

## Устойчивость и колебания стержня с опорами типа упругих заделок

Рассматривается устойчивость и колебания неразрезных стержней на упругих опорах, сопротивляющихся не только перемещению но и повороту опорного сечения. Для решения этих задач используется численно-аналитический метод предложенный Лазаряном и Конашенко, основанный на применении обобщенных функций. Для симметричных систем открыто свойство сближения ряда низших частот до их сливания при увеличении жесткости опор.

Розглядається стійкість і коливання нерозрізних стержнів на пружних опорах, що чинять опір не тільки переміщенню, але і повороту перерізу. Для вирішення цих завдань використовується численно-аналітичний метод заснований на застосуванні узагальнених функцій, запропонований Лазаряном і Конашенко. Для симетричних систем відкрито властивість зближення ряду нижчих частот до їх зливання при збільшенні жорсткостей опор.

We consider the stability and vibration of continuous bars on elastic supports, resisting not only the displacement and rotation of the reference section. To solve these problems using numerical-analytical method proposed Lazaryan and Konashenko, based on the use of generalized functions. For symmetric systems, open the property of convergence of a number of lower frequencies to their merging with increasing rigidity of the supports.

Рассматривается устойчивость и колебания неразрезных стержней на упругих опорах, сопротивляющихся не только перемещению, но и повороту опорного сечения. Подобные опоры встречаются в машиностроении и строительстве и расчет конструкций с такими опорами является актуальной задачей.

На рис. 1 изображена опора типа упругая заделка. Здесь  $k_1$  и  $k_2$  - жесткости  $i$ -й опоры на вертикальное перемещение и поворот опорного сечения соответственно.

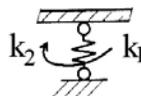


Рис. 1

Для решения этих задач в работе применяется численно-аналитический метод предложенный в работах Лазаряна и Конашенко [1], основанный на применении обобщенных функций. Упругие опоры учитываются с помощью импульсивных функций. Получены аналитические решения справедливые при любой жесткости упругих опор. Усилия и перемещения выражаются только через начальные параметры и некоторые функции влияния, которые имеют разрывы непрерывности I-го рода. Для определения критических параметров, построения форм потери устойчивости и колебаний составлены mathcad-программы.

1. Рассмотрим расчет на устойчивость стержня с промежуточной опорой типа упругой заделки с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно (рис. 2). В качестве исходного уравнения используем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки  $Elv'' = -M_x$ .

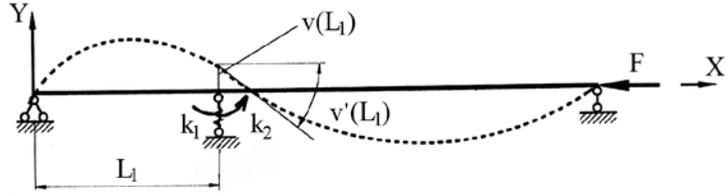


Рис. 2

Выражение изгибающего момента имеет следующий вид

$$M_x = Q_0 x + Fv(x) + k_1 v(L_1)(x - L_1) \cdot \sigma_0(x - L_1) - k_2 v'(L_1) \sigma_0(x - L_1),$$

где  $k_1 v(L_1)$ ,  $k_2 v'(L_1)$  - реактивная сила и реактивный момент упругой опоры соответственно, а  $\sigma_0(x - L_1)$  - функция Хевисайда.

Подставив выражение изгибающего момента в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и выполнив некоторые преобразования, получаем разрешающее дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами, в правой части которого обобщенные функции 1-го и 2-го порядка

$$v^{iv} + k^2 v''(x) = -\frac{k_1}{EI} v(L_1) \sigma_1(x - L_1) + \frac{k_2}{EI} v'(L_1) \sigma_2(x - L_1), \quad (1.1)$$

где  $k^2 = \frac{F}{EI}$ , а  $\sigma_1(x - L_1)$  и  $\sigma_2(x - L_1)$  - дельта-функция Дирака и ее производная.

