УДК 531.3:629.76

В. В. Кравец, Т. В. Кравец

ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАТЕРНИОННЫМИ МАТРИЦАМИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ АСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Введение. Целесообразность инвариантного представления основных динамических характеристик асимметричного твердого тела в задачах алгоритмизации математического моделирования нелинейной динамики в пространственном движении сложных механических систем отмечалась в [10]. Путь решение указанной проблемы базируется на применении принципа симметрии [12, 18], дифференциальных уравнений в форме Эйлера–Лагранжа, параметров Родрига–Гамильтона, Кейли–Клейна, Эйлера [15], кватернионов [2, 3], гиперкомплексных чисел Люша [13], тензорного исчисления [4, 5], матричного исчисления [17] и, в частности, кватернионных матриц [1, 13, 16]. Эти тенденции нашли отражение также в ряде современных задач авиационной техники, робототехники, гироскопии, виброзащиты, [7, 11, 14], где применяется матричная форма представления математических моделей современных задач способствующая использованию компьютерных технологий.

В данной работе приводится процедура использования аппарата кватернионных матриц к задаче инвариантного представления кинетической энергии асимметричного твердого тела в пространственном движении вокруг неподвижной точки для связанной и неподвижной систем отсчета, которые применяются при составлении нелинейных уравнений пространственного движения в симметричной матричной форме Эйлера–Лагранжа [ст. ПМ 2009]. Инвариантные формы находят применение в компьютерных технологиях для верификации расчетных алгоритмов, контроля точности вычислений [12].

1. Постановка задачи. Кинетическая энергия является одной из основных мер механического движения (динамической величиной). Кинетическая энергия положена в основу вывода уравнений движения в форме Лагранжа второго рода через обобщенные координаты, Эйлера–Лагранжа через квазикоординаты [14]. Формы представления кинетической энергии различных технических объектов определяют структуру получаемых дифференциальных уравнений движения и соответствующие аналитические или численные методы их последующего исследования [8].

Задача заключается в том, чтобы представить кинетическую энергию асимметричного твердого тела при движении в пространстве вокруг произвольной неподвижной точки в инвариантной, симметричной форме для инерциальной и связанной систем отсчета. Искомая инвариантная форма отыскивается с помощью математического аппарата кватернионных матриц, обеспечивающего также удобство символьных и аналитических преобразований. Движение твёрдого тела рассматривается относительно двух прямоугольных декартовых систем координат, начала которых совмещены с неподвижной точкой. Одна из систем координат $OY_1Y_2Y_3$ – подвижная, жёстко связанная с телом, другая $OX_1X_2X_3$ – неподвижная, инерциальная (рис. 1).

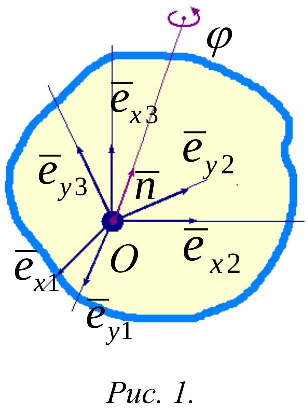

Рис. 1.

При определении кинетической энергии твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O, исходим из формулы для кинетической энергии материальной частицы dm [5]

$$dT = \frac{1}{2}\overline{V}\cdot\overline{V}\ dm\ .$$

2. Инвариантная форма представления скорости. Матричное представление формулы распределения скоростей твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в проекциях на связанные оси имеет вид [6]

$$V_y = \frac{1}{2}\left(\ \Omega_y + {}^t\Omega_y\right) y_0$$

или, учитывая, что

$$\Omega_y \cdot y_0 = Y_0^t \cdot \omega_y\ , \qquad {}^t\Omega_y \cdot y_0 = {}^tY_0^t \cdot \omega_y\ ,$$

получим

$$V_y = \frac{1}{2}\left(Y_0^t + {}^tY_0^t\ \right)\omega_y\ .$$

Транспонируя эту формулу, найдём

$$V_y^t = \frac{1}{2}\ \omega_y^t\ \left(\ {}^tY_0 + Y_0\ \right)\ .$$

Скалярному произведению векторов $\overline{V}\cdot\overline{V}$ сопоставляется матричное выражение

$$V_y^t \cdot V_y = \frac{1}{4}\ \omega_y^t\ \left(\ {}^tY_0 + Y_0\ \right)\left(\ Y_0^t + {}^tY_0^t\ \right)\omega_y\ \ .$$

Так как

$${}^tY_0 \cdot Y_0^t = Y_0 \cdot\ {}^tY_0^t\ , \qquad {}^tY_0 \cdot\ {}^tY_0^t = Y_0 \cdot Y_0^t\ ,$$

то

$$V_y^t \cdot V_y = \frac{1}{2}\ \omega_y^t\ \left(\ Y_0 \cdot Y_0^t + Y_0 \cdot\ {}^tY_0^t\ \right)\omega_y\ \ .$$

В неподвижных осях компоненты вектора скорости точки тела выражаются через компоненты угловой скорости и координаты точки по формуле [6]

$$V_x = \frac{1}{2}\left(\Omega_x + {}^t\Omega_x\ \right)x_0\ \ .$$

Проведём преобразование кинетической энергии твёрдого тела аналогичное выше изложенному при использовании неподвижной системы координат.

