

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ХОЛОДНО-ФОРМОВАННЫХ ИЗГИБАЕМЫХ БАЛОК ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Сергей Ракша

Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

1. Введение

Проблема поиска оптимальных геометрических параметров тонкостенных профилей привлекает внимание исследователей и проектировщиков уже в течение нескольких последних десятилетий. Рассматривались элементы конструкций, имеющие различные поперечные сечения, при различных условиях нагружения (см. напр. [1], а также [2-5]). В качестве целевой функции обычно принимается вес, а ограничения задачи формулируются с учетом напряжений общего и местного выпучивания, а также пластических свойств материала. Общая форма потери устойчивости рассчитывается с использованием концепции "эффективного сечения" в закритической стадии [3], или ограничиваются часто упругим расчетом [5], а в работе [2], например, общая форма не учитывается вовсе. При расчете местной потери устойчивости также возможны различные подходы: используются приближенные зависимости, характеризующие устойчивость отдельных элементов профиля [2], либо предельная гибкость элементов профиля принимается в соответствии с нормами [4].

В данной работе представлены результаты решения задачи весовой оптимизации тонкостенного швеллера с одинаковой толщиной элементов сечения (полученного, например, способами холодного формования) при изгибе в плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии. Местное выпучивание рассчитывается для совокупного сечения с учетом точных условий сопряжения элементов [7].

2. Постановка и метод решения задачи

Рассматривается шарнирно опертая балка швеллерного профиля длиной L (рис.1), нагруженная изгибающими моментами M . Заданными также считаются характеристики материала стержня (модуль упругости E , модуль сдвига G , коэффициент Пуассона ν). Из условия минимума веса балки определяются геометрические параметры сечения: толщина профиля t , высота стенки b_1 , ширина полки b_2 (рис.2,а).

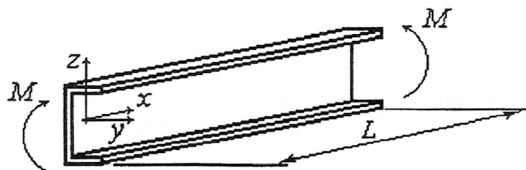


Рис.1. Общий вид нагружения балки

Задача оптимизации ставится как задача нелинейного программирования. Ограничения включают условия устойчивости по общей форме (потеря устойчивости плоской формы изгиба) и местной форме выпучивания в виде $\sigma \leq \sigma_{kp}^{(i)}$ ($\sigma_{kp}^{(i)}$ - критические напряжения i -ой формы), а также требования прочности в виде $\sigma \leq \sigma_T$ (σ_T - предел текучести материала балки).

Задача решается в безразмерных параметрах, что позволяет полученные результаты использовать для широкого ряда конструкций одного класса. Параметры изгибающего момента M^* , веса балки G^* , и напряжений σ^* принимаются в виде

$$M^* = \frac{M}{L^2 \cdot E} 10^8, \quad G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3, \quad (1)$$

где A – площадь поперечного сечения балки (масштабные множители введены для удобства). Использовались безразмерные геометрические параметры сечения: $b_1/L, b_2/b_1, t/b_1, t/b_2$.

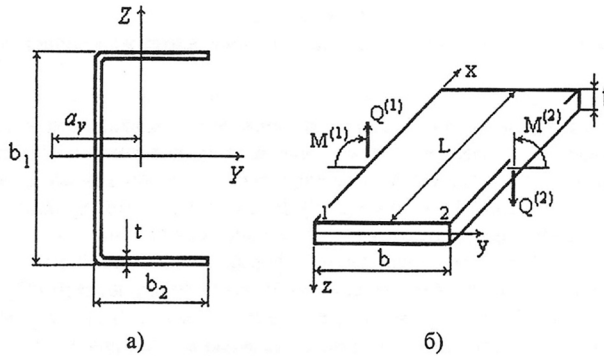


Рис.2. Поперечное сечение балки (а) и местные оси координат элементов профиля (б)

Ограничение по общей форме потери устойчивости. Критический момент M при боковом выпучивании балки определялся по теории Власова В.З. [6]:

$$M = \sqrt{r^2 P_z P_\omega}, \quad (2)$$

где $P_z = \pi^2 EI_z / L^2$ – эйлерова критическая сила при изгибе в плоскости симметрии; $P_\omega = (\pi^2 EI_\omega / L^2 + GI_d) / r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости, $r^2 = (I_z + I_y) / A + a_y^2$, a_y – координата центра изгиба профиля (I_z, I_y, I_ω, I_d – моменты инерции сечения при изгибе и кручении).

Соответствующие критические напряжения

$$\sigma = \frac{M}{W_y} \quad (3)$$

(W_y – момент сопротивления сечения).

