СССР-- МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инженер А. Г. РАЗДОЛЬСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ, РАБОТАЮЩИХ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Специальность № 022

<< Сопротивление материалов и строительная механика >>

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1968

Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации инженера **А. Г. Раздольского.**

Просим Вас и всех заинтересованных лиц Вашего учреждения принять участие в публичной защите диссертации или прислать свой отзыв в письменном виде в 2-х экземплярах по адресу:

г. Днепропетровск-10, ул. Университетская, 2. ДИИТ.

Работа выполнена в Днепропетровском филиале ЦНИИПРОЕКТСТАЛЬКОНСТРУКЦИЯ.

Научный руководитель — кандидат технических наук **С. Д. Лейтес.**

Официальные оппоненты:

член-корреспондент АН Латвийской ССР, профессор, доктор технических наук **Я. Г. Пановко;**

профессор, доктор технических наук **А. Б. Моргаевский.**

Ведущее предприятие — Харьковский ПРОМСТРОЙНИИПРОЕКТ.

Автореферат разослан « 4 » декабря 1968 г.

Защита диссертации состоится в январе 1969 г. на заседании Совета Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета **Ю. А. Радзиховский**

СССР — МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Инженер А. Г РАЗДОЛЬСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ, РАБОТАЮЩИХ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Специальность № 022
«Сопротивление материалов и строительная механика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1968

БТ 16463. Областная книжная типография
Днепропетровского областного управления по печати,
г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.
Зак. № 2932-м. Тираж 200. Объем 1 п. л. Подписано к печати 20. XI 1968 г.

Метод расчета строительных конструкций по предельным состояниям, принятый в Советском Союзе, в ряде случаев требует изучения работы сооружений за пределом пропорциональности.

Сжато-изогнутые стержни относятся к числу наиболее распространенных элементов конструкций. Поэтому исследование их работы за пределами упругости представляет значительный практический интерес и привлекает внимание многих специалистов.

Диссертация посвящена качественному исследованию поведения сжато-изогнутых стержней за пределом пропорциональности и разработке приемов численного расчета таких стержней с применением ЭВМ. Кроме этого, в диссертации рассматриваются вопросы устойчивости континуальных консервативных систем; исследуется простейшая упруго-пластическая модель, состояние которой зависит от истории деформирования.

Диссертация содержит 189 стр. текста и состоит из введения и пяти глав.

Вопросы предельного состояния сжато-изогнутых стержней тесно связаны с теорией устойчивости равновесия деформируемых систем. Однако, эйлерова концепция устойчивости здесь не всегда оказывается достаточной: в подавляющем большинстве случаев критическое состояние потери устойчивости определяется экстремальным значением параметра нагрузки.

Впервые на это обстоятельство обратил внимание Т. Карман в 1910 году. В дальнейшем теория устойчивости сжато-изогнутых стержней, работающих за пределом пропорциональности, интенсивно разрабатывалась в большинстве промышленно развитых стран.

Большой вклад в развитие теории расчета сжато-изогнутых стержней внесли советские исследователи Г. Е. Бельский, Б. М. Броуде, А. В. Геммерлинг, К. С. Завриев, Н. В. Корноухов, С. Д. Лейтес, А. А. Пиковский, В. В. Пинаджян, А. Р.

Ржаницын, Н. К. Снитко, Г. М. Чувикин, И. Я. Штаерман и многие другие. Среди зарубежных исследователей следует отметить Г. Вестергора и У. Осгуда, Ф. Гартмана, И. Вайнхольда, К. Ежека, Р. Кеттера, Ш. Массоннэ, М. Роша, И. Фриче, Э. Хвалла, И. Эллиса и др.

Известно, что напряженное состояние упруго-пластических систем не определяется однозначно величиной нагрузки и в общем случае зависит от истории деформирования. Это обстоятельство существенно затрудняет решение многих практически важных задач. Поэтому в инженерной практике часто уравнения пластической деформации заменяются уравнениями нелинейной теории упругости, т. е. предполагается, что деформация является активной и напряженное состояние тела однозначно определяется его деформацией. Состояние таких тел хотя и описывается нелинейными уравнениями, однако не зависит от программы нагружения.

