

Н. Петровъ.

# **ДАВЛЕНІЕ КОЛЕСЪ НА РЕЛЬСЫ**

ЖЕЛЪЗНЫХЪ ДОРОГЪ,

**ПРОЧНОСТЬ РЕЛЬСЪ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПУТИ.**

ПЕТРОГРАДЪ.

Тип. Т-ва п. ф. „Электро-Типографія Н. Я. Стойковой“, Знаменская, 27.

1915.

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловіе . . . . .	I
Письмо профессора Н. Е. Жуковского . . . . .	V

## ЧАСТЬ I.

### Теоретическая.

#### ОТДѢЛЪ I.

##### Силы вертикальныя.

§ 1. Обзоръ силъ, вызывающихъ вертикальное давленіе колеса на рельсъ . . . . .	1
§ 2. Давленіе на колесную ось отъ рессоры при отдѣльной рессорѣ . . . . .	2
§ 3. Дѣйствіе нѣсколькихъ, взаимно-связанныхъ рессоръ . . . . .	6
§ 4. Пропорціональность груза стрѣлѣ прогиба рельса въ точкѣ прикосновенія покойно стоящаго груза . . . . .	8
<i>Дифференціальное уравненіе движенія вертикальной прожѣи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ . . . . .</i>	<i>16</i>
§ 5. Силы, дѣйствующія на колеса . . . . .	16
§ 6. Силы инерціи рельса и шпаль . . . . .	18
§ 7. Силы инерціи самаго рельса . . . . .	19
§ 8. Силы инерціи шпаль . . . . .	25

#### ОТДѢЛЪ II.

##### Уравненія связывающія динамическое дѣйствіе колеса со статическими.

§ 9. Допущенное дифференціальное уравненіе вертикальнаго движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ и преобразование этого уравненія . . . . .	28
§ 10. Окончательный видъ принятаго дифференціального уравненія . . . . .	29
§ 11. Интегрированіе дифференціального уравненія вертикальнаго движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ . . . . .	30
§ 12. Нѣкоторыя упрощенія уравненій, полученныхъ интегрированіемъ . . . . .	32
§ 13. Два случая, когда полученныя уравненія становятся уравненіями траекторіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ . . . . .	33
§ 14. Дифференціальное уравненіе вертикальнаго движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ въ случаѣ неправильной формы поверхностей катанія колеса и рельса . . . . .	34
§ 15. Интегрированіе этого уравненія . . . . .	35

## О Т Д Ъ Л Ъ Ш.

**Линии обертывающія послѣдовательныя положенія продольной оси рельса изгибаемой при статическомъ дѣйствии силъ въ разныхъ случаяхъ.**

- а) При одиночной нагрузкѣ рельса въ разныхъ точкахъ средняго пролета при четырехъ равноотстоящихъ и равно упругихъ опорахъ . . . . .* 37
- § 16. Опредѣленіе силъ въ точкахъ опоры . . . . . 37
- § 17. Суммы моментовъ силъ, приложенныхъ къ опорамъ относительно разныхъ точекъ пролета . . . . . 43
- § 18. Величины силъ въ опорахъ и суммы моментовъ ихъ при поддержкѣ рельса четырьмя опорами, въ случаѣ приложенія нагрузки въ срединѣ пролета . . . 46
- § 19. Силы въ опорныхъ точкахъ и сумма ихъ моментовъ при числѣ опоръ  $m$  и при чрезвычайно твердыхъ рельсахъ . . . . . 49
- § 20. Ординаты  $y=h$  обертывающей . . . . . 49
- б) Опредѣленіе линіи, обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной нагрузки въ разныхъ точкахъ средняго пролета, при шести равно отстоящихъ и равно упругихъ опорахъ . . . . .* 53
- § 21. Опредѣленіе силъ въ точкахъ опоры . . . . . 53
- § 22. Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и ординатъ  $y=h$  обертки при  $A=0,5$  . 61
- § 23. Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и ординатъ  $y=h$  обертки при  $A=1$  . . 66
- § 24. Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и ординатъ  $y=h$  обертки при  $A=1,5$  . 67
- § 25. Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и ординатъ  $y=h$  обертки при  $A=2$  . . 67
- § 26. Сравненіе ординатъ  $y=h$  соотвѣтствующихъ четыремъ и шести опорамъ . . . 68
- в) Опредѣленіе линіи, обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной нагрузки въ точкахъ средняго пролета при шести равно отстоящихъ и пяти равно упругихъ опорахъ, когда шестая опора дѣйствуетъ неправильно . . . . .* 73
- § 27. Опредѣленіе пролета, подлежащаго изученію . . . . . 73
- § 28. Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій . . . . . 74
- § 29. Опредѣленіе ординатъ  $h=y$  обертывающей линіи . . . . . 84
- § 30. Результаты, полученные изъ динамической таблицы для этого случая . . . 88
- § 31. Суммы моментовъ силъ относительно разныхъ точекъ пролета . . . . . 88
- § 32. Динамическое вліяніе одной осѣвшей шпалы . . . . . 89
- г) Опредѣленіе линіи, обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемаго статическимъ приложеніемъ нѣсколькихъ нагрузокъ въ разныхъ точкахъ пролетовъ, при равно отстоящихъ и равно упругихъ опорахъ, принимая въ основаніе уравненія Клапейрона . . . . .* 91
- § 33. Подготовительные расчеты . . . . . 91
- § 34. Выводъ уравненія обертывающей, принимая въ основаніе уравненія Клапейрона . . . . . 92
- § 35. Примѣры . . . . . 97

§ 36. Примѣненіе уравненій Клапейрона для опредѣленія наибольшихъ моментовъ силъ, изгибающихъ рельсъ при нагрузкѣ его тремя колесами, при широко разставленныхъ осяхъ . . . . .	102
§ 37. Примѣненіе уравненій Клапейрона для опредѣленія наибольшихъ моментовъ силъ, изгибающихъ рельсъ при нагрузкѣ его тремя колесами при менѣе широко разставленныхъ осяхъ . . . . .	103
§ 38. Тоже при болѣе жесткихъ рельсахъ . . . . .	104
§ 39. Тоже при очень сближенныхъ осяхъ . . . . .	106
§ 40. Тоже при нагрузкѣ рельса четырьмя колесами и при очень сближенныхъ осяхъ. 107	
<i>д) Опредѣленіе линіи, обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной переменнѣй нагрузки, состоящей изъ вѣса колеса съ неизмѣнно связанными съ нимъ частями, вѣса наибольшей поддерживаемой колесомъ нагрузки и статически же прилагаемыхъ силъ, равныхъ вертикальнымъ слагающимъ: центробѣжныхъ силъ противовѣсовъ и силъ, равныхъ давленіямъ шатуна на мотыль . . . . .</i>	
§ 41. Составленіе діаграммы силъ . . . . .	109
§ 42. а) случай, разсмотрѣнный проф. Ю. В. Ломоносовымъ . . . . .	110
б) случай съ ведущимъ колесомъ паровоза Прери: . . . . .	112
Случай при скорости 52 километра въ часъ . . . . .	112
§ 43. Случай при скорости 104 километра въ часъ . . . . .	116
<i>е) Приближенныя формулы, опредѣляющія траекторію точки прикосновенія катящагося колеса съ рельсомъ въ случай малой кривизны обертывающей, допускающей замѣну ее прямою . . . . .</i>	
§ 44. Возможность такого допущенія . . . . .	120
§ 45. Дифференціальное уравненіе движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при прямолинейной обертывающей . . . . .	121
§ 46. Интегрированіе дифференціального уравненія движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при прямолинейной обертывающей и изслѣдованіе этого уравненія . . . . .	122
§ 47. Движеніе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при впадинѣ на колесѣ . 126	
§ 48. Навысшія и наимнѣйшія положенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ и наибольшія и наимнѣйшія вертикальныя скорости движенія этой точки . . 130	
§ 49. Длина синусоидальной волны траекторіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ . . . . .	131
§ 50. Вліяніе очертаній впадины на величину вертикальныхъ перемѣщеній точки прикосновенія колеса съ рельсомъ . . . . .	132

## О Т Д Ъ Л Ъ IV.

**Вліяніе вибрацій рельса на напряженія въ немъ.**

§ 51. Дифференціальное уравненіе вибраціоннаго движенія . . . . .	137
§ 52. Интегрированіе дифференціального уравненія вибраціоннаго движенія . . . 140	
§ 53. Изслѣдованіе вибраціоннаго уравненія . . . . .	144
§ 54. Число вибраціонныхъ волнъ между точками закрѣпленія рельса . . . . .	146
§ 55. Періодъ вибраціонныхъ колебаній рельса . . . . .	147
§ 56. Число вибрацій рельса . . . . .	149
§ 57. Изгибающіе рельсъ моменты силъ, вызываемые вибраціями рельса . . . . .	150

## О Т Д Ъ Л Ъ V.

**Вѣроятность опредѣленія данными опытами рельсовых напряженій, заключенныхъ между данными предѣлами.**

§ 58. Вѣроятность, что напряжение въ рельсѣ, опредѣленное данными опытами, заключается въ данныхъ предѣлахъ . . . . .	152
§ 59. Примѣненіе синусоиды къ опредѣленію вѣроятностей наблюденій . . . . .	158
§ 60. Примѣры . . . . .	162
§ 61. Число опытовъ, обезпечивающихъ опредѣленной величины вѣроятность наблюденія напряженій, заключенныхъ въ данныхъ предѣлахъ . . . . .	165

## О Т Д Ъ Л Ъ VI.

**Силы горизонтальныя, расширяющія путь.**

§ 1. Общее понятіе объ опасныхъ скоростяхъ . . . . .	171
§ 2. Периодическія движенія паровоза . . . . .	171
§ 3. Средства, уменьшающія периодическія движенія паровоза . . . . .	173
§ 4. Три рода колебательныхъ движеній паровоза . . . . .	174
§ 5. Новое опредѣленіе опасныхъ скоростей . . . . .	177
§ 6. Предположенія, допущенныя при опредѣленной величинѣ опасныхъ скоростей . . . . .	178
§ 7. Вычисленія, опредѣляющія величину опасной скорости. Примѣненіе теоремы площадей . . . . .	179
§ 8. Два рода членовъ, выражающихъ моменты количествъ движенія . . . . .	186
§ 9. Выводъ основного уравненія . . . . .	188
§ 10. Изслѣдованіе основного уравненія . . . . .	189
а) угловыя скорости вращенія продольной оси паровоза . . . . .	189
б) углы поворота продольной оси паровоза . . . . .	190
в) наибольшія и наименьшія угловыя скорости вращенія продольной оси паровоза . . . . .	192
г) случай, когда среднее постоянное направленіе продольной оси паровоза совпадаетъ съ осью пути . . . . .	193
д) случай, когда среднее постоянное направленіе продольной оси паровоза не совпадаетъ съ направленіемъ пути . . . . .	194
§ 11. Дѣйствіе колеса на рельсъ при извилистомъ движеніи паровоза . . . . .	194
а) живыя силы при ударахъ . . . . .	194
б) уголъ поворота продольной оси паровоза . . . . .	199
в) условія, при которыхъ извилистость движенія паровоза не раздвигаетъ рельсы . . . . .	204
§ 12. Необходимость наблюденій для опредѣленія допустимыхъ наибольшихъ скоростей паровоза, не вызывающихъ опаснаго расширенія пути . . . . .	208
§ 13. Средства, способствующія увеличенію поступательной скорости паровоза при сохраненіи устойчивости пути . . . . .	210
§ 14. Значеніе опыта при опредѣленіи наибольшей, допустимой поступательной скорости паровоза . . . . .	215

## ЧАСТЬ II.

### Примѣненіе теоріи къ разъясненію практическихъ вопросовъ.

#### Сравненіе численныхъ результатовъ, полученныхъ изъ уравненій, опредѣляющихъ динамическое дѣйствіе катящагося колеса съ результатами опытовъ Дудлея.

§ 1.	Общая характеристика опытныхъ данныхъ Дудлея . . . . .	219
§ 2.	Недостаточность опытныхъ данныхъ Дудлея . . . . .	220
§ 3.	Обработка опытныхъ и теоретическихъ данныхъ для ихъ взаимнаго сравненія. . . . .	221
а)	обработка опытныхъ данныхъ . . . . .	221
б)	обработка теоретическихъ данныхъ . . . . .	230
§ 4.	Сравненіе опытныхъ и теоретическихъ данныхъ . . . . .	231
§ 5.	Вліяніе числа опоръ, поддерживающихъ рельсъ на результаты теоретическихъ расчетовъ . . . . .	232
§ 6.	Вліяніе поступательной скорости колеса на динамическое дѣйствіе его на рельсъ. . . . .	234
а)	Колеса съ постоянною нагрузкою . . . . .	234
§ 7.	Критическая скорость поступательнаго движенія колеса . . . . .	237
б)	Колеса съ переменною нагрузкою . . . . .	239
§ 8.	Вліяніе коэффициента балласта С на динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ и на устойчивость пути . . . . .	240
§ 9.	Вліяніе коэффициента балласта на устойчивомъ пути . . . . .	240
§ 10.	Вліяніе коэффициента балласта на пути неустойчивомъ и соотвѣтственное уменьшеніе поступательной скорости колеса . . . . .	246
§ 11.	Увеличеніе скорости хода поѣздовъ требуетъ или усиленія ремонта или замѣны слабого балласта твердымъ . . . . .	248
§ 12.	Вліяніе разстоянія между серединами опоръ на динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ . . . . .	249
§ 13.	Вліяніе момента инерціи рельса на величину динамическаго дѣйствія колеса на рельсъ . . . . .	250
§ 14.	Заключеніе относительно вліянія разныхъ элементовъ пути на отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому дѣйствію колеса на рельсъ . . . . .	252
§ 15.	Вліяніе неправильностей формы поверхностей катанія колеса или рельса на величину динамическаго дѣйствія колеса на рельсъ . . . . .	252
§ 16.	Вліяніе совокупности элементовъ пути, выражаемой числомъ А, на отношеніе динамическаго дѣйствія колеса къ статическому дѣйствію . . . . .	254
§ 17.	Напряженіе въ рельсахъ при движеніи колеса . . . . .	255
§ 18.	Теоретическое опредѣленіе напряженій . . . . .	257
§ 19.	Опытное опредѣленіе напряженій въ рельсахъ . . . . .	258
§ 20.	Опредѣленіе наибольшаго напряженія при 4-хъ поддерживающихъ рельсъ опорахъ при помощи измѣренія удлиненія фибры на подошвы рельса. . . . .	259
§ 21.	Приближенное опредѣленіе наибольшаго напряженія при 4-хъ поддерживающихъ рельсъ опорахъ имѣя удлиненіе фибры на подошвы рельса. . . . .	264
§ 22.	Приближенное опредѣленіе наибольшаго напряженія при 6-ти поддерживающихъ опорахъ, имѣя удлиненіе фибры на подошвѣ рельса. . . . .	265
§ 23.	Увеличеніе напряженія въ рельсахъ отъ неправильностей поверхностей катанія по даннымъ Дудлея . . . . .	267

	Стр.
§ 24. Различіе напряженій въ подошвѣ рельса отъ растяженія и отъ сжатія по даннымъ Дудлея . . . . .	268
§ 25. Отсутствіе опытныхъ данныхъ о напряженіяхъ въ рельсѣ при статическомъ дѣйствіи нагрузокъ и необходимость этихъ данныхъ . . . . .	270
§ 26. Теоретическое сравненіе напряженій при статическомъ и динамическомъ дѣйствіи колесъ . . . . .	271
§ 27. Опредѣленіе наибольшаго допустимаго напряженія при статическомъ дѣйствіи колесъ по опыту американскихъ дорогъ . . . . .	271
§ 28. Наибольшія допустимыя напряженія въ рельсахъ, принимая въ расчетъ динамическія дѣйствія колесъ . . . . .	272
§ 29. Наибольшая допустимая статическая нагрузка тяжелыхъ колесъ . . . . .	275
§ 30. Опредѣленіе наибольшихъ практически допустимыхъ статическихъ нагрузокъ осей съ колесами . . . . .	280
§ 31. Опредѣленіе наибольшей поступательной скорости, соответствующей требованію о сохраненіи устойчивости пути . . . . .	281

#### Динамическія таблицы.

Таблица	I. . . . .	114
»	I. bis . . . . .	115
»	II. . . . .	118
»	II. bis . . . . .	119
»	III. . . . .	283
»	IV. . . . .	286
»	V. . . . .	287
»	VI. . . . .	288
»	VII. . . . .	290
»	VIII. . . . .	292
»	IX. . . . .	294
»	X. . . . .	295
»	XI. . . . .	296
»	XII. . . . .	297
»	XIII. . . . .	298
»	XIV. . . . .	299
»	XV. . . . .	300
»	XVI. . . . .	301
»	XVII. . . . .	303
»	XVIII. . . . .	305
»	XIX. . . . .	307
»	XX. . . . .	309
»	XXI. . . . .	311
»	XXII. . . . .	313
»	XXIII. . . . .	315
»	XXIV. . . . .	317
»	XXV. . . . .	318
»	XXVI. . . . .	320
»	XXVII. . . . .	321

## Графическія таблицы.

- I. Диаграммы силъ по проф. Ю. В. Ломоносову.
  - II. Диаграммы силъ по М. В. Гололобову и А. С. Раевскому, скорость 52 кил.
  - III. Диаграммы силъ по М. В. Гололобову и А. С. Раевскому, скорость 104 кил.
  - IV. Составлена по динамическимъ таблицамъ X и XXVII при впадинѣ глубиною 0,2 сант.
  - V. Составлена по динамическимъ таблицамъ X и XXVII при впадинѣ глубиною 0,4 сант.
  - VI. Составлена по динамическимъ таблицамъ XXI и XXVI при глубинѣ впадины 0,2 сант.
-

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

Изученіе вопроса о прочности рельсъ, длившееся уже нѣсколько десятилѣтій, шло двумя путями. Одинъ изъ нихъ относился къ области наблюденій и опытовъ, другой путь былъ указанъ соображеніями теоретическаго свойства.

