УДК 625:681.319

Михаил Капица, Валерий Крячко

г. Днепропетровск

МИНИМАКСНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И РЕМОНТА ТЯГОВОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Излагается метод определения периодов работ для сложных технических объектов при неизвестных вероятностных характеристиках надежности. Предлагается использовать минимаксный принцип. Показано, как при некоторых ограничениях задача определения Максимума-минимума дробно-линейного функционала сводится к определению максимума-минимума дробно-линейной функции по некоторому конечному множеству специально подобранных точек.

Ключевые слова: *сложный технический объект, минимаксный принцип, дробно-линейная функция, индикация.*

Постановка проблемы. Обычно при постановке задачи выбора оптимальной стратегии обслуживания сложных технических объектов, в данном случае тяговый подвижной состав железных дорог, предполагают, что полностью известны его характеристики. Однако функция распределения времени безотказной работы *F(y)*, как правило, определяется статистически и известна лишь в отдельных точках. Поэтому при постановке задачи более естественным является предположение о том, что функция *F(y)* принадлежит классу $\Omega(n, \bar{y}, \bar{\pi})$ функций распределения, которые в заданных точках $\bar{y} = (y_0 = 0, y_1, \ldots, y_n)$ принимают заданные значения $\bar{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$. Аналогичное замечание можно высказать и относительно функции распределения времени индикации отказов *Ф(v)*, с той лишь разницей, что эта функция, как правило, неизвестна и в отдельных точках. Поэтому относительно функции *Ф(v)* можно лишь предполагать, что она принадлежит множеству Ω функций распределения всех возможных положительных случайных величин $\Omega = \Omega(0, \bar{y}, \bar{\pi})$.

Кроме того, можно предложить другую модель: самостоятельная индикация отказа обусловлена наличием в ТПС встроенного контроля неисправностей. Если этот контроль охватывает какую то часть элементов ТПС, то 1) при отказе элемента в контролируемой части длительность проявления отказа равна нулю; 2) при отказе элемента в неконтролируемой части время самостоятельного проявления отказа равно некоторой случайной величине, распределенной по неизвестному закону *Ф(v)*. Следовательно,

$$\Phi(v) = \begin{cases} 0 \text{ при } v \le 0, \\ b + (1-b)\Phi_1(v) \text{ при } v > 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где b - условная вероятность отказа элемента в контролируемой части системы при условии, что отказ произошел; $\Phi_1(v) \in \Omega$. Если вся система охвачена встроенным контролем, то считаем $b = 1$; если встроенного контроля нет, то считаем $b = 0$.

В этих условиях, когда некоторые характеристики системы неизвестны, для решения задачи выбора оптимальной периодичности восстановительных работ ТПС (т. е. выбора, оптимального закона распределения *G(x)*, в соответствии с которым определяется периодичность) предлагается использовать минимаксный принцип [1], при котором определяется периодичность, обеспечивающая некоторый гарантированный выигрыш. Обозначим через *V(F, Ф, G)* функционал доходов, характеризующий качество функционирования системы. Если все характеристики неизвестны, то необходимо определить функции $F \in \Omega(n, \bar{y}, \bar{\pi})$, $G \in \Omega$, $\Phi \in \Omega$ при которых достигается экстремум

$$V = \max_{G\in\Omega} \min_{\Phi\in\Omega} \min_{F\in\Omega(n,\bar{y},\bar{\pi})} V(F,\Phi,G), \tag{2}$$

и величину этого экстремума. Заметим, что если возможно изменять объем контролируемой части ТПС (т. е. константу b), то задача будет состоять и в определении величины b, для которой достигается экстремум

$$V_1 = \max_{0\le b\le 1} \max_{G\in\Omega} \min_{\Phi_1\in\Omega} \min_{F\in\Omega(n,\bar{y},\bar{\pi})} V(F,\Phi,G), \tag{3}$$

где - $\Phi(v)$ определяется равенством (1). Можно рассматривать и частные случаи, когда отдельные характеристики известны. Тогда в определениях (2) и (3) соответствующие экстремумы исчезают.