Ограничения по местной форме выпучивания. При расчете местной формы балка рассматривается как соединение пластин с точными условиями сопряжения по линиям контакта [7]. Для каждой из пластин (рис.2,б) решение дифференциального уравнения устойчивости принимается в виде $w = w(\eta) \sin m\pi\xi$ ($w(\eta)$ – функция прогиба по ширине пластинки, $\eta = b/L$; $\xi = x/L$; m – число продольных полуволн).

Силовые факторы на краях “1”, “2” (верхний индекс, в скобках) пластинок можно выразить через перемещения w и углы поворота w_η

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(1)} &= [B_1] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_2] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}; \\ \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(2)} &= [B_3] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_4] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

(здесь $[B_k] = \{b_{ij}^{(k)}\}$ – матрицы, приведенные в [7]).

Граничные условия на свободных краях пластин (равенство нулю моментов и поперечных сил) и условия сопряжения на линиях соединения (равенство углов поворота $w_{\eta,i} = w_{\eta,j}$ и равенство нулю алгебраической суммы изгибающих моментов $M_{j,i} + M_{j,j} = 0$, нижний индекс после запятой – номер пластины) приводят к системе линейных однородных уравнений и соответствующему характеристическому уравнению, которое при целочисленной минимизации по числу продольных полуволн m определяет критические напряжения местного выпучивания.

Ограничения по прочности. Ограничением по прочности являлось условие достижения максимальными напряжениями предела текучести материала. В численном анализе решения принималась стальная балка с характеристиками: $\sigma_T = 345$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа и соответственно значение безразмерного параметра предельных напряжений $\sigma_T^* = 1,68$.

Метод решения задачи оптимизации. При выполнении расчетов использовался разработанный ранее пакет программ, позволяющий исследовать устойчивость тонкостенных балок-стержней по общим и местным формам, а также использовалась программа, реализующая метод оптимизации - линейризованный метод приведенного градиента (ЛМППГ) [8]. Многолетний опыт применения алгоритма ЛМППГ при решении задач оптимизации подкрепленных пластин и оболочек (а также других задач) показал высокую эффективность и надежность метода. Для достижения оптимума требовалось, как правило, 20-30 итераций при относительной погрешности определения оптимальных параметров порядка 10^{-3} .

3. Результаты расчета

Расчеты выполнялись в двух постановках: А - для упругой балки (ограничения только по устойчивости) и Б - с учётом возможной упруго-пластической деформации материала (с ограничениями по устойчивости и прочности). При решении задачи оптимизации в постановке А все оптимальные безразмерные параметры тонкостенной изгибаемой балки определяются заданием одного безразмерного параметра нагрузки M^* . При учёте ограничений по прочности к этому параметру добавляется второй параметр - σ_T^* . (действительные размеры оптимальных балок определяются при дополнительном задании длины L).

Рассмотрен интервал значений параметра изгибающего момента - $M^* = 0 \dots 3$. Как видно из представленных на рис.3 зависимостей, учет пластических свойств материала в рассмотренном диапазоне M^* практически не увеличивает вес оптимальной балки. Такой результат является следствием перераспределения материала по сечению - уменьшается толщина профиля и

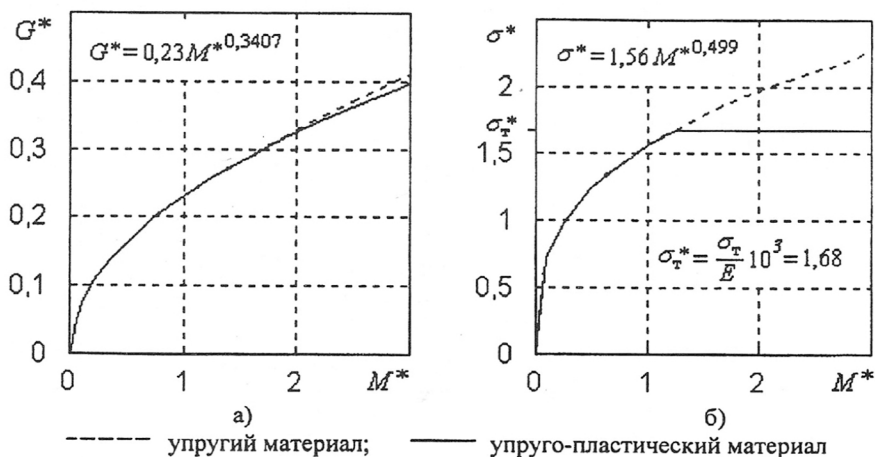


Рис. 3. Вес (а) и критические напряжения (б) для оптимальных балок

увеличивается высота стенки (на рис.4 показаны оптимальные профили, полученные при различных уровнях нагружения для фиксированной длины балки). Зависимости $G^*(M^*)$ и $\sigma^*(M^*)$ для балки из упругого материала, которые с большой точностью (погрешность не превышает 1%) аппроксимируются степенными функциями, также представлены на рис. 3.

