

ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПО ДВУМ ПОКАЗАТЕЛЯМ ПРИ ВЫБОРЕ ГИБКОЙ ТЕХНОЛОГИИ РЕМОНТА ВАГОНОВ

Наведено математичний опис алгоритму рішення задачі векторної оптимізації за двома показниками сто-
совно до наукового обґрунтування гнучкого потоку ремонту вагонів.

Ключові слова: векторна оптимізація, ремонт вагонів, гнучкий потік

Приведено математическое описание алгоритма решения задачи векторной оптимизации по двум пока-
зателям применительно к научному обоснованию гибкого потока ремонта вагонов.

Ключевые слова: векторная оптимизация, ремонт вагонов, гибкий поток

The mathematical formulation of solution algorithm for a vector optimization problem on two indices with re-
gard to scientific substantiation of a flexible line of car repair is presented in the paper.

Keywords: vector optimization, car repair, flexible line

При решении технических, технологических и организационных задач постоянно возникает необходимость выбора конкретных вариантов из числа возможных. Как правило, выбор осуществляется с учетом технических, организационных и экономических критериев. И, несмотря на многофакторность исследуемых задач, представляется целесообразным свести их решение к решению задачи векторной оптимизации по двум основным показателям. Причем выбор этих основных показателей или параметров может осуществляться методом экспертных оценок. Например, при рассмотрении задач, связанных с совершенствованием технологии ремонта подвижного состава железных дорог, это могут быть такие параметры как время нахождения в ремонте (время простоя) и себестоимость ремонта. Ранее различными авторами затрагивался вопрос о решении подобных задач, когда необходимо определить совокупность значений определенной функции, которые бы удовлетворяли особым условиям [1, 2], но эти методы применялись либо к неопределенным функциям [1], либо к параметрам конструкций [2]. Применение методологии, основанной на использовании векторной оптимизации, при обосновании гибкой поточной технологии ремонта вагонов на потоке является актуальной научно-прикладной проблемой для железнодорожного транспорта [3-5], особенно в условиях рыночных отношений и ограниченности материальных и финансовых ресурсов. Далее предложено математическое описание алгоритма решения задачи векторной оптимизации по двум показателям при обосновании выбранной технологии ремонта вагонов.

Рассматривается задача векторной оптимизации по двум показателям

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \sum_{\theta \in \gamma} f_1(\theta); \\ F_2(\gamma) &= \sum_{\theta \in \gamma} f_2(\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma = [\theta_{1j_1}, \theta_{2j_2}, \dots, \theta_{nj_n}]$, причем каждая компонента селектора принимает дискретные значения из соответствующих множеств

$$\Xi_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ik_i}\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Обозначим через Γ набор всевозможных селекторов γ . Очевидно, что множество Γ состоит из конечного числа вариантов селекторов γ в числе

$$|\Gamma| = \prod_{i=1}^n k_i, \quad (3)$$

и рассматривается задача векторной оптимизации, символическая запись которой представляет собой [6]

$$\begin{pmatrix} F_1(\gamma) \\ F_2(\gamma) \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (4)$$

при условии $\gamma \in \Gamma$.

Инженерно-экономический смысл сформулированной задачи состоит в том, что некоторый технологический процесс ремонта вагонов на потоке разбит на m последовательных позиций (фаз). В каждой фазе имеется набор операций Ξ_i , $i = \overline{1, n}$ в количестве k_i . Каждой опе-

рации θ_{ij} сопоставляется два числа $f_1(\theta_{ij})$, $f_2(\theta_{ij})$. Например, затраты средств и времени на реализацию операции θ_{ij} .

Тогда селектор γ представляет один из возможных вариантов реализации процесса, а желание сделать $F_1(\gamma)$ и $F_2(\gamma)$ как можно меньше в математическом плане приводит к задаче векторной оптимизации (4).

Отметим, что решить задачу (4) означает найти также множество $\Gamma^* \subseteq \Gamma$, что любое $\gamma \in \Gamma^*$ является эффективным, а любая пара γ_1 и γ_2 из Γ^* между собой несравнимы.