В основу выполненного исследования положены обычные допущения технической теории сжато-изогнутых стержней: изгибные деформации стержня малы; соблюдается гипотеза плоских сечений; напряженное состояние является одноосным: эффект разгрузки не учитывается; плоская форма изгиба сохраняется как в равновесных, так и в критических состояниях.

Известно, что понятия потери устойчивости первого и второго рода непосредственно не вытекают из определения устойчивости равновесия, принятого в теоретической механике. Поэтому представляет интерес исследование равновесных состояний сжато-изогнутого стержня на основе теоремы Лагранжа-Дирихле, устанавливающей связь между локальными свойствами потенциальной энергии и явлением потери устойчивости «в малом», трактуемым в смысле А. М. Ляпунова.

Такое исследование выполнено в первой главе диссертации.

Рассматривается шарнирно опертый сжато-изогнутый стержень, изготовленный из материала, обладающего нелинейно упругими свойствами. Предполагается, что нагрузка, воздействующая на стержень, обладает потенциалом.

Качество равновесия стержня в силу консервативности системы определяется знаком второй вариации полной потенциальной энергии.

Выражение второй вариации полной потенциальной энергии сжато-изогнутого стержня является однородным квадратичным функционалом двух функций: вариации прогиба δy и вариации относительных деформаций оси центров тяжести $\delta\varepsilon_{ц}$.

Если в исследуемом состоянии точная нижняя граница этого функционала положительна, то равновесие является устойчивым.

Вторая вариация полной потенциальной энергии допускает представление в виде суммы двух функционалов

$$\delta^2 W = H + I, \tag{1}$$

где H зависит от обеих функций, а I — только от вариации прогиба.

Если деформация стержня не превосходит величины, допускаемой в строительных конструкциях, то точная нижняя граница функционала H равняется нулю. Поэтому анализ устойчивости такого стержня заключается в исследовании только функционала I от вариации прогиба.

Определение знака точной нижней границы функционала сводится к решению вариационной задачи об условном минимуме некоторого однородного квадратичного функционала G при дополнительном изопериметрическом условии и сопоставлению значения первого минимума этого функционала с величиной сжимающей силы N. Поставленная вариационная задача согласно правилу неопределенных множителей Лагранжа эквивалентна задаче на безусловный экстремум некоторого нового функционала Ф.

Уравнение Эйлера-Пуассона для этого функционала имеет четвертый порядок. Однако с помощью элементарной подстановки оно приводится к виду

$$u'' \int\limits_F \frac{d\sigma}{d\varepsilon} z_*^2 \, dF + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Граничные условия

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{3}$$

вытекают из естественных краевых условий вариационной задачи.

Здесь приняты следующие обозначения: u — вторая производная вариации прогиба; λ — неопределенный множитель Лагранжа; $d\sigma / d\varepsilon$ — касательный модуль; F — площадь поперечного сечения; l — длина стержня; z_* — координата по высоте сечения, отсчитываемая от оси, положение которой определяется из условия

$$\int\limits_F \frac{d\sigma}{d\varepsilon} z_* dF = 0. \tag{4}$$

Первое собственное значение полученной краевой задачи является точной нижней границей функционала G

$$\lambda_1 = \inf G. \tag{5}$$

Так как закон распределения касательного модуля определяется напряженным состоянием стержня и изменяется в процессе деформации, то каждому равновесному состоянию в силу уравнения (2) соответствуют свои собственные значения.

Критерий устойчивости стержня принимает следующий вид: если $\lambda_1 > N$, то равновесное состояние стержня является устойчивым; если $\lambda_1 < N$, то существуют такие бесконечно малые возможные перемещения, по отношению к которым стержень является неустойчивым; в критическом состоянии потери устойчивости выполняется равенство $\lambda_1 = N$.

Этот критерий только по форме совпадает с условием устойчивости линейно упругой системы. Смысл критерия состоит в том, что устойчивость любого равновесного состояния оценивается в результате сопоставления параметра нагрузки N заданной нелинейной системы и критического значения λ_1 некоторой приведенной линейной системы.

Наглядное представление об устойчивости равновесных состояний дает сопоставление графика поведения стержня, который строится в координатах «характерная деформация — параметр нагрузки», и кривой зависимости «значение λ_1 — характерная деформация».

