

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Прикладна математика»

В авторській редакції

ВИЩА МАТЕМАТИКА (МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ).

Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку

Навчально-методичні рекомендації та завдання
до практичних занять і самостійної роботи

*Електронний аналог
друкованого видання*

ДНІПРО
2023

УДК 517.9(075.8)

В 55

Упорядники:

З. М. Гасанов, Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова

Експерти:

канд. фіз.-мат. наук *Ігор Нечай*

канд. техн. наук, доц. *Олена Куроп'ятник*

Рекомендовано МКФ «КТС» (протокол № 3 від 26.04.2023).

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 631 від 23.06.2023)

В 55 Вища математика (Математичний аналіз). Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку : навчально-методичні рекомендації та завдання до практичних занять і самостійної роботи / упоряд. З. М. Гасанов, Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова ;
Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2023. – 31 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами денної та заочної форм навчання спеціальності «121 Інженерія програмного забезпечення» під час практичних занять і самостійної роботи з дисципліни «Вища математика (Математичний аналіз)».

Навчально-методичні рекомендації містять необхідні теоретичні відомості з теми «Диференціальні рівняння» курсу «Математичний аналіз», наведено розв'язки типових задач і складено завдання для самоконтролю та варіанти завдань до типових розрахунків.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Особливі точки диференціальних рівнянь та їх класифікація.....	5
2. Методи знаходження особливих точок диференціальних рівнянь.....	16
2.1. Метод обвідних сімейства інтегральних кривих.....	16
2.2. Метод p - дискримінантних кривих.....	22
Задачі та вправи для самостійної роботи.....	28
Бібліографічний список.....	29

Вступ

Багато фізичних явищ і процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Теорія диференціальних рівнянь є потужним апаратом, необхідним для складання математичних моделей різних прикладних задач та їхнього розв'язування.

Методичні рекомендації призначені для ознайомлення студентів спеціальності «121 Інженерія програмного забезпечення» з використанням диференціальних рівнянь у різних галузях наукових досліджень. Вони сприяють досягненню результатів навчання(ПРН1 і ПРН5), передбаченого освітньою програмою(ОП). А саме:

1. Вміння класифікувати диференціальні рівняння першого порядку і вибирати методи їх розв'язування.
2. Вміння розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків і їх систем.
3. Вміння обґрунтовано вибирати методи знаходження особливих точок і розв'язків диференціальні рівняння першого порядку.
4. Вміння вибирати методи для опрацювання математичних моделей технічних, економічних та фінансових задач, аргументувати застосовування основних математичних методів для розв'язання таких задач на практиці, виконувати якісний і кількісний математичний аналіз результатів.

Виклад матеріалу відповідає сучасному стану теорії диференціальних рівнянь і моделювання у тій мірі, як це потрібно майбутнім спеціалістам у галузі інформатики.

1. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Означення 1.1. Кажуть, що точка (x_0, y_0) є особливою точкою диференціального рівняння

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (1.1)$$

або

$$y' = f(x, y),$$

якщо в околі цієї точки розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

не існує або не є єдиним.

Означення 1.2. Задача пошуку розв'язку рівняння (1.1), яке задовольняє умову (1.2), є задачею Коші.

Означення 1.2. Задача пошуку розв'язку рівняння (1.1), яке задовольняє умову (1.2), є задачею Коші.

Таким чином, особливою є точка, в околі якої задача Коші або немає розв'язку, або розв'язок не є єдиним. Отже, особливі точки належать множині точок, в яких порушені умови теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Зрозуміло, що не кожна точка, в якій порушені умови теореми існування і єдиності розв'язку, обов'язково є особливою, оскільки умови цієї теореми є лише достатніми для існування і єдиності, але не необхідними.

Тобто, для знаходження особливих точок перш за все треба виділити всі ті точки, в яких порушено хоча б одну умову існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема 1.1. Нехай в прямокутнику D :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

функція $f(x, y)$ неперервна і має обмежену за модулем частинну похідну $f'_y(x, y)$. Тоді задача Коші для рівняння $y' = f(x, y)$ має єдиний розв'язок $y = y(x)$, $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, де

$$H < \min \left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N} \right), \quad M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y),$$

N – константа, така що $|f'_y(x, y)| \leq N$.

Теорема 1.2. Нехай в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y'_0) (де y'_0 – один з дійсних коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, $y(x_0) = y_0$, функція $F(x, y, y')$ задовольняє умови:

1°. $F(x, y, y')$ неперервна по всіх аргументах;

2°. похідна $\frac{\partial F}{\partial y'}$ існує та відмінна від нуля;

3°. існує обмежена за модулем похідна $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq N_1, \quad N_1 > 0.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші (1.1)-(1.2) при $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, де h_0 – досить мале число.

Зауваження. Відмітимо, що в теоремі 1.1 умову існування обмеженої за модулем похідної $f'_y(x, y)$ можна замінити на більш слабку умову Ліпшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|,$$

де N – константа.

Перша умова теореми 1.1 порушується в точках розриву функції $f(x, y)$. Якщо $|f(x, y)| \rightarrow \infty$, коли (x, y) прямує довільним чином до (x_0, y_0) , то в тих задачах, в яких змінні x та y є рівноправними, рівняння $y'_x = f(x, y)$ можна замінити на $x'_y = \frac{1}{f(x, y)}$, для якого права частина вже неперервна в точці (x_0, y_0) , якщо вважати $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$. Тому в задачах, де змінні x та y є рівноправними, перша умова теореми 1.1 порушується в тих точках, де одночасно розривні як $f(x, y)$, так і $\frac{1}{f(x, y)}$.

Зазвичай доводиться розглядати рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

де функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ неперервні. У цьому випадку функції $\frac{M}{N}$ і $\frac{N}{M}$ будуть одночасно розривні лише в тих точках (x_0, y_0) , де $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ і не існує границь $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$.

Класифікацію особливих точок можна провести на деяких типових прикладах.

Приклад 1.1. Знайти особливі точки рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Розв'язок. Функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ задовольняє умови теореми 1.1 в околі довільної точки $(x, y) \in R^2$. Тому це рівняння не має особливих точок.

Приклад 1.2. Знайти особливі точки рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}. \quad (1.3)$$

Розв'язок. Праві частини рівняння (1.3) і рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} \quad (1.4)$$

розривні в точці $(0, 0)$. Ця точка може бути особливою точкою рівняння (1.3). Для перевірки побудуємо загальний розв'язок цього рівняння:

$$x dy = 2y dx;$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x};$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + \ln C;$$

$$y = Cx^2.$$

де C – довільна константа. Розв'язком рівняння (1.3) є сімейство парабол (рис. 1.1).

Точка $O(0, 0)$ належить всім параболом $y = Cx^2$. Легко бачити, що в цій точці задача Коші має нескінченну кількість розв'язків. Отже, вона є особливою точкою. Особлива точка такого типу (коли через неї проходить множина інтегральних кривих) називається вузлом.

Оскільки задача Коші за умови $y(0) = y_0 \neq 0$ не має розв'язків, то точки $(0, y_0)$ при $y_0 \neq 0$ також є особливими.