3. Инвариантные формы представления кинетической энергии. В результате интегрирования по всем входящим в твёрдое тело частицам находим кинетическую энергию тела в виде

$$T = \frac{1}{2}\,\omega_y^t \left[\frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(Y_0 \cdot Y_0^t + Y_0 \cdot {}^t Y_0^t \right) dm \right] \omega_y$$

Здесь выделяется матрица инерции

$$I_y = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(Y_0 \cdot Y_0^t + Y_0 \cdot {}^t Y_0^t \right) dm \ .$$

Разворачивая исходное матричное выражение

$$Y_0 \cdot Y_0^t + Y_0 \cdot \ {}^t Y_0^t = 2 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 + y_2^2 & -y_1 y_2 & -y_1 y_3 \\ 0 & -y_1 y_2 & y_3^2 + y_1^2 & -y_3 y_2 \\ 0 & -y_1 y_3 & -y_3 y_2 & y_2^2 + y_1^2 \end{Vmatrix}$$

и используя принятые обозначения для осевых и центробежных моментов инерции твёрдого тела

$$I_{11}^y = \int\limits_{(m)} \left(y_3^2 + y_2^2 \right) dm \ , \qquad I_{12}^y = I_{21}^y = \int\limits_{(m)} y_1 y_2 \ dm \, ,$$

$$I_{22}^y = \int\limits_{(m)} \left(y_3^2 + y_1^2 \right) dm \, , \qquad I_{13}^y = I_{31}^y = \int\limits_{(m)} y_1 \, y_3 \ dm \, ,$$

$$I_{33}^y = \int\limits_{(m)} \left(y_2^2 + y_1^2 \right) dm \, , \qquad I_{23}^y = I_{32}^y = \int\limits_{(m)} y_2 \, y_3 \ dm \, ,$$

приходим к матрице инерции:

$$I_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11}^y & -I_{12}^y & -I_{13}^y \\ 0 & -I_{21}^y & I_{22}^y & -I_{23}^y \\ 0 & -I_{31}^y & -I_{32}^y & I_{33}^y \end{Vmatrix}$$

Здесь осевые и центробежные моменты инерции являются постоянными [14]. Опуская выкладки, аналогичные проведенным выше, выразим кинетическую энергию твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, в инерциальной системе координат:

$$T = \frac{1}{2}\omega_x^t \left[\frac{1}{2}\int_{(m)} \left(X_0 \cdot X_0^t + X_0 \cdot {}^t X_0^t \right) dm \right] \omega_x \ .$$

Здесь также целесообразно выделить матрицу инерции твёрдого тела, элементы которой отнесены к неподвижным осям, т.е. при движении твёрдого тела элементы матрицы

$$I_x = \frac{1}{2}\int_{(m)} \left(X_0 \cdot X_0^t + X_0 \cdot {}^t X_0^t \right) dm$$

являются переменными в связи с изменением расположения частиц твёрдого тела по отношению к принятой неподвижной системе осей [14].

Отметим также, что использование свойств кватернионных матриц [6], позволяет придать кинетической энергии твёрдого тела иную эквивалентную запись при использовании связанной системы координат

$$T = \frac{1}{4}\int_{(m)} y_0^t \left(\varOmega_y^t \cdot \varOmega_y + {}^t\varOmega_y^t \cdot \varOmega_y \right) y_0 \ dm$$

и в неподвижной системе осей

$$T = \frac{1}{4}\int_{(m)} x_0^t \left(\varOmega_x^t \cdot \varOmega_x + {}^t\varOmega_x^t \cdot \varOmega_x \right) x_0 \ dm$$

4. Апробация результата. Одна из выведенных формул кинетической энергии тела выражается известной квадратичной формой относительно компонент вектора угловой скорости в связанных осях [14], если развернуть следующее матричное произведение:

$$2T = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{1y} & \omega_{2y} & \omega_{3y} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11}^y & -I_{12}^y & -I_{13}^y \\ 0 & -I_{21}^y & I_{22}^y & -I_{23}^y \\ 0 & -I_{31}^y & -I_{32}^y & I_{33}^y \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ \omega_{1y} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{3y} \end{Vmatrix} \ .$$

5. Инвариантные формы представления матрицы инерции. Матрица инерции твёрдого тела в связанных осях имеет вид

$$I_y = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)}\left(Y_o \cdot Y_o^t + Y_o \cdot {}^tY_o^t\right) dm$$

и её элементы – осевые и центробежные моменты инерции, являются постоянными величинами. В неподвижной системе осей, имеющей общее начало со связанными, матрица инерции твёрдого тела выражается формулой

$$I_x = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)}\left(X_o \cdot X_o^t + X_o \cdot {}^tX_o^t\right) dm\ ,$$

причём элементы этой матрицы изменяются в процессе поворота твёрдого тела вокруг неподвижной точки (начало координат).

