднімання векторів.

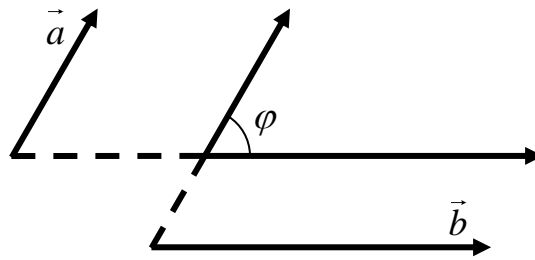
Різницею двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор \vec{c} , що йде з кінця вектора \vec{b} (від'ємника) до кінця вектора \vec{a} (зменшуваного).



Добуток вектора на число.

Добутком $\alpha \cdot \vec{a}$ (або $\vec{a} \cdot \alpha$) вектора \vec{a} на число α називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора \vec{a} на модуль числа α . Його напрям збігається з напрямом вектора \vec{a} , якщо $\alpha > 0$ і є протилежним, якщо $\alpha < 0$.

Скалярний добуток векторів. Кутом між двома векторами \vec{a} і \vec{b} називається кут між рівними ним векторами, що мають спільний початок.



Якщо спеціально не вказується від якого вектора і в якому напрямку відлічується кут, то кутом між векторами вважають той кут, який не перевищує π .

Скалярним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

Скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} також виражається формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{np}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Властивості скалярного добутку векторів.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

3. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли вектори ортогональні або хоча б один з них дорівнює нулю.

4. Для будь-яких векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} і будь-яких чисел α і β виконується рівність

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c}) .$$

Зокрема

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \text{и} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

У декартовій прямокутній системі координат

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 .$$

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ і $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ визначається за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 .$$

Якщо покласти, що $\vec{a} = \vec{b}$, тобто $X_1 = X_2 = X$, $Y_1 = Y_2 = Y$, $Z_1 = Z_2 = Z$, то прийдемо до формули для визначення довжини вектора \vec{a}

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} .$$

Косинус кута між двома векторами \vec{a} і \vec{b} визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} .$$

Якщо $\vec{b} = \vec{i}$, то $|\vec{b}| = 1$, $X_2 = 1$, $Y_2 = Z_2 = 0$. Тоді $\cos \alpha = \frac{X_1}{|\vec{a}|}$. Аналогічно

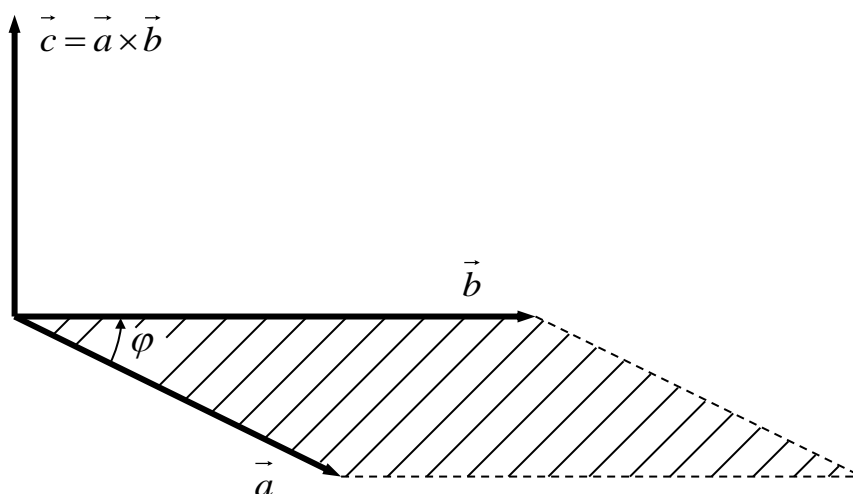
$\cos \beta = \frac{Y_1}{|\vec{a}|}$ і $\cos \gamma = \frac{Z_1}{|\vec{a}|}$. Тут $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \vec{a} .

Піднесши до квадрату вирази для напрямних косинусів і склавши їх, одержимо

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Векторний добуток векторів.

Векторним добутком вектора \vec{a} на вектор \vec{b} називається новий вектор \vec{c} (позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), що задовольняє наступним трьом умовам:



1) (геометричний зміст векторного добутку) довжина вектора \vec{c} чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

де φ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;

2) вектор \vec{c} перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори \vec{a} і \vec{b} , тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектор \vec{c} спрямований таким чином, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот навколо нього від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} представляється таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки, тобто вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів.

Основні властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність множення, тобто векторний добуток не має переставної властивості

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Асоціативність відносно скалярного множника, тобто сполучена властивість по відношенню до скалярного множника

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів, тобто розподільна властивість

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору (нулю) тоді й тільки тоді коли вектори, що перемножуються, колінеарні (нульовий вектор вважають колінеарним по відношенню будь-якого вектора).

5. Модуль векторного добутку двох векторів \vec{a} і \vec{b} дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, приведених до спільного початку

$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Отже, площа трикутника, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , приведених до спільного початку

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

6. Векторні добутки ортів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , що утворюють правий ортонормований базис, задовольняють наступним рівностям:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \mathbf{0},$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}.$$

Зауважимо, що добуток будь-яких двох суміжних ортів у послідовності

$$\begin{array}{c} \vec{i} \quad \vec{j} \\ \vec{j} \quad \vec{k} \\ \vec{k} \quad \vec{i} \\ - \quad - \end{array}$$

дає попередній (наступний) орт зі знаком «+», а у зворотній послідовності зі знаком «-».

Векторний добуток двох векторів $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, заданих у прямокутній системі координат, визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів.

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} називається число, яке виходить у результаті скалярного добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} . Мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ скорочено позначається $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, заданих у прямокутній системі координат, визначається за формулою

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Основні властивості мішаного добутку.

1. При круговій перестановці співмножників мішаний добуток не змінюється

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

2. При перестановці будь-яких двох співмножників знак мішаного добутку змінюється на протилежний

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} є рівність нулю їх мішаного добутку, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

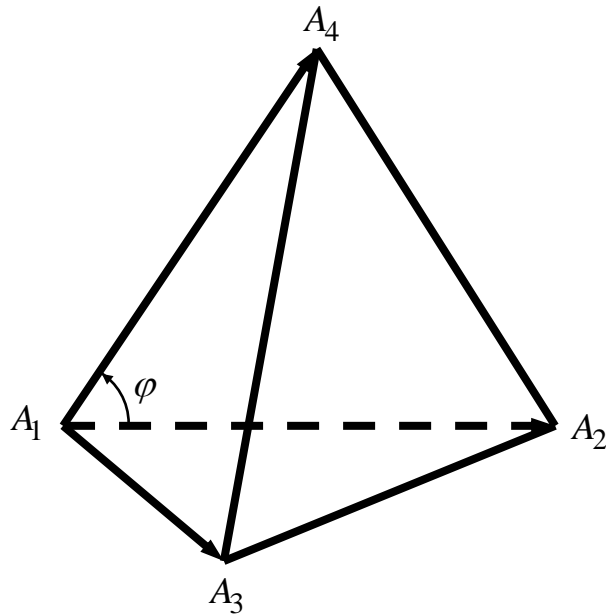
Приклад 2. Задано координати вершин піраміди $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

- Знайти:
1. Довжину ребра A_1A_2 .
 2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 .
 3. Площу грані $A_1A_2A_3$.
 4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок.



1. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ (з координат кінця віднімаємо координати початку)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{0 - 4; 7 - 2; 2 - 5\} = \{-4; 5; -3\}.$$

Знайдемо довжину цього вектора

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Це і буде довжина ребра A_1A_2 .

2. Кут φ між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 знайдемо як кут між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|}.$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1 - 4; 5 - 2; 0 - 5\} = \{-3; 3; -5\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{-4 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 + (-3) \cdot (-5)}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{12 + 15 + 15}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + 9 + 25}} = \\ &= \frac{42}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{43}} = \frac{42}{5\sqrt{86}} \approx 0,9058. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\varphi \approx \arccos 0,9058 \approx 25,07^\circ$$

3. Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо виходячи з геометричного змісту векторного добутку як половину площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$, тобто

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|.$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{0 - 4; 2 - 2; 7 - 5\} = \{-4; 0; 2\}.$$

Знайдемо векторний добуток $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (10 - 0)\vec{i} - (-8 - 12)\vec{j} + (0 + 20)\vec{k} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 20\vec{k}. \end{aligned}$$

Довжина цього вектора

$$|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2} = \sqrt{900} = 30.$$

Отже, площа грані $A_1A_2A_3$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ (кв. од.)}.$$

4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює $1/6$ модуля змішаного добутку трьох векторів, що виходять із однієї точки. Наприклад, векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$, тобто

$$V_{\text{пір. } A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1A_3} \overrightarrow{A_1A_4}|.$$

Знайдемо мішаний добуток трьох векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1A_3} \overrightarrow{A_1A_4} &= \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 0 - 30 + 36 - (0 + 100 - 24) = 6 - 76 = -70. \end{aligned}$$

Отже,

$$V_{\text{пір. } A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} \cdot |-70| = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3} \text{ (куб. од.)}.$$

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Література: [1] глава 3, §§ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5.

Вивчивши цей розділ студент повинен називати та описувати основні рівняння прямої на площині. Знаходити кут між двома прямими. Описувати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих. Складати нормальне рівняння прямої та перевіряти чи задано дане рівняння у нормальному вигляді. Знаходити відстань від точки до прямої. Описувати криві другого порядку: коло, еліпс, гіперболу та параболу, називати їхні канонічні рівняння. Знаходити розв'язок різних задач на пряму і на криві другого порядку.

Рівнянням лінії l у декартовій системі координат на площині називається рівняння

$$F(x, y) = 0, \quad (3.1)$$

якому задовольняють координати x і y кожної точки цієї лінії, і не задовольняють координати x і y ні однієї точки, яка не лежить на цій лінії. Кажуть, що рівняння (3.1) визначає (задає) лінію l . Сама лінія l у декартовій системі координат на площині розглядається як геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню (3.1). Змінні x і y у рівнянні (3.1) називаються *поточними координатами* її точок.

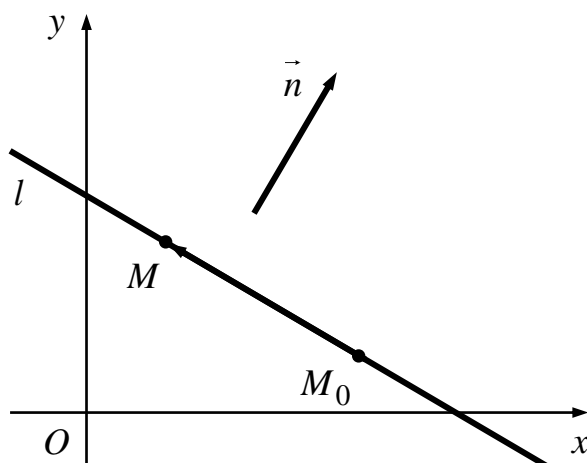
Пряма лінія на площині.

Щоб скласти рівняння прямої в декартовій системі координат, потрібно яким-небудь способом задати умови, що визначають її положення відносно координатних осей. Залежно від способу завдання цих умов одержують різні рівняння прямої.

1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку, перпендикулярно заданому вектору.

Нормальним вектором прямої називається всякий вектор, перпендикулярний даній прямій.

Нехай на площині Oxy задані точка $M_0(x_0; y_0)$ і ненульовий вектор $\vec{n} = \{A; B\}$. Необхідно скласти рівняння прямої l , що проходить через точку M_0 , перпендикулярно до вектора \vec{n} .



Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка прямої l , відмінна від точки M_0 .
Тоді за умовою вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярний вектору \vec{n} .

Тому їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

або в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.2)$$

Це і є шукане рівняння прямої.

2. Загальне рівняння прямої.

Розглянемо довільне рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.3)$$

де A і B одночасно не дорівнюють нулю. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – одна із точок описуваної ним лінії. Тоді виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Почленно віднімаючи цю тотожність із рівняння (3.3) одержимо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

яке визначає ту ж саму лінію, що й рівняння (3.2). Рівняння (3.3) називається *загальним рівнянням прямої* на площині, а вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ є нормальним вектором даної прямої.

Розглянемо, як розташована пряма щодо системи координат, коли рівняння (3.3) неповне.

1. $C = 0$. $Ax + By = 0$. Пряма проходить через початок координат $O(0; 0)$.
2. $B = 0$. $Ax + C = 0$. Пряма паралельна осі Oy .

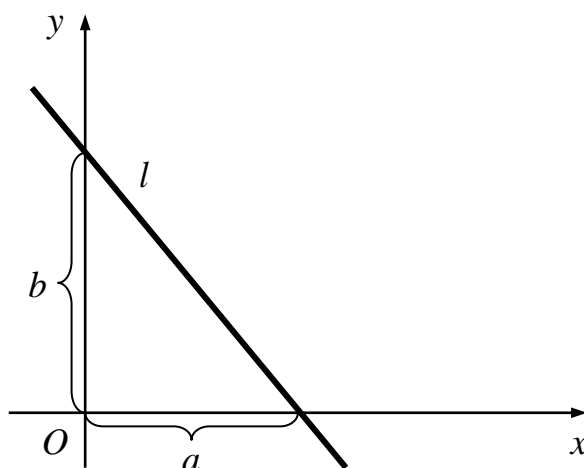
3. $A = 0$. $Bx + C = 0$. Пряма паралельна осі Ox .

4. $A = C = 0$. $y = 0$ – рівняння осі Ox .

5. $B = C = 0$. $x = 0$ – рівняння осі Oy .