Въ предлагаемой книгѣ идетъ рѣчь о теоретическомъ изученіи въ связи съ наблюденіями и опытами.

О необходимости обоихъ путей съ полною ясностью высказывались лица, занимавшіяся изученіемъ вопроса о прочности рельсъ. Такъ, Фламаншъ въ статьѣ: «*Recherches sur la flexion des rails*» <sup>1)</sup>, высказавъ, что на основаніи *однихъ* математическихъ изслѣдованій, даже самага высокаго свойства, нельзя получить практически полезныхъ опредѣленій, относящихся къ рельсу, подверженному опредѣленнымъ условіямъ, непосредственно затѣмъ говорить и о невозможности разрѣшить вопросъ о прочности рельсъ путемъ только наблюденій и опытовъ.

«Опытъ былъ примѣненъ къ освѣщенію сторонъ, недостаточныхъ вычисленіямъ. Я самъ (говоритъ Фламаншъ) предпринялъ, съ давнихъ лѣтъ, рядъ опытовъ и получилъ уже нѣкоторые результаты, а затѣмъ Коюаръ во Франціи, Асть въ Австріи и еще другіе далеко подвинули впередъ наблюденія надъ изгибомъ рельсъ; но, несмотря на всю важность и даже неожиданность самыхъ первыхъ результатовъ, остается еще сдѣлать *все* на пути опытнаго изученія вопроса. Это

---

<sup>1)</sup> Bulletin de la Com. Intern. du Congrès des chemins de fer Octob. 1904 p. 906.

требованіе вызывается сложностью наблюдаемаго явления, необъяснимаго безъ огромнаго ряда опытовъ, необходимыхъ потому, что нѣтъ возможности устанавливать по произволу обстоятельства, сопровождающія опытъ».

Въ статьяхъ: *Essais effectués au moyen du stremmatographe* и *Le rail placé sur des supports flexibles* <sup>1)</sup> Дудлей справедливо замѣчаетъ, что математическій анализъ ограничивается изученіемъ явленій при условіяхъ лишь нѣкотораго приближеннаго подобія существующимъ въ дѣйствительности обстоятельствамъ, поэтому является необходимостью изученія путемъ наблюденій. При посредствѣ своего прибора, стремматографа, Дудлей достигъ очень важныхъ результатовъ, тѣмъ не менѣе, упоминаетъ, что, наблюдаемое при увеличеніи скорости, быстрое увеличеніе напряженія въ фибрахъ рельса, *вызывается причинами еще неопредѣленными и для которыхъ, изъ бывшихъ наблюденій, удалось найти еще мало объясненій.*

Упомянувъ о неправильности въ формѣ колесныхъ шинъ, Дудлей ограничивается указаніемъ, что неправильность формы увеличиваетъ удары, но ни мало не пытается найти связь между формой и размѣрами неправильностей въ формѣ шины или рельса, съ одной стороны, и силою удара—съ другой. Онъ не дѣлаетъ такой попытки потому, что разрѣшеніе подобнаго вопроса не можетъ быть достигнуто никакими опытами и доступно только теоріи.

Вполнѣ правильныя мнѣнія Фламаша и Дудлея о недостаткахъ математическихъ теорій, опредѣляющихъ дѣйствіе колеса на рельсъ, относятся къ тѣмъ теоріямъ, которыя были у нихъ въ виду.

Математическая теорія, принявъ въ моихъ изслѣдованіяхъ новое направленіе, освободилась отъ необходимости дѣлать неосуществимыя предположенія: что катящееся по рельсу колесо имѣетъ совершенно правильную круглую форму; что оно дѣйствуетъ на совершенно прямолинейной

<sup>1)</sup> Bulletin de la Com. Intern. du Congrès des chemins de fer Decem. 1904.

формы рельсъ, при томъ имѣющей длину всего въ одинъ пролетъ между серединами двухъ смежныхъ опоръ, поддерживаемый неподвижными опорами. Она получила теперь возможность принимать въ расчетъ длину рельса въ три и пять пролетовъ, вводить въ расчетъ не неподвижныя, а упругія опоры, поддерживающія рельсъ даже и при неоднобразной подбивкѣ шпаль, вводя въ вычисления неправильности въ формахъ шины и рельса. Всѣ эти обстоятельства теперь можно вводить въ вычисления, опредѣляющія вліяніе скорости на динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ.

Такимъ образомъ, теорія поставлена въ возможность опредѣлять динамическое дѣйствіе отдѣльнаго колеса на рельсъ при условіяхъ не тѣхъ, которыя представляли лишь нѣкоторое приближенное подобіе существующимъ, а при условіяхъ, если и не тождественныхъ съ дѣйствительными, то настолько близкихъ къ практическимъ, что путемъ сличенія результатовъ, доставленныхъ теоріею, съ результатами наблюдений, можно получать заключенія, вполне примѣнимыя въ практикѣ.

Сличенія теоретическихъ исчисленій съ результатами опытовъ Дудлея показали, что, съ точностью вполне достаточною для практическихъ цѣлей, теоретическіе результаты исчисленій, относящихся къ вертикальному дѣйствію одиночнаго колеса, могутъ быть примѣнены и въ случаяхъ дѣйствія на рельсъ многихъ колесъ, когда разстояніе между осями смежныхъ колесъ настолько больше разстоянія между серединами смежныхъ шпаль, какъ это было при опытахъ Дудлея, превосходя 4 и 5 пролетовъ.

Результаты сличеній теоретическихъ выводовъ съ наблюдениями Дудлея приведены въ этой книгѣ.

Теорія, включившая въ свои исчисленія не только скорость поступательнаго движенія колеса, но и коэффициентъ балласта, опредѣляющей упругость опоръ, поддерживающихъ рельсы; и неодинаковость подбивки шпаль; и разстояніе между опорами; и моментъ инерціи рельса; и неправильности поверхностей катанія какъ колеса, такъ и рельса—

дала возможность вполне надежно оцѣнивать вліяніе каждаго изъ этихъ обстоятельствъ на напряженіе въ рельсѣ. Полное обособленіе каждаго изъ этихъ обстоятельствъ, съ возможностью измѣнять его значеніе, при неизмѣнности всѣхъ остальныхъ, необходимое для правильной оцѣнки каждаго, было совершенно недостижимо при самомъ искусномъ и самомъ тщательномъ производствѣ опытовъ. Эта теоретическая оцѣнка вліяній приведена въ соответствующихъ параграфахъ. Очень важное, въ особенности съ экономической точки зрѣнія, свойство пути, называемое устойчивостью, нѣсколько разъясненное мною въ сочиненіи «Опасныя скорости движенія паровоза», получило теперь новое существенное освѣщеніе. Въ упомянутомъ сочиненіи принимались въ расчетъ только горизонтальныя силы, теперь приняты силы вертикальныя.

Читатель найдетъ далѣе опредѣленіе наибольшей скорости допустимой при сохраненіи устойчивости пути, въ вертикальномъ направленіи. Та же теорія дала возможность указывать степень вѣроятности опредѣленія величины напряжения въ рельсѣ, посредствомъ наблюденій надъ катящимися колесами, и исчислила наименьшее число опытовъ, обеспечивающихъ данную вѣроятность, что наблюдаемое напряженіе заключается въ данныхъ для него предѣлахъ. Вся эта книга, во всемъ ея объемѣ, представляетъ переработанный, исправленный и во многомъ дополненный сводъ всего написаннаго мною ранѣе объ упоминаемыхъ предметахъ.

Въ этой книгѣ я помѣщаю и полученное мною, въ высокой степени интересное, письмо профессора Н. Е. Жуковского съ данными имъ доказательствами двухъ свойствъ траекторій точки прикосновенія круглаго колеса съ прямымъ рельсомъ, найденныхъ мною сначала графически, при помощи предложенной мною теоріи.

*Н. Петровъ.*

10 Февраля 1915 г.

**Письмо къ Автору**  
**„Вліянія поступательной скорости колеса на напряженія въ рельсъ“<sup>\*)</sup>.**

Глубокоуважаемый  
 Николай Павлович!

Съ удовольствіемъ прочиталъ присланную Вами статью. Нахожу весьма удачною сдѣланную вами замѣну основного дифференціального урав. задачи (ур. 48<sup>bis</sup>) двумя разностными уравненіями (51 и 53).

Я думаю, что при такой замѣнѣ вычисленіе ординатъ траекторіи точки прикосновенія колеса выходитъ проще, нежели у Стокса въ задачѣ при неподвижныхъ точкахъ опоры (Stokes, Mathematical and Physical papers. Vol. II p. 179). Вашъ приемъ, не стѣсненный значеніемъ функціи  $h_x$ , позволяетъ распространить выводъ на случай подвижныхъ опоръ и приводитъ къ интересному заключенію объ опасномъ вліяніи этой подвижности.

Посылаю Вамъ найденное мною доказательство любопытнаго свойства Вашихъ графикъ, которое Вы указываете въ началѣ страницы 81.

Представимъ ур. 48<sup>bis</sup> на основаніи условія  $x = ct$  въ видѣ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A + By,$$

гдѣ  $A$  и  $B$  нѣкоторыя функціи  $X$  и назовемъ чрезъ

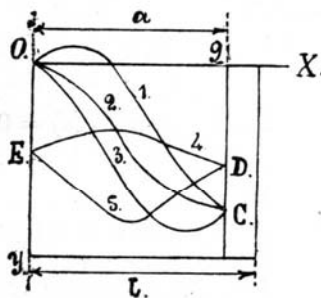
$$y = f_1(x), y = f_2(x) \dots y = f_5(x)$$

частныя значенія общаго интеграла этого урав., представляющія траекторіи 1, 2, 3, 4, 5 на фиг. 1.

Составимъ разности:

$$f_2(x) - f_1(x) = F_1(x), f_3(x) - f_1(x) = F_2(x), f_4(x) - f_1(x) = F_3(x),$$

$$f_5(x) - f_4(x) = F_4(x), f_5(x) - f_1(x) = F_5(x).$$



Фиг. 1.

<sup>1)</sup> См. „Записки И. Р. Т. О.“ 1903 г. Февраль.

Всѣ эти разности будутъ удовлетворять дифференціальному ур.:

$$\frac{d^2 F_k(x)}{dx^2} = B F_k(x).$$

Напишемъ такое же уравненіе для другого индекса  $i$ :

$$\frac{d^2 F_i(x)}{dx^2} = B F_i(x)$$

и составимъ соотношеніе:

$$F_k(x) \frac{d^2 F_i(x)}{dx^2} - F_i(x) \frac{d^2 F_k(x)}{dx^2} = 0.$$

Интегрируя это уравненіе, получаемъ:

$$F_k(x) F_i'(x) - F_i(x) F_k'(x) = \text{const.}$$

Если  $k=1$ ,  $i=2$ , то, вслѣдствіе  $F_1(0)=0$ ,  $F_2(0)=0$ , имѣемъ  $\text{const}=0$  и

$$F_1(x) F_2'(x) - F_2(x) F_1'(x) = 0.$$

Принимая, что траекторіи (1) и (2) пересѣкаются въ точкѣ  $C$  при  $x=a$ , будемъ имѣть:  $F_1(a)=0$  и

$$F_2(a) F_1'(a) = 0,$$

откуда  $F_2(a)=0$ ,

Такимъ образомъ, *всѣ траекторіи, выходящія изъ точки  $O$  пересѣкаются въ одномъ и томъ же фокусѣ  $C$* . Это справедливо и для всѣхъ траекторій, выходящихъ изъ какой-нибудь точки  $\Sigma$ , которія пересѣкнутся въ одномъ и томъ же фокусѣ  $D$ .

Покажемъ, что фокусъ  $D$  имѣетъ ту же абсциссу  $a$ , какую имѣетъ фокусъ  $C$ . Для этого положимъ  $k=1$ ,  $i=4$  и замѣтимъ, что вслѣдствіе  $F_1(0)=0$  и  $F_4(0)=0$ , мы опять будемъ имѣть  $\text{const}=0$  и

$$F_1(x) F_4'(x) - F_4(x) F_1'(x) = 0.$$

Такъ какъ  $F_1(a)=0$ , то  $F_4(a) F_1'(a)=0$ ,

$$\text{откуда } F_4(a)=0.$$

Изъ сказаннаго видно, что *траекторіи (4) и (5) пересѣкаются при томъ же значеніи  $x=a$ , при которомъ пересѣкаются траекторіи (1) и (2)*.

Положимъ теперь, что  $k=1$  и  $i=5$ .

Для постояннаго найдемъ значеніе

$$\text{const} = -F_5(0) F_1'(0),$$

вслѣдствіе чего

$$F_1(x) F_4'(x) - F_5(x) F_1'(x) = -F_5(0) F_1'(0).$$

При  $x=a$  будемъ имѣть:

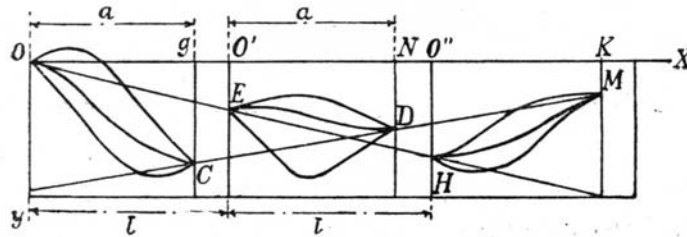
$$F_5(a) F_1'(a) = F_5(0) F_1'(0)$$

или

$$\frac{F_5(a)}{F_5(0)} = \frac{F_1'(0)}{F_1'(a)}.$$

Эта пропорція показываетъ, что *отношеніе разностей ординатъ  $\frac{CD}{\Sigma O}$  не зависитъ отъ мѣста точки  $\Sigma$  на оси  $OY$ .*

Будемъ теперь давать  $O\Sigma$  на фиг. 1 послѣдовательныя значенія  $n, 2n, 3n, \dots$  и, вычертивъ траекторіи (4) и (5) на отдѣльныхъ прямоугольникахъ длины  $l$  (разстояніе между шпалами), расположимъ всѣ эти прямоугольники послѣдовательно въ рядъ, какъ это представлено на фиг. 2.



Фиг. 2.

Всѣ начала траекторій:  $O, \Sigma, H, \dots$  будутъ при этомъ лежать на одной прямой.

На основаніи сказаннаго выше легко доказать, что фокусы:  $C, D, M, \dots$ , соотвѣтствующіе упомянутымъ началамъ траекторій, будутъ тоже лежать на одной прямой.