При исследовании известных стратегий технического обслуживания сложных систем [2] задача обычно сводится к анализу дробно-линейного функционала

$$V(F,\Phi,G) = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty A(x,v,y)\,dG(x)\,d\Phi(v)\,dF(y)}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty B(x,v,y)\,dG(x)\,d\Phi(v)\,dF(y)}. \tag{4}$$

Начиная последовательное решение задачи (2), приходим к необходимости при фиксированных характеристиках $G(x)$ и $\Phi(v)$ определять экстремум (минимум) дробно-линейного функционала (4) по $F \in \Omega(n, \bar{y}, \bar{\pi})$. Известно [3], что такой экстремум достигается на ступенчатых функциях распределения, имеющих в полуинтервалах (y_i, $y_i + 1$) один скачок величины $\Delta\pi = \pi_i + 1 - \pi i$. Обозначим класс таких функций распределения через $\Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$. Если $F(y)$ есть ступенчатая $F \in \Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$, то

$$\min_{F\in\Omega(n,\bar{y},\bar{\pi})} V(F,\Phi,G) = \min_{\substack{y_i \le \tau_i < y_{i+1} \\ i=\overline{0,n}}} \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^{n} A(x,v,\tau_i)\Delta\pi_i\right] dG(x)\,d\Phi(v)}{\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^{n} B(x,v,\tau_i)\Delta\pi_i\right] dG(x)\,d\Phi(v)} \tag{5}$$

и задача сводится к исследованию на экстремум функции многих переменных. В общем случае эта задача весьма трудоемкая, да к тому же решение $\tau = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n)$ будет зависеть от функций $G(x)$ и $\Phi(v)$. В задачах технического обслуживания и ремонта ТПС можно высказать одну естественную гипотезу, подтверждение которой существенным образом упрощает исследование функции (5) на минимум.

В рассматриваемом классе $\Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$ установим следующее соответствие: будем говорить, что функция $F_1 \in \Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$ „хуже" функции $F_2 \in \Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$ если для $y \ge 0$ $F_1(y) \ge F_2(y)$. В классе $\Omega^*(n, \bar{y}, \bar{\pi})$ существует «наихудшая» функция распределения $F^*(y)$, которая имеет величины $\Delta\pi_i$ в точках $\tau_i = y_i + 0$. Тогда гипотеза может быть сформулирована следующим образом:

$$\min_{F\in\Omega^*(n,\bar{y},\bar{\pi})} V(F,\Phi,G) = V(F^*,\Phi,G). \tag{6}$$

Другими словами, функция (5) монотонна по переменным τ_i, тогда получим

$$V = \max_{0 \le x < \infty} \min_{0 \le v < \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} A(x, v, y_i + 0)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n} B(x, v, y_i + 0)\Delta\pi_i}. \tag{7}$$

Обычно в задачах технического обслуживания и ремонта ТПС предполагают, что доходы и потери линейно зависят от времени пребывания ТПС в различных состояниях. Это предположение приводит к тому, что функций *A(x, v, τ)* и *B(x, v, τ*) являются линейными в областях, определяемых линейными неравенствами, т. е. в многоугольниках. Тогда числитель и знаменатель (7) также являются линейными функциями в некоторых многоугольниках $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Таким образом, окончательно задача сводится к исследованию на экстремум дробно-линейной функций

Обычно в задачах технического обслуживания предполагают, что доходы и потери линейно зависят от времени пребывания системы в различных состояниях. Это предположение приводит к тому, что функций *A(x, v, τ)* и *B(x, v, τ*) являются линейными в областях, определяемых линейными неравенствами, т. е. в многоугольниках. Тогда числитель и знаменатель (7) также являются линейными функциями в некоторых многоугольниках $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Таким образом, окончательно задача сводится к исследованию на экстремум дробно-линейной функций

$$V = \max_{0 \le x < \infty} \min_{0 \le v < \infty} \frac{A_1 x + A_2 v + A_3}{B_1 x + B_2 v + B_3}, \tag{8}$$

у которой коэффициенты A_i и B_i кусочно-постоянны, т. е. принимают постоянные значения при $(x, v) \in S_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Переходим к анализу дробно-линейной функции (11).