Приклад 1.3. Знайти особливі точки рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \quad (1.5)$$

Розв'язок. Праві частини рівняння (1.5) і рівняння

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \quad (1.6)$$

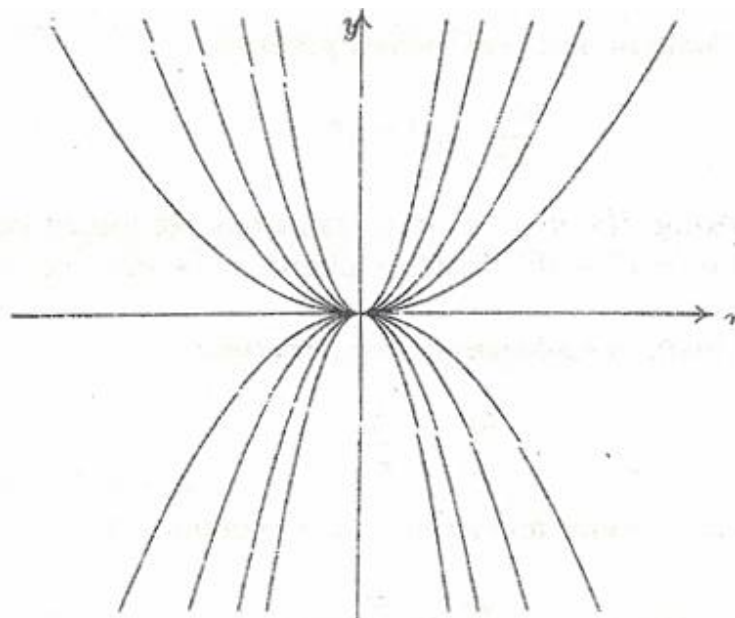


Рис. 1.1

одночасно розривні в точці $(0,0)$. Після інтегрування рівняння (1.5) отримуємо сімейство інтегральних кривих $y = \frac{C}{x}$. Сімейство інтегральних кривих є сімейством гіпербол (рис. 1.2). Прямі $y = 0$ при $x \neq 0$ та $x = 0$ при $y \neq 0$ є інтегральними кривими рівнянь (1.5) та (1.6) відповідно. Тому розв'язку задачі Коші для рівняння (1.5) ((1.6)), яке б задовольняло умову $y(0) = 0$ ($x(0) = 0$), не існує. Точка $O(0,0)$ – особлива.

З іншого боку, в довільному нескінченно малому околі точки $O(0,0)$ задача Коші має симетричні відносно цієї точки пари інтегральних кривих. Тому таку особливу точку називають *сідлом*.

Приклад 1.4. Знайти особливі точки рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}. \quad (1.7)$$

Розв'язок. Праві частини рівняння (1.7) і рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y} \quad (1.8)$$

одночасно розривні в точці $O(0,0)$, яка є точкою перетину прямих розриву $y = x$ та $y = -x$.

Знайдемо сімейство інтегральних кривих рівняння (1.7). Рівняння (1.7) –

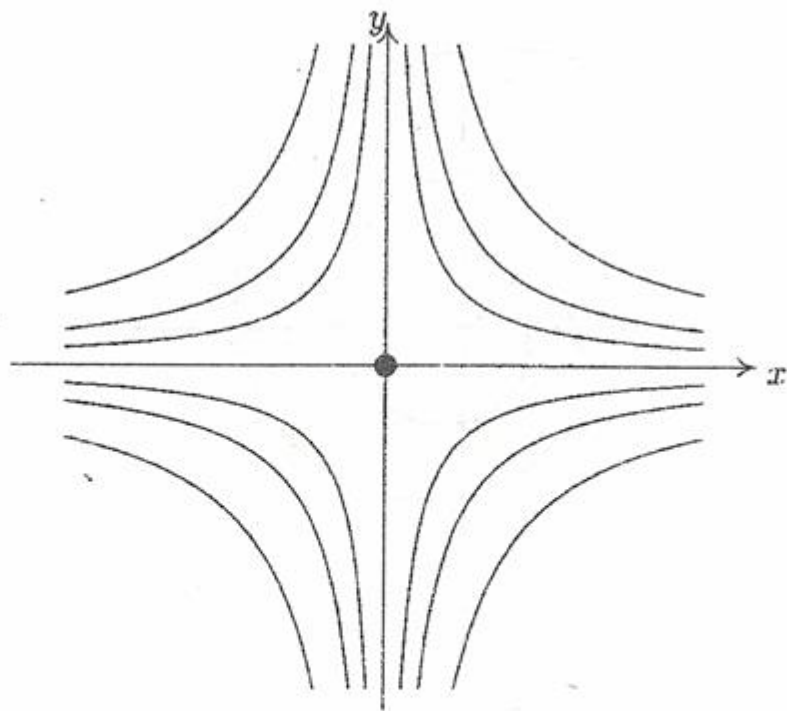


Рис. 1.2

однорідне. Тому воно розв'язується за допомогою заміни $y = zx$:

$$y' = z'x + z;$$

$$z'x + z = \frac{x + zx}{x - zx};$$

$$z'x + z = \frac{1 + z}{1 - z};$$

$$z'x = \frac{1 + z}{1 - z} - z;$$

$$z'x = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z};$$

$$z'x = \frac{1 + z^2}{1 - z};$$

$$\int \frac{(1 - z) dz}{1 + z^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln |x| + \ln C;$$

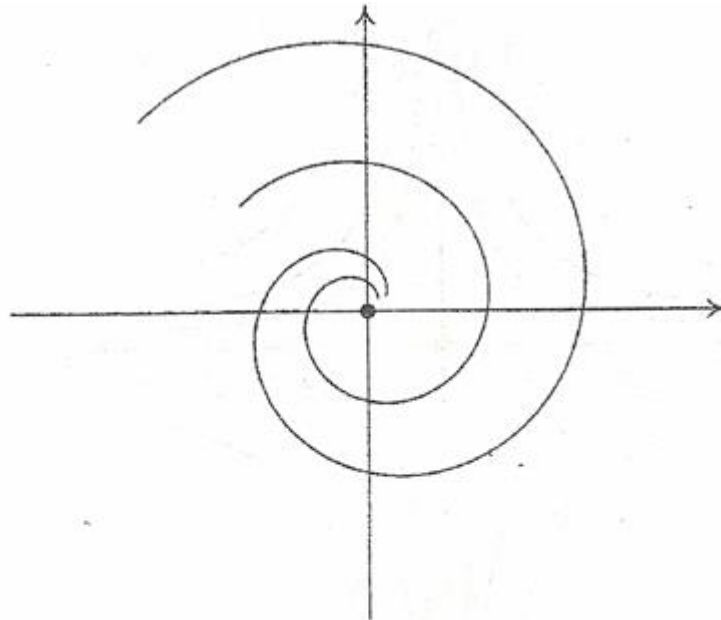


Рис. 1.3

$$\operatorname{arctg} z = \ln(x C \sqrt{1+z^2});$$

$$xC \sqrt{1+z^2} = e^{\operatorname{arctg} z};$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{C} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

або в полярних координатах (ρ, φ) : $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:

$$\rho = \frac{1}{C} e^{\varphi}.$$

Інтегральними кривими є сімейство логарифмічних спіралей (рис. 1.3).