Мы имѣемъ равенства:

$$\frac{CG - DN}{\Sigma O'} = \frac{CG - MK}{HO''} = \dots,$$

которыя, будучи представлены въ видѣ:

$$\frac{CG - DN}{NG} = \frac{CG - MK}{GK} = \dots,$$

доказываютъ желаемое.

Съ глубокимъ уваженіемъ и преданностью

**Н. Жуковскій.**

ЧАСТЬ I.  
Теоретическая.

ОТДѢЛЪ I.

Силы вертикальныя.

Обзоръ силъ, вызывающихъ давленіе колесъ на рельсъ.

§ 1.

Колеса, катящіяся по рельсамъ, въ своихъ точкахъ прикосновенія съ рельсами, прилагаютъ къ нимъ усилія, разлагающіяся на три главныя направленія: одно—перпендикулярное къ поверхности прикосновенія и два—касательныя къ этой поверхности. Одно изъ этихъ послѣднихъ направляется вдоль рельса и другое—перпендикулярно къ двумъ первымъ. Усилія по каждому изъ этихъ трехъ направленій могутъ развиваться независимо одно отъ другихъ. Это даетъ право изучать ихъ каждое въ отдѣльности. Все дальнѣйшее изложеніе относится къ силамъ, направленнымъ перпендикулярно къ поверхности прикосновенія рельса съ колесомъ, къ такъ называемой поверхности катанія рельса. Такъ какъ эта поверхность рельса почти не отклоняется отъ горизонтальной плоскости, то въ расчетъ принимаются только вертикально направленныя силы.

Къ этимъ силамъ относятся: вѣсъ колеса со всѣми неизмѣнно связанными съ нимъ частями, каковы: ось, подшпінники, буксы, рессоры и противовѣсы, если они помѣщены на колесѣ. Всѣ слагающія силы вертикальнаго дѣйствія колеса на рельсъ, вызываемыя силою тяжести, одинаково входятъ въ составъ полного давленія колеса на рельсъ, какъ при покойномъ состояніи колеса, такъ и при его движеніи.

Стоящее колесо передаетъ рельсу нагрузку рессоры, во всей ея полнотѣ; но, когда колесо катится, рессора обыкновенно колеблется и давитъ на ось то съ большею, то съ меньшею силою, поэтому и колесо передаетъ рельсу давленіе нагрузки то превосходящее сложную ея величину, то не достигающее ее.

При неподвижности колесъ поршни паровыхъ машинъ, не подвергаясь давленію пара, не передаютъ никакихъ усилій на мотыли колесъ; центробѣжная сила противовѣсовъ не развивается; но, какъ только паровозныя колеса, связанныя съ машиною, начинаютъ катиться, обѣ послѣднія силы развиваются и вертикальныя ихъ составляющія, дѣйствуя на колесо, передаются имъ рельсу: Если бы рельсъ обладалъ свойствами твердаго и неподвижнаго тѣла, то сумма выше перечисленныхъ силъ, соответствующихъ данному состоянію колеблющейся рессоры и данному положенію машинныхъ частей, выражала бы давленіе колеса на рельсъ. Упругій рельсъ, способный вдобавокъ перемѣщаться вмѣстѣ съ опорами въ вертикальномъ направленіи, предоставляетъ колесу возможность то опускаться, то приподниматься. Вертикальныя движенія колеса сопровождаются вертикальными слагающими силъ инерціи массы колеса и массъ, неизмѣнно связанныхъ съ нимъ. Направленіе этихъ силъ инерціи будетъ то вверхъ, то внизъ. Силы инерціи, направленные внизъ, присоединяясь къ упомянутой выше суммѣ вертикальныхъ слагающихъ, увеличатъ общее давленіе колеса на рельсъ, а при направленіи вверхъ, напротивъ, уменьшатъ общее давленіе колеса на рельсъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ вліяніе силъ инерціи на общее давленіе колеса на рельсъ можетъ быть очень большимъ. При неправильной формѣ колесныхъ шинъ, какъ подтверждаютъ опыты, давленіе колеса на рельсъ можетъ быть въ два, въ три раза болѣе давленія того же колеса при спокойномъ его состояніи. Вмѣстѣ съ тѣмъ силы инерціи колеса, направленные вверхъ, могутъ не только вполне парализовать дѣйствіе всѣхъ силъ, направляющихся внизъ, но могутъ превосходить всю ихъ сумму и заставляютъ колесо отдѣляться отъ рельса, подпрыгивая вверхъ.

Эти соображенія указываютъ необходимость изучать давленія, производимыя колесами на рельсы, принимая въ расчетъ и силы инерціи катящихся колесъ. Другими словами, изучать вліяніе скорости поступательнаго движенія колесъ на производимое ими давленіе на рельсы.

### **Давленіе на колесную ось, производимое рессорами.**

#### **а) Рессора отдѣльная.**

#### **§ 2.**

Силы тяжести, опредѣляемыя извѣстными способами, дѣйствуютъ на катящееся колесо точно также, какъ и на колесо, находящееся въ покоѣ.

Рессора, поддерживающая нагрузку, передает давление лежащего на ней груза не всегда одинаково. Величина этого давления зависит от положения колеблющейся рессоры. Положение рессоры мѣняется со временемъ. Опыты показываютъ, что на хорошо содержимомъ пути давление рессоры рѣдко достигаетъ величины въ 1,5 раза болѣе спокойной нагрузки. Давления, производимыя рессорою, могутъ быть вполне опредѣлены величинами ея прогибовъ.

### Вліяніе колебанія рессоры.

Если рессора, при стрѣлѣ прогиба  $l$ , уравновѣшиваетъ лежащій на ней грузъ  $P$ , то, при обозначеніи коэффициента ея упругости  $k$ , удовлетворяется уравненіе

$$P = kl$$

при стрѣлѣ прогиба  $z$  давление  $Z$ , производимое рессорою, опредѣлится уравненіемъ

$$Z = kz.$$

Если вѣсъ самой рессоры такъ малъ, сравнительно съ поддерживаемою ею нагрузкою  $P$ , что вѣсъ ея можно не принимать въ расчетъ, и если при этомъ, подпертая снизу, рессора будетъ имѣть стрѣлу прогиба  $z$ , поддерживая нагрузку  $P$ , то грузъ  $P$  будетъ находиться подъ вліяніемъ какъ силы тяжести  $P$ , дѣйствующей внизъ, такъ и силы упругости рессоры  $Z = kz$ ,—дѣйствующей вверхъ.

Ускореніе центра инерціи груза  $P$ , обозначенное

$\frac{d^2 z}{dt^2}$ , опредѣлится уравненіемъ

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = P - Z = P - kz$$

а такъ какъ  $k = \frac{P}{l}$ , то

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - g \frac{z}{l}$$

Этому дифференціальному уравненію удовлетворяетъ величина  $z$ , опредѣленная уравненіемъ

$$z = A \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{g}{l}} t + B \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{g}{l}} t + l \dots (1)$$

и скорость движения центра инерции массы  $\frac{P}{g}$ , по вертикальному направлению вверх, будетъ

$$\frac{dz}{dt} = -A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + B \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t \dots (2)$$

Постоянные произвольные  $A$  и  $B$  этого уравнения определяются обстоятельствами движения въ какой-нибудь моментъ времени.

Напримѣръ, если время будемъ отсчитывать съ того мгновенія, когда грузъ  $P$ , изъ наиболѣе пониженнаго своего положенія (когда  $z = l + l_1$ ), начнетъ подниматься, имѣя начальную скорость нуль, то

при  $t=0$ , величина  $z = l + l_1$  и скорость  $\frac{dz}{dt} = 0$ .

Вставляя эти три величины въ уравненія (1) и (2), найдемъ:

$$l + l_1 = A + l \text{ и } 0 = B.$$

Такимъ образомъ, на мѣсто уравненій (1) и (2), можно написать

$$z = l_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + l \dots (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = -l_1 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t \dots (4).$$

Изъ этихъ уравненій видно, что при возрастаніи  $t$  отъ  $t = 0$ ,  $\cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$  будетъ уменьшаться и  $z$  будетъ становиться меньше  $l + l_1$ , приближаясь къ равновѣсному положенію; а  $\sin \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$  будетъ увеличиваться, причѣмъ увеличивается и скорость подъема кверху.

Когда время  $t$  увеличится настолько, что

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

тогда въ уравненіи (3), опредѣляющемъ  $z$ , подъ знакомъ  $\cos$  будетъ величина

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2},$$

причемъ

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ и } z = l$$

Слѣдовательно, грузъ  $P$  придетъ въ свое равновѣсное положеніе.

Въ уравненіи (4), опредѣляющемъ скорость движенія груза  $P$ , подъ знакомъ  $\text{Sin}$  будетъ тоже

$$\frac{\pi}{2} \text{ и } \text{Sin } \frac{\pi}{2} = 1, \text{ а } \frac{dz}{dt} = -l_1 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи времени  $\text{Sin}$ , въ уравненіи (4), не мѣняя знака, будетъ уменьшаться, слѣдовательно скорость подъема груза  $P$  вверхъ будетъ убывать, а  $\text{Cos}$  въ уравненіи (3) переимѣнитъ знакъ и величина  $z$  будетъ все меньше и меньше величины  $l$ .

При такомъ увеличеніи времени, когда

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

уравненіе (3) доставитъ

$$z = l - l_1$$

и уравненіе (4) дастъ

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Это значитъ, что въ этотъ моментъ грузъ  $P$  будетъ выше своего равновѣснаго положенія на ту же величину  $l_1$  на какую, въ началѣ разсматриваемаго движенія, онъ былъ ниже этого положенія, и на мгновеніе скорость исчезнетъ. Затѣмъ въ уравненіи (3)  $\text{Cos}$ , оставаясь отрицательнымъ, будетъ уменьшаться по величинѣ и  $z$  будетъ возрастать; а въ уравненіи (3)  $\text{Sin}$  переимѣнитъ знакъ и будетъ увеличиваться. Скорость, направленная внизъ, будетъ увеличиваться.

Въ тотъ моментъ, когда будетъ

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

изъ уравненія (3) найдемъ

$$z = l_1 + l$$

и грузъ  $P$  займетъ свое самое низкое положеніе, а изъ уравненія (4)

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Такимъ образомъ, для груза  $P$  наступятъ вновь тѣ же условія движенія, какія были при началѣ описаннаго полнаго колебанія.



**Численные примѣры опредѣленія напряженій рессоръ надъ сосѣдними шпалами.**

Напримѣръ, положимъ, что

$$P_1 = 5 \text{ тоннъ, } P_2 = 6 \text{ тоннъ и } P_3 = 4 \text{ тонны,}$$

притомъ

$$i_1 = 100 \text{ mm. } i_2 = 150 \text{ mm. } i_3 = 40 \text{ mm.}$$

$$\Sigma P_i = 15, \quad \Sigma \frac{P_i}{l_i} = \frac{5}{100} + \frac{6}{150} + \frac{4}{40} = \frac{28,5}{150}$$

и

$$l = \frac{15 \times 150}{28,5} = 79,$$

т. е. дѣйствіе всѣхъ трехъ рессоръ равнозначуще съ дѣйствіемъ одной воображаемой рессоры, прогибающейся подъ полнымъ грузомъ на 79 mm.

Время полного размаха снизу вверхъ, или наоборотъ, при такой системѣ рессоръ, и  $g = 9808 \text{ mm.}$ , было бы

$$t = \pi \sqrt{\frac{79}{9808}} = 0,282 \text{ секунды.}$$

Если бы паровозъ съ подобными рессорами шелъ со скоростью въ 60, 100 или 120 километровъ въ часъ по рельсовому пути, уложенному на шпалахъ, разставленныхъ середина отъ середины на 80 сантиметровъ, то для перехода колеса отъ середины одной шпалы до середины другой, слѣдующей за нею, было бы время  $T_1$

$$\text{и при } V = \quad 60 \text{ кил.} \quad 100 \text{ кил.} \quad 120 \text{ кил.}$$

$$T_1 = 0,048 \quad \text{„} \quad 0,030 \quad \text{„} \quad 0,024 \quad \text{„} \text{ секунды,}$$

т. е.  $T_1$  приблизительно разъ въ 6, въ 10 меньше  $t = 0,282 \text{ сек.}$  или, другими словами, во время перехода колеса отъ середины одной шпалы къ срединѣ другой, рессора успѣетъ сдѣлать приблизительно шестую или десятую часть своего размаха.

Чтобы вычислить, насколько приблизительно измѣнится давленіе рессоры въ теченіе времени  $T_1$ , предполагая, что въ моментъ прохода по первой шпалѣ рессора имѣла наибольшій прогибъ, соответствующій не часто наблюдаемому  $l_1 = 0,5l$ , надо въ уравненіи (3), на мѣсто  $t$ , поставить время передвиженія по пролету между серединами двухъ сосѣднихъ шпалъ. При посту-

пательной скорости колеса въ 60 километровъ въ часъ  $t=0,048$ . Въ такомъ случаѣ уравненіе (3) дастъ

$$Z = 0,5 \times 79 \cos \sqrt{\frac{9808}{79}} \times 0,048 + 79 = 79 \times 1,048 = 117,096 \text{ mm.}$$

Такъ какъ надъ первую шпалою было  $Z=79 + 0,5 \times 79=118,5$ , то прогибъ надъ второю шпалою, равный 117,096 mm., будетъ меньше перваго всего на 1,404 mm. или на 1,2%.

Подобное же вычисленіе, относящееся къ поступательной скорости въ 120 километровъ, показываетъ, что пониженіе груза надъ второю шпалою будетъ меньше пониженія надъ первую на 1%.

При поступательной скорости въ 120 километровъ въ часъ разница пониженій надъ первую шпалою и надъ мѣстомъ, удаленнымъ отъ ея середины на 0,6 пролета, т. е. послѣ истеченія времени  $t = 0,6 \times 0,024 = 0,0144$ , когда

$$\cos \sqrt{\frac{9808}{79}} \cdot 0,0144 = 0,987 \text{ и}$$

$$Z = 0,5 \times 79 \times 0,987 + 79 = 1,487 \times 79 = 117,47$$

будетъ меньше  $1,5 \times 79 = 118,5$  на 0,8%.

Эти числа указываютъ, что, не опасаясь сдѣлать чувствительную погрѣшность въ опредѣленіи давленій, производимыхъ колеблющеюся рессорою, при проходѣ всего пролета между серединами двухъ смежныхъ шпалъ, можно принимать давленіе неизмѣннымъ и равнымъ наибольшему давленію, какое обнаруживается надъ первую шпалою.

#### **Пропорціональность груза стрѣлѣ прогиба рельса въ точкѣ прикосновенія спокойно стоящаго груза.**

##### § 4.

Обыкновенно рельсъ имѣетъ видъ балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ, болѣе или менѣ подвижныхъ, и нагруженной въ нѣсколькихъ точкахъ грузами неравной величины. При совершенной невозможности точно опредѣлить упругія свойства основанія, поддерживающаго подошву рельса, въ каждой точкѣ опоры, вопросъ объ интересующемъ насъ соотношеніи можно разрѣшать лишь приблизительно. Изгибъ рельса, какъ увидимъ болѣе подробно далѣе, зависитъ не только отъ свойствъ основанія и размѣщенія точекъ приложенія грузовъ, но при движеніи поѣзда еще и отъ скорости движенія. Дѣйствительно, при скорости въ 120

километровъ въ часъ для прохода колесомъ половины промежутка между серединами шпаль, разставленныхъ середина отъ середины на 80 сантиметровъ, достаточно 0,0144 секунды. Въ теченіе такого времени тѣло, ничѣмъ не поддерживаемое снизу, можетъ опуститься всего на 1 миллиметръ. Правда, что колесо несетъ еще нагрузку раза въ 4 болѣе вѣса его собственнаго, сложеннаго съ вѣсомъ неизмѣнно связанныхъ съ нимъ частей, и, слѣдовательно, въ теченіе 0,0144 секунды, будучи свободнымъ, т. е. не опираясь на рельсъ, оно опустилось бы на 5 миллиметровъ <sup>1)</sup>; но, опираясь на рельсъ и встрѣчая съ его стороны сопротивленіе, уравновѣшивающее въ нѣкоторой долѣ силу, стремящуюся опустить колесо внизъ, оно вызоветъ лишь то упругое сопротивленіе рельса, которое будетъ соотвѣтствовать прогибу, равному величинѣ опусканія колеса подъ дѣйствіемъ двухъ неуравновѣшивающихся силъ—вѣса съ одной и упругаго сопротивленія рельса съ другой. Этотъ результатъ есть слѣдствіе свойства инерціи колеса. Такъ какъ опусканіе рельса неизбѣжно требуетъ сообщенія рельсу нѣкотораго ускоренія, то упругое сопротивленіе рельса связывается съ проявляющеюся еще силою инерціи колеса. Поэтому въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ необходимо принимать въ расчетъ не только деформацію рельса, но и силы инерціи какъ колеса, такъ и рельса. Такъ какъ сила инерціи колеса находится въ непосредственной зависимости отъ перемѣщенія рельса, то и необходимо прежде всего найти связь между этими перемѣщеніями и силою производящею перемѣщеніе.