Не ограничивая общности рассмотрения, считаем, что в каждой фазе операции упорядочены таким образом, что имеет место

$$\begin{aligned} f_1(\theta_{i1}) &< f_1(\theta_{i2}) < \dots < f_1(\theta_{ik_i}); \\ f_2(\theta_{i1}) &> f_2(\theta_{i2}) > \dots > f_2(\theta_{ik_i}). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема. Для того, чтобы селектор γ был бы эффективным, необходимо и достаточно, чтобы при $\lambda \geq 0$ значение операции в любой фазе выбиралось из следующего условия:

$$f_1(\theta_{ij_0}) + \lambda f_2(\theta_{ij_0}) = \min_{1 \leq j \leq k_i} (f_1(\theta_{ij}) + \lambda f_2(\theta_{ij})), \quad (6)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим необходимость, т.е. считаем, что γ является эффективным селектором, тогда если $\tilde{\gamma}$ вариация селектора γ , то имеет место

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{l} F_1(\tilde{\gamma}) - F_1(\gamma) > 0 \\ F_2(\tilde{\gamma}) - F_2(\gamma) < 0 \end{array} \right), \\ \text{или} &\left(\begin{array}{l} F_1(\tilde{\gamma}) - F_1(\gamma) < 0 \\ F_2(\tilde{\gamma}) - F_2(\gamma) > 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (1) в каждой фазе из соотношения (7) при условии, что $\tilde{\gamma}$ отличается от γ операций в i -й фазе получим:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{l} f_1(\theta_{ij}) - f_1(\theta_{ij_0}) > 0 \\ f_2(\theta_{ij}) - f_2(\theta_{ij_0}) < 0 \end{array} \right), \\ \text{или} &\left(\begin{array}{l} f_1(\theta_{ij}) - f_1(\theta_{ij_0}) < 0 \\ f_2(\theta_{ij}) - f_2(\theta_{ij_0}) > 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Независимо от того, какой из этих случаев реализуется, всегда можно указать такое число $\lambda > 0$, что имеет место

$$f_1(\theta_{ij}) - f_1(\theta_{ij_0}) \geq -\lambda (f_2(\theta_{ij}) - f_2(\theta_{ij_0})), \quad (8)$$

или

$$f_1(\theta_{ij}) + \lambda f_2(\theta_{ij}) \geq f_1(\theta_{ij_0}) + \lambda f_2(\theta_{ij_0}) \quad (9)$$

для любого $1 \leq j \leq k_i$, но это и означает, что имеет место (6)

Достаточность. Пусть имеет место (6), т.е. имеет место (9), из которого получаем (8), что влечет за собой соотношения (7) и, тем самым имеем, что γ - эффективный селектор.

Вывод: 1) Перебирая $0 \leq \lambda$, получаем параметрическое определение эффективных селекторов.

2) При формировании набора операций в любой фазе должны выполняться соотношения (5), которые представляют собой несравнимость операций.

Однако, условия (5) можно рассматривать как необходимые условия формирования набора операций в той или иной фазе.

Может оказаться, что некоторая операция не участвует в построении эффективных селекторов, для выяснения этой ситуации полезной будет следующая.

Лемма. Пусть имеется последовательность чисел

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2 < \dots < a_n; \\ b_1 &> b_2 > \dots > b_n, \end{aligned}$$

на которых определена функция

$$\psi(\lambda) = \min_{1 \leq j \leq n} (a_j + \lambda b_j), \quad \lambda \geq 0.$$

Тогда чтобы в определении этой функции участвовали все a_i и b_i , необходимо и достаточно чтобы

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{b_i - b_{i+1}} < \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{b_{i+1} - b_{i+2}}, \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность функций

$$\psi_i(\lambda) = a_i + \lambda b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда функция $\psi(\lambda)$ является огибающей функций $\psi_i(\lambda)$ (рис. 1).

Как следует из рис. 1,

$$\lambda_1 = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}; \quad \lambda_2 = \frac{a_3 - a_2}{b_2 - b_3}.$$

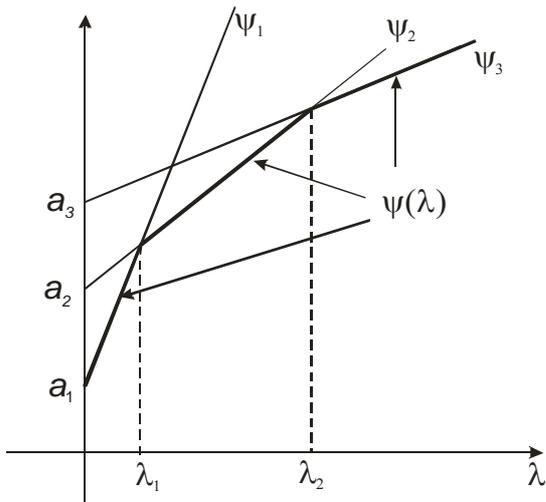


Рис. 1. $\psi(\lambda)$ для $n=3$

Очевидно, что условие $\lambda_1 < \lambda_2$ является необходимым и достаточным, чтобы в определении $\psi(\lambda)$ участвовали все три функции.