Очевидно, що точка $O(0,0)$ є особливою точкою. Особливі точки такого типу називають *фокусом*.

Приклад 1.5. Знайти особливі точки рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (1.9)$$

Розв'язок. Праві частини цього рівняння та рівняння

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad (1.10)$$

розривні в точці $O(0,0)$. Інтегральні криві рівняння (1.9) є сімейством кіл $x^2 + y^2 = C^2$ з центром у початку координат (рис. 1.4). Рівняння (1.9) не має

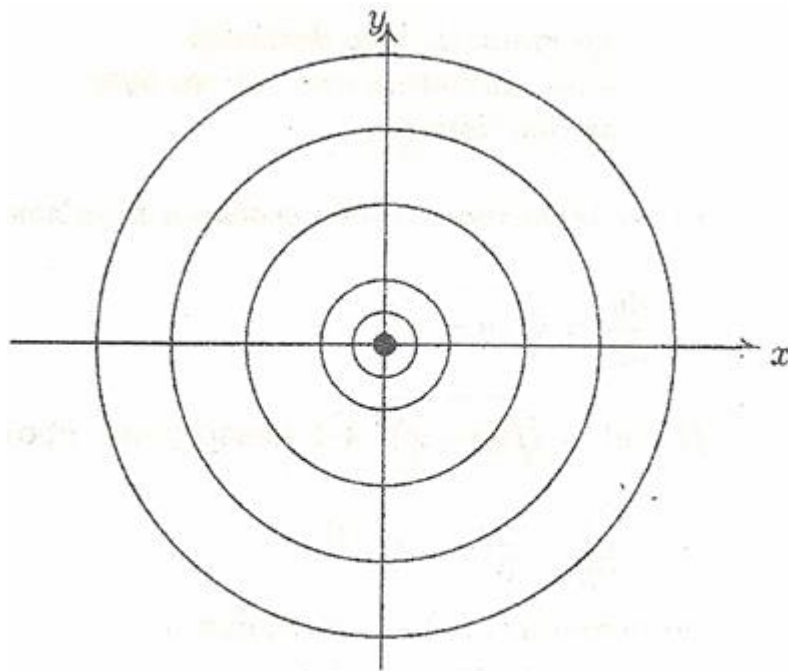


Рис. 1.4

розв'язків, які б задовольняли умову $y(0) = 0$. Проте довільний окіл точки $O(0,0)$ заповнений сімейством замкнених інтегральних кривих у вигляді кіл. Тому точка $O(0,0)$ є особливою точкою типу *центра*.

Таким чином, серед усіх особливих точок диференціальних рівнянь, як правило, визначають чотири типи особливих точок: вузол, сідло, фокус, центр.

У деяких випадках множина особливих точок диференціального рівняння утворює деяку криву, яка зветься *особливою кривою* диференціального рівняння. Найчастіше особливі криві мають такі диференціальні рівняння, в яких порушено другу умову теореми 1.1 – умову Ліпшица або умову існування обмеженої частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$. Це точки (x_0, y_0) , для яких

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \infty.$$

Ці точки можна знайти з умови

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} = 0. \quad (1.11)$$

Рівняння (1.11) визначає деяку криву L .

Якщо в точках кривої L порушено єдиність розв'язку задачі Коші, то вона буде особливою, якщо ж, крім того, L є інтегральною, то отримуємо *особливу інтегральну криву*.

Зауваження. Можливо, що крива L має декілька гілок, тоді для кожної гілки треба окремо розглядати питання про те, чи буде вона особливою кривою або особливою інтегральною кривою.

Приклад 1.6. Знайти особливі точки (або особливі розв'язки, якщо вони є) рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 5}. \quad (1.12)$$

Розв'язок. Функція $f(x, y) = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 5}$ неперервна, проте частинна похідна

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$$

необмежено зростає при наближенні (x, y) до точок прямої $y = x$. Особливими точками можуть бути лише точки цієї прямої. Але функція $y = x$ не задовольняє рівняння (1.12). Тому рівняння (1.12) не має особливих розв'язків. Якщо на прямій $y = x$ єдиність розв'язку задачі Коші порушується, то вона є особливою кривою. Перевіримо це. Для цього знайдемо сімейство інтегральних кривих:

$$\begin{aligned} z &= y - x; \\ z' &= y' - 1; \\ z' + 1 &= \sqrt[3]{z^2 + 5}; \\ z' &= \sqrt[3]{z^2 + 4}; \\ \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2 + 4}} &= \int dx. \end{aligned}$$

За допомогою методів інтегрування ірраціональних виразів знайдемо

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2 + 4}} = 3\sqrt[3]{z} - 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\sqrt[3]{z}.$$

Тоді розв'язок рівняння (1.12) має вигляд

$$3\sqrt[3]{y-x} - 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\sqrt[3]{y-x} = x + C.$$

Для всіх точок (x_0, y_0) прямої $y = x$ задача Коші за умови $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок

$$3\sqrt[3]{y-x} - 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\sqrt[3]{y-x} = x - x_0.$$

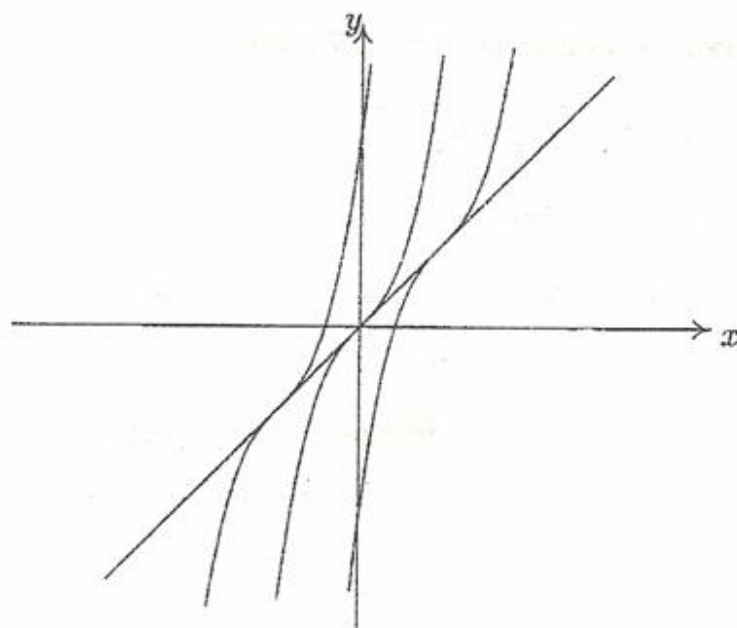


Рис. 1.5

Таким чином, рівняння (1.12) не має особливих точок, незважаючи на те, що друга умова теореми 1.1 існування та єдиності не виконується.