Обозначим через, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ проекцию множества возможных экстремальных точек функции $z(x, v)$ на ось абсцисс, через v_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n_i}$) ординаты возможных экстремальных точек, проектируемых в точку x_i. Для завершения решения необходимо вычислить $\max \min z(x_i, v_{ij})$. Эта задача решается простым перебором. Заметим еще, что одна и та же точка может быть вершиной нескольких многоугольников и должна участвовать в вычислении функции $z(x, v)$ для каждого многоугольника, так как функция $z(x, v)$ не обязана быть непрерывной.

Значение $z(x_0, v_0)$ в экстремальной точке определяет гарантированный выигрыш

$$V = z(x_0, v_0) = \frac{\sum_{i=0}^{n} A(x_0, v_0, y_i + 0)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n} B(x_0, v_0, y_i + 0)\Delta\pi_i}, \tag{9}$$

величина x_0 определяет оптимальный период технического обслуживания и ремонта, экстремальные функции $G(x)$ и $\Phi(v)$ имеют вид

$$G_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0, \\ 1, & x > x_0; \end{cases} \qquad \Phi_0(v) = \begin{cases} 0, & v \le v_0, \\ 1, & v > v_0. \end{cases} \tag{10}$$

В заключение решим вопрос о выборе оптимального *b*, если есть возможность менять объем контролируемой части системы. С учетом (6) и (7) из (3), имеем

$$V_1 = \max_{0\le b\le 1} V = \max_{0\le b\le 1} \max_{0\le x<\infty} \min_{0\le v<\infty} \frac{b\sum_{i=0}^{n} A(x,0,y_i+0)\Delta\pi_i + (1-b)\sum_{i=0}^{n} A(x,v,y_i+0)\Delta\pi_i}{b\sum_{i=0}^{n} B(x,0,y_i+0)\Delta\pi_i + (1-b)\sum_{i=0}^{n} B(x,v,y_i+0)\Delta\pi_i}. \quad (11)$$

Далее определяем максимум-минимум функции (11) по изложенной методике при фиксированном b, а затем определяем максимум по b.

В качестве примера рассмотрим следующую стратегию [2]. В начальный момент, когда по предположению ТПС новый или после капитального ремонта, но имеет свойства как новый, назначается проведение плановых восстановительных работ через случайное время η, распределенное по закону $G(x)$. Если к назначенному моменту локомотив не отказал, то проводится предупредительный плановый ремонт. Если же отказ локомотива произошел, но не проявился до назначенного момента, то в запланированный момент начинается плановый аварийно-восстановительный ремонт. Если же отказ локомотива произошел и обнаружился до назначенного планового ремонта, то в случайный момент обнаружения отказа начинается неплановый аварийно-профилактический ремонт. Предполагаем, что после проведения любой восстановительной работы единица ТПС полностью обновляется. В моменты обновления очередная предупредительная профилактика перепланируется, и весь процесс обслуживания и ремонта повторяется. Пусть качество функционирования ТПС характеризуется коэффициентом готовности $K_г$, а функция распределения $F(y)$ известна лишь в одной точке y_1: $F(y_1) = \pi_1$. Для рассматриваемой стратегии в [2] получено выражение

$$K_{г} = V(F,\Phi,G) = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty A(x,y)\, dG(x)\, dF(y)}{\int_0^\infty\int_0^\infty B(x,v,y)\, dG(x)\, d\Phi(v)\, dF(y)}, \quad (12)$$

где

$$A(x,y) = \begin{cases} y & \text{при } 0\le y\le x, \\ x & \text{при } y\ge x, \end{cases} \quad (13)$$

$$B(x,v,y) = \begin{cases} y+v+\bar{T}_{ап} & \text{при } 0\le v<x,\ 0\le y<x-v; \\ x+T_{ап} & \text{при } 0\le v<x,\ x-v\le y<x; \\ x+T_{ап} & \text{при } 0\le v<x,\ y\ge x; \\ x+T_{ап} & \text{при } v\ge x,\ y<x; \\ x+T_{пр} & \text{при } v\ge x,\ y\ge x; \end{cases} \quad (14)$$

где $\bar{T}_{ап} \ge T_{ап} \ge T_{пр}$ - средние длительности непланового аварийно-профилактического ремонта и предупредительного ремонта соответственно.

