Mathematical sciences

SUBOPTIMAL CONTROL OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Maksymenkova Yuliia
Dnipro, Ukraine, USUST
Michaylova Tetyana
Associate Professor of math and physics, Dnipro, Ukraine, USUST

СУБОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО- ЗБУРЕНОЮ СИСТЕМОЮ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Максименкова Юлія
Дніпро, Україна, УДУНТ
Михайлова Тетяна
доцент, кандидат фізико-математичних наук, Дніпро, Україна, УДУНТ

Запропоновано метод наближеного розв'язання сингулярно збуреної задачі оптимального керування інтенсивним процесом електролізу. Будуються субоптимальне керування і критерій якості з використанням асимптотики нульового порядку, а також оцінюється близькість отриманих наближених рішень до точних.

Процес електролізу в при катодному шарі описується функцією $c(x,t)$ *, яка всередині області* $Q = \{[0,\delta]\times[0,T]\}$ *задовольняє рівнянню*

$$\tau_r c_{tt} + c_t = D c_{xx} \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$c(x,0) = c_0(x), \qquad c_t(x,0) = \varphi(x), \qquad (2)$$

і крайовими умовами

$$c_x(0,t) = \frac{p(t)}{a}, \qquad c(\delta,t) = \psi(t), \qquad (3)$$

де τ_r *– час релаксації,* $p(t)$ *– катодна густина розрядного струму іонів металу,* $a = Z\cdot F\cdot D$ *– електрохімічна константа,* $c(x,t)$ *– концентрація металевих іонів у об'ємі електролізера,* δ *– товщина катодного шару.*

Необхідно знайти такий керування $p(t)$ *, яке задовольняє умову*

$$\int_0^T p^2(t)dt < \infty$$

Щоб в кінці процесу електролізу виконувалась умова

$$c(x,T) = \theta(x)$$

а функціонал енергії

$$I[p(t)] = \int_0^T p^2(t)dt$$

Набував найменшого значення.

Використовуючи [1], можна було довести, що ця задача еквівалентна задачі з мінімальною енергією з функціоналом якості

$$I[p(t)] = \int_0^T p^2(t)dt + \frac{1}{\beta}\int_0^\delta [c(x,T) - \theta(x)]^2 dt, \qquad (5)$$

$$\|p(t,\beta) - p(t)\|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{ на } \beta \to 0.$$

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягина для розв'язання цієї задачі, отримуємо, що цей контроль $p(t)$ *визначається формулою*

$$p(t) = -\frac{D}{2a\beta} V(0,t), \tag{6}$$

де $V(x,t)$ *— єдиний розв'язок крайової задачі (7) – (9)*

$$\tau_r V_t'' - V_t' = DV_{xx}''; \tag{7}$$

$$\begin{cases} V(x,T) = -2c_t(x,T); \\ \tau_r V_t(x,T) = -2c_t(x,T) + 2[c(x,T) - \theta(x)]; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} V_x(0,t) = 0; \\ V(\delta,t) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Оскільки час релаксації τ_r *є малим параметром, а задача (1) – (3), (7 – 9) є сингулярно збуреною, то шукаємо її розв'язок у вигляді суми регулярної компоненти та функції граничного шару, кожна з яких представлена як сума рядів за степенями* τ_r

$$c(x,t) = \bar{c}(x,t) + \Pi c(x,\tau), \quad V(x,t) = \bar{V}(x,t) + QV(x,\bar{\tau}), \tag{10}$$

$$\bar{c}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \bar{c}_i(x,t); \quad \Pi c(x,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \Pi c_i(x,\tau). \tag{11}$$

$$\bar{V}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \bar{V}_i(x,t); \quad QV(x,\bar{\tau}) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i QV_i(x,\bar{\tau}), \tag{12}$$

де $\tau = t/\tau_r$; $\bar{\tau} = (T-t)/\tau_r$ *– швидкі змінні поблизу точок* $t=0$ *і* $t=T$ *відповідно.*

Підставляючи ряди (11) і (12) у рівняння (1) і (7), граничні умови (3) і (9) та прирівнюючи коефіцієнти при рівних степенях τ_r*, які окремо залежать від* $t, \tau, \bar{\tau}$*, ми отримуємо задачі для регулярних складових порядку* τ_r^0 *і прикордонних функцій*