Приклад 1.7. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1, \quad (1.13)$$

аналогічне рівнянню (1.12).

Пряма розриву $y = x$ похідної від правої частини є інтегральною кривою. Сімейство інтегральних кривих рівняння (1.13) має вигляд

$$y - x = \frac{1}{27}(x - C)^3.$$

Для всіх точок (x_0, y_0) прямої $y = x$ задача Коші за умови $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок (рис. 1.5)

$$y - x = \frac{1}{27}(x - x_0)^3. \quad (1.14)$$

Таким чином, через кожную точку (x_0, y_0) прямої $y = x$ проходять дві інтегральні криві рівняння (1.13) (крива (1.14) і пряма $y = x$). Отже, пряма $y = x$ є особливою інтегральною кривою рівняння (1.13).

Зауваження. Аналіз прикладів 1.6 і 1.7 дозволяє зробити висновок, що рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + a$$

має особливий розв'язок (особливі точки) лише при $a = 1$.

Приклад 1.8. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y = xy' - y'^2. \quad (1.15)$$

Розв'язок. Перевіримо умови теореми 1.2: $F(x, y, y') = y - xy' + y'^2$.
 $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = -x + 2y'$. Умови 1°, 3° виконані. Умова 2° порушується вздовж інтегральних кривих рівняння

$$-x + 2y' = 0.$$

Маємо

$$y' = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{x^2}{4} + C, \quad C = \text{const.}$$

Таким чином, особливими точками рівняння можуть бути лише точки сімейства парабол $y = \frac{x^2}{4} + C$. Підставимо ці функції в рівняння (1.15):

$$\frac{x^2}{4} + C = x \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2;$$

$$\frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4};$$

$$C = 0.$$

Таким чином, тільки $y = \frac{x^2}{4}$ є інтегральною кривою рівняння (1.15). Отже, вона може бути особливою інтегральною кривою.

Для перевірки розв'яжемо рівняння (1.15). Це рівняння Клеро, тому

$$y' = p;$$

$$y = xp - p^2;$$

$$y' = p + xp' - 2pp';$$

$$p = p + xp' - 2pp';$$

$$p'(x - 2p) = 0;$$

$$\begin{cases} p' = 0, \\ x - 2p = 0. \end{cases}$$

$$p' = 0, \quad p = C.$$

Сімейство інтегральних кривих рівняння є сімейством прямих

$$y = xC - C^2, \quad C = \text{const.}$$

Додатковий розв'язок рівняння (1.15) визначається рівняннями

$$y = xp - p^2, \quad x - 2p = 0 \implies y = \frac{x^2}{4}!$$

Таким чином, рівняння (1.15) має такі розв'язки:

$$y = xC - C^2, \quad C = \text{const};$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Нехай $C = C_0$. (Візьмемо конкретну інтегральну криву рівняння (1.15)). Пряма $y = xC_0 - C_0^2$ та парабола $y = \frac{x^2}{4}$ перетинаються в точці $x_0 = 2C_0$. Отже, через кожну точку параболи $y = \frac{x^2}{4}$ проходять дві інтегральні криві рівняння (1.15). Тобто парабола $y = \frac{x^2}{4}$ є *особливою інтегральною кривою* рівняння (1.15).

Тепер перевіримо, чи є точки кривих $y = \frac{x^2}{4} + C_1$, $C_1 = \text{const} \neq 0$ особливими. Для цього знайдемо точки перетину інтегральних кривих $y = xC_2 - C_2^2$, $C_2 = \text{const}$ з даними параболою:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + C_1, \\ C_1 \neq 0, \\ y = xC_2 - C_2^2. \end{cases}$$

Нехай $C_1 = C_1^0$. Тоді

$$\frac{x^2}{4} + C_1^0 = xC_2 - C_2^2;$$

$$x^2 - 4xC_2 + 4C_1^0 + 4C_2^2 = 0;$$

$$x_{1,2} = 2C_2 \pm \sqrt{4C_2^2 - 4C_1^0 - 4C_2^2};$$

$$x_{1,2} = 2 \left(C_2 \pm \sqrt{-C_1^0} \right). \quad (1.16)$$

Звідси випливає, що при $C_1^0 > 0$ крива $y = \frac{x^2}{4} + C_1^0$ не перетинає жодну інтегральну криву. Тобто криві $y = \frac{x^2}{4} + C_1$ при $C_1 > 0$ є *особливими*, бо через точки цих кривих не проходить жодна інтегральна крива рівняння (1.15).

З формули (1.16) видно, що при кожному значенні $C_1^0 < 0$ точки перетину кривої $y = \frac{x^2}{4} + C_1^0$ з інтегральними кривими $y = xC_2 - C_2^2$ визначаються однозначно відносно параметра C_2 . Це означає, що через кожную точку кривих $y = \frac{x^2}{4} + C_1$, $C_1 < 0$ проходить єдина інтегральна крива, тому вони не є особливими.

2. МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У попередньому розділі ми знаходили особливі точки, особливі криві та особливі розв'язки шляхом безпосереднього аналізу. Тепер розглянемо деякі алгоритми, які дозволяють знайти особливі розв'язки.

2.1. Метод обвідних сімейства інтегральних кривих

Обвідною сімейства кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2.1)$$

є така крива, що в кожній своїй точці має спільну дотичну пряму з деякою кривою сімейства (2.1), тобто в усіх своїх точках дотикається кривої з цього сімейства.

З означення випливає, що якщо сімейство (2.1) є сімейством інтегральних кривих рівняння (1.1), то обвідна крива цього сімейства також є інтегральною кривою, бо в кожній її точці трійка значень (x, y, y') задовольняє рівняння (1.1). Отже, *якщо сімейство інтегральних кривих має обвідну, то вона є особливою інтегральною кривою*, оскільки в кожній її точці порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Таким чином, одним з методів знаходження особливих інтегральних кривих є пошук обвідної сімейства інтегральних кривих.

З курсу математичного аналізу відомо, що якщо обвідна існує, то вона входить до складу так званих C -дискримінантних кривих, які визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Система (2.2) при виключенні C визначає деяку функцію $y = \varphi(x)$ (або декілька функцій), яка може бути рівнянням обвідної. Функція $y = \varphi(x)$, знайдена з системи (2.2), визначає обвідну, якщо виконані такі умови:

1) вздовж кривої $y = \varphi(x)$ існують обмежені за модулем частинні похідні

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| < N, \quad M, N = \text{const}; \quad (2.3)$$

2) вздовж кривої $y = \varphi(x)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0. \quad (2.4)$$

Зауваження. Умови 1 та 2 є лише достатніми, а тому гілки C -дискримінантних кривих, вздовж яких порушено хоча б одну з цих умов, можуть також бути обвідними.

Приклад 2.1. Сімейство інтегральних кривих рівняння (1.15), розглянутого в прикладі 1.8, задається рівнянням

$$y = xC - C^2.$$

Знайдемо C -дискримінантні криві

$$\begin{cases} y - xC + C^2 = 0, \\ -x + 2C = 0. \end{cases}$$

$$C = \frac{x}{2};$$

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

C -дискримінантною кривою є вже знайома нам парабола $y = \frac{x^2}{4}$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -C,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1.$$

Умови (2.3) та (2.4) виконуються. Тому $y = \frac{x^2}{4}$ є обвідною сімейства інтегральних кривих рівняння (1.15), а значить, особливою інтегральною кривою цього рівняння (рис. 2.1).