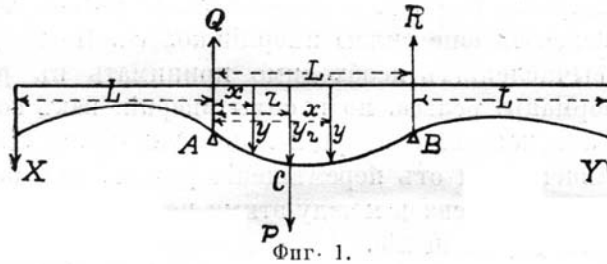
Диаметры колесъ подвижнаго состава большею частью превосходятъ разстояніе между серединами шпаль и потому не допускаютъ помѣщенія на рельсъ между шпалами болѣе одного колеса. Поэтому, рассматривая часть рельса, ограниченную двумя опорными точками, слѣдуетъ имѣть въ виду нагрузку въ одной только точкѣ. Сосѣдніе пролеты между шпалами почти никогда не бываютъ тоже нагружены. Не только подъ пассажирскими паровозами, но и подъ товарными, при небольшихъ разстояніяхъ между осями, два сосѣдніе съ нагруженнымъ пролета не поддерживаютъ колесъ и остаются не нагруженными. Нагрузки рельса размѣщаются далѣе сосѣднихъ съ нагруженнымъ пролетовъ, Какъ бы эти нагрузки ни размѣщались, всегда дѣйствіе ихъ, вмѣстѣ съ дѣйствіемъ опорныхъ сопротивленій, за исключеніемъ опоръ, ограничивающихъ рассматриваемый пролетъ, можно при-

---

<sup>1)</sup>  $(1 + 4)g \frac{t^2}{2} = 5 \times 9808 \times \frac{0,0144^2}{2} = 5.$

вести къ дѣйствию такихъ силъ, которыя, замѣняя силы дѣйствительныя, были бы приложены къ рельсу на мѣстахъ сосѣднихъ опоръ. Для этого надо будетъ только, выбравъ какую-нибудь точку на оси разсматриваемой части рельса, взять сумму моментовъ всѣхъ силъ, расположенныхъ по одну сторону этой точки относительно этой послѣдней, и затѣмъ найти силу, приложеніе которой въ сосѣдней точкѣ опоры съ той же стороны доставило бы моментъ, равный моменту дѣйствительно приложенныхъ силъ. Въ такомъ именно видѣ и разсматривается вопросъ вслѣдъ за симъ.

**Выводъ уравненія кривой изогнутой оси призматическаго бруса, лежащаго на двухъ упругихъ опорахъ, нагруженнаго въ нѣкоторой средней точкѣ и на свѣшивающихся концахъ, предполагая, что перемѣщенія опоръ пропорціональны прижимающимъ ихъ усиліямъ и что ихъ углы, составляемые касательными къ изогнувшейся оси, съ первоначальными ихъ направленіями, при точкахъ опоры, имѣютъ данныя величины.**



Фиг. 1.

На фиг. 1, \$A\$ и \$B\$ суть точки опоры, \$C\$ точка приложенія силы \$P\$. Силы сопротивленія опоръ обозначены буквами \$Q\$ и \$R\$. Разстояніе между опорами обозначено \$L\$ и силы, приложенныя на смежныхъ опорахъ, обозначены \$X\$ и \$Y\$. Погруженіе опоры \$A\$ при дѣйствіи силы \$Q\$ назовемъ \$a\$; погруженіе опоры \$B\$ при дѣйствіи силы \$R\$ назовемъ \$b\$.

Статическія условія равновѣсія такого погнувшагося бруса выражаются уравненіями

$$X + P + Y = Q + R \dots \dots \dots (1)$$

$$X(L + z) + R(L - z) = Qz + Y(2L - z) \dots \dots (2).$$

Дифференціальное уравненіе упругой линіи, для части \$AC\$, какъ извѣстно, есть

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Y(2L - x) - R(L - x) + P(z - x),$$

откуда

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Y \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + P \left( zx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \dots (3)$$

и

$$EIy = Y \left( Lx^2 - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left( \frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \dots (4)$$

а для кривой части *CB*

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Y (2L - x) - R (L - x)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = Y \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_3 \dots (5)$$

$$EIy = Y \left( Lx^2 - \frac{x^2}{6} \right) - R \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_3 x + C_4 \dots (6)$$

Если при  $x=0$ , ордината  $y=a$  и

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

то изъ уравненія . . . (3)

$$C_1 = EI \alpha$$

и изъ уравненія . . . (4)

$$C_2 = EIa.$$

Если при  $x=L$ , ордината  $y=b$ , и  $\frac{dy}{dx} = \beta$

то изъ уравненія (5)

$$C_3 = EI \beta - \frac{3}{2} L^2 Y + \frac{1}{2} L^2 R \dots (7)$$

и изъ (6) вмѣстѣ съ (7)

$$C_4 = EIb + \frac{4}{6} L^3 Y - \frac{1}{6} L^3 R - EI \beta L \dots (8)$$

При  $x=z$  ординаты у вѣтвей *AC* и *CB* взаимно равны также, какъ и касательныя къ этимъ вѣтвямъ одинаковы, поэтому изъ (3) и (5)

$$C_3 = EI \alpha + P \frac{z^2}{2} \dots (9)$$

а изъ (4) и (6)

$$C_4 = EIa - P \frac{z^3}{6} \dots (10)$$

Вставляя вторыя части уравненій (9) и (10) вмѣсто  $C_3$  и  $C_4$  въ уравненія (7) и (8) и, сдѣлавъ небольшія преобразованія, получимъ

$$-3Y + R = -2 \frac{EI}{L^2} \beta + 2 \frac{EI}{L^2} \alpha + P \frac{z^2}{L^2}$$

$$4Y - R = -6 \frac{EI}{L^3} b + 6 \frac{EI}{L^2} \beta + 6 \frac{EI}{L^3} a - P \frac{z^3}{L^3},$$

откуда

$$Y = 6 \frac{EI}{L^3} (a-b) + 2 \frac{EI}{L^2} (\alpha + 2\beta) + P \frac{z^2}{L^2} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \dots (11)$$

$$R = 18 \frac{EI}{L^3} (a-b) + 2 \frac{EI}{L^2} (4\alpha + 5\beta) + P \frac{z^2}{L^2} \left(4 - 3 \frac{z}{L}\right) (12).$$

Уравненія статики (1) и (2) легко приводятся къ виду

$$X = 2Y - R + P \frac{z}{L}$$

$$Q = 3Y - 2R + P + P \frac{z}{L}$$

а, вставляя сюда вмѣсто  $Y$  и  $R$  ихъ выраженія изъ (11) и (12) найдемъ

$$X = -6 \frac{EI}{L^3} (a-b) - 2 \frac{EI}{L^2} (2\alpha + \beta) + P \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \dots (13)$$

$$Q = -18 \frac{EI}{L^3} (a-b) - 2 \frac{EI}{L^2} (5\alpha + 4\beta) + P \left[1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3}\right] \dots (14)$$

Вставляя въ уравненія (4) и (6) найденныя величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $Y$  и  $R$ , найдемъ уравненія вѣтвей кривой линіи изогнутой оси, выраженныя въ зависимости отъ величины приложенной силы  $P$ .

Вмѣсто уравненія (4) получимъ

$$y = [2(a-b) + L(\alpha + \beta)] \frac{x^3}{L^3} - [3(a-b) + L(2\alpha + \beta)] \frac{x^2}{L^2} + \alpha x + a + \frac{P}{EJ} L^3 \frac{z^2}{L^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{z}{L} - \frac{1}{6} \frac{L^2}{z^2} \right) \frac{x^3}{L^3} - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z}{L} - \frac{1}{2} \frac{z}{L} \right) \frac{x^2}{L^2} \right\} \dots (15)$$

и вмѣсто уравненія (6)

$$y = [2(a-b) + L(\alpha + \beta)] \frac{x^3}{L^3} - [3(a-b) + L(2\alpha + \beta)] \frac{x^2}{L^2} + \alpha x + a + \frac{P}{EJ} L^3 \frac{z^2}{L^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{z}{L} \right) \frac{x^3}{L^3} - \left( 1 - \frac{1z}{2L} \right) \frac{x^2}{L^2} + \frac{x}{2L} - \frac{z}{6L} \right\} \dots (16)$$

Ордината точки приложенія силы  $P$ , означенная на фигурѣ буквою  $C$ , опредѣлится, если приравняемъ  $x$  величинѣ  $z$  или напишемъ  $z=x$ , тогда уравненіе (15) доставитъ

$$y = [2(a-b) + L(\alpha + \beta)] \frac{x^3}{L^3} - [3(a-b) + L(2\alpha + \beta)] \frac{x^2}{L^2} + \alpha x + a + \frac{PL^3}{3EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \frac{x^3}{L^3} \dots (17)$$

а уравненіе (16) доставитъ

$$y = [2(a-b) + L(\alpha + \beta)] \frac{x^3}{L^3} - [3(a-b) + L(2\alpha + \beta)] \frac{x^2}{L^2} + \alpha x + a + \frac{PL^3}{3EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \frac{x^3}{L^3} \dots (17)^{bis}$$

Уравненія, какъ и слѣдовало ожидать, тождественны.

Глядя на уравненіе (17), можно думать, что ордината  $y$ , выражающая перемѣщеніе точки  $C$  подъ давленіемъ силы  $P$ , не пропорціональна этой силѣ, такъ какъ первые четыре члена, по видимому, не заключаютъ въ себѣ силы  $P$ . Это такъ кажется только потому, что еще не опредѣлена или не найдена зависимость величинъ:  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  отъ силы  $P$ .

По условію задачи перемѣщенія опоръ пропорціональны силамъ, ихъ прижимающимъ, поэтому, обозначая коэффициентъ пропорціональности для точекъ  $A$  и  $B$  буквою  $K$ , найдемъ, что

$$a = KQ \text{ и } b = KR \dots (18)$$

и вставляя эти величины въ уравненія (12) и (14), найдемъ, что

$$R = 18 \frac{EI}{L^3} K(Q - R) + 2 \frac{EI}{L^2} (4\alpha + 5\beta) + P \left[ 4 \frac{z^2}{L^2} - 3 \frac{z^3}{L^3} \right]$$

$$Q = -18 \frac{EI}{L^3} K(Q - R) - 2 \frac{EI}{L^2} (5\alpha + 4\beta) + P \left[ 1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3} \right]$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} Q &= - \left[ \frac{EI}{L^2} (\alpha - \beta) + \frac{9 \frac{EI}{L^2}}{1 + 18 \frac{EI}{L^3} K} (\alpha + \beta) \right] + P \left[ 1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3} \right] \\ R &= - \left[ \frac{EI}{L^2} (\alpha - \beta) - \frac{9 \frac{EI}{L^2}}{1 + 18 \frac{EI}{L^3} K} (\alpha + \beta) \right] + P \left[ 4 \frac{z^2}{L^2} - 3 \frac{z^3}{L^3} \right] \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Ясно, что въ случаѣ предположенія, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть равны нулю, что соотвѣтствуетъ предположенію о закрѣпленіи концовъ разсматриваемой части балки, т. е. при  $\alpha = \beta = 0$ ,

$$Q = P \left( 1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3} \right)$$

$$R = P \left( 4 \frac{z^2}{L^2} - 3 \frac{z^3}{L^3} \right),$$

а слѣдовательно

$$a - b = KP \left( 1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right) \dots \dots \dots (20)$$

$$a = KP \left( 1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3} \right).$$

Вставляя эти величины въ уравненіе (17), найдемъ, что

$$y = \left[ \left( 2 \frac{x^3}{L^3} - 3 \frac{x^2}{L^2} \right) \left( 1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right) K + \left( 1 + \frac{z}{L} - 5 \frac{z^2}{L^2} + 3 \frac{z^3}{L^3} \right) K + \frac{L^3}{3EI} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^3 \frac{x^3}{L^3} \right] P \dots \dots \dots (21)$$

т. е. найдемъ, что  $y$  прямо пропорціонально давленію  $P$ .

Если представимъ себѣ другой случай, когда разсматриваемая часть рельса, благодаря отсутствію грузовъ на сосѣднихъ пролетахъ, изгибается такъ, какъ будто свѣшивающіеся концы его вовсе не нагружены, что соотвѣтствуетъ предположенію, что силы

$$X = 0 \text{ и } Y = 0,$$

то изъ уравненій (11) и (13) найдемъ, что

$$0 = -6 \frac{EI}{L^3} K(Q - R) + 2 \frac{EI}{L^2} \alpha + 4 \frac{EI}{L^2} \beta + P \left( \frac{z^2}{L^2} - \frac{z^3}{L^3} \right)$$

$$0 = -6 \frac{EI}{L^3} K(Q - R) - 4 \frac{EI}{L^2} \alpha - 2 \frac{EI}{L^2} \beta + P \left( \frac{z}{L} - 2 \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right)$$

Эти два уравненія вмѣстѣ съ уравненіями (20), доставляющими  $Q$  и  $R$  въ зависимости отъ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $P$ , даютъ

$$\alpha = -\frac{PK}{L} \left[ 1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right] + \frac{PL^2}{6LI} \left[ 1 + 18 \frac{EI}{L^3} K \right] \left( 2 \frac{z}{L} - 3 \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) - 18 \frac{EI}{L^3} K \left( \frac{z}{L} - \frac{z^3}{L^3} \right)$$

$$\beta = -\frac{PK}{L} \left[ 1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right] + \frac{PL^2}{6EI} \left[ 18 \frac{EI}{L^3} K \left( 2 \frac{z}{L} - 3 \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) - \left( 1 + 18 \frac{EI}{L^3} K \right) \left( \frac{z}{L} - \frac{z^3}{L^3} \right) \right]$$

Въ этомъ случаѣ величины  $\alpha$  и  $\beta$  такъ же, какъ  $a$  и  $b$ , пропорціональны грузу  $P$ ; слѣдовательно, и  $y$ , опредѣляемый уравненіемъ (17) (19), пропорціоналенъ давленію  $P$ .

Итакъ, оказалось, что какъ при полномъ закрѣпленіи концовъ разсматриваемой части рельса, т. е. при  $\alpha=0$  и  $\beta=0$ , такъ и при полной свободѣ концовъ, при  $X=0$  и  $Y=0$ , величины ордината  $y$  пропорціональны давленію  $P$ .