Решение уравнения (1.1), найденное с помощью преобразования Лапласа [2], имеет следующий вид

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x - \frac{M_0}{EI k^2} (1 - \cos kx) - \frac{Q_0}{EI k^2} \left( x - \frac{\sin kx}{k} \right) - \frac{k_1}{EI k^2} v(L_1) \cdot \left[ (x - L_1) - \frac{\sin k(x - L_1)}{k} \right] \sigma_0(x - L_1) + \frac{k_2}{EI k^2} v'(L_1) [1 - \cos k(x - L_1)] \sigma_0(x - L_1). \quad (1.2)$$

Здесь  $v_0, \theta_0, M_0, Q_0$  - начальные параметры, а  $v(L_1), v'(L_1)$  - промежуточные параметры, представляющие прогиб и угол поворота промежу-

точной упругой опоры. Промежуточные параметры определяются по следующим соотношениям

$$v(L_1) = v_0 + \theta_0 L_1 - \frac{M_0}{EI k^2} (1 - \cos kL_1) - \frac{Q_0}{EI k^2} \left( L_1 - \frac{\sin kL_1}{k} \right),$$

$$v'(L_1) = \theta_0 - \frac{M_0}{EI k} \sin kL_1 - \frac{Q_0}{EI k^2} (1 - \cos kL_1).$$

Воспользовавшись граничными условиями при  $x = L_{\max}$ , составляем характеристическое уравнение.

Рассмотрим стержень шарнирно опертый по краям. Граничные условия имеют вид:  $v(0) = v(L_{\max}) = 0$ ,  $M_x(0) = M_x(L_{\max}) = 0$ .

Решение находится с помощью mathcad – программы [3].

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. При жесткости  $k_1 < 0,1EI / L_{\max}^2$  минимальный критический параметр такой же как у стержня без промежуточной опоры. С увеличением жесткости опоры минимальный критический параметр увеличивается. При центральной опоре наименьшая жесткость  $k_1$ , при которой во время выпучивания стержня можно считать опору абсолютно жесткой, составляет  $39,5EI / L_{\max}^2$ . Это возможно, когда минимальный критический параметр достигает такого же значения как и при шарнирной опоре (в этом случае  $F_{крит1} = F_{крит2}$ ). В работе [4] приведено решение этой задачи энергетическим методом. Оно составляет  $39,6EI / L_{\max}^2$ , что подтверждает точность полученных результатов.

Рассматривалось решение и при нецентральной опоре. Из полученных результатов следует, что при жесткости опоры  $k_1 > 0,1EI / L_{\max}^2$  смещение промежуточной опоры относительно середины вызывает уменьшение устойчивости стержня.

Влияние жесткости  $k_2$  зависит от положения упругой опоры и величины жесткости  $k_1$ . В случае центральной опоры, ее влияние существенно при  $k_1 > 39,5EI / L_{\max}^2$ . При  $k_1 > 100EI$ , с увеличением жесткости  $k_2$  минимальные критические силы начинают попарно сближаться, уже при  $k_1 = k_2 = 100EI$  первая и вторая ( $\nu k_1 = 2,2247, \nu k_2 = 2,2408$ ), а также третья и четвертая ( $\nu k_3 = 3,8248, \nu k_4 = 3,8513$ ) практически попарно сливаются. При этом формы потери устойчивости обратно симметричны.

При нецентральной опоре с увеличением  $k_2$  возрастает устойчивость стержня при любых значениях  $k_1$ .

В качестве следующего примера определим критическую нагрузку для системы приведенной на рис. 3,а. Вертикальный стержень здесь работает как упругая заделка. Полагаем, что жесткости и длины участков системы одинаковы и равны  $EI$  и  $L$  соответственно.

Решение, найденное по методу перемещений, равняется  $F_{кр} = \frac{3,506 \cdot EI}{L^2}$ .