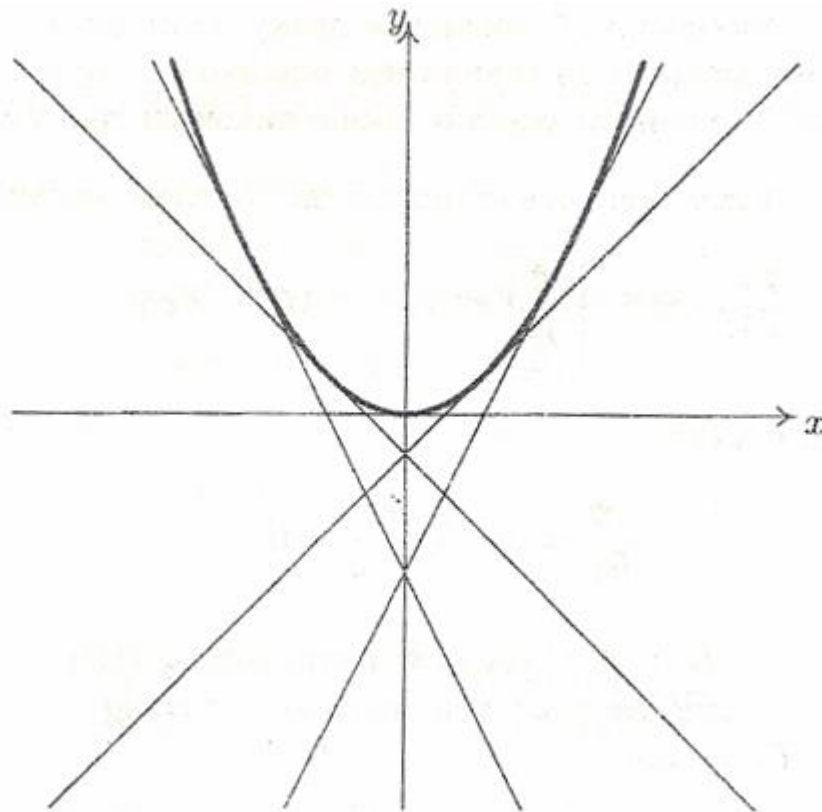


Рис. 2.1

Приклад 2.2. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0. \quad (2.5)$$

Розв'язок. Відповідно до вищеприведеного алгоритму знайдемо загальний інтеграл цього рівняння. Оскільки при $y' = 0$ рівняння не задовольняється, можемо припустити, що $y' \neq 0$. Тоді

$$y = \frac{x(y'^2 + 1)}{2y'}.$$

Це рівняння Лагранжа, яке розв'язується шляхом введення параметра:

$$\begin{aligned} y' &= p, \quad p \neq 0; \\ y &= \frac{x}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x}{2} \left(\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right); \\
p - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2p} &= \frac{x}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right); \\
\frac{p^2 - 1}{2p} &= \frac{x}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{p^2 - 1}{p^2}; \\
\frac{p^2 - 1}{2p} \left(1 - \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

При $\frac{p^2 - 1}{2p} = 0$ маємо

$$\begin{aligned}
p^2 - 1 &= 0; & p &= \pm 1; \\
y' &= \pm 1; \\
y &= \pm x + C.
\end{aligned}$$

Шляхом підстановки в рівняння (2.6) переконуємося, що дана функція задовольняє його лише при $C = 0$.

Таким чином, маємо додаткові розв'язки $y = \pm x$. Далі, з (2.6) маємо:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx} &= 0; \\
\frac{dp}{x} &= \frac{dx}{x}; \\
x &= pC; \\
p &= \frac{x}{C}; \\
y &= \frac{x}{2} \left(\frac{x}{C} + \frac{C}{x} \right); \\
2yC - x^2 - C^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) визначає сімейство інтегральних кривих. Знайдемо C -дискримінантні криві:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2yC - x^2 - C^2 = 0, \\ 2y - 2C = 0. \end{cases} \\
C = y; \\
2y^2 - x^2 - y^2 = 0; \\
y = \pm x.
\end{aligned}$$

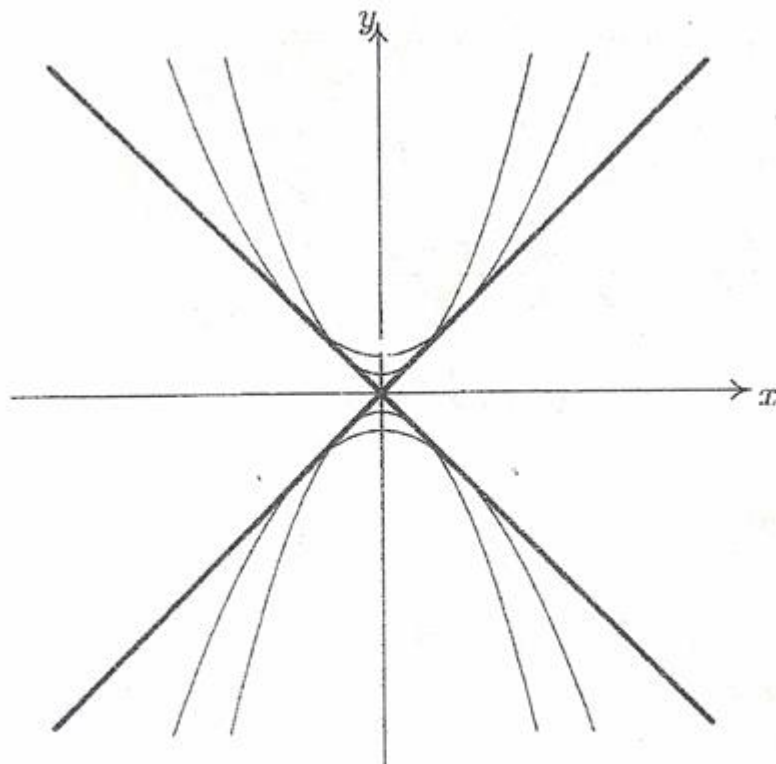


Рис. 2.2

Раніше знайдені нами додаткові розв'язки є C -дискримінантними кривими. Вддовж цих кривих перевіримо умови (2.3) та (2.4):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2C.$$

Всі гілки (промені бісектрис, які виходять з початку координат) прямих $y = \pm x$ при $x \neq 0$ задовольняють умови (2.3) та (2.4). Тому вони є обвідними. А в точці $(0, 0)$ єдиність розв'язку задачі Коші порушується через функції $y = \pm x$. Тому $y = \pm x$ є особливими розв'язками рівняння (2.5) (рис. 2.2).

Легко переконатися в тому, що рівняння (2.5) не має інших особливих розв'язків та особливих точок. Для цього досить повторити процедуру аналізу прикладу 1.8. Студентам пропонується провести цей аналіз самостійно.