Если окажется, что $\lambda_2 < \lambda_1$, то приходим к ситуации, представленной на рис. 2. Тогда функция ψ_2 в определении $\psi(\lambda)$ при $\lambda \geq 0$ не участвует.

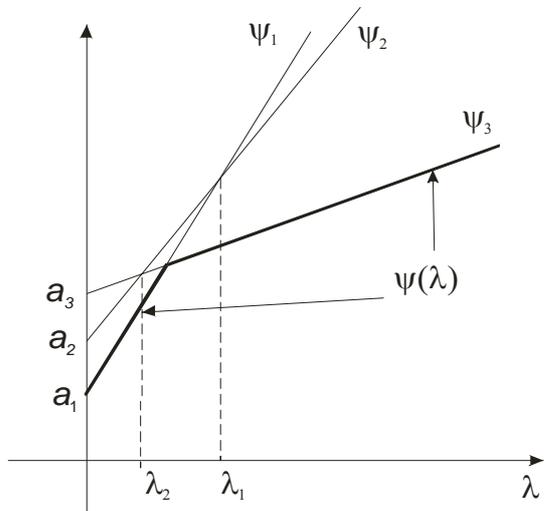


Рис. 2. $\lambda_2 < \lambda_1$, ψ_2 в определении $\psi(\lambda)$ при $\lambda \geq 0$ не участвует

Таким образом, данная лемма позволяет определить такие a_i и b_i , которые не участвуют в определении функций $\psi(\lambda)$ и они могут быть исключены. Применительно к операциям в некоторой фазе полагаем

$$a_j = f_1(\theta_{ij}); \quad b_j = f_2(\theta_{ij}), \quad j = \overline{1, k_i},$$

с помощью данной леммы можем указать номера операций, которые можно исключить из рассмотрения.

Пример. Пусть рассматривается $m=5$ фаз, затраты средств по каждой фазе представляют собой

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 10 & 20 & 50 \\ 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 15 & 0 \end{bmatrix},$$

а затраты времени следующие:

$$T = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2,5 \\ 1,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2,5 & 2,1 & 1,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

В первой фазе $k_1=3$ операции, во второй $k_2=2$, в третьей $k_3=5$, в четвертой $k_4=1$ и в пятой $k_5=4$ операции. Таким образом всего можно построить $|\Gamma|=170$ селекторов.

В соответствии с условиями леммы, вторая операция в третьей фазе не участвует, т.к. нарушают условия леммы.

Отобразив в пространство функционалов множество селекторов Γ по формулам (1), получим 170 точек (рис. 3), где по горизонтали откладывается суммарное время, а по вертикали соответствующие затраты средств для того или иного селектора $\gamma \in \Gamma$.

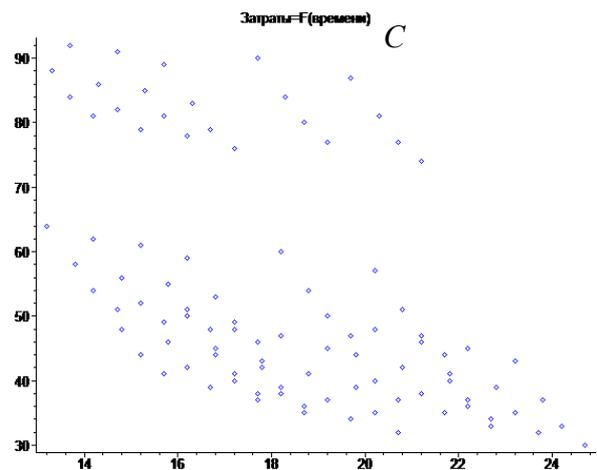


Рис. 3. Представление селекторов из Γ в пространстве функционалов

Воспользовавшись теоремой и следствием из нее, множество вариантов эффективных и

несравнимых между собой представлено на рис. 4, которые определяются по алгоритму работы [7].

