

В.И. Шинкаренко, Т.Н. Васецкая

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАНЖИРОВАНИЯ
МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ**

Аннотация. На статистическом материале матриц парных сравнений 23 чемпионатов Украины по футболу выполнены экспериментальные исследования устойчивости и точности ранжирования методом анализа иерархий. Выполнены преобразования традиционных таблиц футбольных чемпионатов в матрицы парных сравнений по шкале Саати. Удалялась часть результатов, недостающие данные интерполировались на основе усредненных оценок с учетом свойства транзитивности. Установлено, что даже небольшое количество измененных оценок, улучшающих при этом согласованность матриц, приводит к изменениям ранжирования трети альтернатив; до пятой части недостающих парных сравнений можно доопределять не превышая при этом естественную точность воспроизводимости.

Ключевые слова: ранжирование, метод анализа иерархий, согласованность, точность, эксперимент, статистические показатели.

Введение

В силу того, что ранжирование альтернатив методом анализа иерархий (МАИ) [1-3] выполняется экспертом, результат ранжирования является субъективным. Вопрос, насколько могут отличаться результаты ранжирования тех же альтернатив другим экспертом, обладающим теми же знаниями и опытом, остается открытым. Также сложно оценить насколько может измениться порядок альтернатив при незначительных либо небольших изменениях мнения эксперта при сравнении нескольких пар альтернатив.

В большинстве случаев, устойчивость ранжирования определяется по принципу «что будет, если», интерактивно изменяя оценки и отслеживая результаты ранжирования (библиография в [4]). Авторы [4] предлагают метод исследования на основе допустимых возмущений оценок эксперта.

В данной работе исследуется устойчивость ранжирования по одноуровневому МАИ к изменению части оценок эксперта с улучшением степени транзитивности и согласованности матрицы парных сравнений (МПС).

Результаты исследования применимы также к модификациям МАИ с ранжированием альтернатив при неполных данных. Такой подход в [5] распространен на ситуации, в которых эксперту позволено отвечать «не знаю» или «не уверен» на некоторые из вопросов. Подход Харкера основан на определении квазиобратносимметричных матриц. Аналогичный подход к выявлению приоритетов для неполной обратносимметричной матрицы предложен и в [6]. Можно выделить и другие сокращенные процедуры формирования МПС [7, 8] и методы дополнения недостающих оценок [9-11].

Харкером [12] на МПС с количеством альтернатив 6-9, заполненных случайным образом, исследованы возможности 5% недозаполнения.

Формирование МПС

В силу субъективности процесса МАИ результатом ранжирования является вектор случайных чисел. Для оценки степени случайности следует применять методы теории вероятностей и математической статистики.

Для этого необходимо иметь достаточный объем статистической информации. Ввиду того, что МАИ в большинстве случаев применяется при стратегическом планировании, случаев постоянного и многократного его применения, особенно при большом количестве альтернатив (более 10), немного и такая информация авторам неизвестна.

Для оценки устойчивости результатов ранжирования в данной работе используются данные о ранжировании без эксперта. А именно это информация о ранжировании команд в результате проведения чемпионатов Украины по футболу за 23 года, сезонов с 1992/1993 по 2014/2015 года, в которых принимало участие от 14 до 18 команд. Здесь также заполняется МПС и выполняется ранжирование, но по шкале отличной от предложенной Т. Саати. При этом парные сравнения выполняются природой и зависят от многих случайных факторов (дисквалификаций игроков, травм, физического и психологического

состояния игроков и т.д.). МПС имеет некоторую природную противоречивость, а результаты ранжирования достаточно объективные.

Для исследования МАИ был выполнен переход от традиционной для чемпионата Украины (за победу команде дается три очка, за ничью – одно) к шкале Т. Саати, в которой превосходство одной команды над другой оценивается целыми числами от 1 до 9 и соответственно уступка обратным числом от 1 до 1/9.

Предварительная обработка таблиц с результатами матчей чемпионатов Украины заключалась в следующем: не учитывались волевые решения в виде снятия очков с команды, технические поражения (если матч состоялся, учитывался его результат, если нет – результат другого круга между этими командами).

Преобразование традиционной таблицы в МПС Саати выполнялось следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_{ij} = 0 \\ [bm_{ij} + c], & \text{если } [bm_{ij} + c] \leq 9 \text{ \& } m_{ij} > 0 \\ 9, & \text{если } [bm_{ij} + c] > 9 \text{ \& } m_{ij} > 0 \\ 1/[bm_{ij} + c], & \text{если } [bm_{ij} + c] \leq 9 \text{ \& } m_{ij} < 0 \\ 1/9, & \text{если } [bm_{ij} + c] > 9 \text{ \& } m_{ij} < 0 \end{cases},$$

где a_{ij} – элементы МПС, m_{ij} – разница забитых и пропущенных мячей в двух матчах чемпионата между i-й и j-й командами, b и c – некоторые (искомые) коэффициенты, $[b]$ – округление к ближайшему целому.