Приклад 2.3. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y^2 y'^2 + y^2 = 1,$$

якщо відомо, що його загальний інтеграл є $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

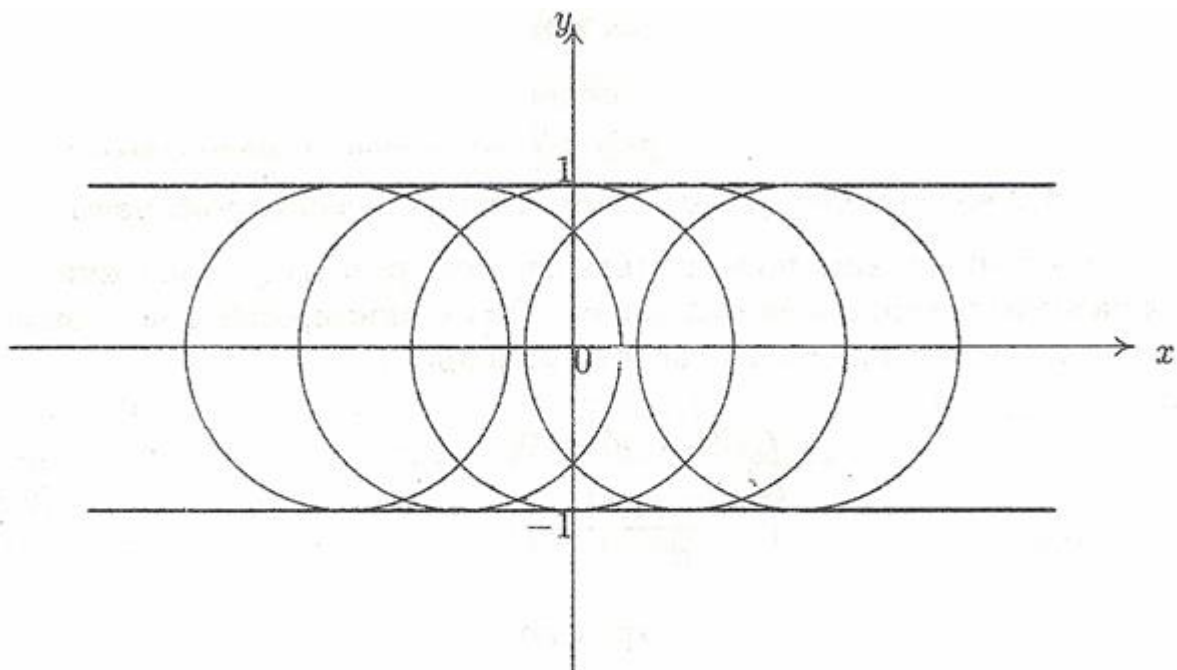


Рис. 2.3

Розв'язок. Знайдемо C -дискримінантні криві:

$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = 1, \\ 2(x - C) = 0. \end{cases}$$

$$C = x;$$

$$y^2 = 1;$$

$$y = \pm 1.$$

C -дискримінантними кривими є прямі $y = \pm 1$. Перевіримо умови (2.3) та (2.4): $\Phi = (x - C)^2 + y^2 - 1$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x - C); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y.$$

Вздовж прямих $y = \pm 1$ $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x - C)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \pm 2 \neq 0$. Це означає, що при довільних x , $C \in (-\infty, +\infty)$ умови (2.3) та (2.4) виконуються. Отже, прямі $y = \pm 1$ є обвідними сімейства інтегральних кривих та особливими інтегральними кривими (рис. 2.3)

Зауважимо, що при різних значеннях параметра C інтегральні криві перетинаються, а значить, кожна інтегральна крива містить особливі точки.

2.2. Метод p -дискримінантних кривих

Відмітимо, що в диференціальних рівняннях, які зустрічаються в прикладних задачах, умови 1° і 3° теореми 1.2, як правило, виконуються, але умова 2° $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ часто порушується. Тому в таких задачах *особливою точкою* називають точку, в якій порушується єдиність розв'язку, а множину таких точок називають *особливою множиною*. Таким чином, особлива множина для рівняння (1.1) визначається з системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{F(x, y, y')}{dy'} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Якщо виключити y' з системи (2.8), отримаємо рівняння

$$G(x, y) = 0, \quad (2.9)$$

яке задовольняють точки особливої множини. Оскільки умови теореми 1.2 лише достатні для єдиності розв'язку, то не кожна точка, яка задовольняє рівняння (2.9), є особливою.

Рівняння (2.9) визначає деяку криву, яка називається p -дискримінантною (тому що рівняння системи (2.9) частіше записуються у вигляді $F(x, y, p) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$). Таким чином, тільки серед p -дискримінантних кривих рівняння (1.1) можуть бути особливі інтегральні криві.

Отже, для знаходження особливого розв'язку рівняння (1.1) необхідно:

- знайти p -дискримінантні криві з системи

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \frac{F(x, y, p)}{dp} = 0; \end{cases}$$

- безпосередньою підстановкою перевірити, чи є серед p -дискримінантних кривих інтегральні криві рівняння (1.1);
- перевірити, чи порушується єдиність розв'язку в точках знайдених інтегральних кривих.

Приклад 2.4. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y = 2xy' - y'^2. \quad (2.10)$$

Розв'язок. Умови 1° і 3° теореми 1.2 для функції $F(x, y, y') = y - 2xy' + y'^2$ виконуються. Знайдемо p -дискримінантні криві:

$$\begin{cases} y - 2xp + p^2 = 0, \\ -2x + 2p = 0; \\ p = x; \\ y = x^2. \end{cases}$$

Оскільки функція $y = x^2$ (p -дискримінантна крива) не задовольняє вихідне рівняння, то особливого розв'язку це рівняння не має.

Приклад 2.5. Знайти особливий розв'язок рівняння Лагранжа

$$x - y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3. \quad (2.11)$$

Розв'язок. Знайдемо p -дискримінантні криві:

$$\begin{cases} x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0, \\ -\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0. \end{cases}$$

$$p_1 = 0 \Rightarrow y = x.$$

$$p_2 = 1 \Rightarrow y = x - \frac{4}{9} + \frac{8}{27};$$

$$y = x - \frac{4}{27}.$$

Функція $y = x$ не задовольняє рівняння (2.11), а функція $y = x - \frac{4}{27}$ задовольняє. Тепер треба з'ясувати, чи порушується вздовж $y = x - \frac{4}{27}$ єдиність розв'язку. Для цього необхідно проінтегрувати рівняння (2.11):

$$\begin{aligned} y' &= p, & y &= x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3; \\ y' &= 1 - \frac{8}{9}p \frac{dp}{dx} + \frac{8}{9}p^2 \frac{dp}{dx}; \\ p - 1 &= \frac{8}{9} \frac{dp}{dx} (p^2 - p); \\ \frac{p^2 - p}{p - 1} dp &= \frac{9}{8} dx. \end{aligned}$$

При $p = 1$ отримуємо функцію $y = x - \frac{4}{27}$, яка є розв'язком рівняння (2.11). Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$p dp = \frac{9}{8} dx;$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{9}{8} x + C;$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{9}{8} x + C} \quad (C = 2C);$$

$$y = x - \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9} x + C \right) \pm \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{9}{4} x + C} \right)^3;$$

$$C = \frac{4}{9} C;$$

$$y + C = \pm \left(\sqrt{x + C} \right)^3;$$

$$(y + C)^2 = (x + C)^3.$$

Отримали сімейство напівкубічних парабол.