3. Рівняння прямої у відрізках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.4)$$

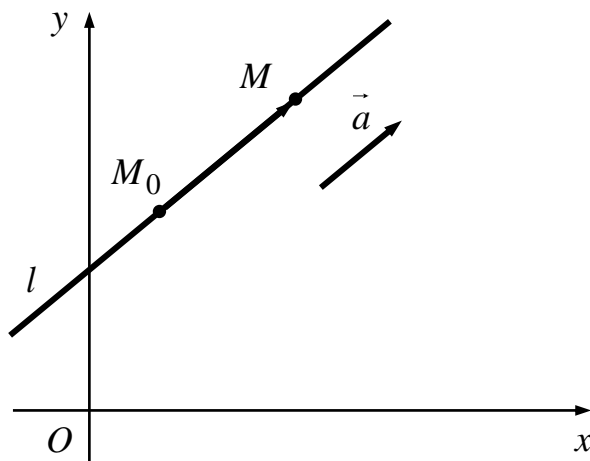


де a і b – величини відрізків, які пряма відтинає на осях Ox і Oy відповідно (відрізки відкладаються від початку координат).

4. Канонічне і параметричні рівняння прямої.

Напрямним вектором прямої називається всякий вектор, паралельний даній прямій.

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ належить прямій l , вектор $\vec{a} = \{m; n\}$ – ненульовий вектор, колінеарний цій прямій. Складемо рівняння прямої l .



Нехай $M(x; y)$ – довільна точка прямої l . Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ колінеарний вектору $\vec{a} = \{m; n\}$, тобто координати цих векторів пропорційні

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (3.5)$$

Нехай

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t,$$

де t – параметр.

Тоді

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \quad (3.6)$$

Рівняння (3.5) називається *канонічним рівнянням прямої*, а рівняння (3.6) – її *параметричними рівняннями*.

5. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.

Нехай $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ – дві точки прямої. Вони визначають напрямний вектор прямої

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

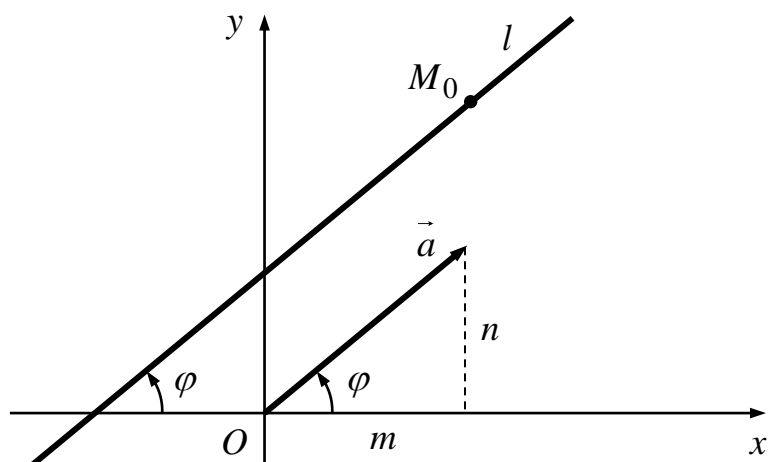
Оскільки пряма проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, то канонічне рівняння цієї прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$* .

6. Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку.

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ і кутом φ , який вона утворює з додатним напрямком осі Ox .



Тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox називається *кутовим коефіцієнтом прямої*. Позначимо його через k , тобто

$$k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Нехай $\vec{a} = \{m; n\}$ – напрямний вектор прямої l . Її канонічне рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

можна записати у вигляді

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0).$$

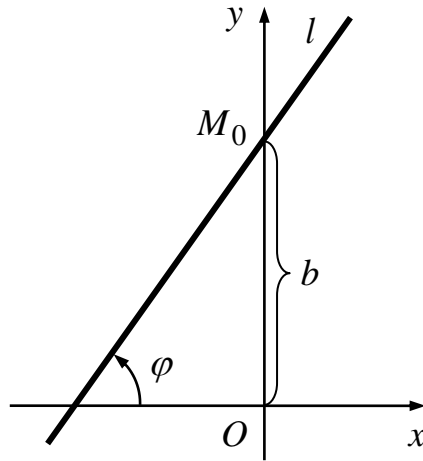
Оскільки $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, то

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) називається *рівнянням прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку*.

7. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай пряма перетинає вісь Oy , відтинаючи від неї відрізок b (відрізок відкладається від початку координат), і утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox .



Ця пряма проходить через точку $M_0(0; b)$ і має кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\varphi$. Тому її рівняння

$$y - b = k(x - 0)$$

або

$$y = kx + b. \quad (3.9)$$

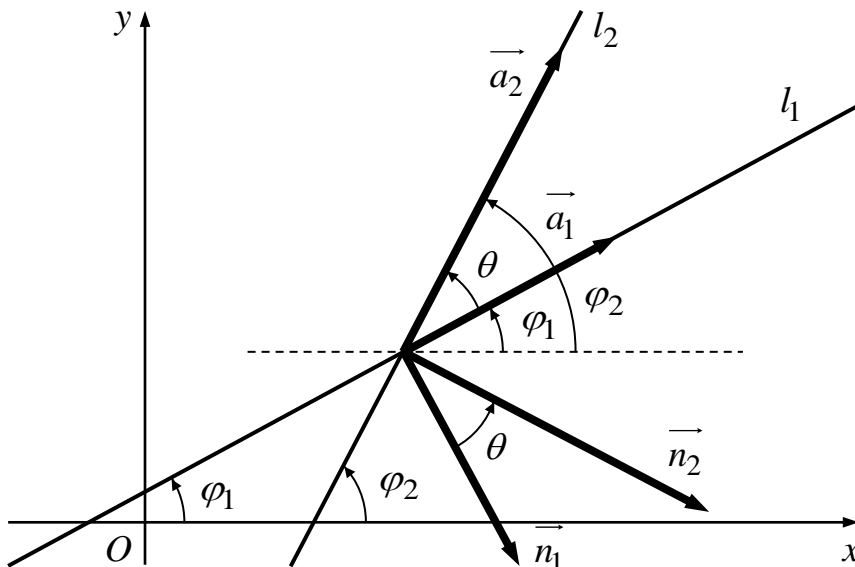
Рівняння (3.9) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

1. Якщо дві прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то кут θ між ними зручно визначати як кут між їхніми нормальними векторами.



Оскільки $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, то

$$\cos \theta = \cos \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow \cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.10)$$

Умовою паралельності двох прямих l_1 і l_2 є умова колінеарності їх нормальних векторів, тобто пропорційність координат цих векторів

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Умовою перпендикулярності двох прямих l_1 і l_2 є умова перпендикулярності їх нормальних векторів, тобто рівність нулю скалярного добутку цих векторів

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

2. Якщо дві прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

то кут θ між ними зручно визначати як кут між їхніми напрямними векторами.

Оскільки $\vec{a}_1 = \{m_1, n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{m_2, n_2\}$, то

$$\cos \theta = \cos \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \Rightarrow \cos \theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.11)$$

Умова паралельності двох прямих l_1 і l_2

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих l_1 і l_2

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

3. Якщо дві прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2,$$

де $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$; φ_1 , φ_2 – кути, які утворюють ці прямі з додатним напрямком осі Ox , то

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.12)$$

Зауважимо, що в останній формулі кут θ відлічується від прямої l_1 до прямої l_2 у додатному напрямку (проти ходу годинникової стрілки).

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, тобто $\theta = 0$, то $\operatorname{tg}\theta = 0$ і $k_2 - k_1 = 0$. Таким чином, умова паралельності двох прямих l_1 і l_2

$$k_1 = k_2.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, тобто $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\theta$ не існує, а $\operatorname{ctg}\theta = 0$ і, отже, $1 + k_1 k_2 = 0$. Таким чином, умова перпендикулярності двох прямих l_1 і l_2

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Формули (3.10)-(3.12) дозволяють визначити один із двох суміжних кутів між двома прямими. Другий кут дорівнює $\pi - \theta$. Якщо в цих формулах вираз праворуч від знака рівності записати по модулю, то по них буде визначатися гострий кут між двома прямими.

Приклад 3. Задано координати вершин трикутника $A(-2; -3)$, $B(1; 6)$, $C(6; 3)$.

Знайти: 1. Рівняння сторони BC .

2. Рівняння медіани BK .

3. Довжину медіани BK .

4. Рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC .

5. Рівняння висоти AP .

6. Довжину висоти AP .

7. Точку перетину медіани BK і висоти AP .

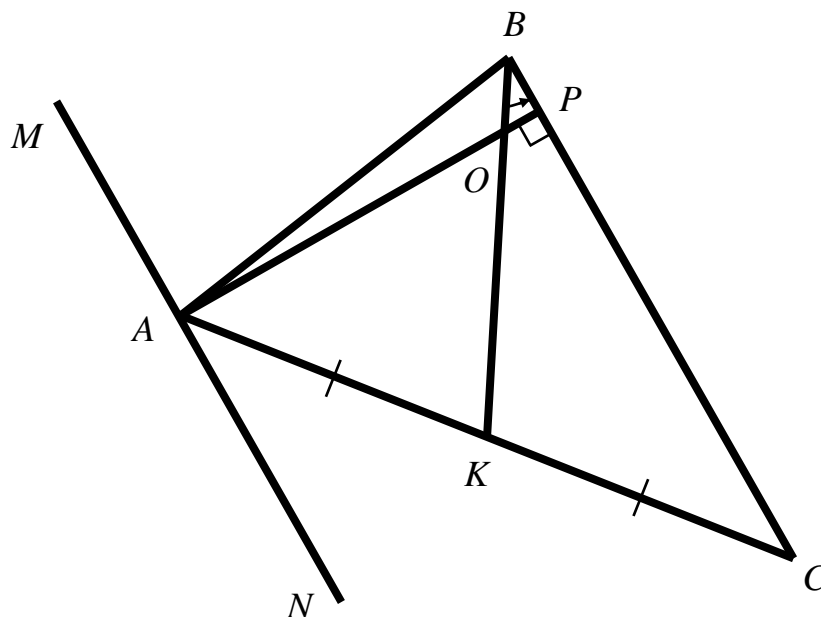
8. Кут KBC .

9. Площу трикутника ABC .

Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок.



1. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}$$

Підставимо координати точок B і C

$$\frac{y - 6}{3 - 6} = \frac{x - 1}{6 - 1}, \quad \frac{y - 6}{-3} = \frac{x - 1}{5}, \quad 5(y - 6) = -3(x - 1),$$

$$5y - 30 = -3x + 3, \quad 3x + 5y - 33 = 0.$$

Ми отримали рівняння сторони BC у вигляді загального рівняння прямої.

2. Знайдемо координати точки K як середини відрізка AC

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2, \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3 + 3}{2} = 0.$$

Рівняння медіани BK

$$\frac{y - y_B}{y_K - y_B} = \frac{x - x_B}{x_K - x_B}, \quad \frac{y - 6}{0 - 6} = \frac{x - 1}{2 - 1}, \quad \frac{y - 6}{-6} = \frac{x - 1}{1},$$

$$y - 6 = -6(x - 1), \quad y - 6 = -6x + 6, \quad 6x + y - 12 = 0.$$

3. Довжина медіани BK

$$|BK| = \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}.$$

4. Зобразимо рівняння прямої BC у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$

$$3x + 5y - 33 = 0, \quad 5y = -3x + 33, \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{33}{5}.$$

Отже, кутовий коефіцієнт прямої BC

$$k_{BC} = -\frac{3}{5}.$$

У паралельних прямих кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_{MN} = k_{BC}$. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку $y - y_0 = k(x - x_0)$. Отримаємо

$$y - y_A = k_{MN}(x - x_A), \quad y + 3 = -\frac{3}{5}(x + 2),$$

$$5y + 15 = -3x - 6, \quad 3x + 5y + 21 = 0.$$

Це і є рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC .

5. Рівняння висоти AP – це рівняння прямої, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої BC . З умови перпендикулярності двох прямих маємо

$$k_{AP} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}.$$

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку $y - y_0 = k(x - x_0)$. Отримаємо

$$y - y_A = k_{AP}(x - x_A), \quad y + 3 = \frac{5}{3}(x + 2),$$

$$3y + 9 = 5x + 10, \quad 5x - 3y + 1 = 0.$$

Це і є рівняння висоти AP .

6. Довжина висоти AP дорівнює відстані від точки A до прямої BC . Відстань від точки до прямої можна знайти за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тоді

$$|AP| = \frac{|3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) - 33|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{|-6 - 15 - 33|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-54|}{\sqrt{34}} = \frac{54}{\sqrt{34}}.$$

7. Для визначення точки перетину медіани BK і висоти AP розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + y - 12 = 0, & \begin{cases} 6x + y = 12, \\ 5x - 3y = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Скористаємося формулами Крамера. Для цього знайдемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 = -18 - 5 = -23,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -36 + 1 = -35,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) - 5 \cdot 12 = -6 - 60 = -66.$$

Тоді

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-35}{-23} = \frac{35}{23}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-66}{-23} = \frac{66}{23}.$$

Таким чином $O\left(\frac{35}{23}; \frac{66}{23}\right)$.

8. Для обчислення кута KBC скористаємося формулою

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \angle KBC = \frac{k_{BC} - k_{BK}}{1 + k_{BK} k_{BC}}.$$

З пункту 4 маємо $k_{BC} = -\frac{3}{5}$. Перетворимо загальне рівняння медіани BK

(див. пункт 2) до виду рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$6x + y - 12 = 0, \quad y = -6x + 12.$$

Таким чином, $k_{BK} = -6$. Тоді

$$\operatorname{tg} \angle KBC = \frac{-\frac{3}{5} + 6}{1 + (-6) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{\frac{-3 + 30}{5}}{\frac{5 + 18}{5}} = \frac{27}{23}, \quad \angle KBC = \operatorname{arctg} \frac{27}{23} \approx 50^\circ.$$

9. Площу трикутника ABC знайдемо за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AP|.$$

Знайдемо довжину основи трикутника BC .

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (6-3)^2} = \\ &= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

З пункту 6 маємо $|AP| = \frac{54}{\sqrt{34}}$.