При повороте тела формулы прямого и обратного преобразований рассматриваемых систем координат имеют вид [6]:

$$y_o = A^t \cdot {}^tA^t \cdot x_o\ , \qquad x_o = A \cdot {}^tA \cdot y_o\ .$$

Полагая известными матрицу инерции твёрдого тела в связанных осях и матрицу преобразований координат при повороте, приведём матрицу инерции твёрдого тела к неподвижным осям.

Из формул прямого и обратного преобразований координат следует

$${}^tA^t \cdot x_o = {}^tA \cdot y_o$$

и, так как

$${}^tA^t \cdot x_o = {}^tX \cdot a\ ,$$

получим

$${}^tX_o \cdot a = {}^tA \cdot y_o\ .$$

Умножая это равенство слева на базисные матрицы вида ${}^tE_i^t$ [6]

$${}^tE_i^t \cdot {}^tX_o \cdot a = {}^tE_i^t \cdot {}^tA \cdot y_o \qquad \left(i = 0,1,2,3\right)$$

и, используя свойство коммутативности

$${}^tE_i^t \cdot {}^tX_o = {}^tX_o \cdot {}^tE_i^t\ , \quad {}^tE_i^t \cdot {}^tA = {}^tA \cdot {}^tE_i^t\ ,$$

придем к равенствам

$$ {}^tX_o \cdot {}^tE_i^t \cdot a = {}^tA \cdot {}^tE_i^t \cdot y_o \,. $$

Откуда, принимая во внимание, что

$$ \left\| \; E_o \cdot a ; \quad {}^tE_1^t \cdot a ; \quad {}^tE_2^t \cdot a ; \quad {}^tE_3^t \cdot a \; \right\| = {}^tA, $$

$$ \left\| E_o \cdot y_o ; \quad {}^tE_1^t \cdot y_o ; \quad {}^tE_2^t \cdot y_o ; \quad {}^tE_3^t \cdot y_o \right\| = {}^tY_o \,, $$

устанавливается следующее свойство симметрии рассматриваемых матриц

$$ {}^tX_o \cdot {}^tA = {}^tA \cdot {}^tY_o \,, $$

т. е. матрицы ${}^tX_o$ и ${}^tY_o$ связаны преобразованием подобия

$$ {}^tX_o = {}^tA \cdot {}^tY_o \cdot A^t \text{ или } {}^tY_o = A^t \cdot {}^tX_o \cdot {}^tA $$

и являются эквивалентными [17]. Выполнив над этими равенствами введённые операции транспонирования [6], получим также

$$ \begin{aligned} &X_o = A \cdot Y_o \cdot {}^tA^t, && Y_o = {}^tA^t \cdot X_o \cdot A, \\ &X_o^t = {}^tA \cdot Y_o^t \cdot A^t, && Y_o^t = A^t \cdot X_o^t \cdot {}^tA, \\ &{}^tX_o^t = A \cdot {}^tY_o^t \cdot {}^tA^t \,, && {}^tY_o^t = {}^tA^t \cdot {}^tX_o^t \cdot A, \end{aligned} $$

Матричное произведение вида

$$ Y_o \cdot Y_o^t = {}^tA^t \cdot X_o \cdot A \cdot A^t \cdot X_o^t \cdot {}^tA \tag{2.87} $$

с помощью свойств коммутативности кватернионных матриц

$$ A \cdot A^t = A^t \cdot A, \quad X_o \cdot A^t = A^t \cdot X_o \,, \quad A \cdot X_o^t = X_o^t \cdot A \,, $$

преобразуем к следующей записи

$$ Y_o \cdot Y_o^t = {}^tA^t \cdot A^t \cdot X_o \cdot X_o^t \cdot A \cdot {}^tA. $$

Для произведения вида

$$ Y_o \cdot {}^tY_o^t = {}^tA^t \cdot X_o \cdot A \cdot {}^tA^t \cdot {}^tX_o^t \cdot A, $$

используя свойства кватернионных матриц:

$$ A \cdot {}^tA^t = A^t \cdot {}^tA, \qquad {}^tA \cdot {}^tX_o^t = {}^tX_o^t \cdot {}^tA, $$

находим

$$Y_o \cdot {}^tY_o^t = {}^tA^t \cdot A^t \cdot X_o \cdot {}^tX_o^t \cdot {}^tA \cdot A.$$