Для оценки качества перехода от традиционной таблицы чемпионатов Украины к МПС по шкале Саати предложены следующие показатели:

– среднее расхождение мест в традиционной таблице и при ранжировании по МАИ $S_o = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (O_i^T - O_i^S)$, где n – количество команд,

O_i^T – место команды в традиционной таблице, O_i^S – порядковый номер команды после ранжирования по МАИ;

– средняя доля команд, сохранивших свое место при преобразовании $S_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(O_i^T, O_i^S)$, где $\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$;

– отношение согласованности (ОС) МПС.

Выполнено усреднение показателей S_o , S_e и ОС по 23 чемпионатам. Найдено Парето оптимальные значения $b=0,2$ и $c=2$ по трем приведенным выше показателям. При этих значениях S_e является максимальным (0,449), а ОС и S_o превышают минимальное значение на 0,1% (0,114 и 1,021).

Пример преобразования традиционной таблицы чемпионата Украины 2001/2002 года в МПС приведен в табл. 1 и 2.

Таблица 1

**Итоговая таблица чемпионата Украины
по футболу сезона 2001/2002 гг.**

	ШАХ	ДИН	МТД	МТЗ	МТХ	ДНЕ	ТАВ	КАР	КРИ	МТМ	ВОР	АРС	ПОЛ	ЗАК	Место
Шахтер	X	2:0	3:1	0:0	3:0	1:0	2:1	3:0	3:1	2:0	4:0	2:0	2:1	5:1	1
Динамо	2:2	X	2:0	1:0	6:0	1:0	0:0	4:1	0:0	1:0	1:0	2:0	5:0	5:0	2
Металлург Д	0:1	0:0	X	1:1	5:0	2:0	4:1	0:0	3:2	2:1	0:0	2:1	1:0	1:1	3
Металлург З	0:3	1:3	0:3	X	1:0	2:1	0:2	4:1	0:0	3:0	1:0	2:0	0:0	4:1	5
Металлист	1:1	0:1	3:1	2:1	X	3:0	4:1	0:0	0:0	2:2	2:0	2:1	1:0	4:0	6
Днепр	0:1	0:0	2:0	0:0	0:1	X	2:1	0:1	2:0	3:1	2:0	2:0	0:0	2:0	4
Таврия	0:1	1:5	1:3	0:1	2:0	0:2	X	3:0	3:2	3:1	1:0	1:2	2:0	1:1	7
Карпаты	0:2	0:2	0:1	2:1	0:2	0:0	0:0	X	3:2	2:0	0:1	1:0	0:0	3:0	8
Кривбасс	0:0	0:7	1:3	0:0	4:1	3:3	2:0	0:0	X	1:1	2:0	1:0	3:1	1:0	9
Металлург М	0:2	0:6	4:2	0:0	0:0	0:0	0:0	3:1	3:1	X	1:0	1:2	2:1	3:0	10
Ворскла	1:1	1:2	2:1	0:1	1:1	1:2	2:0	1:3	2:2	2:1	X	1:0	1:1	1:0	11
Арсенал	0:0	0:1	0:1	2:0	1:1	0:1	0:0	0:0	3:0	3:2	0:0	X	2:0	0:2	12
Полиграф-техника	1:2	0:3	1:0	0:1	2:0	2:6	0:1	1:1	0:0	2:2	2:2	1:0	X	4:2	13
Закарпатье	0:1	1:2	1:1	0:1	3:5	0:0	2:2	1:0	2:0	1:1	2:0	2:1	0:1	X	14

Таблица 2

Матрица парных сравнений по табл. 1

	ШАХ	ДИН	МТД	МТЗ	МТХ	ДНЕ	ТАВ	КАР	КРИ	МТМ	ВОР	АРС	ПОЛ	ЗАК	Место
Шахтер	1	1	3	3	2	2	2	3	2	3	3	2	2	3	1
Динамо	1	1	2	3	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	2
Металлург Д	1/3	1/2	1	1	1	1	1	2	3	1/2	1/2	2	1	1	3
Металлург З	1/3	1/3	1	1	1	2	1	2	1	1	2	2	2	3	5
Металлист	1/2	1/3	1	1	1	3	2	1	1/3	1	2	2	2	2	6
Днепр	1/2	1/2	1	1/2	1/3	1	1	1/2	1	1	1	3	1	1	4
Таврия	1/2	1/3	1	1	1/2	1	1	3	1/2	2	2	1/2	3	2	7
Карпаты	1/3	1/3	1/2	1/2	1	2	1/3	1	2	1	2	2	1	2	8
Кривбасс	1/2	1/3	1/3	1	3	1	2	1/2	1	1/2	2	1/2	2	1/2	10
Металлург М	1/3	1/3	2	1	1	1	1/2	1	2	1	2	1/2	2	3	9
Ворскла	1/3	1/4	2	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1	2	1	1/2	12
Арсенал	1/2	1/3	1/2	1/2	1/2	1/3	2	1/2	2	2	1/2	1	2	1/3	11
Полиграф-техника	1/2	1/4	1	1/2	1/2	1	1/3	1	1/2	1/2	1	1/2	1	3	14
Закарпатье	1/3	1/4	1	1/3	1/2	1	1/2	1/2	2	1/3	2	3	1/3	1	13