Полученный критерий приводится в литературе и лежит в основе метода расчета сжато-изогнутых стержней по двум расчетным сечениям, предложенного А. В. Геммерлингом. Однако известный вывод этого критерия основан на более узкой постановке задачи: рассматривается только одно сечение, предполагается стационарность внешней нагрузки, отсутствует связь с общим определением устойчивости равновесия.

При значениях сжимающей силы, равных любому собственному значению $\lambda_i (i = 1, 2, ...)$ уравнения (2), условия стационарности функционалов $\delta^2 W$ и Φ совпадают и, следовательно, имеет место равенство

$$\delta(\delta^2 W) = 0. \tag{6}$$

Вариации прогибов δy и деформаций $\delta \varepsilon_{ц}$, при которых выполняется условие стационарности (6), одновременно обращают в нуль вторую вариацию полной потенциальной энергии.

Допустим, что в некотором равновесном состоянии имеет место неравенство

$$\lambda_i < N < \lambda_{i+1}. \quad (7)$$

В силу экстремальных свойств собственных значений отсюда следует, что состояние стержня является устойчивым по отношению к возмущениям, ортогональным к i первым собственным формам уравнения (2).

Это обстоятельство позволяет определить степень неустойчивости равновесного состояния стержня как число собственных значений уравнения (2), величина которых меньше соответствующего значения сжимающей силы.

Такая трактовка понятия степени неустойчивости является обобщением известного определения, данного А. Ф. Смирновым для линейных идеальных систем.

Характер потери устойчивости стержня в критическом состоянии (первого или второго рода) тесно связан со структурой уравнения, которое получается в результате варьирования условий равновесия стержня. Соответствующее ему однородное уравнение совпадает с уравнением (2) и, следовательно, имеет нетривиальное решение при критическом значении параметра нагрузки.

Варьированное уравнение является однородным, если в критическом состоянии выполняется условие стационарности сжимающей силы. Поэтому предельная точка на графике поведения соответствует состоянию потери устойчивости.

В критическом состоянии возможно существование нетривиального решения неоднородного варьированного уравнения, если правая часть этого уравнения ортогональна с некоторым весом к собственной форме соответствующего однородного уравнения. В этом случае имеет место потеря устойчивости первого рода. На графике поведения такому критическому состоянию соответствует точка бифуркации ветвей равновесных состояний.

Во второй главе получено численное решение на ЭВМ задачи об изгибе и устойчивости внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения при произвольных по величине концевых эксцентриситетах; предполагается, что материал стержня подчинен графику Прандтля. Эта задача представляет собой обобщение известного исследования К. Ежека, который рассмотрел частный случай поведения стержня, сжатого с равными концевыми эксцентриситетами.

Разработке алгоритмов расчета сжато-изогнутых стержней на ЭВМ посвящены исследования А. В. Геммерлинга, Г. Е. Бельского, В. А. Икрина, Р. А. Скрипниковой, И. Эллиса и др.

В процессе развития деформации на протяжении длины стержня образуются участки упругой работы, односторонней и двусторонней текучести, причем каждый из этих участков может иметь два противоположных знака кривизны изгиба. При односторонней и двусторонней текучести дифференциальные уравнения изгиба являются нелинейными.

Решение задачи при произвольном распределении зон текучести реализовано с помощью программы, составленной для ЭВМ «Проминь». Программа позволяет определить величину сжимающей силы, при которой стержень имеет заданное значение угла поворота на левой опоре, построить изогнутую ось и установить распределение зон текучести в стержне.

Для численного интегрирования уравнений изгиба применен метод Рунге-Кутта. Удовлетворение граничного условия на правом конце стержня осуществляется методом направленного поиска; таким образом, краевая задача сведена к многократному решению задачи Коши.

Анализ графиков поведения, построенных с помощью составленной программы, показывает, что в подавляющем большинстве случаев несущая способность стержня определяется состоянием потери устойчивости второго рода.

Принципиальные особенности обнаруживаются при анализе поведения стержня в особом случае антисимметричного приложения сжимающих сил, когда концевые эксцентрицитеты равны по величине, но имеют разные направления.