При полномъ закрѣпленіи концовъ, какъ видно изъ уравненій (11) и (13) вмѣстѣ съ уравненіемъ (19)

$$Y = \left\{ 6 \frac{EI}{L^3} K \left( 1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right) + \frac{z}{L} - \frac{z^3}{L^3} \right\} P$$

$$X = \left\{ \frac{6EI}{L^3} K \left( -1 + \frac{z}{L} - 9 \frac{z^2}{L^2} + 6 \frac{z^3}{L^3} \right) + \frac{z}{L} - 2 \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right\} P,$$

обѣ силы  $X$  и  $Y$  пропорціональны силѣ  $P$ , слѣдовательно, увеличивая  $X$  и  $Y$  отъ величинъ ихъ, равныхъ нулю, до только что приведенныхъ, оставляя ихъ при этомъ постоянно пропорціональными  $P$ , можно будетъ постепенно перейти отъ полного закрѣпленія концовъ до полной свободы ихъ, и притомъ  $y$  будетъ постоянно оставаться пропорціональнымъ силѣ  $P$ . На этомъ основаніи позволительно предполагать, что вообще  $y$ —пониженіе точки приложенія силы  $P$ , остается величиною пропорціональною этой силѣ и что, обозначая этотъ коэффициентъ пропорціональности  $f(x)$ , можно написать, вмѣсто уравненія (17) (19), что

$$y = P \cdot f(x) \dots \dots \dots (22)$$

При подвижныхъ упругихъ опорахъ и свободномъ вращеніи концовъ бруса около опорныхъ точекъ, т. е. при  $X=0$  и  $Y=0$ , пользуясь выраженіями, данными для  $a=5$  и для  $a$  (урав. 20), и затѣмъ вышеприведенными выраженіями для  $\alpha$  и  $\beta$ , не трудно найти изъ уравненія (17) слѣдующее уравненіе

$$y = \left\{ \left[ 1 - 2 \frac{z}{L} \left( 1 - \frac{z}{L} \right) \right] K + \frac{L^3}{3EI} \frac{z^2}{L^2} \left( 1 - \frac{z}{L} \right)^2 \right\} P \dots \dots (22)^{\text{bis}}$$

Въ этомъ уравненіи членъ пропорціональный  $K$  выражаетъ часть ординаты точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, соотвѣтствующую упругому перемѣщенію опорныхъ точекъ, а членъ

пропорциональный  $L^3$ —другую часть ординаты, происходящую отъ изгиба рельса.

Степень практической применимости этого предположения была уже проверена достаточнымъ числомъ наблюдений надъ пониженіемъ точекъ рельса, различно нагруженныхъ и разнообразно расположенныхъ.

### Дифференціальное уравненіе движенія вертикальной проекціи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ.

#### Силы, дѣйствующія на колесо.

##### § 5.

Вертикальное движеніе колеса, опирающагося на рельсъ въ точкѣ, отстоящей отъ опоры на разстояніи  $x$  и опустившейся на величину  $y$ , происходитъ подъ вліяніемъ многихъ неуравновѣшивающихся силъ.

Для установленія связи между величинами координатъ точки прикосновенія колеса съ рельсомъ и силами дѣйствующими на колесо, обозначимъ:

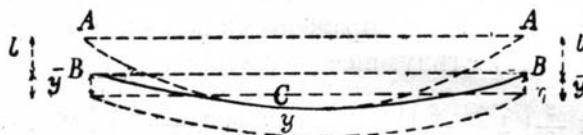
$q$  вѣсъ колеса, со всѣми неизмѣнно соединенными съ нимъ частями;

$mq$  вѣсъ, передаваемый колесу дѣйствіемъ опирающейся на него рессоры;

$Z$  сумму вертикальныхъ составляющихъ силъ, прилагаемыхъ къ колесу отъ противовѣсовъ и частей механизма, соединяющаго колесо съ поршнемъ машины;

$k$  прогибъ рессоры при дѣйствіи на нее груза, равнаго единицѣ;

$\bar{y}$  пониженіе паровознаго строенія, опирающагося на рессору въ тотъ моментъ, когда колесо опустилось на  $y$ .



Фиг. 2.

$A C A$  изгибъ рессоры, совсѣмъ не нагруженной.

$B C B$  рессоры подъ нагрузкою  $mq$ .

При равновѣсномъ состояніи нагрузки рессоры, когда она поддерживаетъ грузъ  $mq$ , прогибъ ея

$$l = kmq$$

При пониженіи средней точки рессоръ  $C$  на  $y$ , а концовъ рессоры  $B$  на  $\bar{y}$  прогибъ сдѣляется:

$$l + y - \bar{y}.$$

Такъ какъ подѣ дѣйствіемъ груза, равнаго единицѣ, прогибъ обозначенъ  $k$ , то прогибу  $l + y - \bar{y}$  будетъ соответствовать сила упругости

$$\frac{l + y - \bar{y}}{k} = mq + \frac{y - \bar{y}}{k}.$$

При незначительности вліянія колебаній нагрузки на величину производимаго ею давленія на ось, та же сила упругости рессоры будетъ приложена къ нагрузкѣ, поддерживаемой рессорою вверхъ, въ то время, когда сама нагрузка, вмѣстѣ съ концами рессоры, понизится на  $\eta$  и когда эта нагрузка подвержена силѣ тяжести  $mq$ , направленной внизъ. Сумма этихъ двухъ неуравновѣшивающихся силъ вызоветъ ускореніе въ движеніи нагрузки.

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2}.$$

Считая положительнымъ направленіе внизъ, величина этого ускоренія опредѣлится уравненіемъ:

$$\frac{mq}{g} \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = mq - \left[ mq + \frac{y - \bar{y}}{k} \right] = - \frac{y - \bar{y}}{k} \dots \dots (23).$$

откуда

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = -g \frac{y - \bar{y}}{mqk} \dots \dots (24).$$

Укрѣпивъ къ рамѣ свинцовую пластинку и къ серединѣ рессоры острый рѣзецъ, упирающійся въ пластинку, получаемъ приборъ, показывающій размѣры колебаній рессоры во время движенія. При колебаніяхъ рессоры, на пластинкѣ остается штрихъ, длина котораго равна величинѣ колебанія рессоры. При продолжительномъ движеніи паровоза рѣзецъ оставляетъ на пластинкѣ слѣдъ—глубокій и широкій посрединѣ его длины и суживающійся къ концамъ. Эта форма слѣда указываетъ, что работа рѣзца на концахъ происходитъ изрѣдка и что вообще рѣзецъ не удаляется много отъ средняго своего положенія. При-

помяная при этомъ, что при проходахъ по стрѣлкамъ и крестовинамъ всегда замѣчаются очень большіе толчки, надо думать, что крайнія части слѣда, оставляемаго рѣзцомъ на пластинкѣ, относятся къ этимъ именно толчкамъ, а при движеніи по рельсамъ бываютъ лишь небольшія колебанія. Поэтому прогибы рельса  $y$  и даже игра рессоры  $\gamma$  всегда бываютъ весьма малыми величинами сравнительно съ полнымъ прогибомъ рессоры подъ полнымъ лежащимъ на ней грузомъ  $mq$ . Этотъ полный прогибъ выраженъ здѣсь произведеніемъ  $mqk$ . Поэтому всегда

$$\frac{y - \bar{y}}{mqk}$$

бываетъ величиною малою. Отсюда прямое заключеніе то, что *ускореніе, съ которымъ будетъ двигаться паровозное строеніе, будетъ всегда значительно меньше ускоренія силы тяжести того же строенія и давленіе нагрузки можно считать постояннымъ.*

Такимъ образомъ, силы, дѣйствующія на колесо внизъ, будутъ:  $q$ —собственная сила тяжести колеса и связанныхъ съ нимъ частей,

$mq - \frac{mq}{l}(y - \bar{y})$  сила упругости рессоры, поддерживаемой колесомъ;

$Z$ —сумма вертикальныхъ слагающихъ силъ, приложенныхъ къ колесу отъ противовѣсовъ и шатуновъ;

$P$ —сопротивленіе рельса, дѣйствующее вверхъ.

Всѣ эти силы уравниваются при участіи вертикальной слагающей силы инерціи колеса, силъ инерціи рельса и связанныхъ съ нимъ шпаль.

При пониженіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ на  $y$ , ускореніе центра инерціи колеса будетъ

$$\frac{d^2 y}{dt^2}$$

### Силы инерціи рельса и шпаль.

#### § 6.

Такъ какъ перемѣщеніе точки рельса, соприкасающейся съ колесомъ, вызоветъ соотвѣтствующія перемѣщенія разныхъ другихъ точекъ рельса и скрѣпленныхъ съ нимъ шпаль, то всѣ эти точки получаютъ ускоренія, связанные съ ускореніемъ

$$\frac{d^2 y}{dt^2}$$

Нѣкоторую среднюю для всѣхъ этихъ точекъ величину ускоренія можно обозначить

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

Сила инерціи самага колеса выразится формулой

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

и обозначая

$p$  вѣсъ всѣхъ частей рельса и шпаль, получающихъ среднее ускореніе

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

опредѣлится сила инерціи перемѣщающейся части рельса и шпаль формулою

$$\frac{p}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

При этихъ обозначеніяхъ равновѣсіе всѣхъ силъ, приложенныхъ къ колесу, по началу Даламбера, выразится уравненіемъ

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{p}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = q + mq + Z - mq \frac{y - \bar{y}}{l} - P \dots (1)$$

Остановиться на этомъ дифференціальномъ уравненіи, чтобы приступить къ интегрированію его, нельзя, не установивъ предварительно болѣе подробно значеніе его членовъ и не установивъ связи между силою  $P$  и ординатою  $y$ .

#### Сила инерціи самага рельса.

##### § 7.

Приступая къ уясненію членовъ уравненія (1), нельзя сказать, что величина средняго ускоренія

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

бываетъ всегда меньше величины

$$\frac{d^2 y}{dt^2}$$

выражающей ускореніе въ точкѣ прикосновенія колеса съ рельсомъ. Иногда среднее ускореніе можетъ быть и больше, но такъ

какъ различія эти невелики, а между тѣмъ вѣсъ  $p$  составляетъ меньше 0,1 вѣса  $q$ , то вторымъ членомъ въ первой части равенства, уравненія (1) можно пренебрегать.

Дѣйствительно, при рельсахъ въ 24 фунта на футъ и при длинѣ части рельса въ 80 сантиметровъ, вѣсъ  $p$  этой части рельса равняется 1,62 пуда; вѣсъ шпаль около 4 или 5 пудовъ, сумму же вѣсовъ того и другого можно принять въ 6 пуд. Вѣсъ колеса бываетъ рѣдко меньше 75 пуд. Слѣдовательно,  $p : q = 6 : 75 = 0,08 : 1$  или  $p$  составляетъ немного больше 8%, и потому, отбрасывая второй членъ въ первой части уравненія (1), сдѣлаемъ ошибку приблизительно не больше 8% даже въ случаѣ равенства

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

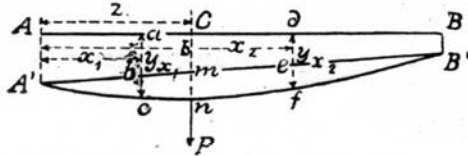
Для опредѣленія средней величины ускоренія

$$\left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

а затѣмъ и силы инерціи рельса, слѣдуетъ сначала выразить величину ординаты изогнутой кривой оси рельса, соответствующую какому-нибудь  $x$ , въ зависимости отъ ординаты той же кривой, соответствующей  $z$ .

Первую обозначимъ  $y_x$ , а вторую  $y_z$ , и затѣмъ, для краткости формуль, обозначимъ

$$\frac{z}{L} = \gamma$$



Фиг. 3.

Въ такомъ случаѣ при подвижности опорныхъ точекъ, когда подъ дѣйствіемъ силы  $P$ , приложенной на разстояніи  $z$  отъ опоры  $A$ , при длинѣ  $L$  промежутка между опорами  $A$  и  $B$  и при коэффициентѣ упругости основанія  $K$ , опора  $A$ , показанная на фиг. 3, понизится на

$$P \frac{L-z}{L} K$$

и опора  $B$  понизится на

$$P \frac{z}{L} K;$$

ординаты изогнутой оси бруса будут состоять из двух частей. Одна из этих частей будет понижение соответственной точки прямой линии  $AB$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ; другая часть будет удаление кривой от прямой  $A'B'$ . При тех малых наклонах, какие получает линия  $A'B'$  относительно своего первоначального положения  $AB$ , когда косинус угла между этими двумя направлениями больше 0,99998, тогда позволительно не делать различия между упомянутым выше удалением точки изогнутой кривой оси бруса от линии  $A'B'$  и ординатой той же точки изогнутой оси, определенной для случая неподвижных опор.

При длинѣ линіи

$$AA' = L \frac{L-z}{L} K,$$

и длинѣ

$$BB' = \frac{P-z}{L} K$$

длины линіи  $ab$  и  $de$  (фиг. 3) будутъ:

$$ab = \left[ P \frac{L-z}{L} K - P \frac{z}{L} K \right] \frac{L-x_1}{L} + P \frac{z}{L} K = P \frac{L-2z}{L} \cdot \frac{L-x_1}{L} K + P \frac{z}{L} K$$

и

$$de = P \frac{L-2z}{L} \cdot \frac{L-x_2}{L} K + P \frac{z}{L} K.$$

Длины линіи  $bc$  и  $ef$  опредѣлятся изъ уравненій (15) и (16). Длина линіи  $lm$  опредѣлится подобно линіи  $ab$  съ замѣною лишь  $x_1$  на  $z$  и длина  $mn$  изъ уравненія (19).

Такимъ образомъ легко найти, что въ части  $AC$

$$y_x = P \left[ (1-\gamma) K - \left\{ (1-2\gamma) K - \frac{L^3}{6EI} (2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3) \right\} \frac{x}{L} - \frac{L^3}{6EI} (1-\gamma) \frac{x^3}{L^3} \right] \dots \dots \dots (2)$$

Въ части  $CB$

$$y_x = P \left[ (1-\gamma) K - \frac{L^3}{6EI} \gamma^3 - \left\{ (1-2\gamma) K - \frac{L^3}{6EI} (2\gamma + \gamma^3) \right\} \frac{x}{L} - \frac{3L^3\gamma}{6EI} \frac{x^3}{L^2} + \frac{L^3\gamma}{6EI} \frac{L^3}{x^3} \right] \dots \dots \dots (3)$$

и затѣмъ

$$y_z = \left[ (1 - 2\gamma + 2\gamma^2)K + \frac{L^3}{3EI} (1 - \gamma)^2 \gamma^2 \right] \dots \dots \dots (4)$$

Путемъ исключенія силы  $P$  изъ двухъ предыдущихъ уравненій, посредствомъ послѣдняго, можно величину  $y_x$  выразить въ зависимости отъ  $y_z$ .

Обозначая, для краткости

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\gamma + 2\gamma^2)K + \frac{L^3}{3EI} (1 - \gamma)^2 \gamma^2 &= A; \\ \frac{(1 - \gamma)K}{A} &= B; \\ \frac{(1 - 2\gamma)K}{A} = C; \quad \frac{L^3}{6EI} \frac{(2\gamma + \gamma^3)}{A} &= D; \\ \frac{3L^3}{6EI} \frac{\gamma^2}{A} = E; \quad \frac{L^3}{6EI} \frac{1 - \gamma}{A} = F; \quad \frac{L^3}{6EI} \frac{\gamma}{A} &= G \end{aligned} \right\} (5)$$

и вставляя эти обозначенія въ уравненія (2) (3) и (4), получимъ для части  $AC$

$$y_x = \left[ B - (C - D + E) \frac{x}{L} - F \frac{x^3}{L^3} \right] y_z \dots \dots \dots (6)$$

и для части  $CB$

$$y_x = \left[ B - G\gamma^2 - (C - D) \frac{x}{L} - 3G \frac{x^2}{L^2} + G \frac{x^3}{L^3} \right] y_z \dots \dots \dots (7)$$

Въ этихъ уравненіяхъ  $y_x$  и  $y_z$  могутъ измѣняться въ зависимости отъ времени, при совершенномъ постоянствѣ какъ  $x$ , такъ и величинъ, зависящихъ отъ  $z$  или  $\gamma$ , приведенныхъ въ уравненіяхъ (5). Поэтому въ части  $AC$

$$\frac{d^2 y_x}{dt^2} = \left[ B - (C - D + E) \frac{x}{L} - F \frac{x^3}{L^3} \right] \frac{d^2 y_z}{dt^2} \dots \dots \dots (8)$$

и въ части  $CB$

$$\frac{d^2 y_x}{dt^2} = \left[ B - G\gamma^2 - (C - D) \frac{x}{L} - 3G \frac{x^2}{L^2} + G \frac{x^3}{L^3} \right] \frac{d^2 y_z}{dt^2} \dots \dots \dots (9)$$

Зная ускоренія каждой точки изогнутой оси, выраженныя въ зависимости отъ ускоренія одной точки  $n$ , можно найти выраженіе силы инерціи всей части изогнутой балки, заключенной между опорами  $A$  и  $B$ , въ зависимости отъ ускоренія точки  $n$ .