Порушення єдиності розв'язку можна перевірити за допомогою C -дискримінантних кривих:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= (y + C)^2 - (x + C)^3; \\ \begin{cases} (y + C)^2 - (x + C)^3 = 0, \\ 2(y + C) - 3(x + C)^2 = 0; \end{cases} \\ y + C &= \frac{3}{2}(x + C)^2; \quad \frac{9}{4}(x + C)^4 - (x + C)^3 = 0; \\ \begin{cases} x + C = 0, \\ \frac{9}{4}(x + C) - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

У першому випадку отримаємо функцію $y = -C$, яка не є інтегральною кривою. У другому випадку $C = \frac{4}{9} - x$. Тоді

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{4}{9} - x \right)^2 &= \left(\frac{4}{9} \right)^3; \\ y &= x - \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Знайдена нами p -дискримінантна крива є C -дискримінантною. При $y =$

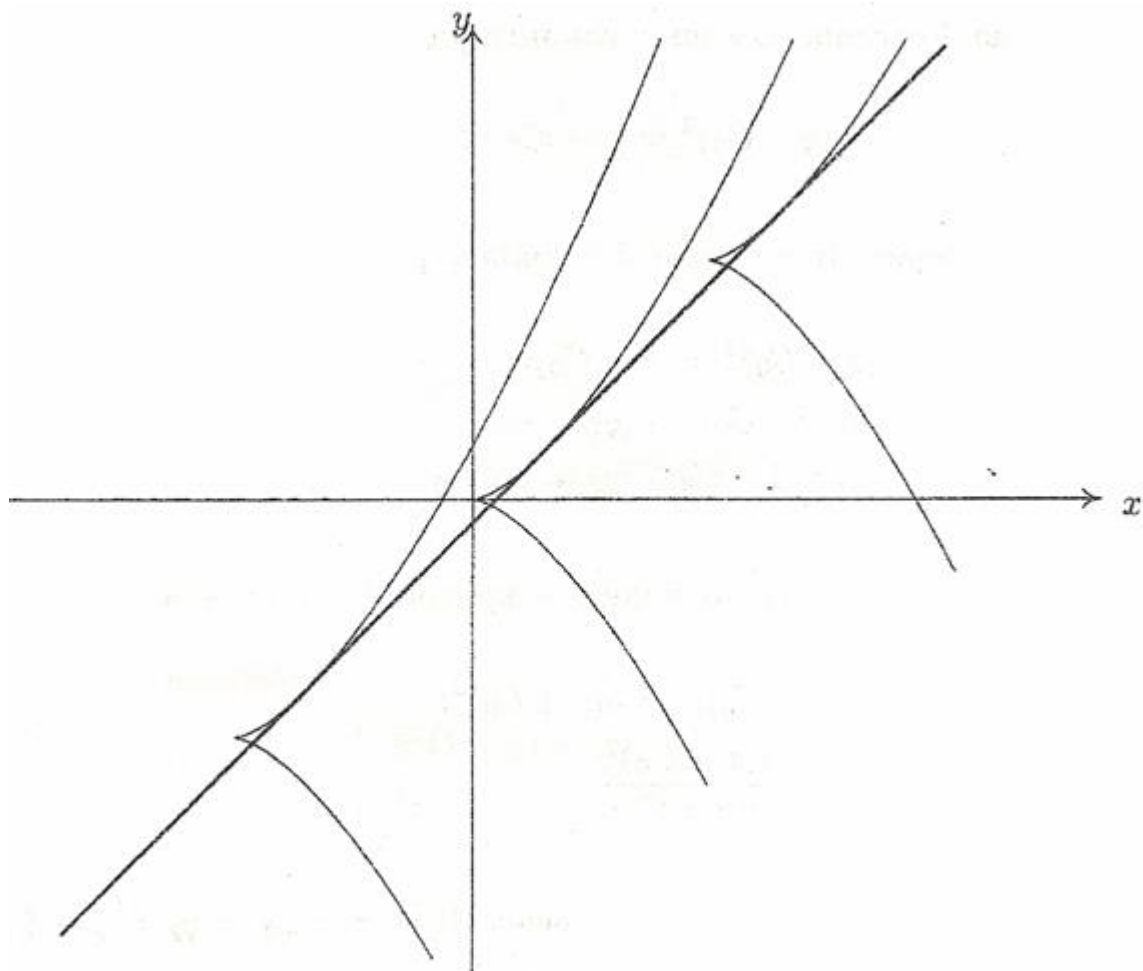


Рис. 2.4

$$x - \frac{4}{27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -3(x + C)^2; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2(y + C) = 2\left(x - \frac{4}{27} + C\right).\end{aligned}$$

Очевидно, що $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|$ та $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|$ обмежені при довільних $x, C \in (-\infty, +\infty)$ і одночасно не дорівнюють нулю. Отже, p -дискримінантна крива $y = x - \frac{4}{27}$ є обвідною сімейства інтегральних кривих рівняння (2.11) і є особливою інтегральною кривою (рис. 2.4).

З рисунку 2.4 видно, що пряма $y = x$ складається з так званих *точок повороту* інтегральних кривих, в яких існує безліч дотичних. Переконаємося

цьому аналітично. Розглянемо конкретну інтегральну криву при $C = C_0$:

$$(y + C_0)^2 = (x + C_0)^3. \quad (2.12)$$

Знайдемо точки перетину цієї кривої з прямою $y = x$:

$$\begin{aligned}(x + C_0)^2 &= (x + C_0)^3; \\ x_1 &= -C_0; \quad y_1 = -C_0; \\ x_2 &= 1 - C_0; \quad y_2 = 1 - C_0.\end{aligned}$$

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривої (2.12) в точках x_1, x_2 :

$$\begin{aligned}2(y + C_0)y' &= 3(x + C_0)^2; \\ y' &= \frac{3(x + C_0)^2}{2(y + C_0)}.\end{aligned}$$

При $x = x_1 = y_1 = -C_0$ y' – не визначена. При $x = x_2 = y_2 = 1 - C_0$ $y' = \frac{3}{2}$. При кожному значенні $C = C_0$ інтегральна крива неперервна, але в одній з точок перетину з прямою $y = x$ похідна не існує (не визначена), що і треба було довести.

Приклад 2.6. Знайти особливі розв'язки диференціального рівняння

$$y'^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y). \quad (2.13)$$

Розв'язок. Знайдемо p -дискримінантні криві:

$$\begin{cases} p^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y), \\ 2p(2 - 3y) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

При $p = 0$ отримаємо $y = 1$. При $2 - 3y = 0$ система не сумісна.