Условимся называть осью эксцентрицитетов линию, соединяющую точки приложения сжимающих сил. В упомянутом особом случае при значении угла поворота стержня на опоре, равном наклону оси эксцентрицитетов, как упругие, так и упруго-пластические стержни теряют устойчивость вследствие бифуркации форм равновесия. В отличие от обычного эйлерова случая упруго-пластический стержень при критическом значении сжимающей силы вблизи точки бифуркации не имеет других равновесных состояний. Если допустить, что стержень может преодолеть критическое состояние бифуркации, то при дальнейшем росте нагрузки наступает второе критическое состояние, которому соответствует предельная точка на графике поведения.

Предельное состояние внецентренно сжатого стержня в некоторых случаях определяется исчерпанием несущей способности вследствие образования пластического шарнира на опоре. Такой случай возможен лишь при значениях угла поворота стержня на опоре, не превышающих наклона оси эксцентрицитетов. Образование пластического шарнира внутри пролета может произойти только в закритической стадии работы стержня.

С помощью составленной программы были выполнены вычисления, на основе которых построена серия графиков критических напряжений для стержней, сжатых с различными концевыми эксцентрицитетами.

Сопоставление результатов вычислений с приближенными рекомендациями СНиП показывает, что нормативные значения коэффициентов внецентренного сжатия $\varphi^{вн}$ при неравных концевых эксцентрицитетах в отдельных случаях существенно занижены. Особенно большие расхождения — до 25% — наблюдаются при концевых эксцентрицитетах разных знаков.

В связи с применением в строительстве новых конструкционных материалов, таких как высокопрочные стали, алюминиевые сплавы и др., приобрела актуальность задача разработки алгоритмов расчета сжато-изогнутых стержней, основанного на фактическом графике работы материала.

Первые исследования в этом направлении принадлежат Т. Карману и Э. Хвалла, заложившим основы численных методов решения поставленной задачи.

В третьей главе диссертации предлагается один из алгоритмов построения равновесного состояния стержня.

Заданным считается угол поворота стержня на левой опоре. Ставится задача определения соответствующей величины сжимающей силы и построения изогнутой оси стержня в равновесном состоянии.

Уравнение равновесия может быть представлено в форме

$$y'' = \varkappa(M, N). \qquad (8)$$

Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, показывает, что кривизна изгиба стержня в произвольном сечении является функцией изгибающего момента M и нормальной силы N. Аналитическое описание этой зависимости при произвольном графике работы материала и произвольной форме сечения практически невозможно. Поэтому величину кривизны изгиба в произвольной точке стержня приходится определять в результате наложения графика работы материала на сечение. Это наложение осуществляется таким образом, чтобы были выполнены условия равновесия сечения.

В настоящей работе в качестве неизвестных при выполнении процедуры наложения принимались кривизна изгиба и координата по высоте сечения волокна, напряжение в котором равняется $\sigma_0 = N/F$.

Одним из наиболее трудоемких этапов процедуры наложения является вычисление главного вектора и главного момента напряжений, возникающих в сечении. В общем случае эта задача решается на основе численного интегрирования. В одном практически важном случае, а именно, когда материал стержня за пределом пропорциональности обладает линейным упрочнением и сечение состоит из участков постоянной ширины (крест, швеллер, тавр, двутавр, n-тавр) вычисление внутренних усилий можно осуществить, не прибегая к методам численного интегрирования. Это достигается путем разложения эпюры напряжений на элементарные составляющие. Такой прием позволяет значительно сократить затраты машинного времени при выполнении вычислений на ЭВМ.

Построение изогнутой оси стержня требует интегрирования уравнения (8) при заданных граничных условиях. Эта задача, как и рассмотренная выше, сводится к многократному решению задачи Коши.

На основе разработанного алгоритма была составлена программа для частного случая внецентренно сжатого стержня двутаврового профиля. С помощью этой программы были построены графики поведения стержней из линейно упрочняющегося материала.

Исследованию устойчивости таких стержней посвящены работы В. В. Пинаджяна, В. Г. Бажанова, С. А. Багдасаряна и др.

Анализ графиков показывает, что при антисимметричном приложении сжимающих сил так же, как и в случае материала, имеющего площадку текучести, предельное состояние определяется разветвлением форм равновесия. Этому состоянию соответствует угол поворота на опоре, равный наклону оси эксцентрицитетов.