$$\begin{cases} \bar{c}_{0t} = D\bar{c}_{0xx} \\ \bar{c}_0(x,0) = \bar{c}_0(x) \end{cases} \quad \begin{cases} -\bar{V}_{0t} = D\bar{V}_{0xx} \\ \bar{V}_0(x,T) = -2[\bar{c}_0(x,T) - \theta(x)] \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \bar{c}_{0x} = -\dfrac{D}{2a\beta}\bar{V}_0(0,t) \\ \bar{c}_0(\delta,t) = \psi(t) \end{cases} \quad \begin{cases} V_{0x}(0,t) = 0 \\ V_0(\delta,t) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \Pi c_{0\tau\tau} + \Pi c_{0\tau} = 0, \ i=0 \\ \Pi c_{i\tau\tau} + \Pi c_{i\tau} = D\Pi c_{i-1xx}, \ i \ge 1 \end{cases} \begin{cases} QV_{0\bar{\tau}\bar{\tau}} + QV_{0\bar{\tau}} = 0, \quad i=0 \\ QV_{i\bar{\tau}\bar{\tau}} + QV_{i\bar{\tau}} = DQV_{i-1xx}, \ i \ge 1 \end{cases} \tag{15}$$

Щоб визначити члени розкладів (11) і (12) з отриманих рівнянь, необхідно зазначити початкові умови. Ми отримуємо їх, підставляючи (11), (12) у початкові умови (2) і (8) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях τ_r.

$$\Pi c_0(x,0) = c_0 - \bar{c}_0(x,0); \quad \Pi c_{0_\tau}(x,0) = 0$$

$$QV_0(x,0) = -2\bar{c}_t(x,T) - V_0(x,T); \quad QV_{0_{\bar{\tau}}}(x,0) = 2\bar{c}_t(x,T) + \bar{V}_0(x,T). \tag{16}$$

Співвідношення для визначення коефіцієнтів i -го порядку ряду (11), (12) можна формально записати для $i \geq 1$. Оскільки маємо справу з розподіленою системою, використання кожної наступної компоненти розкладів (11), (12) вимагає дослідження розв'язності та підвищення гладкості функцій, включених у задачу.

Щоб побудувати наближене керування найпростішого типу, ми обмежимося вивченням систем (13), (14) та (15), (16).

Використовуючи [2], доведено наступне:

Теорема 1. Субоптимальне керування $p^0(t)$ *— це розв'язок інтегрального рівняння*

$$\beta p^0(t) = f(t) - \int_0^T k(t,\tau)p^0(\tau)d\tau, \tag{17}$$

де

$$f(t) = \frac{bD}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n^2 D(t-T)}\gamma_n, \quad b = \sqrt{\frac{2}{\delta}};$$

$$k(t,\tau) = \frac{D^2 b^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n^2 D(t+\tau-2T)};$$

$$\gamma_n = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)x_n(x)dx + \frac{bSI_0}{VzF}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^3 D}\left(1 - e^{-\lambda_n DT}\right).$$

Єдиність розв'язку рівняння (17) випливає з того факту, що $f(t) \in L_2(0,T)$ *та додатної визначеності ядра* $k(t,\tau)$. *За допомогою методів розв'язання рівнянь із виродженим ядром [2] ми отримуємо розв'язок рівняння (17). Субоптимальне керування має вигляд*

$$p_0(t) = \frac{b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n - g_n)e^{\lambda_n D(t-T)} - \frac{D}{2a\beta}QV^0(0,t), \tag{18}$$

В якому константи g_n *визначаються з нескінченної системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь.*

Наступні теореми оцінюють близькість субоптимального керування задачі до оптимального.

Теорема 2. Оптимальне керування задачі (1) – (5) $p(t)$ *збігається до субоптимального* $p^0(t)$, *якщо* $\tau_r \to 0$, *та існують такі константи* τ_r^0, c, *що коли* $0 \leq \tau_r \leq \tau_r^0$, *то*

$$\left|p(t) - p^0(t)\right| \leq c\tau_r \quad \forall \ 0 \leq t \leq T.$$

Теорема 3. Якщо початкові умови задачі (1) – (5) задовольняють умови $c_0(x) \in W_2^1(0,1), \quad \theta(x) \in L_2(0,1)$, *то існує таке* $0 < \tau_n \leq \tau_r^0$, *що*

$$\left|I[p] - I[p^0]\right| \leq c\tau_r^2.$$

Тут $I[p^0] = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n - g_n)\gamma_n$ *відповідне субоптимальне значення функціоналу задачі.*

Література

1. Maksymenkova I. A., Michaylova T. F. On One Property of the Moduli of Continuity for Periodic Functions of Higher Orders. Ukrainian Mathematical Journal. – 2023. – Published: 01 February 2023. – P. 651– 655.DOI: 10.1007/s11253-023-02137-2.

2 Michaylova T. F. , Babich Y.P. Sharp Estimates for the Best Approximations of Smooth Functions in C 2π in Terms of Linear Combinations of the Modules of Continuity of Their Derivatives / Ю. П. DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7124.