В приведенном примере получены такие показатели: $OC=0,13$, $S_e=0,57$ и $S_o=0,43$.

Ранжирование команд общепринятыми оценками футбольных чемпионатов является в какой-то мере неустойчивым. Место команды может зависеть от одного-двух очков (голов) и даже разницы забитых и пропущенных мячей. Если исправить хотя бы результативные судейские ошибки, предвзятое отношение судей – результаты ранжирования могут отличаться на 1-3, а иногда и более позиций.

Ранжирование на основе МАИ также в какой-то мере неустойчиво. Эксперт принимает решение на основе доступной ему информации, которая принципиально неполная, изменяется во времени, к тому же частично нечеткая, противоречивая и ошибочная.

Наличие субъективной составляющей обоих методов ранжирования не позволяет оценить точность ранжирования по отношению к действительности и выполнить проверку практикой. Остается единственная возможность оценить точность сравнением двух методов. Поэтому показатели S_o и S_e отражают взаимную вариативность ранжирования, а $\sigma^2(S_o)$ и $\sigma^2(S_e)$ можно считать дисперсиями воспроизводимости ранжирования по МАИ.

Экспериментальные исследования

В результате преобразований традиционных таблиц результатов чемпионатов Украины по футболу в МПС получены исходные данные для исследования устойчивости результатов ранжирования при замене части полученных от эксперта оценок (в нашем случае эксперт – природа) более согласованными. Исходные данные представляют собой 23 МПС с не плохой, но, в основном, недостаточной согласованностью, $OC=0,09...0,14$, в среднем 0,113.

Выполнен численный эксперимент, который моделирует ситуацию, когда при большом количестве альтернатив (более 10) часть оценок эксперта отсутствует. Причинами этого могут быть недостаточные возможности эксперта при сравнении конкретных пар альтернатив либо при формировании достаточно согласованной МПС. Однако, основная цель эксперимента связана с модификациями МАИ, предусматривающими снижение нагрузки на эксперта при значительных объемах сравнений путем сокращения их количества.

Эксперимент заключался в том, что часть оценок эксперта (от 5% до 30% пар) обнулялись и заменялись усредненными оценками

согласно свойству транзитивности по имеющимся остальным оценкам:

$$a_{ij} = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}, a_{ji} = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot a_{ki}, a_{ij} = (a_{ij} + \frac{1}{a_{ji}}) / 2,$$

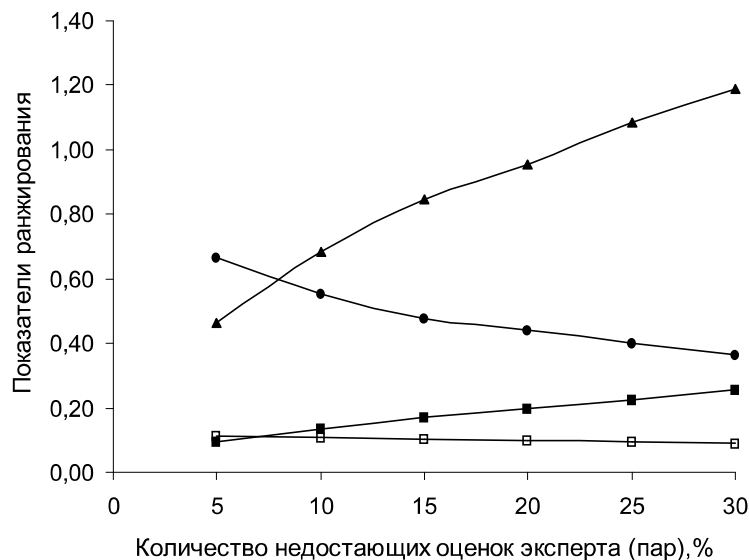
$$a_{ij} = \begin{cases} [a_{ij}], & \text{если } a_{ij} \geq 1 \\ [1/a_{ij}] & \text{в противном случае} \end{cases}, a_{ij} = \begin{cases} 9, & \text{если } a_{ij} > 9 \\ a_{ij} & \text{в противном случае} \end{cases}, a_{ji} = 1/a_{ij}$$

$$\text{где } n_1 = \sum_{i=1}^n \delta(a_{ik} \cdot a_{kj}, 0).$$

Каждый опыт эксперимента повторялся 64 раза (параллельные испытания).