В ряде случаев графики поведения стержней имеют вид монотонно возрастающей кривой, асимптотически приближающейся к некоторому предельному значению нагрузки. Аналогичные графики, как известно, характерны для упругих стержней.

Этот факт показывает, что для определенного класса стержней, выполненных из материала, обладающего упрочнением, в процессе деформации не наблюдается явление потери устойчивости.

Такой вывод подтверждается также качественным исследованием внецентренно сжатой модели Ридера.

Наиболее отчетливо характерные особенности графиков поведения видны на примере стержня, внецентренно сжатого с равными концевыми эксцентриситетами. Равновесные состояния стержня изучались на основе метода коллокации, форма изгиба принималась в виде полуволны синусоиды.

Установлено, что при малых гибкостях или больших эксцентриситетах на графиках поведения стержней отсутствует нисходящая ветвь. Предельное значение сжимающей силы, к которому асимптотически приближаются ветви равновесных состояний, зависит от гибкости стержня.

При увеличении гибкости или уменьшении величины концевых эксцентриситетов на графиках поведения появляется предельная точка, соответствующая состоянию потери устойчивости второго рода.

Выполненное исследование поведения сжато-изогнутых стержней основывалось на предположении об отсутствии разгрузки. При изучении упруго-пластических систем, состояние которых существенно зависит от истории деформирования, суждение об устойчивости равновесия не всегда можно получить с помощью статических критериев. Более универсальным является динамический критерий.

Поэтому представляет интерес изучение таких простейших упруго-пластических моделей, анализ возмущенного движения которых можно осуществить с достаточной степенью точности. Примером может служить модель Ридера, использованная в работах Ф. Шенли, Я. Г. Пановко, В. Д. Клюшникова и других авторов для качественного анализа некоторых явлений.

В четвертой главе диссертации исследуется возмущенное движение модели Ридера, сжатой осевой силой постоянной величины.

Предполагается, что в исходном равновесном состоянии напряжения в опорных стерженьках модели превышают предел пропорциональности; причиной возмущенного движения служит начальный импульс; разгрузка происходит с начальным модулем упругости.

В зависимости от напряженного состояния опорных стерженьков движение модели описывается различными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Решение получено в аналитической форме на основе использования метода припасовывания.

Установлено, что при величине силы, меньшей приведенно-модульного критического значения, движение модели можно разбить на две стадии: переходный процесс и режим установившихся гармонических колебаний относительно положения, отличного от исходного равновесного состояния. Показано, что в процессе установившихся клебаний напряжения в опорных стерженьках изменяются, следуя закону разгрузки, т. е. происходит приспособление модели к упругому режиму.

При величине силы, меньшей касательно-модульного значения, наибольшее отклонение модели имеет место при переходном процессе; в зависимости от параметров модели стойка в процессе возмущенного движения может либо проходить, либо не проходить через исходное невозмущенное равновесное состояние.

Если же величина сжимающей силы заключена в интервале между касательно-модульным и приведенно-модульным значениями, то наибольшие отклонения при переходном процессе и в режиме установившихся колебаний совпадают по величине; в процессе движения стойка модели не проходит через исходное положение.

При величине сжимающей силы, большей приведенно-модульного значения, отклонения стойки в процессе движения неограниченно возрастают; движение носит апериодический характер.

Известно, что тождественность результатов, получаемых при исследовании устойчивости консервативных систем энергетическим и динамическим методами, вытекает из теоремы Лагранжа-Дирихле. Это обстоятельство позволяет принимать энергетический критерий в качестве исходного пункта теории устойчивости равновесия деформируемых консервативных систем. Подтверждением этому служит тот факт, что теорема Лагранжа-Дирихле может трактоваться как частный случай известной теоремы второго метода А. М. Ляпунова.

В пятой главе диссертации на основе теоремы Лагранжа-Дирихле исследуется устойчивость консервативных континуальных систем, невозмущенное состояние которых отлично от недеформированного и описывается нелинейными уравнениями; устанавливается критерий устойчивости «в малом» произвольного равновесного состояния.

Устойчивость континуальных систем на основе уравнений нелинейной теории упругости исследовалась в работах В. В. Новожилова и В. В. Болотина.