Вертикальная сила инерціи части балки, заключенной между точками  $A$  и  $C$ , обозначая  $\omega$  поперечное сѣченіе балки,  $\delta$  вѣсь

кубической единицы ея объема и  $g$  ускорение силы тяжести, на основании уравнения (9) будетъ

$$\int_0^z \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_x}{dt^2} dx = \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \int_0^z \left[ B - (C - D + E) \frac{x}{L} - F \frac{x^3}{L^3} \right] dx \quad \dots (10)$$

и для части  $CB$ , на основании уравнений (5), будетъ

$$\int_z^L \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_x}{dt^2} dx = \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \int_z^L \left[ B - G \gamma^2 - (C - D) \frac{x}{L} - 3G \frac{x^2}{L^2} + G \frac{x^3}{L^3} \right] dx \quad (11)$$

Послѣ интегрирования вторыхъ частей этихъ двухъ послѣднихъ уравнений найдемъ для части  $AC$

$$\int_0^z \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_x}{dt^2} dx = \frac{\omega \delta L}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \left[ B \gamma - (C - D + E) \frac{\gamma^2}{2} - F \frac{\gamma^4}{4} \right] \dots \dots (12)$$

и для части  $CB$

$$\int_z^L \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_x}{dt^2} dx = \frac{\omega \delta L}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \left[ (B - G \gamma^2)(1 - \gamma) - (C - D) \frac{\gamma^2}{2} - G(1 - \gamma^3) + \frac{1}{4} G(1 - \gamma^4) \right] \dots \dots \dots (13)$$

Складывая эти уравнения и замѣняя во второй части величины  $A, B, C, D, E, F$  и  $G$  выраженіями ихъ изъ уравнений (5) найдемъ

$$\int_0^L \frac{\omega \delta}{g} \frac{d^2 y_x}{dt^2} dx = \frac{\omega \delta L}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \frac{\frac{K}{2} + \frac{1}{4} \frac{L^3}{6EI} \gamma (1 - 2\gamma^2 + \gamma^3)}{(1 - 2\gamma + 2\gamma^2)K + \frac{L^3}{3EI} (1 - \gamma)^2 \gamma^2} \dots (14)$$

Стоящій во второй части этого уравнения множитель

$$\frac{\omega \delta L}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \dots \dots \dots (15)$$

выражаетъ вертикальную проекцію силы инерціи всей балки, заключенной между опорами  $A$  и  $B$ , въ случаѣ, если бы всѣ ея точки имѣли одно и то же ускорение

$$\frac{d^2 y_z}{dt^2}.$$

Второй множитель

$$\frac{\frac{K}{2} + \frac{1}{4} \frac{L^3}{6EI} \gamma (1 - 2\gamma^2 + \gamma^3)}{(1 - 2\gamma + 2\gamma^3)K + \frac{L^3}{3EI} (1 - \gamma)^2 \gamma^2} = \mu \dots \dots (16)$$

опредѣляетъ, какую долю вышеупомянутой силы инерціи слѣдуетъ брать въ виду разнообразія ускореній, съ которыми двигаются точки балки при упругомъ измѣненіи вида самой балки и упругомъ перемѣщеніи ея опоръ.

При безграничномъ большомъ сопротивленіи опорныхъ точекъ, когда  $K=0$ , только что приведенный коэффициентъ (16) долженъ принять видъ

$$\mu = \frac{\frac{1}{4} \frac{L^3}{6EI} \gamma (1 - 2\gamma^2 + \gamma^3)}{\frac{L^3}{3EI} (1 - \gamma)^2 \gamma^2} = \frac{1 + \gamma - \gamma^2}{8(1 - \gamma)\gamma}$$

Величины коэффициента, выраженного формулой (16) какъ при различныхъ величинахъ  $K$ , такъ и при различныхъ положеніяхъ колеса на рельсѣ, опредѣляющихъ величину  $\gamma$ , показаны въ слѣдующей таблицѣ.

При  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1$   $\mu = \frac{1}{2}$ .

при  $\gamma = \frac{1}{2}$  и  $K = 0,00005$  величина  $\mu$  будетъ при  $L = 80$ ,  $J = 900$

и $E = 2\,000\,000$	и $\gamma = 0$	или $1$	$\mu = 0,50$
	0,1	„ 0,9	0,625
	0,2	„ 0,8	0,735
	0,3	„ 0,7	0,823
	0,4	„ 0,6	0,879
	0,5		0,880.

Хотя приведенные выводы, сдѣланные для опредѣленія силъ инерціи самага рельса, не безусловно точны, но допущенная неточность, освободившая отъ затрудненій, едва ли преодолимыхъ, не могла оставить замѣтнаго слѣда на полученныхъ результатахъ. Неточность произошла оттого, что при самомъ опредѣленіи формы изогнутой оси, получающейся при быстрыхъ передвиженіяхъ груза, не были въ уравненіе изгиба введены силы инерціи самой балки. При незначительности этихъ силъ сравнительно съ величиною силы

тяжести, дѣйствующею при изгибѣ, измѣненія, вызываемыя въ формѣ изгиба силами инерціи, должны быть ничтожными. Принимать въ расчетъ ихъ вліяніе тѣмъ менѣе необходимо, что для дальнѣйшихъ сужденій вполне достаточно указанія еще болѣе грубого, чѣмъ приведено въ послѣдней таблицѣ. На основаніи этой таблицы, во всякомъ случаѣ, и безъ всякаго риска, можно сказать, что вертикальная проекція силы инерціи куска рельса, заключеннаго между точками опоры, не больше 0,88 той величины, которую имѣла бы эта сила, если бы ускореніе всѣхъ точекъ рельса было равно ускоренію средней его точки въ моментъ нахождения колеса на серединѣ промежутка между шпалами, или, другими словами, если бы ускореніе всѣхъ точекъ рельса было равно ускоренію самаго колеса. Поэтому всегда приведенная въ уравненіи (1) величина, относящаяся къ самому рельсу,

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) < 0,88 \frac{d^2 y}{dt^2},$$

и такъ какъ при вѣсѣ части рельса между двумя шпалами равномъ 1,62 пуда и при вѣсѣ  $q=75$ ,

$$p : q = 0,88 \times 1,62 : 75 = 1 : 526$$

то пренебреженіе вторымъ членомъ въ первой части уравненія (1) приводитъ къ ошибкамъ менѣе 2%.

### Силы инерціи шпаль.

#### § 8.

Чтобы опредѣлить вліяніе инерціи шпаль и прилегающаго къ нимъ грунта, слѣдуетъ имѣть въ виду, что ускоренія, съ которыми будутъ двигаться точки шпаль, находящіяся прямо подъ рельсами, будутъ одинаковы съ ускореніями конечныхъ точекъ разсматриваемой части рельса. Поэтому ускореніе шпалы, поддерживающей рельсъ въ его концѣ  $A$ , равное

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)$$

опредѣлится изъ уравненія (8), написавъ въ немъ  $x=0$ ; а ускореніе точки  $B$  или

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)_L$$

опредѣлится изъ уравненія (9), написавъ въ немъ  $x=L$ . Такимъ образомъ найдемъ

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)_0 = \frac{d^2 y_z}{B dt^2}$$

и

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)_L = [B - G\gamma^2 - C + D + 2G] \frac{d^2 y_z}{dt^2}.$$

Умножая эти уравненія на массу половинъ шпаль, поддерживающихъ рельсъ, найдемъ вертикальныя силы инерціи шпаль въ предположеніи, что всѣ ихъ точки имѣютъ одинаковыя ускоренія. Обозначая  $Q$  тотъ вѣсъ шпаль съ частью прилегающаго къ ней грунта, который принимаетъ одинаковое движеніе съ рельсомъ, найдемъ, что сила инерціи шпаль выражается формулами

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)_0 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} B \frac{d^2 y_z}{dt^2}$$

и

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{d^2 y_x}{dt^2}\right)_L = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} [B - C + D - (2 + \gamma^2)G] \frac{d^2 y_z}{dt^2},$$

а, складывая эти уравненія, найдемъ сумму вертикальныхъ проекцій силъ инерціи обѣихъ шпаль. Она, очевидно, будетъ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [2B - C + D - (2 + \gamma^2)G] \frac{d^2 y_z}{dt^2} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{K}{(1 - 2\gamma + \gamma^2)K + \frac{L^3}{3EI}(1 - \gamma)^2 \gamma^2} \frac{d^2 y_z}{dt^2} \end{aligned}$$

При  $K = 0,00005$ ,  $L = 80$ ,  $E = 2\,000\,000$ ,  $I = 1200$ .

Сумма силъ инерціи  $Y$  будетъ:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{0,00005}{(1 - 2\gamma + 2\gamma^2)0,00005 + 0,000071(1 - \gamma)^2 \gamma^2} \frac{d^2 y_z}{dt^2}$$

$$\text{при } \gamma = 0, \text{ и } 1 \quad Y_0 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{d^2 y_z}{dt^2}$$

0,1 и 0,9	$Y_{0,1} = 1,20 Y_0$
0,2 и 0,8	$Y_{0,2} = 1,40 Y_0$
0,3 и 0,7	$Y_{0,3} = 1,56 Y_0$
0,4 и 0,6	$Y_{0,4} = 1,66 Y_0$
0,5	$Y_{0,5} = 1,70 Y_0$

Изъ этой таблицы видно, что наибольшая величина силъ инерціи, поддерживающихъ шпаль, проявляется при нахожденіи колеса на серединѣ пролета, при чемъ

$$Y_{0,5} = 0,85 \frac{Q}{g} \frac{d^3 y_z}{dt^2}.$$

При надлежащей подбивкѣ шпаль онѣ лежатъ на балластѣ, какъ на упругой подушкѣ, и потому при нагрузкѣ рельса колесами шпалы изгибаются, и перемѣщеніе ихъ частей оказывается неодинаковымъ. Среднія части шпаль перемѣщаются меньше, чѣмъ части, находящіяся прямо подъ рельсомъ, а концевыя части шпаль больше, чѣмъ находящіяся прямо подъ рельсомъ. Очевидно поэтому, что и ускоренія въ разныхъ частяхъ шпалы будутъ не равны ускоренію рельса, опирающагося на шпалу. Ускоренія около середины будутъ меньше ускореній рельса, а около концовъ больше этихъ послѣднихъ ускореній. Предполагая полную правильность подбивки шпалы и совершенно одинаковую нагрузку обоихъ рельсовъ, опирающихся на шпалу, можно было бы найти изгибъ шпалы, а затѣмъ и соотношеніе между ускореніями всѣхъ ея точекъ, но въ виду трудности и сложности вычисленій <sup>1)</sup>, съ одной стороны, и въ виду незначительности ошибки, вытекающей изъ допущенія, что ускоренія всѣхъ точекъ шпалы одинаковы съ ускореніями точекъ, поддерживающихъ рельсъ, можно принять, что въ предыдущемъ уравненіи  $Q$  выражаетъ вѣсъ всей шпалы. Такъ какъ вѣсъ шпалы можно считать отъ 4 до 5 пудовъ, то  $0,85 Q$  будетъ приблизительно 4 пуда. Если вѣсъ колеса будетъ 75 пудовъ, то

$$4 : 75 = 0,053 : 1.$$

Отсюда вытекаетъ, что, отбрасывая вѣсъ шпаль, будемъ дѣлать въ нашихъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ ошибки не болѣе 5<sup>0</sup>/<sub>0</sub>.

<sup>1)</sup> Трудность вычисленія зависитъ отъ того, что надо интегрировать линейное дифференціальное уравненіе 3-го порядка, имѣющее видъ

$$EI \frac{d^3 y}{dt^3} = P + axy.$$

Интегрированіе возможно при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Число произвольныхъ постоянныхъ оказывается четыре, связанныхъ впрочемъ однимъ линейнымъ уравненіемъ, благодаря чему и остаются только три произвольныя постоянныя. Хотя, пользуясь симметричностью расположенія кривой оси шпалы по обѣимъ сторонамъ ея средней точки, опредѣленіе произвольныхъ постоянныхъ нѣсколько упрощается, но все же нельзя избѣгнуть довольно сложныхъ вычисленій и примѣненія такихъ приемовъ вычисленія, которые не очень привычны для большинства инженеровъ.

Допуская пренебреженіе величиною члена

$$\frac{p}{g} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

въ уравненіи (1), оно приметъ видъ

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} = q + mq + Z - mq \frac{y-y}{l} - P \dots (17).$$

### ОТДѢЛЪ II.

Уравненія, связывающія динамическое дѣйствіе колеса со статическими.

#### Преобразование уравненія (17).

##### § 9.

Если скорость поступательнаго движенія колеса назовемъ  $v$ , то

$$x = vt \dots (18)$$

и дифференцируя  $y$  по  $x$ , найдемъ, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

и такъ какъ  $dx = vdt$ , или

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}, \dots (19)$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dy}{dt}; \dots (20)$$

дифференцируя еще разъ по  $x$ , найдемъ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v} \frac{d \left( \frac{dy}{dt} \right)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1}{v},$$

откуда

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{q}{g} v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (21).$$

Вставляя вторую часть этого уравнения на мѣсто первой въ уравненіе (17), получимъ искомое нами дифференціальное уравненіе кривой линіи изогнутой оси рельса во время движенія съ данною скоростью по нему колеса съ данною нагрузкою.

**Окончательный видъ дифференціального уравненія.**

§ 10.

Это уравненіе получаетъ видъ

$$\frac{v^2 q}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} = q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) + Z - mq \frac{y}{l} - P \dots (22).$$

Сумма силъ, выраженныхъ первыми двумя членами второй части уравненія (22), оставаясь совершенно независимою отъ изгибовъ рельса или отъ вертикальныхъ перемѣщеній точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, а, слѣдовательно, отъ величинъ  $y$ , можетъ имѣть различныя величины, при различныхъ величинахъ  $x$ .

Обозначая

$h_x$  вертикальное перемѣщеніе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ подъ вліяніемъ приложенной въ этой точкѣ статически дѣйствующей суммы силъ

$$\left[ q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z}{q} \right) \right]_x$$

можно сказать, что  $y_x$ , выражающей динамическое пониженіе той же точки подъ дѣйствіемъ силы  $P_x$ , опредѣлится уравненіемъ

$$\frac{y_x}{h_x} = \frac{P_x}{\left[ q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) + Z_x \right]_x}$$

и

$$P_x = \left[ q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) + Z_x \right] \frac{y_x}{h_x}$$

а уравненіе (22), послѣ умноженія на  $\frac{g}{v^2 q}$  замѣнится уравненіемъ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) - \frac{g}{v^2} m \frac{y_x}{l} - \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) \frac{y_x}{h_x} \dots \dots \dots (22)^{\text{bis}} \end{aligned}$$

**Интегрирование дифференциального уравнения движения.**

§ 11.