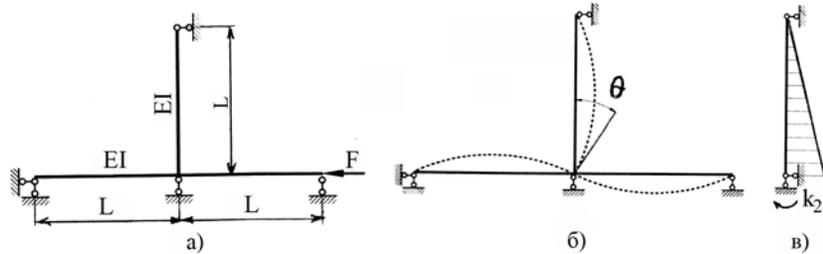


Рис. 3

Для получения решения с помощью аппарата обобщенных функций, найдем коэффициент жесткости  $k_2$  из условия, что угол поворота  $\theta$  вертикального стержня в жестком узле равен 1 (рис. 3,б и 3,в):

$$\theta = \int \frac{M\bar{M}}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} k_2 L \cdot \frac{2}{3} = 1, \text{ откуда } k_2 = \frac{3EI}{L}.$$

Решение, найденное по изложенной выше методике, полностью совпадает с приведенным.

2. Рассмотрим свободные колебания стержня с промежуточной опорой типа упругая заделка. Дифференциальное уравнение свободных колебаний балки с промежуточной упругой опорой, сопротивляющаяся как вертикальному перемещению так и повороту опорного сечения имеет следующий вид [1]

$$EI_0 X^{IV}(x) - v^2 m_0 X = -k_1 X(x_1) \sigma_1(x - x_1) + k_2 X'(x_1) \sigma_2(x - x_1). \quad (2.1)$$

Здесь  $k_1, k_2$  - жесткости упругой опоры на вертикальное перемещение и поворот опорного сечения соответственно,  $x = L_1$  - координата сечения в котором находится промежуточная опора,  $X(L_1), X'(L_1)$  - перемещение и угол поворота сечения  $x = L_1$ . После некоторых преобразований уравнения (2.1), находим его решение с помощью преобразования Лапласа

$$X(x) = X(0)Y_1(nx) + \frac{X'(0)}{n}Y_2(nx) + \frac{X''(0)}{n^2}Y_3(nx) + \frac{X'''(0)}{n^3}Y_4(nx) - \\ - \frac{k_1}{EI_0n^3}X(L_1)Y_4(n(x-L_1)) \cdot \sigma_0(x-L_1) + \frac{k_2}{EI_0n^2}X'(L_1)Y_3(n(x-L_1)) \cdot \\ \sigma_0(x-L_1).$$

Здесь  $n^4 = \frac{v^2 m_0}{EI_0}$ ,  $X(0)$ ,  $X'(0)$ ,  $X''(0)$ ,  $X'''(0)$  - начальные пара-

метры, а  $X(L_1)$ ,  $X'(L_1)$  промежуточные параметры. Причем

$$X(L_1) = X(0)Y_1(nL_1) + \frac{X'(0)}{n}Y_2(nL_1) + \frac{X''(0)}{n^2}Y_3(nL_1) + \frac{X'''(0)}{n^3}Y_4(nL_1),$$

$$X'(L_1) = nX(0)Y_4(nL_1) + X'(0)Y_1(nL_1) + \frac{X''(0)}{n}Y_2(nL_1) + \frac{X'''(0)}{n^2}Y_3(nL_1).$$

$$\text{где } X(L_1) = \theta_0 \frac{Y_2(nL_1)}{n} + Q_0 \frac{-Y_4(nL_1)}{EI_0n^3},$$

$$X'(L_1) = \theta_0 Y_1(nL_1) + Q_0 \frac{-Y_3(nL_1)}{EI_0n^2}.$$

Используя граничные условия при шарнирном опирании, составляем характеристическое уравнение. Решение находится с помощью Mathcad-программы. Рассмотрены задачи с одной и тремя опорами типа упругих заделок.

Из полученных результатов следует, что, как при расчете на устойчивость, жесткость  $k_2$  имеет существенное влияние только при достаточно больших значениях  $k_1$ .