Пусть состояние системы определяется компонентами перемещений u_j $(j=1, 2, 3)$, которые являются непрерывными функциями координат точек тела, а внешние силы, действующие на тело, зависят только от одного параметра p.

В устойчивых равновесных состояниях вторая вариация полной потенциальной энергии системы положительна

$$\delta^2 W > 0 \tag{9}$$

при любых возможных перемещениях δu_j.

Вблизи критического значения параметра нагрузки можно выделить такую область значений p, внутри которой вторая вариация полной потенциальной энергии представима в виде разности

$$\delta^2 W = A - B, \tag{10}$$

где A и B — ограниченные снизу функционалы от возможных перемещений.

Исследуемое равновесное состояние системы является устойчивым, если точная нижняя граница отношения функционалов в этом состоянии больше единицы

$$d = \inf \frac{A}{B} > 1. \tag{11}$$

Величина d равняется первому собственному значению λ_1 уравнений Эйлера-Остроградского для функционала

$$\Phi = A - \lambda B, \tag{12}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Следовательно, равновесное состояние системы будет устойчивым, если соответствующая величина λ_1 превышает единицу

$$\lambda_1 > 1. \tag{13}$$

В критическом состоянии потери устойчивости

$$\lambda_1 = 1; \tag{14}$$

выражения функционалов $\delta^2 W$ и Φ становятся тождественными и, следовательно, вторая вариация полной потенциальной энергии обращается в нуль и имеет стационарное значение

$$\delta^2 W = 0, \quad \delta(\delta^2 W) = 0 \tag{15}$$

при возможных перемещениях, которые являются соответствующими собственными функциями упомянутых уравнений Эйлера-Остроградского.

Условия (15) выполняются при равенстве единице любого собственного значения $\lambda_i (i=1, 2, \ldots)$.

Очевидно, если

$$\lambda_i < 1 < \lambda_{i+1}, \tag{16}$$

то равновесное состояние является устойчивым только по отношению к возмущениям, ортогональным к первым i собственным формам рассматриваемых уравнений. Это позволяет степень неустойчивости равновесного состояния связать с количеством классов возможных перемещений, по отношению к которым состояние равновесия неустойчиво.

Возможные перемещения, обращающие в нуль вторую вариацию, определяются с точностью до постоянного множителя, так как исследуемый функционал является однородным. Однако, в общем случае при критическом значении нагрузки отсутствует произвол в действительных перемещениях системы. В случае линейных систем такой произвол обусловлен тем, что выражения потенциальной энергии и ее второй вариации совпадают.

Из вариационного исчисления следует, что дифференциальные уравнения экстремали для функционала $\delta^2 W$ совпадают с уравнениями, получаемыми варьированием условий равновесия при фиксированном значении параметра нагрузки. Это позволяет трактовать уравнения метода Эйлера как следствие стационарности второй вариации потенциальной энергии независимо от предположения о существовании равновесных состояний, смежных с критическим.

Связь между проблемой устойчивости нелинейных систем и условием существования нетривиальных решений варьированных уравнений исследовалась в статье Б. М. Броуде.

Рассмотрим уравнения в вариациях, получаемые с учетом изменения параметра нагрузки. Решения этих уравнений описывают поведение системы в бесконечно малой окрестности исследуемого состояния. В критическом состоянии соответствующие уравнениям в вариациях однородные уравнения имеют нетривиальные решения. Поэтому неоднородные уравнения в вариациях при критическом значении нагрузки могут иметь нетривиальные решения лишь в случае ортогональности правой части и соответствующих собственных функций. Это условие выполняется в критических состояниях потери устойчивости первого рода.

Качественное исследование поведения сжато-изогнутых стержней служит иллюстрацией результатов, установленных для континуальных консервативных систем.

Основные результаты выполненного исследования можно сформулировать в виде следующих выводов:

1. На основе теоремы Лагранжа-Дирихле дано доказательство критерия устойчивости произвольного равновесного состояния сжато-изогнутого стержня из нелинейно упругого материала. Установлено, что в критических состояниях выполняется условие стационарности второй вариации полной потенциальной энергии стержня. Сформулирован способ оценки степени неустойчивости произвольного равновесного состояния.