При определении «наихудшей» функции $F(y)$, при которой достигается минимум функционала (12), воспользуемся леммой. Рассмотрим разность $B(x, v, y) – A(x, y) – F(x, v, y)$. Тогда функционал (12) можно переписать в следующем виде

$$K_{\text{г}} = \left[1 + \frac{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} D(x,v,y)\, dG(x)\, d\Phi(v)\, dF(y)}{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} A(x,y)\, dG(x)\, dF(y)} \right]^{-1} . \qquad (15)$$

На основании леммы можно утверждать, что функционал, стоящий в знаменателе выражения (15), достигает своего максимума при

$$F(y) = F^*(y) = \begin{cases} 0 \text{ при } y \le 0, \\ \pi_1 \text{ при } 0 < y \le y_1, \\ 1 \text{ при } y > y_1, \end{cases} \qquad (16)$$

так как функция *D(x, v, y)* невозрастающая, а функция *A(x, y)* неубывающая по переменному y при любых фиксированных *x, v* (рис. 1 и 2). Подставляя (16) в (12), получаем

$$\min_{F \in \Omega(1,\bar{y},\bar{\pi})} K_{\text{г}} = \frac{(1-\pi_1)\int\limits_0^{\infty} A(x,y_1)\, dG(x)}{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} [\pi_1 B(x,v,0) + (1-\pi_1) B(x,v,y_1)]\, dG(x)\, d\Phi(v)} . \qquad (17)$$

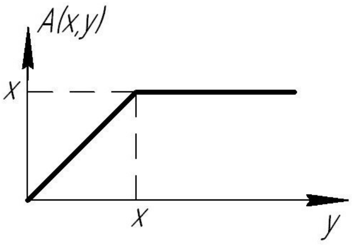

Рис. 1.

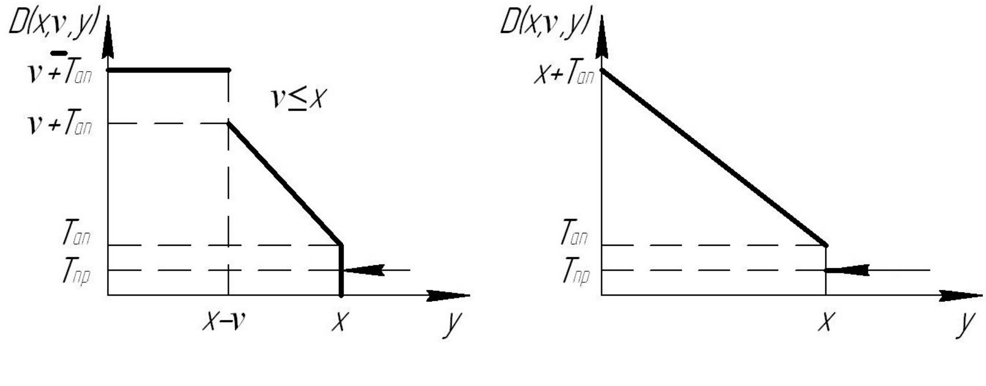

Рис. 2.

При определении максимума-минимума выражения (17) по $G \in \Omega^*$ и $\Phi \in \Omega$

воспользуемся соотношением из [2]

$$V = \max_{0\le x<\infty} \min_{0\le v<\infty} z(x,v) = \max_{0\le x<\infty} \min_{0\le v<\infty} \frac{(1-\pi_1)A(x,y_1)}{\pi_1 B(x,v,0)+(1-\pi_1)B(x,v,y_1)}. \qquad (18)$$

Функция *A(x, y)* и *B(x, v, y)* линейные в областях, определяемых линейными неравенствами [см. формулы (13) и (14)], поэтому можно воспользоваться теоремой 1 и определении максимум-минимум только по конечному множеству точек (вершин многоугольников и некоторых специально подобранных точек). Из (13) и (14) не представляет труда определить области, в которых постоянны коэффициенты дробно-линейной функции (18). Эти области приведены на рис. 3. Подставляя значения функций (13) и (14) в выражение (18), получаем выражение исследуемой функции