Подставляя составленные произведения матриц в исходную формулу для I_y, получим

$$I_y = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(A^t \cdot {}^tA^t \cdot X_o \cdot X_o^t \cdot A \cdot {}^tA + A^t \cdot {}^tA^t \cdot X_o \cdot {}^tX_o^t \cdot A \cdot {}^tA \right) dm.$$

Учитывая, что поворот одинаков для всех частиц тела, имеем

$$I_y = A^t \cdot {}^tA^t \left[\frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left(X_o \cdot X_o^t + X_o \cdot {}^tX_o^t \right) dm \right] A \cdot {}^tA.$$

Таким образом, устанавливается связь матриц инерции отнесённых к связанным и неподвижным осям, имеющим общее начало, в лаконичном виде

$$I_y = A^t \cdot {}^tA^t \cdot I_x \cdot A \cdot {}^tA.$$

Умножая данное равенство последовательно слева на ${}^tA$ и A и справа на A^t и ${}^tA^t$, найдём

$$I_x = A \cdot {}^tA \cdot I_y \cdot A^t \cdot {}^tA^t,$$

т. е. матрицы инерции связаны преобразованием подобия и являются эквивалентными [17].

6. Доказательство инвариантности. Используем полученные зависимости матриц инерции для обоснования инвариантности кинетической энергии твёрдого тела в различных системах координат. Так, исходя из формулы для кинетической энергии твёрдого тела в связанных осях

$$T = \frac{1}{2} \omega_y^t \cdot I_y \cdot \omega_y$$

и учитывая, что $\omega_y = A^t \cdot {}^tA^t \cdot \omega_x$, $\omega_y^t = \omega_x^t \cdot A \cdot {}^tA$ [6], получим

$$T = \frac{1}{2} \omega_x^t \cdot A \cdot {}^tA \cdot A^t \cdot {}^tA^t \cdot I_x \cdot A \cdot {}^tA \cdot A^t \cdot {}^tA^t \cdot \omega_x.$$

Откуда, принимая во внимание свойства кватернионных матриц ${}^{t}A \cdot A^{t} = E_{o}$, $A \cdot {}^{t}A^{t} = E_{o}$, найдём

$$T = \frac{1}{2}\, \omega_x^t \cdot I_x \cdot \omega_x \ ,$$

т. е. последовательным преобразованием получена формула, выражающая кинетическую энергию твёрдого тела в неподвижной системе координат в инвариантной форме.

Выводы. Инвариантные формы представления матрицы инерции и кинетической энергии асимметричного твердого тела при движении в трехмерном пространстве вокруг неподвижной точки для связанной и инерциальной систем отсчета получены на основе преобразования подобия и свойств примененных кватернионных матриц. В качестве элементов кватернионных матриц приняты параметры Гамильтона–Родрига, квазискорости, координаты. Симметрия и лаконизм математического описания в кватернионных матрицах обеспечивают удобство символьных, аналитических преобразований, инвариантность формы искомых зависимостей. Инвариантность формы служит цели верификации алгоритмов.

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Механика космического полета: Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

3. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 672 с.

4. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240 с.

5. Кильчевский Н. А. Основы тензорного анализа с приложениями к механике.− К.: Наук. думка, 1972. − 148 с.

6. ст. ПМ 2009

7. Ларин В. Б. Статистические задачи виброзащиты. − К.: Наук. думка, 1974. − 128 с.

8. Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. − К.: Наук. думка, 1990. − 232 с.

9. Лурье А. И. Аналитическая механика. − М.: Физматгиз, 1961.– 824 с.

10. Лысенко Л.Н., Кравец В.В. Алгоритмические проблемы математического моделирования движения летательных аппаратов // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1997. № 2, С. 3−13.

11. Martynyuk A. A., Slyn'ko V. I. To Constructing the Mathematical Models of Motion of Mechanical Systems in Conditions of Uncertainty // Int. Appl. Mech. 2007. − 43, N 10. − P. 1175−1184.

12. Мямлин С.В., Кравец В.В. Симметрия математической модели и достоверность вычислительного эксперимента // Зб. наук. праць. Вінницького Держ. Аграрн. Ун-ту. − 2003. − Вип. 15. − С. 339 − 340.

13. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. − Киев: Наук. думка, 1983. − 208 с.

14. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. − К.: Техніка, 2002. − 512 с.

15. Парс Л.А. Аналитическая динамика. − пер. с англ. − М.: Наука, 1971. − 636 с.

16. Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сб. научн.-метод. статей по теорет. механике.− М. : Высшая школа, 1981.– вып. 11.– С. 122 − 128.

17. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.

18. Элиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. – М.: Мир, 1983. – Т.1. – 368 с.; т.2. – 416 с.