При увеличении жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  частоты колебаний увеличиваются, а при симметричных промежуточных опорах происходит сближение низших частот. Так, в случае одной промежуточной опоры при  $k_1 = k_2 = 100EI$  низшие частоты принимают следующие значения  $\nu k_1 = 6,119$ ,  $\nu k_2 = 6,137$ ,  $\nu k_3 = 19,658$ ,  $\nu k_4 = 19,831$  (отличие в третьем знаке), а при  $k_1 = k_2 = 10000EI$  у системы, которую можно считать вырожденной, низшие частоты попарно сливаются и появляются равные частоты  $\nu k_1 = 6,1668$  и  $\nu k_2 = 6,1673$ ,  $\nu k_3 = 19,9843$  и  $\nu k_4 = 19,9859$  (отличие в 5 знаке). При этом формы колебаний соответствующие практически равным частотам разные - симметричные и кососимметричные. Соответствующие им формы колебаний приведены на рис. 4, а и 4, б. У последующих частот это свойство не наблюдается, так  $\nu k_5 = 41,685$ ,  $\nu k_6 = 71,25$ .

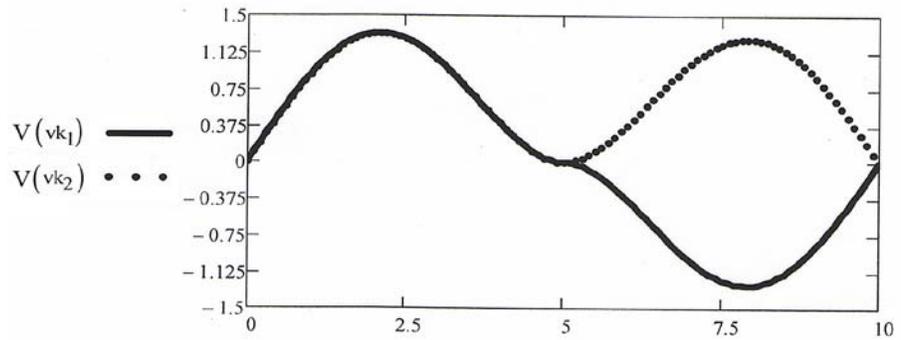


Рис. 4, а

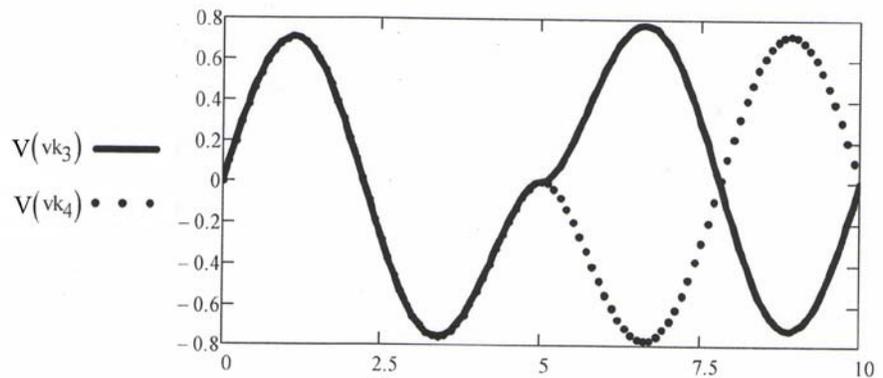


Рис. 4, б

Из полученных результатов можно сделать вывод, что если центральная опора будет упругой заделкой (при условии, что  $k_1 > 100EI$ ), то при увеличении жесткости  $k_2$  низшие частоты будут попарно сближаться и практически равные частоты будут возникать при  $k_2 = 100EI$ . При несимметричных промежуточных опорах эффекта сближения частот с увеличением жесткости  $k_2$  не наблюдается и равные частоты не появляются.

1. Лазарян В.А. Обобщенные функции в задачах механики / Лазарян В.А., Конашненко С.И. // К.: Наукова думка, 1974. - с. 190.

2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М.: Наука, 1963. - с. 287.

3. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad, СПб: Питер, 2005. - с.448.

4. Кляйн Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Кляйн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. // М.: Высшая школа, 1972. - с. 318.

Доцент кафедры Строительной механики Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта *А.А. Брынза*

**Ключевые слова:** опоры типа упругая заделка, обобщенные функции, свойство попарного сближения частот до сливания для симметричных систем.