В результате эксперимента удалось количественно установить степень улучшения согласованности МПС при изменении оценок эксперта (и повышении степени транзитивности) и соответствующих потерь, оцениваемых усредненными: расхождением мест до и после изменений в ранжировании альтернатив, долей альтернатив сохранивших свое место и разнице весов альтернатив (рис. 1).

От 2% (при 5% измененных оценок) до 20% (при 30%) улучшается согласованность МПС, от $CO=0,113$ до $CO=0,09$. При этом среднее расхождение весов альтернатив изменяется на 10-25%, соответственно.



□ – ОС, ■ – средняя разница весов альтернатив, ● – средняя доля команд, сохранивших свое место, ▲ – среднее расхождение мест команд

Рисунок 1 – Показатели ранжирования при интерполяции оценок эксперта

Установлено, что даже незначительные (в пяти процентах) изменения оценок альтернатив (даже в сторону улучшения согласованности) приводят к 45% расхождения мест в ранжировании. В среднем, только 2/3 альтернатив при этом сохранили свои места.

Возьмем за основу точность перехода от традиционных методов парных сравнений в футбольных чемпионатах к оцениванию согласно МАИ, как естественную, природную точность. Тогда можно отметить, что при 20-25% изменяемых оценок эксперта, показатели: доля команд сохранивших свое место и среднее расхождение мест приближаются к естественной точности.

Другими словами при доопределении 20-25% отсутствующих оценок эксперта в МАИ точность ранжирования соответствует естественной точности воспроизводимости.

Выводы

Многие пользователи информационных систем недостаточно квалифицированно интерпретируют результаты решаемых задач. Вплоть до того, что результаты воспринимаются как истина в последней инстанции, характерное высказывание – «компьютер посчитал». Тем более это относится к целочисленным результатам, в нашем случае это ранги, места альтернатив. Понятия погрешности, устойчивости у пользователей зачастую отсутствует.

Поэтому информационные системы, решая подобные задачи, должны информировать пользователя о погрешностях решений и их устойчивости. Из результатов исследования видно, что они достаточно существенные. Изменение нескольких оценок пар альтернатив часто может привести к перемещению альтернативы в результирующем ранжировании на 1-3 позиции. Это касается и лидирующей альтернативы.

В данной работе исследована устойчивость ранжирования альтернатив по МАИ с одним критерием. Дальнейшее развитие работы связано с многокритериальными задачами. При этом отдельно следует рассматривать задачи со значительным количеством критериев и альтернатив (более 10), небольшим количеством критериев и альтернатив, значительным количеством критериев и небольшим альтернатив.

Можно предположить, что с ростом общего количества парных сравнений, ввиду их некоторой (пусть даже и небольшой и постоян-

ной) противоречивости, погрешности ранжирования статистически увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т. Л. Саати – М.: Радио и связь, 1993. – 316 с.
2. Saaty T. L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process / T. L. Saaty // Royal Academy of Sciences, Spain, Series A. Mathematics, 2008 – November – С. 251–318.
3. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. / Т. Л. Саати – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
4. Панкратова Н. Д. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій / Н. Д. Панкратова, Н. І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2006. – № 3. – С. 7–25.
5. Harker P. T. Alternative models of questioning in the analytic hierarchy process / P. T. Harker // Mathematical Modelling. - 1987. - Vol. 9. № 3-5. - P. 353-360.
6. Takeda E., Eliciting the relation weights from incomplete reciprocal matrices / E. Takeda, P. L. Yu // Proceedings of International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Tianjin university, Tianjin, China, 6-9 Sept. 1988. – Tianjin, 1988. – P. 192-200.
7. Трофимец В. Я. К вопросу разработки основных вычислительных процедур МАИ : [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/078.pdf>
8. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев. / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – т. 44. – № 7. – С. 1259–1268.
9. Fortes I. Inductive learning models with missing values / I. Fortes, L. Mora-L'opez, R. Morales, F. Triguero // Mathematical and Computer Modelling. – 2006. – 44. – P. 790–806.
10. Hong T. P. Learning rules from incomplete training examples by rough sets / T. P. Hong, L. H. Tseng, S. L. Wang // Expert Systems with Applications. – 2002. – 22. – P. 285–293.
11. Quinten A. Effectiveness of different missing data treatments in surveys with Likert-type data: Introducing the relative mean substitution approach / A. Quinten, W. Raaijmakers // Educational and Psychological Measurement. – 1999. – 59(5). – P. 725–748.
12. Harker P. T. Incomplete pairwise comparisons in the Analytic hierarchy process / P. T. Harker // Mathematical Modelling. – 1987. – Vol. 9. № 11. – P. 837–848.