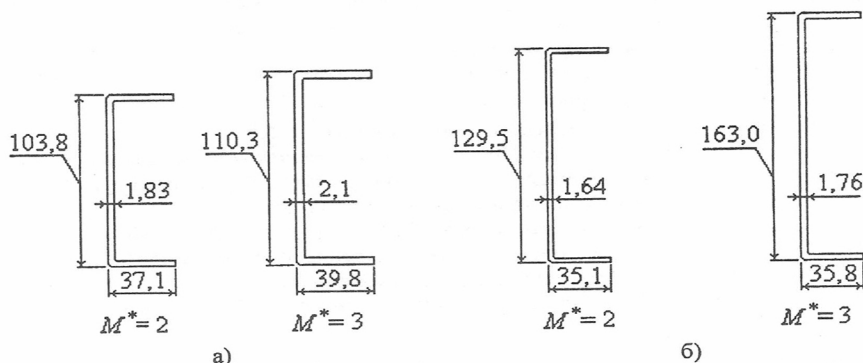


Рис.4. Оптимальные профили в постановке А - (а) и в постановке Б - (б) при заданной длине балки $L = 1\text{м}$

В табл.1 представлены оптимальные отношения размеров сечения и коэффициенты устойчивости k для элементов профиля в зависимости от изгибающего момента (коэффициенты k связаны с критическими напряжениями формулой $\sigma = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$, $\nu=0,3$). Наиболее важная особенность - постоянство отношения ширины полки к высоте стенки ($b_2/b_1 = 0,35 - 0,36$) и коэффициентов устойчивости для стенки ($k_1 \approx 5,5 - 5,6$) и полки ($k_2 \approx 0,87$) во всем рассмотренном диапазоне параметра M^* в постановке задачи оптимизации А.

Таблица 1
Оптимальные отношения размеров и коэффициенты устойчивости элементов сечения изгибаемой балки

Параметр нагрузки M^*	Упругий материал					Упруго-пластический материал				
	b_2/b_1	t/b_1	t/b_2	k_1	k_2	b_2/b_1	t/b_1	t/b_2	k_1	k_2
0,5	0,355	0,0139	0,0390	5,6	0,872	0,355	0,0139	0,0390	5,6	0,872
1,0	0,358	0,0157	0,0438	5,53	0,874	0,358	0,0157	0,0438	5,53	0,874
1,5	0,355	0,0166	0,0468	5,62	0,872	0,319	0,0146	0,0458	6,84	0,859
2,0	0,358	0,0176	0,0491	5,55	0,872	0,271	0,0127	0,0468	9,14	0,829
2,5	0,355	0,0181	0,0509	5,63	0,872	0,241	0,0115	0,0478	11,1	0,795
3,0	0,361	0,0190	0,0526	5,47	0,874	0,220	0,0108	0,0490	12,64	0,757

Характер изменения коэффициентов устойчивости полки и стенки для оптимальных балок при различных уровнях нагружения иллюстрируют также профили местных форм. Для швеллера из упругого материала (вариант оптимизации А) профиль местной формы остается неизменным при значениях $M^* = 0 \dots 3$ (см. рис.5,а; нормирование прогибов выполнялось толщиной — $w_{\max} = t$). При решении задачи оптимизации для изгибаемого швеллера из упруго-пластического материала (вариант Б) с увеличением параметра изгибающего момента M^* стенка становится относительно более слабым элементом и ее прогибы нарастают (рис. 5,б).

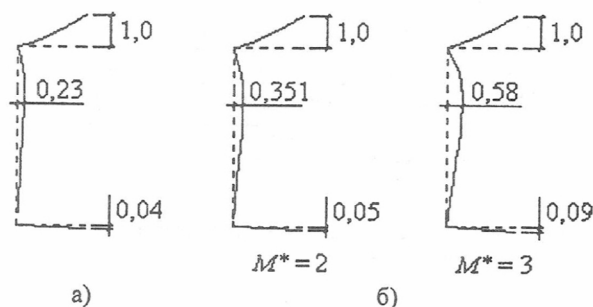


Рис.5. Профили местных форм для оптимальных балок, полученных в постановке А - (а) и в постановке Б - (б), при различных значениях параметра M^*