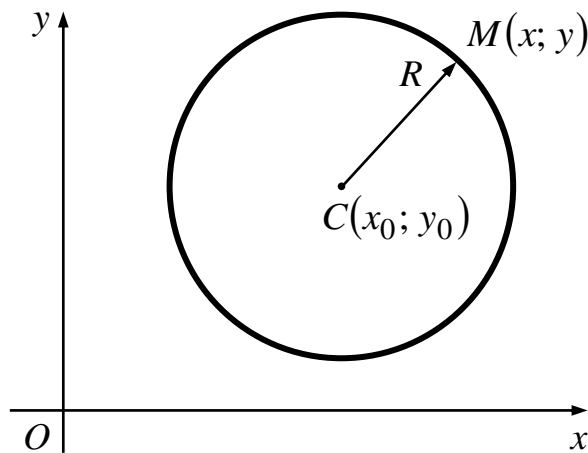
Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{54}{\sqrt{34}} = 27 \text{ (кв. од.)}.$$

Криві другого порядку.

Коло.

Колом називається геометричне місце точок площини, що рівновіддалені від даної точки цієї площини $C(x_0; y_0)$, яку називають *центром кола*.



На рисунку $C(x_0; y_0)$ – центр кола; R – радіус кола; $M(x; y)$ – довільна точка кола.

Канонічне (найпростіше) рівняння кола

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

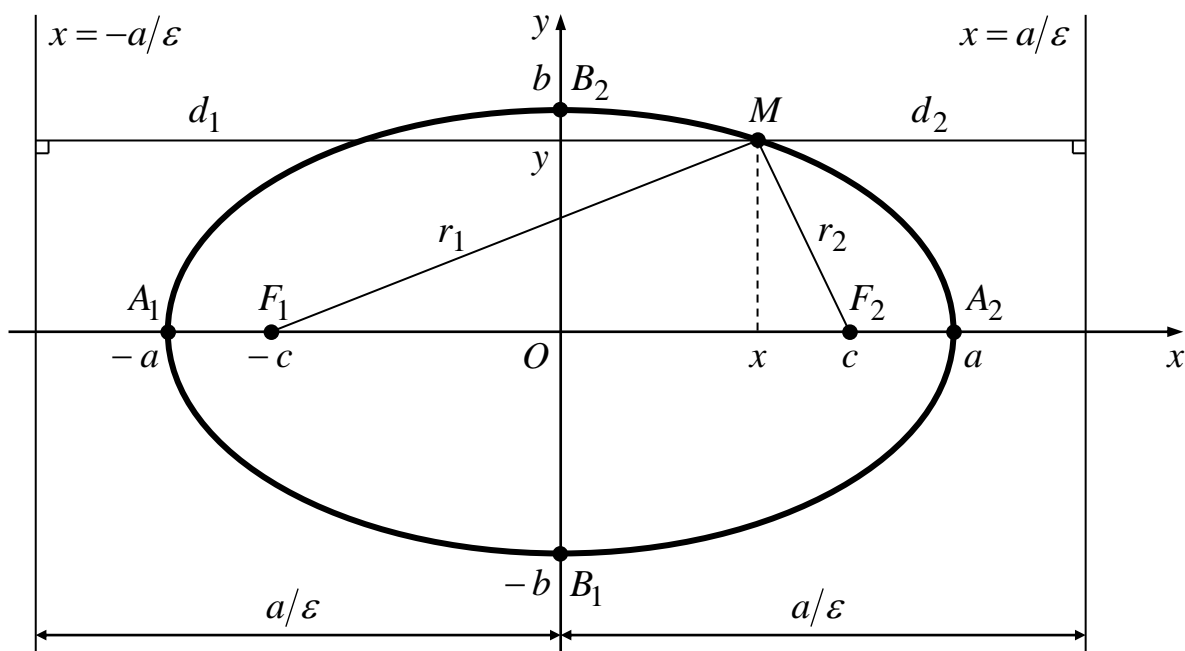
Рівняння кола, зображеного на рисунку

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Еліпс.

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней кожної з яких від двох даних точок цієї площини, які називаються *фокусами*, є величина постійна, більша, ніж відстань між фокусами.

Зауважимо, що ця постійна величина не може бути менше, ніж відстань між фокусами. Якщо ж вона дорівнює відстані між фокусами, то розглянутим геометричним місцем точок є відрізок прямої, який проходить через дані точки та обмежений ними.



На рисунку F_1 і F_2 – фокуси еліпса; $r_1 = a + \epsilon x$ і $r_2 = a - \epsilon x$ – фокальні радіуси довільної точки еліпса M ; a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі; c – відстань від центру еліпса до його фокусу; $\epsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса; d_1 і d_2 – відстані від довільної точки еліпса M до відповідних директрис; $x = \pm \frac{a}{\epsilon}$ – директриси еліпса.

Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У еліпса, зображеного на рисунку

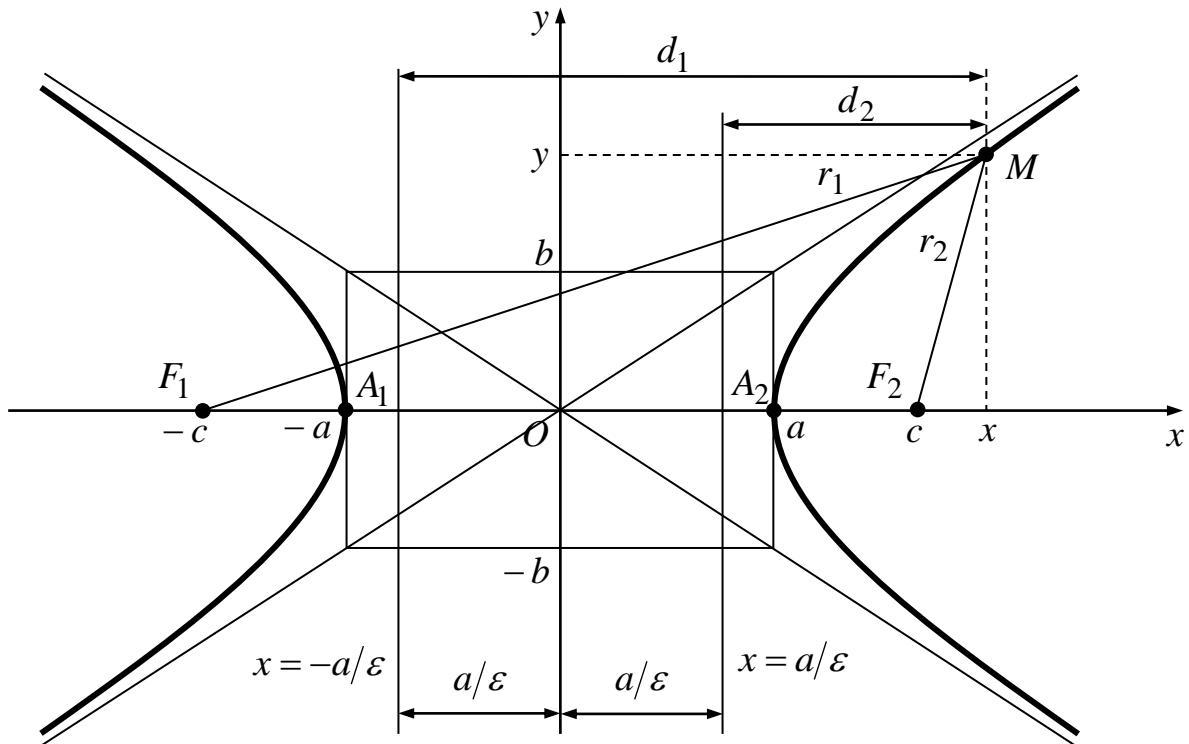
$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const}, \quad a > c, \quad a^2 - c^2 = b^2.$$

У еліпса

$$\varepsilon < 1 \text{ (у кола } \varepsilon = 0), \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Гіпербола.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, абсолютна величина різниці відстаней кожної з яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина постійна, менша, ніж відстань між фокусами.



У гіперболи, що зображена на рисунку

$$|r_1 - r_2| = 2a = \text{const}, \quad c > a, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Канонічне рівняння даної гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(якщо фокуси гіперболи розташовані на осі Oy , то її рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad |r_1 - r_2| = 2b = \text{const}.$$

Асимптоти гіперболи $y = \pm \frac{b}{a}x$; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$, фокальні радіуси точки M для правої гілки $r_1 = \varepsilon x + a$ і $r_2 = \varepsilon x - a$, для лівої гілки

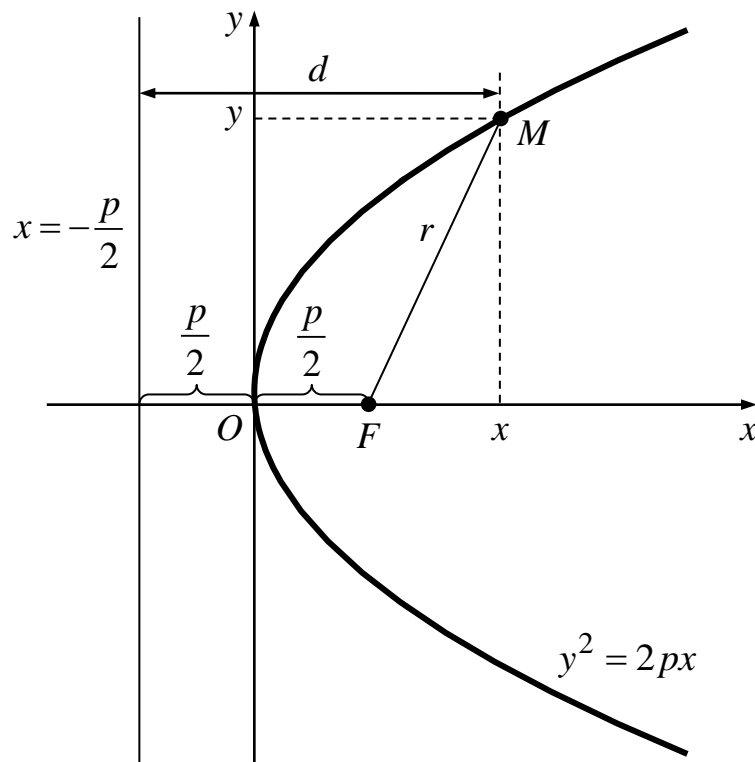
$r_1 = -\varepsilon x - a$ і $r_2 = -\varepsilon x + a$; рівняння директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ (якщо фокуси гіперболи розташовані на осі Oy , то рівняння директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$).

Відношення фокальних радіусів довільної точки гіперболи M до відстаней від цієї точки до одnobічних з відповідними фокусами директрис є величина постійна, рівна ексцентриситету гіперболи

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Парабола.

Параболою називається геометричне місце точок площини, однаково віддалених від даної точки цієї площини, яку називають фокусом, і даної прямої, що лежить на цій площині та називається директрисою.



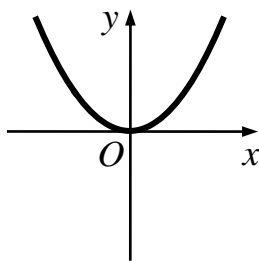
У параболи, що зображена на рисунку, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус; $r = x + \frac{p}{2}$ – фокальний радіус точки M ; p – параметр параболи. Її канонічне рівняння

$$y^2 = 2px.$$

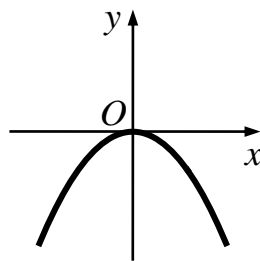
Рівняння директриси даної параболи $x = -\frac{p}{2}$. За визначенням параболи

$\frac{r}{d} = 1$. Тому ексцентриситет параболи приймають рівним одиниці.

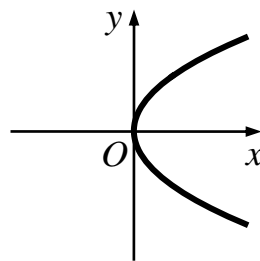
Залежно від того, як розташовані гілки параболи щодо координатних осей, її рівняння має різний вигляд.



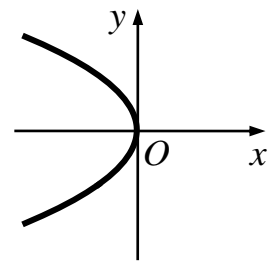
$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$



$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = -2px$$

Приклад 4. Побудувати лінію $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$. Знайти довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис.

Розв'язання.

Задане рівняння визначає еліпс. Перетворимо рівняння еліпса до канонічного виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$x^2 + 16y^2 - 16 = 0, \quad x^2 + 16y^2 = 16, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{16}} = 1, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Звідси маємо

$$a^2 = 16, \quad a = 4, \quad 2a = 8 \text{ – велика вісь;}$$

$$b^2 = 1, \quad b = 1, \quad 2b = 2 \text{ – мала вісь.}$$

У еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Тоді

$$c^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15, \quad c = \sqrt{15}.$$

Координати фокусів

$$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0),$$

тобто

$$F_1(-\sqrt{15}; 0), \quad F_2(\sqrt{15}; 0).$$

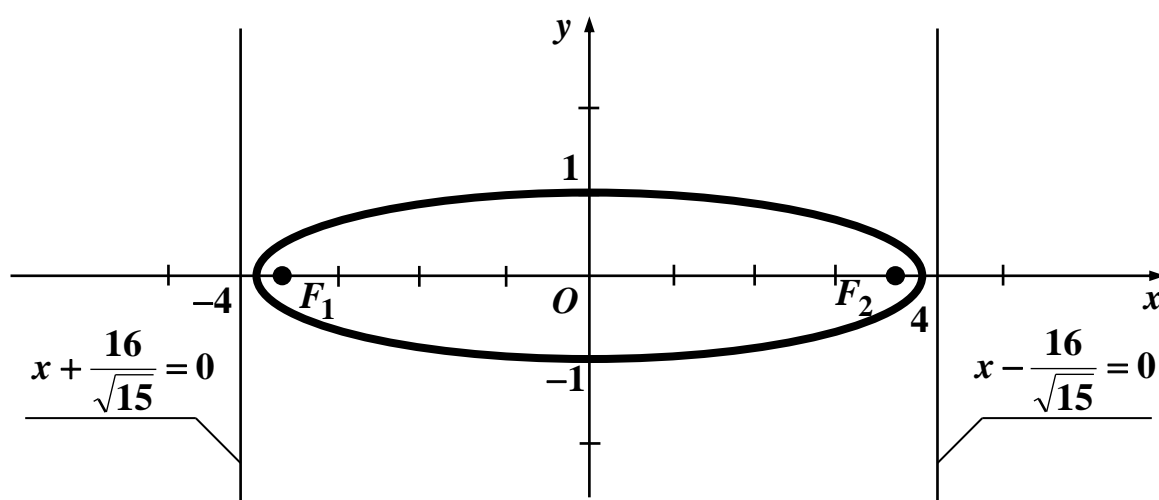
Ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Рівняння директрис

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \pm \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}, \quad x = \pm \frac{16}{\sqrt{15}}.$$

Зробимо рисунок.