Интегрируя это уравнение по  $x$ , въ предѣлахъ отъ  $x_{i-1}$  до  $x$  найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} - \left( \frac{d y}{d x} \right)_{i-1} &= \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) (x - x_{i-1}) + \frac{g}{v^2} \int_{x_{i-1}}^x \frac{Z_x}{q} dx - \\ &- \frac{g}{v^2} m \int_{x_{i-1}}^x \frac{y_x}{l} dx - \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) \int_{x_{i-1}}^x \frac{y_x}{h_x} dx - \frac{g}{v^2} \int_{x_{i-1}}^x \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} dx. \end{aligned}$$

Въ этомъ уравненіи, замѣняя подынтегральныя функціи средними арифметическими ихъ величинами, соответствующими предѣламъ  $x_{i-1}$  и  $x$ , получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= \left( \frac{d y}{d x} \right)_{i-1} + \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) (x - x_{i-1}) + \frac{g}{2 v^2} \left( \frac{Z_x}{g} + \right. \\ &+ \left. \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right) (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} m \left( \frac{y_x}{l} + \frac{y_{x_{i-1}}}{l} \right) (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} \left( 1 + m + \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{y}}{l} \right) \left( \frac{y_x}{h_x} + \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} \left( \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) (x - x_{i-1}). \quad (23) \end{aligned}$$

или, такъ какъ

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d t} \frac{d t}{d x} = \frac{d y}{d t} \frac{1}{v}$$

то, обозначая вертикальную скорость колеса,

$$\frac{d y}{d t} = \omega \quad \text{и} \quad \left( \frac{d y}{d t} \right)_{i-1} = \omega_{i-1}$$

найдемъ

$$\left( \frac{d y}{d x} \right)_{i-1} = \frac{1}{v} \omega_{i-1}$$

и интегрируя уравненіе (23) по  $x$  въ предѣлахъ отъ  $x_{i-1}$  до  $x_i$  получимъ

$$\begin{aligned}
 y_i - y_{i-1} &= \frac{1}{v} \omega_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + \frac{g}{2v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) (x_i - x_{i-1})^2 + \\
 &+ \frac{g}{2v^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{Z_x}{q} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right) (x - x_{i-1}) dx - \frac{g}{2v^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{y_x}{l} + \frac{y_{x_{i-1}}}{l} \right) (x - x_{i-1}) dx - \\
 &- \frac{g}{2v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{y_x}{h_x} + \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) (x - x_{i-1}) dx - \\
 &- \frac{g}{2v^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) dx \dots \dots \dots (24)
 \end{aligned}$$

Замѣняя подынтегральныя функціи ихъ средними арифметическими величинами, относящимися къ предѣламъ, прежде всего замѣтимъ, что

$$\text{Сред.} \left( \frac{Z_x}{q} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right) = 1/2 \left[ \frac{Z_x}{q} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right] = 1/2 \left( \frac{Z_x}{q} + 3 \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right)$$

и, такимъ же образомъ

$$\text{Сред.} \left( \frac{y_x}{l} + \frac{y_{x_{i-1}}}{l} \right) = 1/2 \left( \frac{y_x}{l} + 3 \frac{y_{x_{i-1}}}{l} \right)$$

$$\text{Сред.} \left( \frac{y_x}{h_x} + \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) = 1/2 \left( \frac{y_x}{h_x} + 3 \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right)$$

и

$$\text{Сред.} \left( \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) = 1/2 \left( \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} + 3 \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right)$$

Интегрирование уравненія (24) доставить

$$\begin{aligned}
 y_i - y_{i-1} &+ \frac{1}{v} \omega_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + \frac{g}{2v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) (x_i - x_{i-1})^2 + \\
 &+ \frac{g}{8v^2} \left( \frac{Z_i}{q} + 3 \frac{Z_{i-1}}{q} \right) (x_i - x_{i-1})^2 - \frac{gm}{8v^2} \left( \frac{y_i}{l} + 3 \frac{y_{i-1}}{l} \right) (x_i - x_{i-1})^2 - \\
 &- \frac{g}{8v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) \left( \frac{y_i}{h_i} + 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) (x_i - x_{i-1})^2 - \\
 &- \frac{g}{8v^2} \left( \frac{Z_i}{q} \frac{y_i}{h_i} + 3 \frac{Z_{i-1}}{q} \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) (x_i - x_{i-1})^2 \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

Обозначая длину равныхъ подраздѣленій промежутка между срединами двухъ смежныхъ шпаль

$$a = x_i - x_{i-1}$$

вводя это обозначение въ уравненіе (25) и рѣшая его относительно  $y_i$  найдемъ

$$y_i = \frac{\left\{ y_{i-1} + \omega_{i-1} \frac{a}{v} + \frac{g}{8} \left\{ 4(1+m) - 3m \left( \frac{y_{i-1}}{l} + 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \right. \right.}{\left. \left. + \frac{\bar{y}}{l} \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{Z_i + 3Z_{i-1}}{b} - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \left( 1 + \frac{Z_{i-1}}{b} \right) \right\} \frac{a^2}{v^2}} \right\}}{1 + \frac{g}{8h_i} \left[ \frac{mh_i}{l} + 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_i}{q} \right] \frac{a^2}{v^2}} \quad (26)$$

и изъ уравненія (23) найдемъ

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{g}{2} \left\{ 2 + m \left( 2 - \frac{y_i}{l} - \frac{y_{i-1}}{l} - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{\bar{y}}{l} \left( 2 - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Z_i}{q} \left( 1 - \frac{y_i}{h_i} \right) + \frac{Z_{i-1}}{b} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right\} \frac{a}{v} \dots (27).$$

**Нѣкоторыя упрощенія уравненій полученныхъ интегрированіемъ.**

§ 12.

Въ виду большой сложности этихъ формулъ и въ виду незначительности величинъ всѣхъ  $y$  сравнительно съ величиною  $l$  полного прогиба рессоры подъ статическою ея нагрузкою можно, ограничиваясь тѣмъ же порядкомъ точности какимъ ограничивался Стоксъ, отбросить всѣ члены вида  $\frac{y}{l}$ . Дѣйстви- тельно,  $y_i, y$  и  $h_i$  рѣдко бываютъ болѣе 5 миллиметровъ, тогда какъ  $l$  почти всегда больше 50 миллиметровъ, а доходить въ нѣкоторыхъ паровозахъ и до 95 миллиметровъ.

Такимъ образомъ для вычисленій можно принять

$$y_i = \frac{\left\{ y_{i-1} + \omega_{i-1} \frac{a}{v} + \frac{g}{8} \left\{ 4(1+m) - 3m \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \right. \right.}{\left. \left. + \frac{Z_i + 3Z_{i-1}}{g} - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \left( 1 + \frac{Z_{i-1}}{q} \right) \right\} \frac{a^2}{v^2}} \right\}}{1 + \frac{g}{8h_i} \left( 1 + m + \frac{Z_i}{q} \right) \frac{a^2}{v^2}} \quad (28)$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{g}{2} \left\{ 2 + m \left( 2 - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{Z_i}{q} \left( 1 - \frac{y_i}{h_i} \right) + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right\} \frac{a}{v} \dots (29)$$

Уравнения (26) и (27) или (28) и (29) дают возможность последовательно определять положение скольких угодно точек прикосновения колеса с рельсом при условии задания одного из этих положений, когда предварительно определены величины  $h_i$  т. е. определены ординаты линии обертывающей положения изогнутой оси рельса при последовательных статических нагрузках его. Способы определения этой обертывающей и величин  $h_i$  при разных условиях опоры рельса на шпалы будут указаны далее.

**Два случая, когда полученные уравнения становятся уравнениями траектории точки прикосновения колеса с рельсом.**

### § 13.

Уравнение (26) хотя и позволяет определять произвольно большое число точек, принадлежащих траектории, по которой перемещается точка прикосновения колеса с рельсом, при данной скорости  $v$  и при каких-нибудь данных величинах  $y_i$  и  $\omega_i$ , но, тем не менее, нельзя назвать это уравнение уравнением траектории интересующей нас точки. Есть, однако, два случая, когда уравнение (26) представляет всю траекторию точки прикосновения колеса с рельсом. Эти два случая относятся к двум крайним величинам скорости  $v$ : к случаю, когда  $v$  равно нулю, и к другому случаю, когда  $v$  безгранично велико.

Если  $v=0$ , то дробь, стоящая во второй части уравнения (26), обращается в отношение коэффициентов величины  $\frac{a^2}{c^2}$ .

Если при этом еще силы  $Z$  равны нулю, то

$$y_i = \frac{4(1+m) - 3m \left( \frac{y_{i-1}}{l} + 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{y}{l} \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - 3 \frac{y_{i-1}}{l}}{\frac{1}{h_i} \left( \frac{mh_i}{l} + 1 + m + \frac{y}{l} \right)}$$

При бесконечно малой скорости, когда не происходит никаких колебаний рессоры, можно рассматривать все давление вѣса колеса и вѣса нагрузки как бы производимое одним, болѣе

тяжелымъ, колесомъ, причемъ  $m$  будетъ нуль и  $y=0$ . Въ такомъ случаѣ

$$\frac{y_i}{h_i} = 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Если при какомъ-нибудь  $i$  будетъ  $y_i = h_i$  или  $\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} = 1$  то

$$3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} = 3$$

слѣдовательно, и  $y_{i-1} = h_{i-1}$ , т. е. всѣ  $y$  равны соответствующимъ  $h$ .

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если будетъ дана линія, обертывающая всѣ послѣдовательныя положенія рельса, при дѣйствіи сосредоточенной на немъ нагрузки равной  $P$ , при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ этой нагрузки отъ точки къ точкѣ рельса, то траекторія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, при безгранично малой скорости  $v$ , совпадетъ съ этою обертывающею.

Если  $v = \infty$ , то изъ уравненія (26) окажется, что

$$y_i = y_{i-1}$$

что обозначаетъ, что всѣ  $y$  взаимно равны или что траекторія есть прямая линія, параллельная оси  $x$ .

**Дифференціальное уравненіе движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ въ случаѣ неправильной формы поверхностей катанія рельсъ и колесъ.**

#### § 14.

Поверхность катанія рельсъ не всегда бываетъ прямолинейной формы. На ней бывають и выступы и впадины. Точно также и поверхность катанія колесной шины бываетъ со впадинами.

Если колесо, двигаясь по рельсу, должно будетъ подняться на величину  $y'$ , то центръ инерціи его опустится уже не на  $y$ , а на  $y - y'$ . Если на рельсѣ будетъ впадина и колесо опустится въ эту впадину на  $y'$ , то центръ инерціи опустится на  $y + y'$ .

При подъемѣ колеса на  $y'$ , середина рессоры поднимется на ту же высоту. Если бы концы рессоры поднялись на столько же, то давленіе рессоры на ось, а затѣмъ и на колесо, осталось бы безъ измѣненія; но нагрузка рессоры не позволитъ концамъ ея

подниматься одинаково съ серединою. Прогибъ рессоры измѣнится но не на всю величину  $y'$ , а лишь на нѣкоторую ея часть.

Измѣненіе упругой силы рессоры можно будетъ считать равнымъ  $mq \frac{y'}{l}$ .

Уравненіе (22-bis), при этомъ, получить видъ

$$\frac{v^2 q' d^2(y - y')}{g dx^2} = q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) - m q \frac{y - y'}{l} - q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) \frac{y}{h}$$

Отмѣчая, какъ и ранѣе, значкомъ  $x$  величины  $y$  и  $h$  относящихся къ  $x$  и обозначая  $y'' = y - y'$ , получимъ послѣ умноженія обѣихъ частей на  $\frac{g}{v^2 q'}$ , уравненіе

$$\frac{d^2 y_x''}{dx^2} = \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) + \frac{g}{v^2} m \frac{y_x''}{l} - \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} + \frac{Z_x}{q} \right) \frac{y_x}{h_x} \dots \dots \dots (30),$$

**Интегрированіе этого уравненія (30).**

§ 15.

Интегрируя это уравненіе (30) по  $x$  въ предѣлахъ  $x_{i-1}$  до  $x$  и обозначая  $\frac{d y''}{dx} = \omega$ , при чемъ  $\frac{d y''}{dx} \frac{1}{v} \omega$ , получимъ, подобно предъидущему,

$$\begin{aligned} \frac{d y''}{dx} &= \frac{1}{v} \omega_{i-1} + \frac{g}{v^2} \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) (x - x_{i-1}) + \frac{g}{2 v^2} \left( \frac{Z_x}{q} + \right. \\ &+ \left. \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \right) (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} m \frac{y_x'' + y_{x_{i-1}}''}{l} (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} \left( 1 + m + \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{y}}{l} \right) \left( \frac{y_x}{h_x} + \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) (x - x_{i-1}) - \frac{g}{2 v^2} \left( \frac{Z_x}{q} \frac{y_x}{h_x} + \frac{Z_{x_{i-1}}}{q} \frac{y_{x_{i-1}}}{h_{x_{i-1}}} \right) (x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  въ предѣлахъ  $x_{i-1}$  до  $x_i$  и замѣняя значки  $x_i$  значкомъ  $i$  получимъ

$$y_i = \frac{\left\{ \begin{aligned} &y_{i-1} + y'_i - y_{i-1} + \frac{a}{v} \omega_{i-1} + \frac{g}{8} \left[ 4(1+m) + \frac{m}{l}(y'_i + \right. \\ &+ y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 3(m+1) \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y}{l} \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \\ &\left. \left. + \frac{Z_i}{q} + 3 \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \frac{a^2}{v^2} \right\}}{1 + \frac{g}{8h_i} \frac{a^2}{v^2} \left[ (1+m) \left( 1 + \frac{h_i}{l} \right) + \frac{y}{l} + \frac{Z_i}{q} \right]} \quad (31)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_i = \omega_{i-1} + \frac{g}{2} \frac{a}{v} &\left[ 2(1+m) - \frac{m}{l}(y_i + y_{i-1} - y' - y'_{i-1}) + \right. \\ &+ m \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{y}{l} \left( 2 - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{Z_i}{g} \left( 1 - \frac{y_i}{h_i} \right) + \\ &\left. + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

При совершенно правильныхъ колесахъ и рельсахъ  $y' = 0$ ; при отсутствіи общаго просѣданія пути  $y = 0$  и, при отсутствіи противовѣсовъ и дѣйствующихъ на колесо шатуновъ  $Z = 0$ .

Въ такомъ случаѣ

$$y_i = \frac{y_{i-1} + \frac{a}{v} \omega_{i-1} + \frac{g}{8} \frac{a^2}{v^2} \left[ 4(1+m) - 3 \frac{m}{l} y_{i-1} - 3(1+m) \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + \frac{g}{8h_i} \frac{a^2}{v^2} \left[ 1 + m \left( 1 + \frac{h_i}{l} \right) \right]} \quad (32)^{bis}$$

и

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{g}{2} \frac{a}{v} \left[ 2(1+m) - \frac{m}{l}(y_i + y_{i-1}) + m \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \dots \dots (32)^{bis}$$

Изъ этихъ уравненій видно, что перемѣщеніе точки прикосновенія рельса съ двигающимся колесомъ, т. е. величины  $y_i$  при динамическомъ дѣйствіи колеса, опредѣляются не иначе, какъ съ помощью величинъ перемѣщенія соответствующихъ статически дѣйствующему колесу, обозначенныхъ въ уравненіяхъ  $h_i$ . Это обстоятельство требуетъ установленія способовъ опредѣленія обертывающей статическихъ изгибовъ оси рельса и ея ординатъ  $h_i$ .

Опредѣленіе такихъ обертывающихъ для разныхъ случаевъ сообразно съ нѣкоторыми возможными обстоятельствами, въ которыхъ можетъ находиться рельсъ, приведено въ слѣдующемъ изложеніи.

ОТДѢЛЪ Ш.

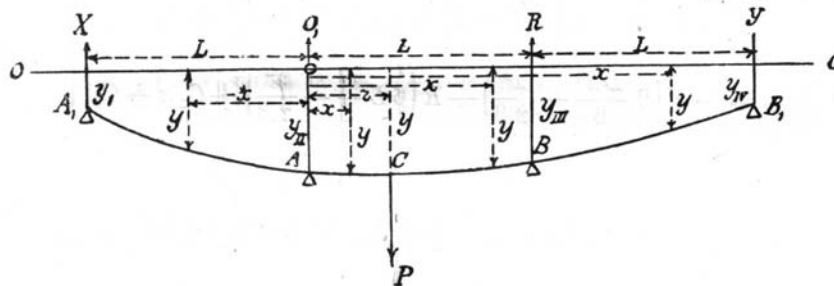
Линіи обертывающія послѣдовательныя положенія продольной оси рельса изгибаемой при статическомъ дѣйствии силъ въ разныхъ случаяхъ.

а) При одиночной нагрузкѣ рельса въ разныхъ точкахъ средняго пролета, при 4 равно-отстоящихъ и равно-упругихъ опорахъ.

Опредѣленіе силъ въ точкахъ опоръ.

§ 16.

Положимъ, что совѣсь не нагруженный рельсъ поддерживается четырьмя точками опоры  $A_1, A, B$  и  $B_1$  (фиг. 1), которыя



Фиг. 1.