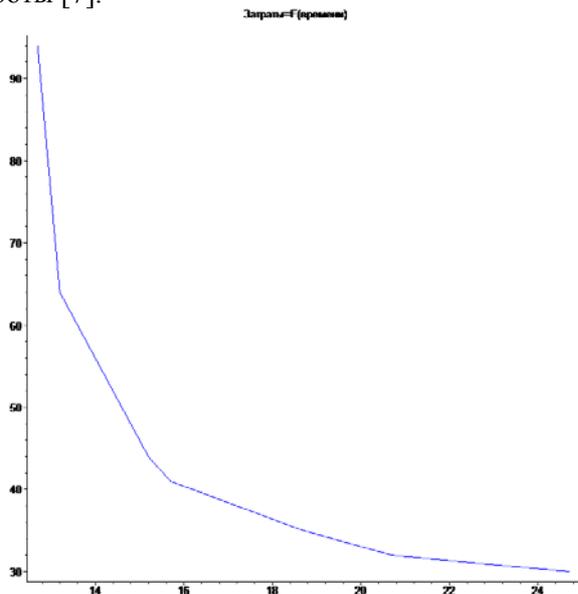


Рис.4. Взаимосвязь между затратами и времени по множеству Γ^* – решению задачи векторной оптимизации

Совмещая рис. 3 и рис. 4, убеждаемся, что предложенный алгоритм представляет решение задачи векторной оптимизации (рис. 5).

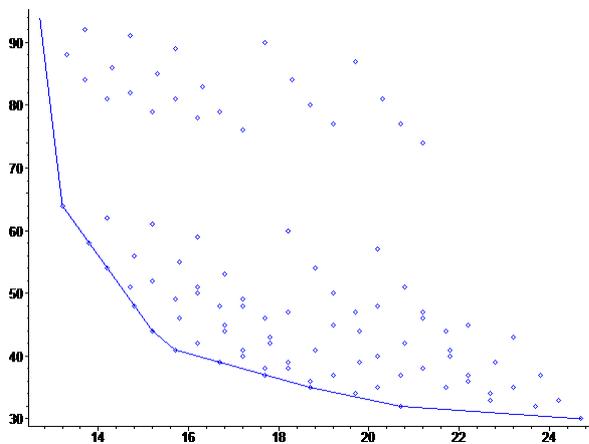


Рис. 5. Расположение решения задачи векторной оптимизации по отношению ко всем возможным селекторам

Таким образом, предложено математическое описание алгоритма решения задачи векторной оптимизации по двум показателям применительно к научному обоснованию гибкой технологии ремонта грузовых вагонов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Босов, А. А. Функции множества и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.
2. Blokhin, Y. P. Optimization of parameters of spring suspension of the freight car three-piece bogie [Text] / Y. P. Blokhin, O. M. Pshin'ko, S. V. Myamlin // Proc. of the 5th Int'l Conf. on Railway Boggies and Running Gears. – Budapest: BUTE, 2001. – P. 84-86.
3. Мямлин, В. В. Совершенствование поточного метода ремонта вагонов за счёт гибкости транспортной системы между технологическими модулями [Текст] / В. В. Мямлин // Залізн. трансп. України. – 2008. – № 4. – С. 15-17.
4. Мямлин, В. В. Анализ основных параметров асинхронного гибкого потока ремонта вагонов и методы их расчёта [Текст] / В. В. Мямлин // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2009. – Вип. 26. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2009. – С. 28-33.
5. Мямлин, В. В. Компонировочные решения организационно-технологических структур перспективных вагоноремонтных депо с асинхронными гибкими потоками ремонта вагонов [Текст] / В. В. Мямлин // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2010. – Вип. 31. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2010. – С. 55-62.
6. Машунин, Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации [Текст] / Ю. К. Машунин. – М.: Наука, 1986. – 141 с.
7. Босов, А. А. Векторная оптимизация по двум показателям [Текст] / А. А. Босов, Г. Н. Кодола, Л. Н. Савченко // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – № 17. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007. – С. 134-138.

Поступила в редколлегию 05.10.2010.

Принята к печати 18.10.2010.