Приклад 5. Побудувати лінію $x^2 - 16y^2 - 16 = 0$. Знайти довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот.

Розв'язання.

Задане рівняння визначає гіперболу. Перетворимо рівняння гіперболи до канонічного виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$x^2 - 16y^2 - 16 = 0, \quad x^2 - 16y^2 = 16, \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

Звідси маємо

$$a^2 = 16, \quad a = 4, \quad 2a = 8 \text{ — дійсна вісь;}$$

$$b^2 = 1, \quad b = 1, \quad 2b = 2 \text{ — уявна вісь.}$$

У гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Тоді

$$c^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17, \quad c = \sqrt{17}.$$

Координати фокусів

$$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0),$$

тобто

$$F_1(-\sqrt{17}; 0), \quad F_2(\sqrt{17}; 0).$$

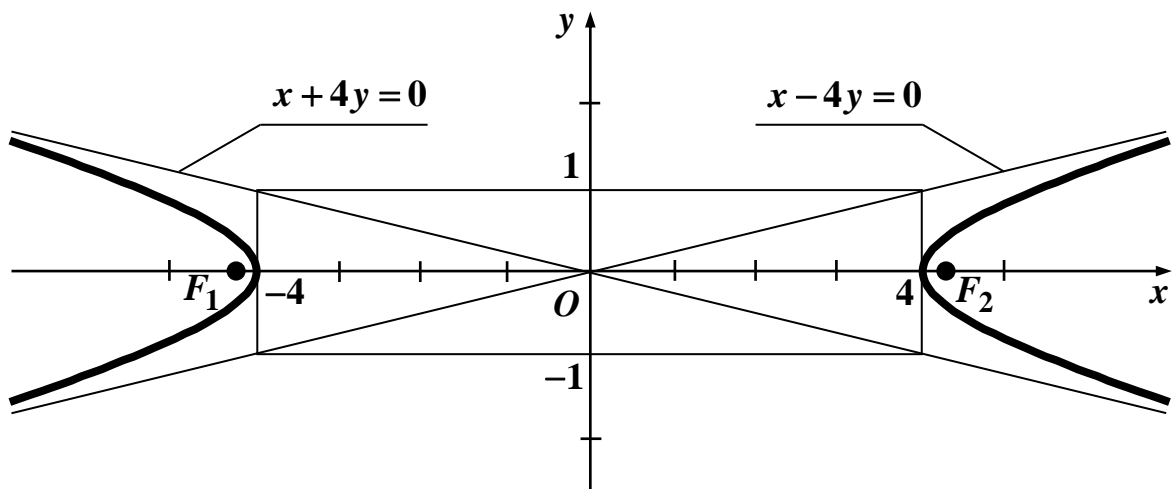
Ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Рівняння асимптот

$$y = \pm \frac{b}{a}x, \quad y = \pm \frac{1}{4}x.$$

Зробимо рисунок.



Приклад 6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює **6**, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, має вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою задачі мала вісь

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3, \quad b^2 = 9,$$

ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

У еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Тоді

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = a^2 - 9, \quad \frac{2}{4}a^2 = a^2 - 9, \quad a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 9, \quad a^2 = 18.$$

Отже, рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Приклад 7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, має вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою задачі відстань між фокусами

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4, \quad c^2 = 16,$$

ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{5}{3}a$

Тоді

$$4 = \frac{5}{3}a, \quad a = \frac{12}{5}, \quad a^2 = \frac{144}{25}.$$

У гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Отже

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad b^2 = 16 - \frac{144}{25} = \frac{25 \cdot 16 - 144}{25} = \frac{256}{25}.$$

Таким чином, рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{\frac{144}{25}} - \frac{y^2}{\frac{256}{25}} = 1.$$

Приклад 8. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. Побудувати коло.

Розв'язання. Зведемо рівняння кола до вигляду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

де точка $C(x_0; y_0)$ – центр кола, R – радіус кола.

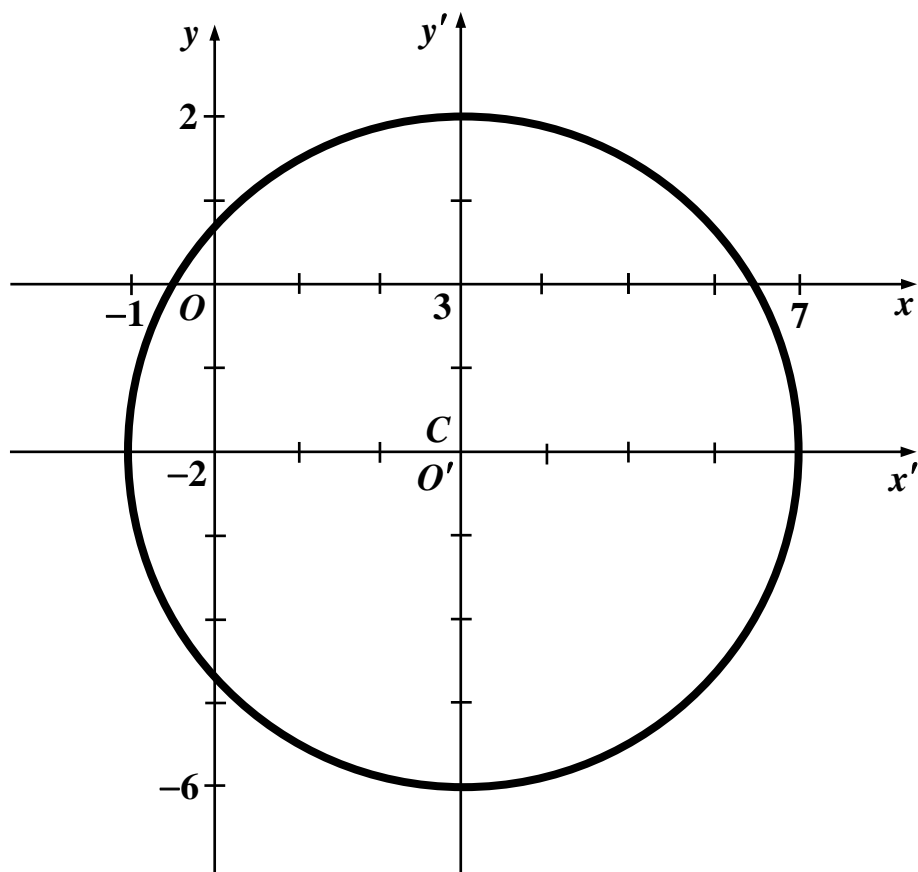
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0, \quad (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) - 3 = 0,$$

$$\left(\underbrace{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2}_{(x-3)^2} - 3^2 \right) + \left(\underbrace{y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2}_{(y+2)^2} - 2^2 \right) - 3 = 0,$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0, \quad (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Центр кола $C(3; -2)$, радіус кола $R = 4$.

Зробимо рисунок.



Приклад 9. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(0; 1)$ та від прямої $y - 3 = 0$. Побудувати отриману лінію.

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка шуканої множини.

Відстань від точки F до точки M

$$d_1 = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Відстань від точки M до прямої $y - 3 = 0$

$$d_2 = |y - 3|.$$

За умовою задачі $d_1 = d_2$. Тоді

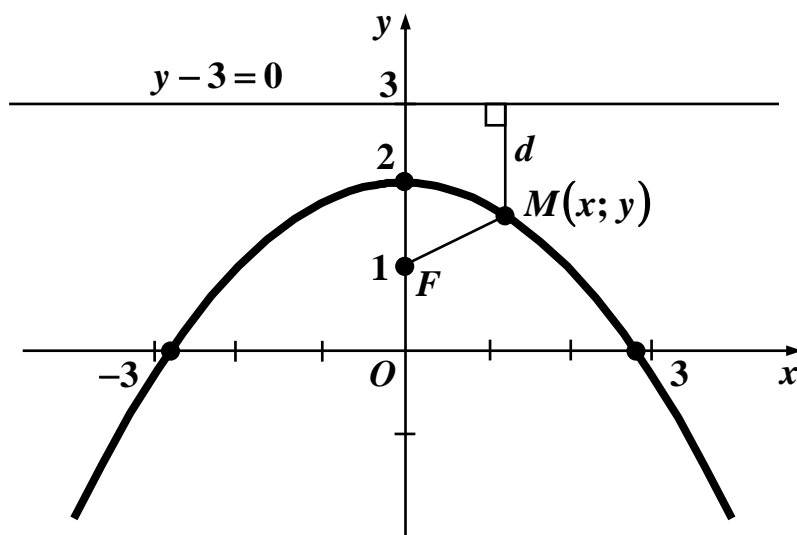
$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = |y - 3|,$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9,$$

$$x^2 = -4y + 8, \quad x^2 = -4(y - 2), \quad x^2 = -2 \cdot 2(y - 2).$$

Ми отримали рівняння параболи, гілки якої напрямлені вниз, вершина знаходиться у точці $(0; 2)$ та параметр $p = 2$. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = 8, \quad x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}.$$



Розділ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Література: [1] глава 4, §§ 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 5.1, 5.2, 5.3.

Обчислення границь.

Обчислення границь функцій, як правило, зводиться до розкриття невизначеностей. Ми говоримо, що маємо невизначеність, якщо при безпосередній підстановці граничного значення аргументу у вираз функції, що стоїть під знаком границі, не можна дійти висновку про наявність або відсутність границі вказаної функції. В залежності від виду невизначеності записують у вигляді: $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{1^\infty\}$ та ін.

Розглянемо розв'язання деяких типових прикладів на обчислення границь функцій.

Приклад 10. Знайти границі функцій, не користуючись правилами Лопітала

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 7x^2 + x - 2)$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 - 7x^2 + 2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 - 100x^2 + 1}{100x^2 + 15x - 4}$;

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x^2 - 7x}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^3 + 3x^2 - 2}{0,001x^4 - 100x^3 + 1}$;

е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)$.

Розв'язання. а) Винесемо за дужки x у старшому степені

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 7x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^3 \left(5 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = \infty.$$

Ми скористалися тим, що $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ (границя не існує, функція $y = x^3$ при $x \rightarrow \infty$ є нескінченно великою); при діленні числа на величину нескінченно велику одержуємо величину нескінченно малу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 0.$$

Таким чином, границя многочлена при $x \rightarrow \infty$ визначається границею члена зі старшим степенем.

б) Поділимо чисельник і знаменник на x у старшому степені. Одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 - 100x^2 + 1}{100x^2 + 15x - 4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{100}{x} + \frac{15}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = -\infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^3 + 3x^2 - 2}{0,001x^4 - 100x^3 + 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}}{0,001 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^4}} = 0.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 - 7x^2 + 2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{3}.$$

Висновок: границя відношення двох многочленів при $x \rightarrow \infty$ не існує, якщо степінь чисельника вище степеня знаменника, що умовно позначається символом ∞ ; дорівнює 0 , якщо степінь знаменника вище степеня чисельника; дорівнює відношенню коефіцієнтів при x у старших степенях, якщо степені чисельника і знаменника однакові.

д) Границю відношення ірраціональних виразів знаходимо аналогічно. Старші степені x у першому та другому доданках чисельника відповідно дорівнюють $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$. Старший степінь x у знаменнику $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Отже, старший степінь змінної x для всього дробу – $\frac{2}{3}$. Поділимо чисельник і знаменник на $x^{2/3}$. Одержимо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x^2 - 7x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x}{x^{4/3}} + \frac{1}{x^{4/3}}}}{\sqrt[4]{\frac{x^2}{x^{8/3}} - 7\frac{x}{x^{8/3}}}} = \infty.$$

Ми скористалися тим, що $(x^{2/3})^3 = x^2$, $(x^{2/3})^2 = x^{4/3}$, $(x^{2/3})^4 = x^{8/3}$.

е) Маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$. Помножимо та поділимо дану функцію на спряжений вираз і скористаємося формулою $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right) &= \{ \infty - \infty \} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 7x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left\{ \frac{-}{+} \right\} = -\frac{5}{1+1} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Спряжені вирази

$$\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \right) \leftrightarrow \left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \right); \left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \right) \leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2} \right).$$

Приклад 11. Знайти границю функцій, не користуючись правилами Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка $x = 1$ в задану функцію приводить до невизначеності виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Для її розкриття розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $(x-1)$ – критичний множник. Щоб виділити множник $(x-1)$ у чисельнику, виконуємо ділення чисельника на вираз $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + x - 2 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline x^2 + x & \\ x^2 - x & \\ \hline 2x - 2 & \\ 2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

Знаменник можна розкласти на множники відомим способом групування членів

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1). \end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x+1)} = \infty.$$

Ми скористалися тим, що при діленні числа на величину нескінченно малу одержуємо величину нескінченно велику $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)} = \infty$.

Приклад 12. Знайти границю функцій, не користуючись правилами Лопітала

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

Розв'язання. а) Після підстановки значення змінної $x = 0$ в задану функцію одержуємо невизначеність виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Помножимо чисельник і знаменник дроби на вираз, спряжений чисельнику, і на вираз, спряжений знаменнику. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(\sqrt{x^2 + 16} - 4)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(x^2 + 16 - 16)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{x^2 \left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)} = \\
&= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ми скористалися формулою $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Приклад 13. Знайти границю функцій, не користуючись правилами Лопітала

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sin \frac{x-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right)$.