4. Сравнение с известными решениями

Результаты оптимизации сравнивались с решениями, полученными другими авторами, в частности, с работой [2], в которой при чистом изгибе швеллера ставились ограничения по местному выпучиванию и по прочности (по пределу текучести материала). Возможность бокового выпучивания (изгибно-крутильная потеря устойчивости) при этом не учитывалась, хотя очевидно, что при большой относительной длине балки неучёт бокового выпучивания неприемлем. Именно поэтому оптимальные параметры, полученные в [2], оказались не зависящими от длины балки. При расчете местной формы использовались приближенные значения коэффициентов устойчивости элементов, составляющих профиль: для стенки швеллера — $k_1 = 23,9$, для полки — $k_2 = 0,46$. Как видно, эти значения коэффициентов далеки от приведенных в табл. 1.

В статье [2] представлен пример решения задачи весовой оптимизации швеллера для заданного материала ($\sigma_t = 200$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа) и изгибающего момента $M_{np} = 9240$ Нм. Размеры оптимального сечения, полученные в указанном примере, приведены в таблице 2 (последняя строка). Однако точный расчет местной формы потери устойчивости по описанному выше алгоритму показывает, что действительное критическое значение изгибающего момента M_{np} для этого профиля примерно равно 8100 Нм (оно слегка зависит от длины), т.е. на 12% меньше заданного. Такая погрешность связана с приближенностью расчёта местного выпучивания в [2].

Для сравнения в таблице 2 приведены оптимальные параметры сечения, рассчитанные по нашему решению (при тех же исходных данных), для различных длин балки. При длине $L < 1,75$ м ограничение по боковому выпучиванию неактивно, и площадь оптимального поперечного сечения близка к полученной в работе [2] (но при этом критические напряжения местного выпучивания действительно равны 200 МПа, и критический момент равен заданному). При $L \geq 1,75$ м ограничение по боковому выпучиванию становится активным, и размеры оптимального сечения существенно изменяются (вес возрастает).

Сравнение результатов оптимизации

Геометрические параметры оптимального швеллера					Критические напряжения, МПа	
					Местной формы	Бокового выпучивания
L , м	b_1 , мм	b_2 , мм	t , мм	A см ²		
1,0	271	43,5	1,94	6,94	200	459
1,25	272	42,6	1,94	6,94	200	283
1,5	271	43,3	1,94	6,95	200	205
1,75	259	48,7	1,96	6,98	200	200
2,0	242	54,6	2,03	7,12	200	200
Характеристики швеллера из работы [2]						
-	285	39,6	1,87	6,81	176*/200**	-

Примечание к таблице 2:

* - критические напряжения, рассчитанные по изложенному в данной статье подходу;

** - действующие напряжения, согласно [2].

Литература

- [1]. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель. Часть 1. АН СССР, СО, Институт гидродинамики. Новосибирск, 1975, с. 140-157.
- [2]. Баловнев Г.Г., Устиловский С.Я. Выбор рациональных размеров сечения тонкостенных балок при изгибе. Известия Вузов. Машиностроение, № 9, 1966, с. 40-44.
- [3]. Yoshida H., Maegawa K. The optimum cross section of channel columns. Int. J. Mech. Sci., V. 21, 1979, № 3, p. 149-160.
- [4]. Гоголь М.В., Пелешко І.Д., Петренко О.В., Юрченко В.В. Оптимальне проектування згинальних тонкостінних холодногнутих елементів С-подібного перерізу. // Теорія і практика будівництва. Вісник ДУ "Львівська Політехніка", №360, 1998, с. 42-47.
- [5]. Маневич А.И., Ракша С.В. Оптимальные центрально сжатые стержни открытого профиля. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Proc. of the Polish-Ukrainian seminar, 8, Warsaw, 2000, с. 484-489.
- [6]. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Изд-е 2-е. М.: ГИФМЛ. 1959, 568 с.
- [7]. Маневич А.И., Ракша С.В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях. Theoretical Foundations in Civil Engineering. Proc. of the Polish-Ukrainian seminar. 4, V.1, part 2. Warsaw, 1996, с. 270-275.
- [8]. Маневич А.И., Зайденберг А.И. Линеаризованный метод приведенного градиента для решения задач нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974, №6, с. 13-18.

THE OPTIMUM DESIGN OF THIN-WALLED COLD-FORMED BEAMS OF OPEN CROSS-SECTION UNDER BENDING

Sergey Raksha

Dnipropetrovsk State Technical University of Railway Transport

Results of solution of the weight optimization problem for thin-walled cold-formed beams of open cross-section under pure bending are presented. The account of the local modes buckling is fulfilled in view of exact conjunction conditions of elements that constitute the profile. Optimal parameters of beams made from elastic and elastic-plastic materials are presented.