Рівняння має єдину p -дискримінантну пряму $y = 1$.

Тепер знайдемо C -дискримінантні криві.

Спочатку знайдемо загальний інтеграл:

$$(y')^2 = \frac{4(1-y)}{2(3-y)^2};$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{4(1-y)}{2(3-y)^2}};$$

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}};$$

$$x = \pm \int \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}} dy;$$

$$x = \pm y\sqrt{1-y} + C;$$

$$(x-C)^2 = y^2(1-y).$$

Звідси отримуємо

$$\begin{cases} y^2(1-y) - (x-C)^2 = 0, \\ 2(x-C) = 0. \end{cases}$$

$$C = x \Rightarrow y^2(1-y) = 0;$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

P -дискримінантна крива $y = 1$ є також C -дискримінантною.

$$\Phi = y^2(1-y) - (x-C)^2;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2(x-C); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y - 3y^2.$$

Оскільки при $y = 0$ $x = C$, то вздовж $y = 0$ $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$. Тому $y = 0$ не є обвідною та інтегральною кривою.

Пряма $y = 1$ є інтегральною кривою та обвідною, тому що при $y = 1$ $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ не дорівнює нулю.

Таким чином, p - та C -дискримінантна пряма $y = 1$ є обвідною. Отже, вона є особою інтегральною кривою.

Оскільки при $y = 0$ $\Phi = -(x-C)^2$, то пряма $y = 0$ проходить через вузлові точки інтегральних кривих (рис. 2.5).

Нарешті, відмітимо, що рівняння Клеро $y = xy' + \varphi(y')$, де φ - деяка диференційована функція, завжди має особливий розв'язок. Сімейство інтегральних кривих є сімейством прямих $y = xC + \varphi(C)$, його додатковий розв'язок, який визначається параметричними рівняннями $y = xp + \varphi(p)$, $x = -\varphi'(p)$, є обвідною кривою. Цей додатковий розв'язок і є особливим розв'язком.

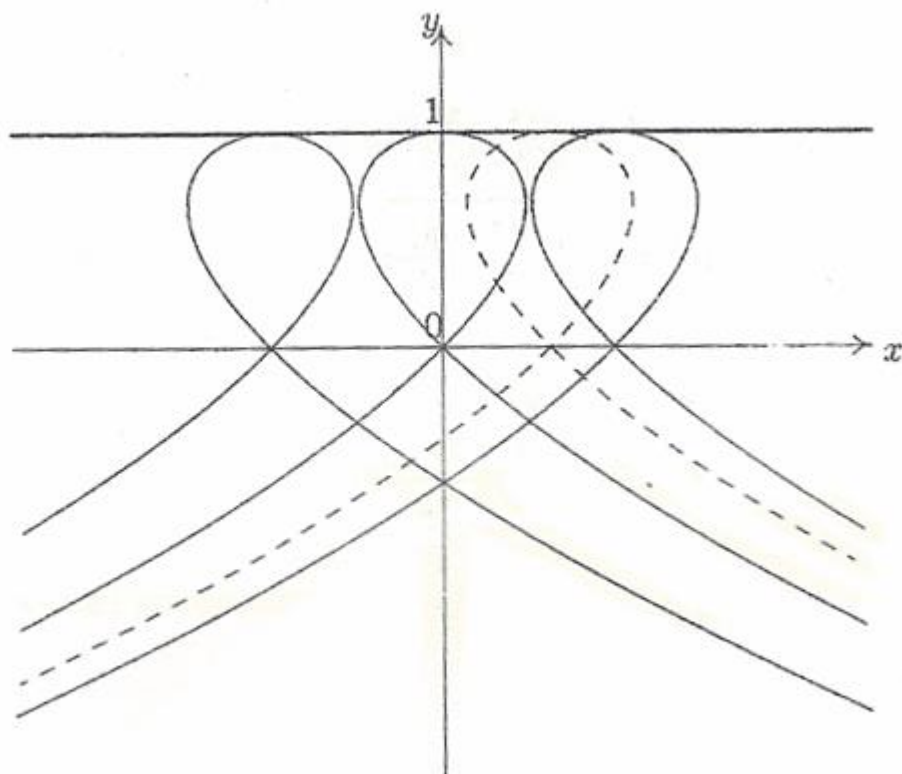


Рис. 2.5

Задачі та вправи для самостійної роботи

Знайти (якщо вони є) особливі точки, особливі криві та особливі розв'язки таких диференціальних рівнянь:

1. $(1 + y'^2)y^2 - 4yy' - 4x = 0$.

10. $2y'^2(y - xy') = 1$.

2. $y'^2 - 4y^2 = 0$.

11. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

3. $y'^2 + y^2 = yy'(y' + 1)$.

12. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.

4. $y^2(y'^2 + 1) = 1$.

13. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.

5. $4(1 - y) = (3y - 2)^2y'^2$.

14. $y'^2 + (x + 2)e^y = 0$.

6. $y = 3xy' - 7y'^2$.

15. $y'^4 + y^2 = y^4$.

7. $y = xy' - (2 + y')$.

16. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.

8. $x(y'^2 + 1) = 2yy'$.

17. $x = y'^2 + y'$.

9. $y'^2 = 3(xy' - y)$.

18. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.

$$19. y' - 2xy' = 8x^2.$$

$$20. x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'.$$

$$21. y(y - 2xy')^2 = 2y'.$$

$$22. 8y'^2 = 27y.$$

$$23. y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

$$24. (xy' + y)^2 = y^2y'.$$

$$25. y'^2 - yy' + e^x = 0.$$

$$26. y = 2xy' + y^2y'^2.$$

$$27. 2xy' - y = \ln y'.$$

$$28. y'^2 = 3(xy' - y).$$

$$29. xy' - y = \ln y'.$$

$$30. y' - 1^2 = y^2.$$

$$31. y' = \frac{-2x + y}{3x + y}.$$

$$32. y' = \frac{x + y}{-x + 2y}.$$

$$33. y' = \frac{-x + y}{-x + 3y}.$$

$$34. y' = \frac{x + y}{3x - y}.$$

$$35. y' = \frac{3x - y}{-2x - y}.$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : «А.С.К.», 2001. 648 с.
2. Самойленко Л. Н., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.
3. Гаращенко Ф. Г., Матвієнко В. Т., Харченко І. І. Диференціальні рівняння для інформатиків. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2008. 352 с.
4. Копась І. М. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для інж. спец. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2018. 126 с.
5. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів. Київ : Національна академія управління, 1997. 397 с.
6. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник : У 2 ч. Київ : Техніка, 2000. 592 с.

Навчально-методичне видання

**Гасанов Закарія Муса огли,
Максименкова Юлія Анатоліївна,
Михайлова Тетяна Федорівна**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА (МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ).
Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку**

Навчально-методичні рекомендації та завдання
до практичних занять і самостійної роботи

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка З. М. Гасанов

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Ум. друк. арк. 1,80. Обл.-вид. арк. 0,12.
Зам. № 78

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010