Розв'язання. а) Безпосередня підстановка $x = 0$ в даний вираз приводить до невизначеності виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Скориставшись тим, що $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$,

$1 - \cos 3x = 2 \sin^2 \frac{3x}{2}$, зведемо дріб до вигляду, зручного для застосування

першої важливої границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{x^3} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 3x \cos 3x}{\cos 3x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x (1 - \cos 3x)}{x^3 \cos 3x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \\
&= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2} \right)^2} = 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot 1 = \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

б) Щоб скористатися першою важливою границею покладемо $x - a = y$.

Тоді $x = y + a$, при $x \rightarrow a$ $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sin \frac{x-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\sin \frac{y}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi y}{2a} + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\sin \frac{y}{2} \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2a} \right) \right] = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \cdot \frac{\pi y}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\pi y}{2a}} = \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi y}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\pi}{a}} = -1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{\pi} = -\frac{a}{\pi}.
\end{aligned}$$

Ми скористалися також формулою $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, що є наслідком першої

важливої границі.

Приклад 14. Знайти границю функцій, не користуючись правилами Лопітала

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}.$$

Розв'язання. а) Скористаємося другою важливою границею

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots \\
&\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} = \left\{ 1^\infty \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-2} - 1 \right)^{2x-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1-x+2}{x-2} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3} \cdot \frac{3}{x-2} \cdot (2x-1)} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1+5x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+5x)^{1/x} = \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{(1/5x) \cdot 5} = \ln e^5 = 5.
\end{aligned}$$

Неперервність функції в точці і на відрізку.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці x_0* , якщо виконуються наступні умови:

- 1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
- 2) існує границя функції $f(x)$ в точці x_0 (існують границі функції $f(x)$ в точці x_0 зліва і справа і вони рівні між собою);
- 3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює її значенню в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

На практиці зазвичай при дослідженні функції на неперервність у точці x_0 перевіряють виконання рівності

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (3)$$

(ліва границя дорівнює правій границі і дорівнює значенню функції в цій точці).

Якщо рівність (3) не виконується, то має місце розрив. Розрізняють розрив *першого* і *другого* роду.

Функція $f(x)$ має в точці x_0 *усувний розрив першого роду*, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

(якщо доповнити значення функції деяким значенням у точці x_0 , то функція стане неперервною в даній точці).

Функція $f(x)$ має в точці x_0 *неусувний розрив першого роду* (стрибок), якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Абсолютна величина різниці границь у точці x_0 ліворуч і праворуч

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|$$

називається *величиною стрибка*.

Якщо ліва або права границя функції $f(x)$ в точці x_0 не існує (дорівнює нескінченності), то функція має (терпить) у цій точці *розрив другого роду* (*нескінченний розрив*).

Приклад 15. Дослідити функцію $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$ на неперервність в точці $x = -2$. Побудувати її графік.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції

$$x + 2 \neq 0, \quad x \neq -2.$$

Отже,

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

Таким чином, $x = -2$ – точка розриву. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі функції $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$ при $x \rightarrow -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{+}{-} \right) = \{2^{-\infty}\} = 0,$$

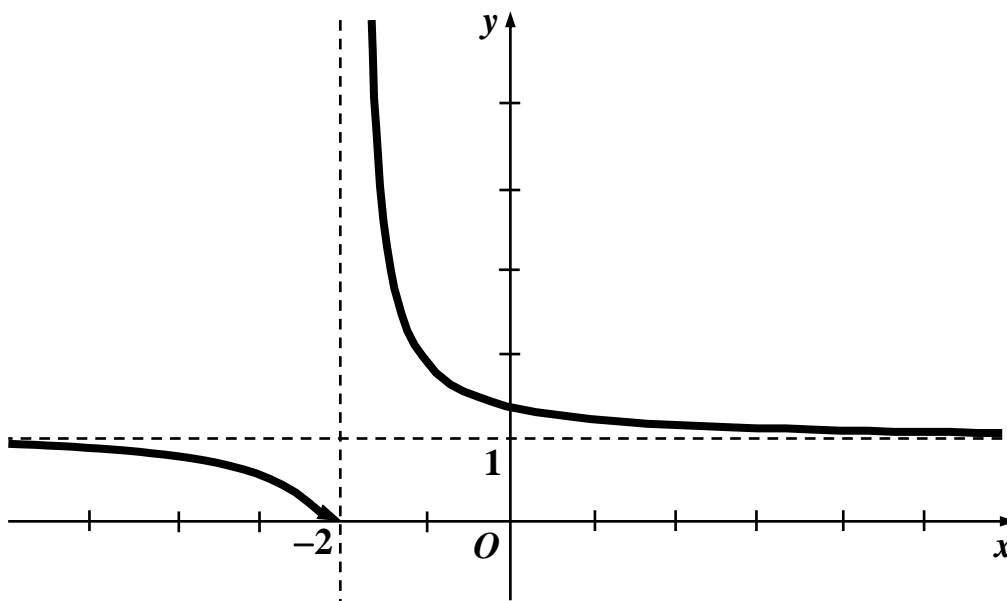
$$\lim_{x \rightarrow -2+0} 2^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{+}{+} \right) = \{2^{+\infty}\} = +\infty.$$

Звідси випливає, що в точці $x = -2$ функція має розрив другого роду.

Для побудови графіка знайдемо границі функції при $x \rightarrow -\infty$ та при $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{+}{-} \right) = (2^{-0}) = 1 \text{ (знизу)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x+2}} = \left(\frac{+}{+} \right) = (2^{+0}) = 1 \text{ (зверху)}.$$

За необхідності для уточнення графіка можна також обчислювати значення функції у додаткових точках. Побудуємо графік даної функції.



Приклад 16. Дослідити функцію на неперервність. Побудувати її графік

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x < 2, \\ x+1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі, але на різних інтервалах різними аналітичними виразами. На кожному інтервалі функція неперервна. Розрив може бути тільки в точці стику. Перевіримо цю точку. Для цього знайдемо границі функції ліворуч і праворуч від даної точки

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^3 = 8,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x+1) = 3.$$

За умовою

$$f(2) = 2+1 = 3.$$

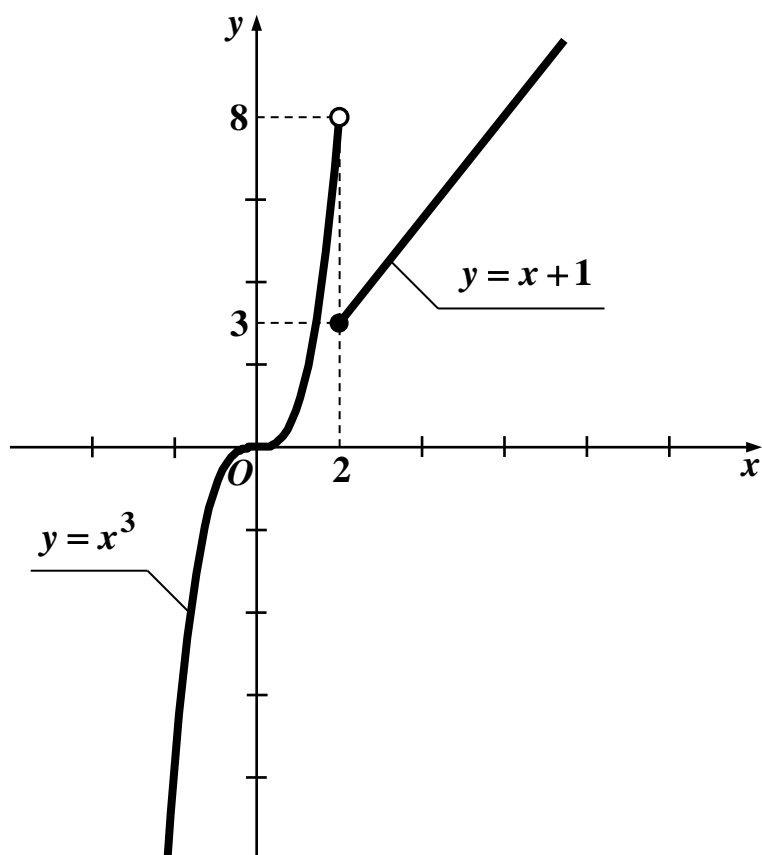
У точці $x = 2$ існують границі ліворуч і праворуч, але вони не рівні між собою. Тому в цій точці функція $f(x)$ має неусувний розрив першого роду (стрибок). Величина стрибка

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right| =$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 2-0} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2+0} (x+1) \right| = |8-3| = 5.$$

Границя функції праворуч від точки розриву збігається зі значенням функції у цій точці.

Побудуємо графік даної функції.



Розділ 5. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЙ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Література: [1] глава 5, §§ 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Похідна і диференціал функції.

Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля називається похідною від даної функції по даному аргументу.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

де x – незалежна змінна (аргумент); $y = f(x)$ – функція; Δx – приріст незалежної змінної; Δy – приріст функції; $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ – похідна (представлені різні позначення похідної).

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1. $y = C$ $y' = 0$ (похідна сталої).
2. $y = x$ $y' = 1$ (похідна змінної).
3. $y = x^\alpha$ $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ (похідна степеневі функції).

Окремі випадки.

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y = x^2 \quad y' = 2x.$$

$$y = x^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{x} \quad y' = \frac{1}{\alpha \sqrt[\alpha]{x^{\alpha-1}}}.$$

4. $y = a^x$ $y' = a^x \ln a$ (похідна показникової функції).

Окремий випадок.

$$y = e^x \quad y' = e^x.$$

5. $y = \log_a x$ $y' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$ (похідна логарифмічної функції).

Окремий випадок.

$$y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Похідні тригонометричних функцій.

$$6. \quad y = \sin x \quad y' = \cos x.$$

$$7. \quad y = \cos x \quad y' = -\sin x.$$

$$8. \quad y = \operatorname{tg} x \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$9. \quad y = \operatorname{ctg} x \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Похідні обернених тригонометричних функцій.

$$10. \quad y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. \quad y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. \quad y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. \quad y = \operatorname{arcctg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основні правила диференціювання (припускається, що функції $u(x)$, $v(x)$ і $\omega(x)$ диференційовні в точці x).

$$1. \quad (Cu)' = Cu'.$$

$$2. \quad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$3. \quad (uv)' = u'v + v'u, \quad (uv\omega)' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'.$$

$$4. \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v(x) \neq 0.$$

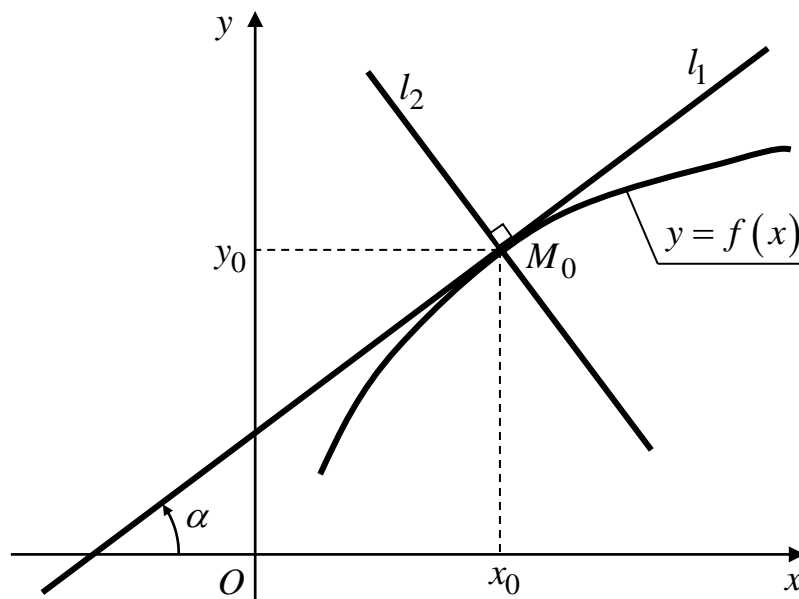
Похідна складеної функції.

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$. Тоді функція $y = f[\varphi(x)]$ називається *складеною функцією* із проміжним аргументом u і кінцевим x . Її похідна

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Правило ланцюжка. Щоб продиференціювати складену функцію $y = f[\varphi(x)]$ потрібно знайти похідну від «зовнішньої» функції f , розглядаючи її «внутрішню» функцію $\varphi(x)$ як змінну, по якій береться похідна, і помножити її на похідну «внутрішньої» функції по незалежній змінній. Це правило поширюється на будь-яке кінцеве число проміжних аргументів.

Рівняння дотичної і нормалі до кривої.



l_1 – дотична; l_2 – нормаль;

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$

$$y - y_0 = k_{\text{дот.}}(x - x_0),$$

де $k_{\text{дот.}}$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Геометрично похідна являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці, тобто

$$y'_x|_{x=x_0} = f'(x_0) = k_{\text{дот.}}$$

Тоді рівняння дотичної набуває вигляду

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Кутовий коефіцієнт нормалі

$$k_{\text{нор.}} = -\frac{1}{k_{\text{дот.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Отже, рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Застосування диференціального числення.

Монотонність і екстремум функції.

Теорема 1 (необхідна умова зростання функції). Якщо диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі, то її похідна $f'(x) \geq 0$ для всіх $a < x < b$.

Теорема 2 (достатня умова зростання функції). Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ в кожній точці інтервалу $(a; b)$ має додатну похідну, тобто $f'(x) > 0$ для всіх $a < x < b$, то ця функція зростає на відрізку $[a; b]$.

Теорема 3 (необхідна умова спадання функції). Якщо диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі, то її похідна $f'(x) \leq 0$ для всіх $a < x < b$.

Теорема 4 (достатня умова спадання функції). Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ в кожній точці інтервалу $(a; b)$ має від'ємну похідну, тобто $f'(x) < 0$ для всіх $a < x < b$, то ця функція спадає на відрізку $[a; b]$.