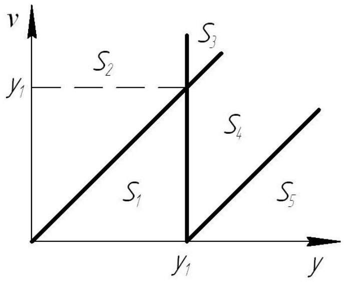

Рис. 3.

$$z(x,v) = \begin{cases} \dfrac{(1-\pi_1)x}{\pi_1(v+\bar{T}_{ап})+(1-\pi_1)(x+T_{пр})} & \text{при } (x,v)\in S_1, \\ \dfrac{(1-\pi_1)x}{x+\pi_1\bar{T}_{ап}+(1-\pi_1)T_{пр}} & \text{при } (x,v)\in S_2, \\ \dfrac{(1-\pi_1)y_1}{x+T_{ап}}, & \text{при } (x,v)\in S_3, \\ \dfrac{(1-\pi_1)y_1}{\pi_1(v+\bar{T}_{ап})+(1-\pi_1)(x+T_{ап})} & \text{при } (x,v)\in S_4, \\ \dfrac{(1-\pi_1)y_1}{v+T_{ап}+(1-\pi_1)y_1} & \text{при } (x,v)\in S_5. \end{cases} \qquad (19)$$

Нетрудно заметить, что для областей S_1 , и S_4 точка $\tilde{x}(\tilde{x}_1 = 0,\ \tilde{x}_4 = +\infty)$лежит на границе проекций Π_{S_k}, в области S_5, исследуемая функция не зависит от x, для областей S_2 и S_3, все точки проекций Π_{S_k}, являются точками типа $\tilde{X}$. Очевидно, что для всех областей $S_k\,(k=\overline{1},\ \overline{5})$множества Γ'_{S_k} являются связанными и экстремумы следует искать по множеству вершин.

Определяя значения функции (19) вершинах областей S_k, простым перебором отыскания среди них максимум-минимум, который достигается при $x_0 = y_1 - 0,\ v_0 = y_0 - - 0,\ (x_0, v_0)\in S_1$ и равен

$$V_0 = \frac{(1-\pi_1)y_1}{y_1+\pi_1\bar{T}_{ап}+(1-\pi_1)T_{пр}}.$$

Это значит, что предупредительный ремонт следует назначать через время $x_0 = y_1 - 0$ и гарантированное значение коэффициента готовности будет равно V_0.

Выводы. Отметим, что изложенный метод определения минимаксных стратегий технического обслуживания и ремонта ТПС может быть применен ко всем стратегиям, исследованным в [2]. Полученные результаты можно использовать так же при исследовании различных стратегий технического обслуживания и ремонта сложных технических объектов в условиях неполной информации об их надежности.

Литература

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., «Сов. радио», 1969.
2. Барзилович Е. Ю., Каштанов В. Д. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М., «Сов. радио», 1971.
3. Барзилович Е.Ю., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. О минимаксных критериях в задачах надежности. — «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1971, № 3.

Викладається метод визначення періодів робіт для складних технічних об'єктів при невідомих імовірнісних характеристиках надійності. Пропонується використовувати мінімаксний принцип. Показано, як при деяких обмеженнях задача визначення максимуму-мінімуму дробно-лінійного функціонала зводиться до визначення максимуму-мінімуму дробно-лінійної функції по деякій кінцевій безлічі спеціально підібраних крапок.

Ключові слова: *складний технічний об'єкт, мінімаксний принцип, дробно-лінійна функція, індикація.*

The method of determination of periods of works is expounded for difficult technical objects at unknown probabilistic descriptions of reliability. It is suggested to use minimax principle. It is rotined, as at some limitations the task of determination of a maxitum-minitum of shot-linear functional is taken to determination of a maxitum-minitum of shot-linear function on some finite set of specially neat points.

Key words: *difficult technical object, minimax principle, shot-linear function, indication.*

Капица М. И. — д. т. н, проф. кафедры «Локомотивы» Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта, г. Днепропетровск, Украина
m.i.kapica@ua.fm

Крячко В. А. — финансовый директор, ОАО «Днепропетровский стрелочный завод», г. Днепропетровск, Украина

Рецензент: д. т. н. проф. Дубинец Л.В.