2. Соответствие между критическими состояниями сжато-изогнутого стержня и особыми точками на графиках поведения получено на основе доказанного критерия устойчивости и анализа уравнений в вариациях. Показано, что явление потери устойчивости стержня, сопровождаемое разветвлением форм равновесия, возможно лишь при выполнении в критическом состоянии определенного условия ортогональности.

3. С помощью ЭВМ исследованы равновесные и критические состояния внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения при произвольных концевых эксцентриситетах. Предполагалось, что материал стержня подчиняется графику Прандтля. Установлено, что при антисимметричном приложении сжимающих сил наблюдается явление потери устойчивости первого рода. Бифуркация происходит при значении угла поворота стержня на опоре, равном наклону оси эксцентриситетов. Показано, что исчерпание несущей способности стержня может произойти вследствие образования пластического шарнира на опоре. Это явление возможно лишь при значениях угла поворота на опоре, не превышающих наклона оси эксцентриситетов.

4. Построены графики критических напряжений внецентренно сжатого стержня для ряда отношений между концевыми эксцентриситетами. Сопоставление этих графиков с приближенными рекомендациями СНиП показывает, что нормативные коэффициенты внецентренного сжатия недооценивают несущую способность стержней, особенно при концевых эксцентриситетах разных знаков.

5. Разработан алгоритм построения равновесных состояний сжато-изогнутого стержня из линейно упрочняющегося материала. Дано решение на ЭВМ задачи об изгибе внецентренно сжатого стержня двутаврового профиля. С помощью ЭВМ на основе метода коллокации исследовано поведение внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения.

6. Установлено, что сжато-изогнутые стержни из материала, обладающего упрочнением, при определенных параметрах в процессе деформации проходят только через устойчивые равновесные состояния, асимптотически приближаясь к предельному состоянию. Показано, что внецентренно сжатые стержни при антисимметричном приложении сжимающих сил теряют устойчивость вследствие бифуркации аналогично стержням из идеального упруго-пластического материала.

7. Выполнено аналитическое исследование возмущенного движения упруго-пластической модели Ридера, сжатой за пределом пропорциональности осевой силой постоянной величины. Показано, что упруго-пластические свойства модели обусловливают различие в возмущенном движении при значениях силы, меньших и больших касательно-модульной критической нагрузки.

8. Получен критерий устойчивости произвольного равновесного состояния для весьма широкого класса неидеальных консервативных континуальных систем. Показано, что в критических состояниях имеет место стационарность второй вариации полной потенциальной энергии. Установлена связь между степенью неустойчивости равновесного состояния и множеством возможных перемещений, по отношению к которым состояние неустойчиво.

9. Возможность существования в критических состояниях нетривиальных решений уравнений в вариациях выведена из условия стационарности второй вариации полной потенциальной энергии системы. Показано, что бифуркация форм равновесия возможна при выполнении определенного условия ортогональности.

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях и докладах:

1. Раздольский А. Г., О поведении центрально сжатого стержня за пределом пропорциональности. «Инженерный журнал», № 5, 1965.

2. Лейтес С. Д., Раздольский А. Г., Равновесные состояния внецентренно сжатого упруго-пластического стрежня с прямоугольным сечением. Библиотека программ для ЭВМ «Проминь», вып. I—24. Гипротис, М. 1965.

3. Лейтес С. Д., Раздольский А. Г Поведение сжато-изогнутых стержней из упруго-пластического материала. Тезисы докладов на IV Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. «Наука», 1967.

4. Лейтес С. Д., Раздольский А. Г., Исследование устойчивости внецентренно сжатых упруго-пластических стержней. «Строительная механика и расчет сооружений», № 1, 1967.

5. Раздольский А. Г., Поведение внецентренно сжатого стержня из нелинейно упругого материала. Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике (Каунас, 1967 г.). Тезисы докладов, 1967.

6. Раздольский А. Г., Об энергетическом критерии устойчивости упругих консервативных систем. Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. М. 1968.

7. Раздольский А. Г., Малые колебания упруго-пластического маятника, сжатого осевой силой. Конференция по проблеме колебаний механических систем. Тезисы докладов. «Наукова думка», Киев-1968.