Екстремум функції. Функція $f(x)$ має максимум (мінімум) у точці x_0 , якщо існує такий окіл цієї точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який належить області визначення функції, що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Теорема 5 (необхідна ознака існування екстремума). Якщо неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ має в цій точці екстремум, то її похідна при $x = x_0$ дорівнює нулю або не існує.

Теорема 6 (перша достатня ознака існування екстремума). Нехай функція $f(x)$ неперервна в якомусь δ -околі критичної точки x_0 , тобто в околі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, і диференційовна в усіх точках цього околу крім, можливо, самої точки x_0 . Її похідна $f'(x)$ зберігає знак у лівому $(x_0 - \delta; x_0)$ і правому $(x_0; x_0 + \delta)$ напівколах точки x_0 . Якщо при переході через цю точку зліва направо похідна змінює знак з плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а якщо з мінуса на плюс, то мінімум. Якщо ж при переході через критичну точку x_0 похідна не змінює знак, то в цій точці екстремума немає.

Теорема 7 (друга достатня ознака існування екстремума). Нехай у точці x_0 перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$, а друга похідна існує і відмінна від нуля, тобто $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 функція має максимум, а якщо $f''(x_0) > 0$, то мінімум.

Визначення найбільшого і найменшого значень функції на відрізку.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення функції на заданому відрізку необхідно знайти критичні точки ($y' = 0$ або y' не існує) і обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка. Найбільше з отриманих чисел і буде найбільшим значенням функції на заданому відрізку, найменше – найменшим.

Опуклість і увігнутість кривої. Точки перегину.

Теорема 8. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у кожній внутрішній точці цього відрізка, тобто при $x \in (a; b)$, має $f''(x)$. Тоді якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то крива увігнута на відрізку $[a; b]$. Якщо $f''(x) < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то крива опукла на відрізку $[a; b]$.

Точка, що відокремлює опуклу частину неперервної кривої від увігнутої, називається *точкою перегину* графіка функції.

Асимптоти графіка функції.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма лінія l , яка має ту властивість, що відстань δ від змінної точки $M(x; y)$ на графіку функції до прямої прямує до нуля при віддаленні цієї точки за графіком у нескінченність.

Вертикальні асимптоти. Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Похилі асимптоти. Якщо крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту, то рівняння цієї асимптоти може бути записано у вигляді

$$y = kx + b,$$

де k і b знаходяться відповідно за формулами

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx].$$

Повне дослідження функції.

Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність та періодичність.
3. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву (якщо вони існують), встановити їх характер та проміжки неперервності.
4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти інтервали зростання (спадання) графіка функції, точки екстремумів та значення функції у цих точках.
6. Знайти інтервали опуклості (увігнутості) графіка функції, точки перегинів та значення функції у цих точках.
7. Знайти асимптоти кривої.
8. Нанести на рисунок характерні точки графіка функції (перетину з осями координат, екстремумів, перегинів), побудувати асимптоти, викреслити графік функції (Для уточнення графіка можна визначити значення функції у кількох додаткових точках).

Приклад 17. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^4}} \cdot 2(1-x) \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x =$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-x)}} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Приклад 18. Знайти похідну функції

$$y = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}\right)$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot 4x^3 \right) = \\ &= \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) = \\ &= \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}. \end{aligned}$$

Приклад 19. Знайти похідну функції

$$y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \cos^3(2x + 3) + e^{-x^2} \cdot 3\cos^2(2x + 3) \cdot (-\sin(2x + 3)) \cdot 2 = \\ &= -2xe^{-x^2} \cos^3(2x + 3) - 6e^{-x^2} \cos^2(2x + 3) \cdot \sin(2x + 3) = \\ &= -2e^{-x^2} \cos^2(2x + 3) (x \cos(2x + 3) + 3 \sin(2x + 3)). \end{aligned}$$

Приклад 20. Знайти похідну функції

$$y \ln x - x \ln y = \cos xy.$$

Розв'язання.

Функція задана неявно. Щоб знайти похідну неявно заданої функції, необхідно почленно продиференціювати рівняння по x , враховуючи, що y є функцією від x , і розв'язати отримане рівняння відносно y' .

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} - \left(\ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' \right) = -\sin xy \cdot (y + xy'),$$

$$y' \ln x + \frac{y}{x} - \ln y - \frac{x}{y} \cdot y' = -y \sin xy - xy' \sin xy,$$

$$y' \left(\ln x - \frac{x}{y} + x \sin xy \right) = -y \sin xy - \frac{y}{x} + \ln y,$$

$$y' = \frac{\ln y - y \sin xy - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y} + x \sin xy}.$$

Приклад 21. Знайти похідну функції

$$y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Розв'язання. Застосуємо логарифмічне диференціювання. При цьому будемо використовувати правила логарифмування. Якщо $u, v > 0$, то

$$\ln u^v = v \ln u; \quad \ln \sqrt[v]{u} = \frac{1}{v} \ln u; \quad \ln(uv) = \ln u + \ln v; \quad \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v.$$

Тоді

$$\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x,$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \right).$$

Приклад 22. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}.$$

Розв'язання. Застосуємо логарифмічне диференціювання.

$$\ln y = \ln \left(\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x} \right)^{1/2},$$

$$\ln y = \frac{1}{2} (\ln(1 - \arcsin x) - \ln(1 + \arcsin x)),$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \arcsin x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \arcsin x} \right),$$

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1 + \arcsin x + 1 - \arcsin x}{(1 - \arcsin x)(1 + \arcsin x)},$$

$$y' = -\sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot (1 - \arcsin^2 x)}.$$

Приклад 23. Дано функцію $y = x \cdot e^{1/x}$. Знайти $y''(1)$.

Розв'язання. Знайдемо послідовно y' і y'' .

$$y' = e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

$$y'' = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 + 1\right) = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

Тогда $y''(1) = e$.

Приклад 24. Дано функцію

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$$

Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ у точці, де $t = \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. Функція задана параметрично. Скористаємося формулами

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Отримаємо

$$y'_x = \frac{3 \sin^2 2t \cdot \cos 2t \cdot 2}{6 \cos^2 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2} = -\frac{\sin 2t}{2 \cos 2t} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t,$$

$$y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$y''_x = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 2t} \cdot 2}{6 \cos^2 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2} = \frac{1}{12 \cos^4 2t \cdot \sin 2t},$$

$$y''_x \Big|_{t=\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{12 \cos^4 \left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{12 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Розділ 6. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Література: [1] глава 6, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 3.1, 3.4, 3.5.

Поняття функції декількох змінних.

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних величин x і y з області їх змінення D за деяким правилом поставлено у відповідність певне значення змінної величини z , то z називається *функцією двох незалежних змінних x і y* , визначеною в області D . Символічно записують $z = f(x, y)$.

Аналогічно вводиться поняття *функції n незалежних змінних $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$* .

Границя і неперервність функції двох змінних.

Число a називається границею функції $f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, якщо ця функція визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, за винятком, можливо, самої точки M_0 , і для будь-якого скільки завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x і y , що задовольняють подвійній нерівності

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

виконується нерівність

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon.$$

Позначається

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо виконуються наступні умови:

- 1) функція $f(x, y)$ визначена в точці M_0 та в деякому її околі;
- 2) існує границя функції $f(x, y)$ у точці M_0 , яка дорівнює її значенню у цій точці, тобто

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Частинні похідні функції двох змінних.

Частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по x у точці $M_0(x_0, y_0)$ позначається символом $f'_x(x_0, y_0)$ і визначається як

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ по x до приросту Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Частинна похідна по x функції $z = f(x, y)$ позначається, наприклад, символами z'_x , f'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ та ін.

Аналогічно визначається і позначається частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по y . Визначення частинних похідних можна також сформулювати наступним чином.

Частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$ називається похідна по x , обчислена в припущенні, що y є сталою, а частинною похідною по y називається похідна по y , обчислена в припущенні, що x є сталою.

Диференціювання складеної функції.

Розглянемо деякі випадки.

1. Якщо $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. Якщо $z = f(u, v)$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

3. Якщо $z = f(x, u, v)$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

4. Якщо $z = f(x, y)$, де $y = y(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Зауваження. Необхідно розрізняти повну $\frac{dz}{dx}$ і частинну $\frac{\partial z}{\partial x}$ похідні.

Повний диференціал функції двох змінних.

Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в даній точці, то вона диференційована в цій точці і її повний диференціал дорівнює сумі добутків частинних похідних на диференціали відповідних незалежних змінних

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Диференціювання неявної функції.

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$, тобто нерозв'язана відносно залежної змінної y , то

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, тобто нерозв'язана відносно залежної змінної z , то

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Частинні похідні вищих порядків.

Частинні похідні функції декількох змінних, у свою чергу, також можуть мати частинні похідні, які називаються *другими частинними похідними*. Функція двох змінних $z = f(x, y)$ має чотири частинні похідні другого порядку $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$.

Зауважимо, що дві змішані частинні похідні однієї й тієї ж функції декількох змінних, що відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою за умови їх неперервності, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Екстремум функції двох змінних.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ має в точці M_0 локальний максимум (локальний мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки, який належить області D , що для всіх точок $M(x; y)$ цього околу, відмінних від M_0 , виконується нерівність $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ ($f(x_0; y_0) < f(x; y)$).

Введемо позначення для значень других частинних похідних цієї функції в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = A, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = B, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = C.$$

Тоді маємо:

1) якщо $\Delta(M_0) = B^2 - AC < 0$, то функція $z = f(x, y)$ в точці M_0 має екстремум: максимум при $A < 0$ ($C < 0$) і мінімум при $A > 0$ ($C > 0$);

2) якщо $\Delta(M_0) = B^2 - AC > 0$, то в точці M_0 екстремуму немає;

3) якщо $\Delta(M_0) = B^2 - AC = 0$, то для того, щоб зробити висновок про існування або відсутність в точці M_0 екстремуму необхідні додаткові дослідження.

Дотична площина та нормаль до поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на ній, то дотична площина до поверхні в точці M_0 визначається рівнянням.

$$F'_x \Big|_{M_0} (x - x_0) + F'_y \Big|_{M_0} (y - y_0) + F'_z \Big|_{M_0} (z - z_0) = 0.$$

Нормаль до поверхні в точці M_0 (пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини) визначається рівняннями.

$$\frac{x - x_0}{F'_x \Big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y \Big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z \Big|_{M_0}}.$$

Точки поверхні $F(x, y, z) = 0$, в яких одночасно обертаються в нуль всі частинні похідні першого порядку F'_x, F'_y, F'_z , називаються *особливими*. У таких точках поверхня не має ні дотичної площини, ні нормалі.

Приклад 25. Обчислити наближено з точністю до другого знака після коми значення виразу $\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arctg} 0,07}{2^{2,95}}$.

Розв'язання. Нехай цей вираз є частинне значення функції трьох змінних $f(x, y, z) = 2^x \cdot \sin y \cdot \operatorname{arctg} z$ у точці $M_1(-2,95; 1,49; 0,07)$. Нехай допоміжна точка буде $M_0\left(-3; \frac{\pi}{2}; 0\right)$. Скористаємося формулою

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + f'_z(M_0)dz.$$

Тоді

$$dx = -2,95 - (-3) = 0,05, \quad dy = 1,49 - \frac{\pi}{2} \approx -0,081, \quad dz = 0,07 - 0 = 0,07,$$

$$f(M_0) = 2^{-3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad f(M_0) = 2^{-3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

$$f'_x(M_0) = \left(2^x \ln 2 \cdot \sin y \cdot \operatorname{arctg} z\right)\Big|_{M_0} = \left(2^{-3} \ln 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg} 0\right) = 0,$$

$$f'_y(M_0) = \left(2^x \cos y \cdot \operatorname{arctg} z\right)\Big|_{M_0} = \left(2^{-3} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg} 0\right) = 0,$$

$$f'_z(M_0) = \left(\frac{2^x \cdot \sin y}{1+z^2}\right)\Big|_{M_0} = \left(\frac{2^{-3} \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{1+0^2}\right) = 0,125.$$

Таким чином,

$$\frac{\sin 1,49 \cdot \operatorname{arctg} 0,07}{2^{2,95}} = 0,125 \cdot 0,07 \approx 0,01.$$

Приклад 26. Обчислити частинні похідні функції $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

Розв'язання.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\cos \frac{x}{y}}{\sin \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}.$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\cos \frac{x}{y}}{\sin \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \\ &= -\frac{2x}{2y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}. \end{aligned}$$

Приклад 27. Дано функцію $z = u^2 v - v^2 u$, де $u = x \cos y$, $v = y \sin x$.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2uv - v^2) \cos y + (u^2 - 2uv) y \cos x = \\ &= (2xy \sin x \cos y - y^2 \sin^2 x) \cos y + (x^2 \cos^2 y - 2xy \sin x \cos y) y \cos x = \\ &= (2x \cos y - y \sin x) y \sin x \cos y + (x \cos y - 2y \sin x) xy \cos x \cos y. \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -(2uv - v^2) x \sin y + (u^2 - 2uv) \sin x = \\ &= -(2xy \sin x \cos y - y^2 \sin^2 x) x \sin y + (x^2 \cos^2 y - 2xy \sin x \cos y) \sin x = \\ &= -(2x \cos y - y \sin x) xy \sin x \sin y + (x \cos y - 2y \sin x) x \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Приклад 28. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Розв'язання. $D(z)$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо критичні точки, тобто ті точки з області визначення функції, в яких всі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю або не існують.

$$z'_x = 3x^2 + y^2 + 6y, \quad z'_y = 2xy + 6x.$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ 2xy + 6x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ x(y+3) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0, \\ y + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{3}, \\ y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ y = -3. \end{cases}$$

Таким чином, ми отримали чотири критичні точки $M_1(0; 0)$, $M_2(0; -6)$, $M_3(-\sqrt{3}; -3)$, $M_4(\sqrt{3}; -3)$. Проведемо дослідження критичних точок за знаком Δ . Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та їх значення у кожній критичній точці. Маємо

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 2y + 6, \quad z''_{yy} = 2x.$$

Для точки $M_1(0; 0)$:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0, \quad B = z''_{xy}(M_1) = 2 \cdot 0 + 6 = 6, \quad C = z''_{yy}(M_1) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 6^2 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{в точці } M_1 \text{ екстремуму немає.}$$

Для точки $M_2(0; -6)$:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6 \cdot 0 = 0, \quad B = z''_{xy}(M_2) = 2 \cdot (-6) + 6 = -6, \quad C = z''_{yy}(M_2) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{в точці } M_2 \text{ екстремуму немає.}$$

Для точки $M_3(-\sqrt{3}; -3)$:

$$A = z''_{xx}(M_3) = 6 \cdot (-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}, \quad B = z''_{xy}(M_3) = 2 \cdot (-3) + 6 = 0,$$

$$C = z''_{yy}(M_3) = 2 \cdot (-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3},$$

$$\Delta = AC - B^2 = -6\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) - 0^2 = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{в точці } M_3 \text{ функція має екстремум. Оскільки } A = -6\sqrt{3} < 0, \text{ то це точка максимуму.}$$

$$\begin{aligned} z_{max} &= z(-\sqrt{3}; -3) = (-\sqrt{3})^3 + (-\sqrt{3})(-3)^2 + 6 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot (-3) = \\ &= -3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Для точки $M_4(\sqrt{3}; -3)$:

$$A = z''_{xx}(M_4) = 6\sqrt{3}, \quad B = z''_{xy}(M_4) = 2 \cdot (-3) + 6 = 0, \quad C = z''_{yy}(M_4) = 2\sqrt{3},$$

$\Delta = AC - B^2 = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 0^2 = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ в точці M_4 функція має екстремум. Оскільки $A = 6\sqrt{3} > 0$, то це точка мінімуму.

$$\begin{aligned} z_{min} &= z(\sqrt{3}; -3) = (\sqrt{3})^3 + \sqrt{3} \cdot (-3)^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot (-3) = \\ &= 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Приклад 29. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M_0(1; 0; 0)$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння поверхні до вигляду $F(x, y, z) = 0$, тобто

$$\ln(x^2 + y^2) - z = 0.$$

Тоді маємо

$$F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) - z.$$

Знайдемо частинні похідні функції F та їх значення у точці M_0 . Маємо

$$F'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad F'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad F'_z = -1.$$

$$F'_x(M_0) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 0^2} = 2, \quad F'_y(M_0) = \frac{2 \cdot 0}{1^2 + 0^2} = 0, \quad F'_z(M_0) = -1.$$

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) &= 0, \\ 2x - z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Тоді

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{-1},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розв'язати систему рівнянь за методом Крамера

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Завдання 2. Задано координати вершин піраміди.

1. $A_1(1; 3; 6)$, $A_2(2; 2; 1)$, $A_3(-1; 0; 1)$, $A_4(-4; 6; -3)$.
2. $A_1(-4; 2; 6)$, $A_2(2; -3; 0)$, $A_3(-10; 5; 8)$, $A_4(-5; 2; -4)$.
3. $A_1(7; 2; 4)$, $A_2(7; -1; -2)$, $A_3(3; 3; 1)$, $A_4(-4; 2; 1)$.
4. $A_1(2; 1; 4)$, $A_2(-1; 5; -2)$, $A_3(-7; -3; 2)$, $A_4(-6; -3; 6)$.
5. $A_1(-1; -5; 2)$, $A_2(-6; 0; -3)$, $A_3(3; 6; -3)$, $A_4(-10; 6; 7)$.

6. $A_1(0; -1; -1)$, $A_2(-2; 3; 5)$, $A_3(1; -5; -9)$, $A_4(1; -6; 3)$.
 7. $A_1(5; 2; 0)$, $A_2(2; 5; 0)$, $A_3(1; 2; 4)$, $A_4(-1; 1; 1)$.
 8. $A_1(2; -1; -2)$, $A_2(1; 2; 1)$, $A_3(5; 0; -6)$, $A_4(-10; 9; -7)$.
 9. $A_1(-2; 0; -4)$, $A_2(-1; 7; 1)$, $A_3(4; -8; -4)$, $A_4(1; -4; 6)$.
 10. $A_1(14; 4; 5)$, $A_2(-5; -3; 2)$, $A_3(-2; -6; -3)$, $A_4(-2; 2; -1)$.

- Знайти:
1. Довжину ребра A_1A_2 .
 2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 .
 3. Площу грані $A_1A_2A_3$.
 4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Зробити схематичний рисунок.

Завдання 3. Задано координати вершин трикутника ABC .

№	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$C(x_3; y_3)$
1	$(-3; -2)$	$(0; 5)$	$(-1; 4)$
2	$(-4; 0)$	$(-1; 4)$	$(4; -2)$
3	$(-6; 1)$	$(1; 7)$	$(2; 5)$
4	$(0; -2)$	$(3; 3)$	$(8; 0)$
5	$(1; 1)$	$(4; 5)$	$(7; -1)$
6	$(-4; -3)$	$(-1; 5)$	$(6; -1)$
7	$(-2; 0)$	$(0; 6)$	$(8; -2)$
8	$(-5; 2)$	$(1; 8)$	$(5; -2)$
9	$(0; 1)$	$(3; 4)$	$(8; -1)$
10	$(-3; 2)$	$(1; 8)$	$(5; 4)$

- Знайти:
1. Рівняння сторони BC .
 2. Рівняння медіани BK .
 3. Довжину медіани BK .

4. Рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC .

5. Рівняння висоти AP .

6. Довжину висоти AP .

7. Точку перетину медіани BK та висоти AP .

8. Кут KBC .

9. Площу трикутника ABC .

Зробити схематичний рисунок.

Завдання 4. Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

№	Рівняння лінії	№	Рівняння лінії
1	$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$	6	$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
2	$4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	7	$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
3	$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$	8	$9x^2 - y^2 - 9 = 0$
4	$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$	9	$4x^2 + 9y^2 - 9 = 0$
5	$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$	10	$x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

Завдання 5.

1. Знайти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$ і уявна вісь дорівнює 8 . Побудувати гіперболу.

2. Знайти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 10 , а відстань між фокусами $2c = 8$. Побудувати еліпс.

3. Знайти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Побудувати гіперболу.

4. Знайти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$. Побудувати еліпс.

5. Знайти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$. Побудувати гіперболу.

6. Знайти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$. Побудувати еліпс.

7. Знайти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 18, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$. Побудувати гіперболу.

8. Знайти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$. Побудувати еліпс.

9. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якій належить точка $M\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ і рівняння асимптот якої $y = \pm \frac{2}{3}x$. Побудувати гіперболу.

10. Знайти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$. Побудувати еліпс.

Завдання 6. Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати коло.

№	Рівняння кола	№	Рівняння кола
1	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$	6	$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
2	$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$	7	$x^2 + y^2 + 6x = 0$
3	$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$	8	$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$

4	$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$	9	$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
5	$x^2 + y^2 - 4x = 0$	10	$x^2 + y^2 + 2y = 0$

Завдання 7. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(x_1; y_1)$ та від прямої $Ax + By + C = 0$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат та побудувати її.

№	$F(x_1; y_1)$	$Ax + By + C = 0$
1	(3; 1)	$x + 2 = 0$
2	(1; -2)	$y + 3 = 0$
3	(-1; 1)	$x - 4 = 0$
4	(3; -2)	$y + 1 = 0$
5	(2; -1)	$x + 5 = 0$
6	(0; 2)	$y - 4 = 0$
7	(0; 0)	$x + 4 = 0$
8	(3; -4)	$y - 1 = 0$
9	(1; 0)	$x - 3 = 0$
10	(-2; -1)	$y + 2 = 0$

Завдання 8. Знайти границі функцій, не користуючись правилами Лопітала.

1.
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{28x^2 - 5x + 1}{7 + 3x - x^3}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\operatorname{tg} x)^{3\operatorname{ctg} x}$.
2.
 - 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x + 2} - \sqrt[3]{8x^3 + 5}}{\sqrt[4]{x + 7} - x}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;

- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{2/x}$.
3. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{3x} - 3}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 3}{6x - 4} \right)^{2x}$.
4. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{0,005x^3 - 8x + 5}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x+6} \right)^x$.
5. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^3 - 2}}{\sqrt[3]{8x^6 + 3x} - x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$.
6. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;
- 3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{(4x^2 - 1)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$.
7. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x^2 - 1}{3x^3 - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$;

- 3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$.
8. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2} - 5x^2}{x - \sqrt{x^4 - x - 1}}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.
9. 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax}\right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x+2)]$.
10. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)^3}{(7+9x)^2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+2x)}$.

Завдання 9. Дослідити функцію на неперервність у даній точці. Знайти границі ліворуч і праворуч від даної точки. За наявності точки розриву встановити її рід. Побудувати графік функції.

1. $y = 5^{\frac{1}{x-1}}$, ($x = 1$).

2. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$, ($x = -2$).

3. $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$, ($x = 3$).

3. $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$, ($x = 2$).

$$5. \quad y = 12^{\frac{1}{x}}, (x = 0).$$

$$6. \quad y = 8^{\frac{1}{5-x}}, (x = 5).$$

$$7. \quad y = 10^{\frac{1}{7-x}}, (x = 7).$$

$$8. \quad y = 14^{\frac{1}{6-x}}, (x = 6).$$

$$9. \quad y = 15^{\frac{1}{8-x}}, (x = 8).$$

$$10. \quad y = 11^{\frac{1}{4+x}}, (x = -4).$$

Завдання 10. Функцію задано різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної.

1. Знайти точки розриву функції, якщо вони існують.
2. У точках розриву першого роду знайти стрибок функції.
3. Побудувати графік функції.

$$1. \quad \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 3x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ x^3 + 2, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x < 3, \\ x^2, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x + 2, & x \leq 1, \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти похідні y' даних функцій.

1. а) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}} + 3x\sqrt{4 - x}$; б) $y = x^3 \arctg^2 5x^2$;
 в) $y = e^{-2x} + e^{2x}$; г) $xy = \sin y \cdot e^{\cos x}$;
 д) $y = x^{2x}$.
2. а) $y = \frac{2(x^3 + 2x - 1)}{\sqrt[4]{3 - 2x}}$; б) $y = \arcsin^4(4x^3 - 7x)$;
 в) $y = \cos 2x \cdot (x^3 - 1)$; г) $\sin y \cdot \cos x = 3^{x-y}$;
 д) $y = (\ln x)^x$.
3. а) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{3x^2 + 7x}}$; б) $y = (3 + \cos 3x)^3$;
 в) $y = \frac{x}{\sin x}$; г) $\arctg y = x \arcsin \frac{y}{x}$;
 д) $y = (\cos x)^{\sin x}$.
4. а) $y = (7 - x^2)\sqrt{x^2 + 3} - \frac{2}{\sqrt{x+3}}$; б) $y = \lg^2 3x^2$;
 в) $y = \cos 2x \cdot \arctg x$; г) $\sin 2xy = x \cos 2y - \sqrt{y}$;
 д) $y = \left(\frac{1+x}{x}\right)^x$.
5. а) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3 - 2x}}$; б) $y = \ln^3(x - 2x^2)$;
 в) $y = \frac{\cos 2x}{x^3 - 1}$; г) $e^{-xy} = \cos \arcsin(y - x)$;
 д) $y = x^{\sin x}$.
6. а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4} - \frac{3}{\sqrt{2x - x^2}}$; б) $y = \arctg^3 2x$;
 в) $y = \frac{x}{\sin^2 x}$; г) $x^3 + y^3 - xy = 7$;

$$\text{д) } y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1}}.$$

$$7. \quad \text{а) } y = (x - 1)^3 \sqrt{3x^2 - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}; \quad \text{б) } y = \cos \frac{2}{x^3};$$

$$\text{в) } y = \sin x \cdot \cos^2 x;$$

$$\text{г) } \ln(x - y) = \frac{y}{x};$$

$$\text{д) } y = \sqrt[x]{(x + 1)^2}.$$

$$8. \quad \text{а) } y = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3}}{2(x^2 + x)} + 5;$$

$$\text{б) } y = (2 - \sin 3x)^5;$$

$$\text{в) } y = \ln 3x \cdot \ln^3 x;$$

$$\text{г) } x^2 y = e^{3x - 2y};$$

$$\text{д) } y = x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$9. \quad \text{а) } y = \frac{\sqrt[3]{1 - x - 3x^2 + 4}}{\sqrt{2x - 7}};$$

$$\text{б) } y = x \ln^2(1 - 2x);$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{e^{3x} \operatorname{tg} x};$$

$$\text{г) } e^x \sin y - e^y \cos x = 0;$$

$$\text{д) } y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$10. \quad \text{а) } y = \sqrt[4]{x^2 + 2x} - \frac{x}{\sqrt{x + 1}};$$

$$\text{б) } y = \arcsin^3 2x;$$

$$\text{в) } y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$\text{г) } \ln \frac{y}{x} = \operatorname{ctg} xy;$$

$$\text{д) } y = x^x.$$

Завдання 12.

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \frac{1}{x - 2}$ в точці з абсцисою $x = 1$. Побудувати лінії.

2. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$ в точках перетину його з віссю Oy . Побудувати лінії.

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = x^3 + 2$ в точці з абсцисою $x = 2$. Побудувати лінії.

4. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 9$ в точках перетину прямої $y = 2x$ з колом. Побудувати лінії.

5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точці з абсцисою $x = 2a$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ в точці,

що відповідає параметру $t = \frac{\pi}{3}$.

7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{2x^2 - 6x}{x + 1}$ в точці з абсцисою $x = 2$.

8. Скласти рівняння дотичних до астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ в точках перетину її з прямою $y = x$.

9. Скласти рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ в

точці, що відповідає значенню параметра $t = \frac{\pi}{2}$.

10. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = e^{x^2 - 2}$ в точці з абсцисою $x = 2$. Побудувати лінії.

Завдання 13. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

1. $f(x) = e^{x^2 - 2x}$, $[0; 3]$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, $[-2; 3]$.

3. $f(x) = 2^{x^3 - 3x}$, $[-2; 2]$.

4. $f(x) = e^{-x^2 + 4x}$, $[-2; 3]$.

$$5. f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \quad 6. f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x, \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$7. f(x) = \frac{x}{x^2+1}, [-3; 2]. \quad 8. f(x) = \frac{x^2+4}{x}, [-1; 4].$$

$$9. f(x) = \ln(x^2+4), [-2; 2]. \quad 10. f(x) = \log_8(x^4+1), \left[\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{26}\right].$$

Завдання 14. Розв'язати задачу.

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює **16**. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм конуса, утвореного обертанням цього трикутника навколо висоти, яка проведена до основи, був найбільшим?

2. Розкласти число **16** на доданки так, щоб добуток їх був найбільшим.

3. Яке додатне число, складене з оберненим до нього, дає найбільшу суму?

4. Знайти число, яке б перевищувало свій квадрат на максимальне значення.

5. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах даного трикутника, а одна з його вершин належить третій стороні. При яких умовах площа паралелограма є найбільшою?

6. Серед рівнобедрених трикутників із заданою бічною стороною **a** знайти трикутник з найбільшою площею.

7. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакові довжини по **50** см. Знайти розмір більшої основи, при якій площа трапеції була б найбільшою.

8. Число **18** розбити на такі два доданки, щоб сума квадратів була найменшою.

9. В коло якого радіусу можна вписати прямокутник найбільшої площі з периметром **56** см.

10. Яку найбільшу прямокутну ділянку землі можна обгородити **120**-ма метрами сітки?

Завдання 14. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = f(x)$ і, використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

1. $y = e^{-x^2}$.

2. $y = (2 + x^2) \cdot e^{-x^2}$.

3. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

4. $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

5. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.

6. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

7. $y = \sin x - \cos x$.

8. $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

9. $y = \ln(4 - x^2)$.

10. $y = x^2 - 2\ln x$.

Завдання 15. Обчислити частинні похідні функції.

1. а) $z = \ln^2\left(x + \frac{1}{x - y^2}\right)$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

б) $x^4 y - y^4 x = a^4$. $\frac{dy}{dx} - ?$

в) $u = e^{x^2 - \sqrt{y}}$, де $x = \sin t$, $y = \sqrt{t}$. $\frac{du}{dt} - ?$

г) $z = x\sqrt{y}$. Довести, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2. а) $z = \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{x^2}{3y - 5}}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

б) $x^2 e^{3y} + y^2 e^{3x} - 2e^{xy} = 0$. $\frac{dy}{dx} - ?$

в) $z = \sqrt{u^2 - \frac{1}{v}}$, де $u = x \cos y$, $v = y \sin x$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

г) $z = \cos^2(2x + 3y)$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - ?$

3. а) $z = \operatorname{tg} \ln \frac{x}{y}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- б) $x^{\frac{1}{y}} + y^{\frac{1}{x}} = a^{3/2}$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $u = \arcsin \frac{x}{y^2}$, де $y = e^{x^3}$ $\frac{du}{dx} - ?$
- г) $z = \ln(x^2 + y^2)$. ДОВЕСТИ, ЩО $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.
4. а) $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- б) $\cos xy^2 - e^{x-2y} - x^2 \sqrt{y} = 0$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $z = u^2 \ln v$, де $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- г) $w = e^{x^2 y z^3}$. $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} - ?$
5. а) $z = (1 + xy)^{y+1}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- б) $y^2 \sqrt{x} = e^{y^3}$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $w = \ln(\sqrt{x} - xy^2 + z)$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin 2t$. $\frac{dw}{dt} - ?$
- г) $z = e^{xy^3}$. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - ?$
6. а) $w = \frac{u^2 - 1}{v^2 + 3}$, де $u = 4^{x-2y}$, $v = e^{x-2y}$. $\frac{\partial w}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial w}{\partial y} - ?$
- б) $y^2 e^{\sqrt{x}} + e^{y^2-2} = 0$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $z = \operatorname{tg}^3(3u - 2v)$, де $u = \sin 3t$, $v = \cos 3t$. $\frac{dz}{dt} - ?$
- г) $z = e^{x^2 y}$. $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - ?$

7. а) $z = \left(x - \frac{1}{y}\right) \left(y - \frac{1}{x}\right)$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- б) $e^x \cdot y - \ln \frac{x}{y} - 2\sqrt{x} = 0$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $z = \operatorname{tg} \left(2u^2 - \frac{1}{v}\right)$, де $u = \sin^2 t$, $v = \cos^2 t$. $\frac{dz}{dt} - ?$
- г) $z = \ln(y^2 + xy)$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$
8. а) $u = x^{\frac{y}{z}}$. $\frac{\partial u}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial u}{\partial y} - ?$ $\frac{\partial u}{\partial z} - ?$
- б) $2^{x^2 - y^3} + \sin x \cdot \cos y - \sqrt{xy} = 0$. $\frac{dy}{dx} - ?$
- в) $u = \ln^2(x + e^y)$, де $y = \sin x$. $\frac{du}{dx} - ?$
- г) $w = e^{x^2 y^2 z^2}$. $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} - ?$
9. а) $z = \frac{e^{2x} - e^{2y}}{e^{2x} + e^{2y}}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- б) $e^{x^2 - z^2} - e^{y^2 - x^2} - 5xy = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- в) $w = \ln^2 \frac{u}{v}$, де $u = t - \sin t$, $v = t + \cos t$. $\frac{dw}{dt} - ?$
- г) $z = \sin 2xy$. $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - ?$
10. а) $w = 4^{\frac{x^2 - y^2}{z}}$. $\frac{\partial w}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial w}{\partial y} - ?$ $\frac{\partial w}{\partial z} - ?$
- б) $\sin xy - \sin yz - \cos xz = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$
- в) $w = \operatorname{tg}^3 \frac{\sqrt{u}}{v}$, де $u = \sin \frac{x}{y}$, $v = \cos \frac{y}{x}$. $\frac{\partial w}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial w}{\partial y} - ?$

$$\text{г) } z = \ln(e^x + e^y). \text{ Довести, що } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Завдання 16. Дана функція $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0; y_0)$ і $B(x_1; y_1)$. Необхідно: а) обчислити значення z в точці B ; б) обчислити наближене значення z_1 в точці B , виходячи зі значення z_0 функції в точці A і замінюючи прирощення функції при переході від точки A в точку B диференціалом; в) оцінити в процентах відносну похибку, яка утворюється при заміні прирощення функції диференціалом; г) дослідити функцію на екстремум; д) скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці $C(x_0; y_0; z_0)$.

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, $A(1; 2)$, $B(1,02; 1,96)$.
2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, $A(1; 3)$, $B(1,06; 2,92)$.
3. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$, $A(3; 2)$, $B(2,98; 2,03)$.
4. $z = x^2 + y^2 + 4xy - 2x + y$, $A(1; -1)$, $B(1,01; -0,98)$.
5. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$, $A(2; 3)$, $B(1,98; 3,01)$.
6. $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 6y$, $A(-2; 2)$, $B(-1,97; 2,04)$.
7. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y - 1$, $A(4; 3)$, $B(3,96; 3,04)$.
8. $z = x^2 - 4x - 2y^2 + 4y + 4$, $A(3; -2)$, $B(3,04; -2,02)$.
9. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, $A(-3; 4)$, $B(-2,95; 4,02)$.
10. $z = x^3 - 3x - 4y^2 + 5y$, $A(-2; 3)$, $B(-2,03; 2,94)$.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язуванням кожної задачі треба повністю вписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена відповідним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру економічної інформатики завчасно, але не пізніше, ніж за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі «Робота над помилками» і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. До екзамену (заліку) допускаються тільки ті студенти, які захистили контрольну роботу.

СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11	Завд. 12	Завд. 13	Завд. 14	Завд. 15	Завд. 16
00	6	5	4	5	6	1	6	4	5	6	3	2	2	4	2	3
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4	8	6	5	1	9
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5	9	7	9	6	2
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6	7	4	6	7	8
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7	1	3	1	4	7
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10	5	10	3	5	4
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8	4	2	2	3	3
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9	3	8	8	10	5
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2	10	9	4	2	1
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1	6	5	7	8	7
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1	10	1	10	9	10
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2	8	10	3	4	6
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9	7	2	7	6	8
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5	4	9	1	5	4
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6	6	7	4	9	9
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7	9	6	10	8	2
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3	1	4	8	7	5
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8	5	8	5	10	3
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4	3	3	2	2	4
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10	2	5	9	1	7
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8	6	1	6	3	9
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6	7	6	8	10	6
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9	10	9	2	7	2
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7	1	2	9	6	8
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10	9	7	4	4	1
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5	8	10	1	1	10
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4	2	5	7	2	5
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3	3	4	6	3	10
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2	5	3	5	5	6

29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1	4	8	3	8	1
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4	7	1	10	9	3
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5	1	6	1	4	8
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1	10	5	2	6	7
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10	6	10	6	5	4
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3	9	4	3	10	2
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2	8	9	9	7	9
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6	2	7	5	3	7
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7	5	1	8	2	10
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8	4	8	10	8	6
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9	3	2	4	9	1
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4	9	3	7	1	5
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2	6	4	4	1	2
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7	1	10	3	9	4
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10	3	3	7	4	8
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6	2	7	2	8	3
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5	4	5	8	3	9
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4	9	10	2	5	5	8
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6	3	5	6	10	2	1
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3	8	7	8	6	7	6
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9	1	8	1	9	6	5
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8	5	6	9	1	10	4
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1	9	4	2	7	3	9
52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6	6	3	8	8	4	3
53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5	1	9	9	6	5	10
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4	3	1	7	5	6	7
55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9	2	10	1	9	7	2
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3	8	2	5	3	10	8
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10	4	8	4	2	8	7
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7	7	7	3	1	9	10
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2	10	5	10	10	2	4
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8	3	3	6	4	1	3
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7	7	2	10	5	1	2

62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10	1	9	8	7	2	6
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4	4	7	7	3	9	1
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3	10	6	4	9	5	5
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2	8	4	6	1	6	9
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6	5	8	9	8	7	6
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1	2	10	1	6	3	1
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5	9	5	5	2	8	7
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9	6	1	3	4	4	5
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6	8	6	2	10	10	8
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1	2	9	6	2	8	10
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7	9	2	7	9	6	2
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5	4	7	10	6	9	4
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8	1	10	1	5	7	3
75	8	8	4	3	10	5	8	4	3	10	7	5	9	4	10	9
76	2	2	10	8	2	4	2	10	8	2	6	4	8	3	5	6
77	3	3	8	10	4	3	3	8	10	4	5	3	2	8	4	8
78	5	5	5	1	3	2	5	5	1	3	3	8	3	10	3	3
79	4	4	1	7	9	1	4	1	7	9	10	1	5	1	2	7
80	8	7	1	6	6	4	7	1	6	6	1	6	4	7	1	10
81	10	1	3	7	8	5	1	3	7	8	2	5	7	6	4	9
82	6	10	4	3	3	1	10	4	3	3	6	10	1	7	5	5
83	9	6	2	8	7	10	6	2	8	7	3	4	10	3	1	1
84	5	9	5	9	10	3	9	5	9	10	9	9	6	8	10	4
85	7	8	7	10	9	2	8	7	10	9	5	7	9	9	3	2
86	1	2	10	5	5	6	2	10	5	5	8	1	8	10	2	4
87	3	5	8	1	1	7	3	8	1	1	10	8	2	5	6	2
88	4	4	6	2	4	8	5	6	2	4	4	2	5	1	7	7
89	2	3	9	4	2	9	4	9	4	2	7	3	4	2	8	10
90	8	9	8	8	4	4	9	8	8	4	4	4	3	4	9	6
91	4	6	1	4	2	2	6	1	4	2	3	10	9	8	4	5
92	10	1	9	6	7	7	1	9	6	7	7	3	6	4	2	9
93	3	3	7	1	10	10	3	7	1	10	2	7	1	6	7	3
94	7	2	3	5	6	6	2	3	5	6	8	5	3	1	10	8

95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5	2	2	5	6	1
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10	6	4	7	5	6
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6	8	10	10	9	10
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9	1	5	2	3	5
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1	9	7	3	8	1

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посіб. : у 2 кн. / Кулініч Г. Л., Максименко Л. О., Плахотник В. В., Призова Г. Й. Київ : Либідь, 1994. Кн. 1. 312 с.
3. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Призова Г. Й. та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. Київ : Либідь, 2003. Кн. 1 : Основні розділи. 400 с.
4. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Кулініч Г. Л. та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. Київ : Либідь, 2003. Кн. 2 : Спеціальні розділи. 386 с.
5. Моня А. Г. Вища математика. Розв'язання олімпіадних задач : навч. посіб. – Дніпро : УДУНТ, 2023. 149 с.

Допоміжна література

6. Вища математика: збірник задач : навч. посіб. / Дубовик В. П. та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
7. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. : у 2 т. / ред. Л. В. Курпа. Харків : НТУ «ХП», 2009. 532 с.
8. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 594 с.
9. Копорулін В. Л., Моссаковська Л. В. Вища математика. Розділ «Визначений та невластні інтеграли» : навч. посіб. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2015. 111 с.

Інформаційні ресурси Інтернет

10. Вища математика : навч. посіб. / Басманов О. Є., Кириченко І. К., Мігунова Л. В., Сознік О. П. Харків : Дільниця оперативної поліграфії АПБ України, 2003. 138 с. URL: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf

11. Литвин І. І., Конопчук О. М., Желізняк Г. О. Вища математика : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 368 с.
URL: https://shron1.chtyvo.org.ua/Lytvyn_I/Vyscha_matematyka.pdf

Навчально-методичне видання

Моня Андрій Григорович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Навчально-методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань та індивідуальні завдання

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка А. Г. Моня

Експертний висновок склав канд. техн. наук, проф. Людмила Лозовська

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 8 від 30.12.2024)

Формат 60x84 _{1/16}. Ум. друк. арк. 5,23. Обл.-вид. арк. 5,30.
Зам. № 131

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010