въ этомъ случаѣ располагаются на прямой линіи  $OO$ . Положимъ затѣмъ, что подъ дѣйствиемъ нагрузки  $P$ , приложенной въ точкѣ  $C$ , удаленной на разстояніе  $\delta L$  отъ опоры  $A$ , рельсъ изгибается при пониженіи точекъ опоры и занимаетъ показанное на фиг. 1 положеніе, отмѣченное буквами  $A_1, A, B$  и  $B_1$ . Точки опоры понижаются соответственно на  $y_I, y_{II}, y_{III}$  и  $y_{IV}$ , вызывая своимъ пониженіемъ силы сопротивленія  $X, Q, R$  и  $Y$ . Величины этихъ силъ считаемъ прямо пропорціональными ординатамъ пониженія соответственныхъ точекъ опоры.

$K$  назовемъ коэффициентъ пропорціональности и слѣдовательно

$$X = K_I y_I, \quad Q = K_{II} y_{II}, \quad R = K_{III} y_{III} \text{ и } Y = K_{IV} y_{IV} \dots (1)$$

Кривая линия, по которой изогнется нейтральная ось рельса под дѣйствіемъ силъ  $P$ ,  $X$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $Y$ , можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ.

Дифференціальное уравненіе этой кривой для части  $BB_1$  будетъ

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y(3L - x)$$

откуда

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} EJ \frac{dy}{dx} &= -Y \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \\ EJ y &= -Y \left( 9 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Для части  $CB$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y(3L - x) - R(2L - x)$$

откуда

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} EJ \frac{dy}{dx} &= -Y \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_3 \\ EJ y &= -Y \left( 9 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) - R \left( 6L \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) + C_3 x + C_4 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Для части  $AC$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y(3L - x) - R(2L - x) + P \left( (1 + \nu)L - x \right)$$

откуда

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} EJ \frac{dy}{dx} &= -Y \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \\ &\quad + P \left( (1 + \nu)Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_5 \\ EJ y &= -Y \left( 9 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) - R \left( 6L \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) + \\ &\quad + P \left( \frac{(3 + 3\nu)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) + C_5 x + C_6 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Наконецъ для части  $A_1 A$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y(3L - x) - R(2L - x) + P \left( (1 + \nu)L - x \right) - Q(L - x)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{dy}{dx} &= -Y \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \\ &+ P \left( (1 + \varepsilon)Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Q \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_7 \\ EJ y &= -Y \left( 9 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2.3} \right) - R \left( 6 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2.3} \right) + \\ &+ P \left( (3 + 3\varepsilon) \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2.3} \right) - Q \left( 3 \frac{Lx^2}{6} - \frac{x^3}{2.3} \right) + C_7 x + C_8 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Въ эти уравненія входятъ 8 произвольныхъ постоянныхъ и 4 силы, подлежащія опредѣленію, или всего 12 величинъ. Для опредѣленія ихъ имѣемъ прежде всего два статическія уравненія равновѣсія силъ

$$\left. \begin{aligned} X + Y + Q + R &= P \\ X(1 + \varepsilon) - Y(2 - \varepsilon) + Q\varepsilon - R(1 - \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Затѣмъ въ точкахъ соединенія четырехъ упомянутыхъ вѣтвей, т. е. въ точкахъ  $A_1$ ,  $B$  и  $C$ , соединяющіяся вѣтви должны имѣть одинаковыя ординаты и общія касательныя. Изъ этого свойства ихъ будетъ выведено 6 условныхъ уравненій. Въ точкахъ приложенія силъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Q$  и  $R$  ординаты должны соответствовать силамъ, опредѣляемымъ группою четырехъ уравненій (1).

Эти четыре уравненія, вмѣстѣ съ двумя уравненіями статики и только что упомянутыми шестью условными уравненіями и представляютъ тѣ 12 уравненій, которыя необходимы для опредѣленія 8-ми постоянныхъ произвольныхъ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$  и  $C_8$  и четырехъ силъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Q$  и  $R$ .

Группы уравненій (2) и (3), при  $x = 2L$  относятся къ точкѣ  $B$  и даютъ два условныя уравненія

$$C_1 = -\frac{12}{6} RL^2 + C_3$$

и

$$C_2 = \frac{8}{6} RL^3 + C_4$$

Группы уравненій (3) и (4), при  $x = (1 + \varepsilon)L$  относятся къ точкѣ  $C$  и даютъ два условныя уравненія

$$C_3 = \frac{3(1 + \varepsilon)^2}{6} PL^2 + C_5$$

и

$$C_4 = -\frac{(1 + \varepsilon)^3}{6} PL^3 + C_6$$

Наконецъ, группы уравненій (4) и (5), при  $x = L$  относятся къ точкѣ  $A$  и даютъ два условныя уравненія

$$C_5 = -\frac{3}{6} QL^2 + C_7$$

и

$$C_6 = \frac{1}{6} QL^3 + C_8$$

Для полученія двухъ остальныхъ уравненій, необходимыхъ для опредѣленія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ, замѣтимъ, что послѣднее уравненіе группы (2), при  $x = 3L$  даетъ  $y_{iv}$  и при  $x = 2L$  даетъ  $y_{iii}$ . Такимъ образомъ получаемъ два слѣдующія уравненія

$$EJy_{iv} = -\frac{54}{6} YL^3 + 3LC_1 + C_2 \dots (7)$$

и

$$EJy_{iii} = -\frac{28}{6} YL^3 + 2LC_1 + C_2 \dots (8)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій находимъ, что

$$C_1 = \frac{26}{6} YL^2 - \frac{EJ}{L} y_{iii} + \frac{EJ}{L} y_{iv} \dots (9)$$

и

$$C_2 = -\frac{24}{6} YL^3 + 3EJy_{iii} - 2EJy_{iv} \dots (10)$$

Вводя эти выраженія въ приведенныя выше уравненія, содержащія  $C_3 \dots C_8$ , найдемъ, что

$$C_3 = \frac{26}{6} YL^2 + \frac{12}{6} RL^2 - \frac{EJ}{L} y_{iii} + \frac{EJ}{L} y_{iv}$$

$$C_4 = -\frac{24}{6} YL^3 - \frac{8}{6} RL^3 + 3EJy_{iii} - 2EJy_{iv}$$

$$C_5 = \frac{26}{6} YL^2 + \frac{12}{6} RL^2 - \frac{3(1+\delta)^2}{6} PL^2 - \frac{EJ}{L} y_{iii} + \frac{EJ}{L} y_{iv} \dots (11)$$

$$C_6 = -\frac{24}{6} YL^3 - \frac{8}{6} RL^3 + \frac{(1+\delta)^2}{6} PL^3 + 3EJy_{iii} - 2EJy_{iv} \dots (12)$$

$$C_7 = \frac{26}{6} YL^2 + \frac{12}{6} RL^2 + \frac{3}{6} QL - \frac{3(1+\delta)^3}{6} PL^2 - \frac{EJ}{L} y_{iii} + \frac{EJ}{L} y_{iv}$$

$$C_8 = -\frac{24}{6} YL^3 - \frac{8}{6} RL^3 - \frac{1}{6} QL^3 + \frac{(1+\delta)^3}{6} PL^3 + 3EJy_{iii} - 2EJy_{iv} \dots (13)$$

Имѣя эти уравненія, легко написать четыре уравненія, опредѣляющія силы  $X$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $Y$ .

Для полученія ихъ надо припомнить, что при  $x = L$  послѣднее уравненіе группы (4) даетъ  $J = y_{II}$ , слѣдовательно

$$EJy_{II} = -\frac{8}{6}YL^3 - \frac{5}{6}RL^3 + \frac{2+3\delta}{6}PL^3 + C_5L + C_6$$

Вставляя сюда вмѣсто  $C_5$  и  $C_6$  ихъ выраженія изъ уравненій (11) и (12), получимъ уравненіе

$$\frac{EJ}{L^3}y_{II} - 2\frac{EJ}{L^3}y_{III} + \frac{EJ}{L^3}y_{IV} + \frac{6}{6}Y + \frac{1}{6}R = \frac{\delta^3}{6}P \quad (14).$$

Послѣднее уравненіе группы (5), при  $x = 0$ , даетъ  $y = y_1$ , и слѣдовательно

$$JEy_1 = C_8$$

Вставляя сюда выраженіе  $C_8$  изъ уравненія (13), найдемъ, что

$$\frac{EJ}{L^3}y_1 - 3\frac{EJ}{L^3}y_{III} + 2\frac{EJ}{L^3}y_{IV} + \frac{24}{6}Y + \frac{8}{6}R + \frac{1}{6}Q = \frac{(1+\delta)^3}{6}P \quad (15)$$

Обозначая

$$\frac{EJ}{K_1L^3} = A_1, \quad \frac{EJ}{K_{II}L^3} = A_2, \quad \frac{EJ}{K_{III}L^3} = A_3 \quad \text{и} \quad \frac{EJ}{K_{IV}L^3} = A_4 \quad (16)$$

и замѣняя величины  $y_1$ ,  $y_{II}$ ,  $y_{III}$  и  $y_{IV}$ , входящія въ уравненія (14) и (15), величинами изъ группы уравненій (1), получимъ два слѣдующія уравненія

$$(6A_4 + 6)Y - (12A_3 - 1)R + 6A_2Q = \delta^3P \quad (17)$$

$$(12A_4 + 24)Y - (18A_3 - 8)R + Q + 6A_1X = (1+\delta)^3P \quad (18)$$

Если къ этимъ двумъ уравненіямъ присоединимъ два уравненія статики, написавъ ихъ для удобства дальнѣйшихъ вычисленій въ видѣ

$$3X = -2Q - R + (2-\delta)P \quad (19)$$

и

$$3Y = -Q - 2R + (1+\delta)P \quad (20).$$

то изъ уравненій (17), (18), (19) и (20) и можно найти всѣ четыре искомыя силы.

Съ этой цѣлью изъ уравненій (17) и (18) выключимъ  $X$  и  $Y$  помощью (19) и (20).

Въ то же время, въ виду приложенія формулъ къ одному только случаю одинаковой упругости основаній всѣхъ точекъ опоры рельса, обозначимъ

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A = \frac{EJ}{KL^3} \quad (21).$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія силъ  $Q$  и  $R$ , получимъ два уравненія

$$(4A - 2)Q - (16A + 3)R = [-(2A + 2) - (2A + 2)\delta + \delta^3]P$$

и

$$(8A + 7)Q + (28A + 8)R = [8A + 7 + (2A + 5)\delta - 3\delta^2 - \delta^3]P$$

Разрѣшая эти два уравненія относительно  $Q$  и  $R$  и затѣмъ вводя ихъ значенія въ уравненія (19) и (20), найдемъ, что

$$Q = \frac{216A^2 + 192A + 15 + (72A^2 - 42A + 3)\delta - (144A + 27)\delta^2 + (36A + 15)\delta^3}{720A^2 + 336A + 15} P \quad (22)$$

$$R = \frac{144A^2 + 126A + (72A^2 + 138A + 12)\delta - (36A - 18)\delta^2 - (36A + 15)\delta^3}{720A^2 + 336A + 15} P \quad (23)$$

$$X = \frac{288A^2 + 54A - (216A^2 + 186A + 7)\delta + (108A + 12)\delta^2 - (12A + 5)\delta^3}{720A^2 + 336A + 15} P \quad (24)$$

$$Y = \frac{72A^2 - 36A + (216A^2 + 6A - 2)\delta + (72A - 3)\delta^2 + (12A + 5)\delta^3}{720A^2 + 336A + 15} P \dots (25)$$

Величины отношеній

$$\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Q}{P}, \frac{R}{P}$$

зависятъ отъ величины

$$A = \frac{EJ}{KL^3}$$

и мѣняются въ зависимости отъ величины  $\delta$ .

Такъ какъ  $J$  рѣдко бываетъ меньше 600 и больше 1600,  $L$  заключается большею частью между 50 и 90 и  $K$  между 10000 и 40000, то при  $E = 2.000.000$  наименьшая величина

$$A = \frac{200\,000 \times 600}{40\,000 \times 90} = \infty \frac{1}{24}$$

$$A = \frac{2\,000\,000 \times 1600}{40\,000 \times 503} = \frac{5}{2} = \frac{60}{24}$$

Въ слѣдующей таблицѣ приведены величины отношеній

$$\frac{X}{P}, \frac{Q}{P}, \frac{R}{P}, \frac{Y}{P}, \text{ вычисленныя для величины}$$

$$A = \frac{3}{24}, \frac{6}{24}, \frac{12}{24}, \frac{18}{24}, \frac{24}{24}, \frac{36}{24} \text{ и } \frac{48}{24}$$

или при

$$A = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{2} \text{ и } 2$$

и для различныхъ  $\delta$  отъ 0 до 1 черезъ каждую 0,1.

**Сумма моментовъ силъ, приложенныхъ къ опорамъ относительно разныхъ точекъ пролета.**

§ 17.

Въ той же таблицѣ приведены отношенія суммы моментовъ силъ, соотвѣствующихъ данному  $\delta$ , т. е.

$$X(1 + \delta)L + Q\delta L$$

къ наибольшему статическому моменту при опорѣ рельса только на двѣ шпалы, т. е. къ величинѣ

$$P \frac{L}{4}.$$

**Т а б л и ц а I<sup>1)</sup>.**

A	$\delta$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{X(1+\delta)L + Q\delta L}{P \frac{L}{4}} = n$
$\frac{1}{8}$	0	0,1648	0,6209	0,2637	-0,0495	0,6582
	0,1	0,1192	0,6163	0,3099	-0,0454	0,7708
	0,2	0,0805	0,6001	0,3583	-0,0389	0,8664
	0,3	0,0481	0,5743	0,4072	-0,0296	0,9392
	0,4	0,0214	0,5405	0,4549	-0,0168	0,9844
	0,5	0	0,5	0,5	0	1
	0,6	-0,0168	0,4542	0,5405	0,0214	0,9844
	0,7	-0,0296	0,4072	0,5743	0,0481	0,9392
	0,8	-0,0389	0,3583	0,6001	0,0805	0,8664
	0,9	-0,0454	0,3099	0,6163	0,1192	0,7708
	1,0	-0,0495	0,2637	0,6209	0,1648	0,6582
$\frac{1}{4}$	0	0,2188	0,5312	0,2812	-0,0312	0,8752
	0,1	0,1749	0,5291	0,3171	-0,0211	0,9812
	0,2	0,1361	0,5192	0,3533	-0,0086	1,0688
	0,3	0,1021	0,5016	0,3896	0,0067	1,1328
	0,4	0,0724	0,4803	0,4222	0,0251	1,1740
	0,5	0,0464	0,4536	0,4536	0,0464	1,1856
	0,6	0,0251	0,4222	0,4803	0,0724	1,1740
	0,7	0,0067	0,3896	0,5016	0,1021	1,1328
	0,8	-0,0086	0,3533	0,5192	0,1361	1,0688
	0,9	-0,0211	0,3171	0,5291	0,1749	0,9812
	1,0	-0,0312	0,2812	0,5312	0,2188	0,8752

<sup>1)</sup> Примѣчаніе. Изъ доставленныхъ мнѣ инженеромъ А. Л. Васютинскимъ данныхъ, упомянутыхъ въ началѣ этой статьи, относительно прогиба рельса видно, что нагрузка, дѣйствовавшая на рельсъ, передавалась имъ на 6 шпалъ. Степень однообразія подбивки шпалъ осталась неопредѣленною въ

<i>A</i>	$\delta$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{X(1+\delta)L + Q\delta L}{F\frac{L}{4}} = u$
$\frac{1}{2}$	0	0,2727	0,4546	0,2727	0	1,0908
	0,1	0,2321	0,4519	0,2999	0,0161	1,2020
	0,2	0,1949	0,4444	0,3265	0,0342	1,2912
	0,3	0,1610	0,4325	0,3520	0,0545	1,3564
	0,4	0,1302	0,4167	0,3760	0,0771	1,3960
	0,5	0,1023	0,3977	0,3977	0,1023	1,4092
	0,6	0,0771	0,3760	0,4167	0,1302	1,3960
	0,7	0,0545	0,3520	0,4325	0,1610	1,3564
	0,8	0,0342	0,3265	0,4444	0,1949	1,2912
	0,9	0,0161	0,2999	0,4519	0,2321	1,2020
	1,0	0	0,2727	0,4546	0,2727	1,0908
$\frac{3}{4}$	0	0,3013	0,4174	0,2612	0,0201	1,2052
	0,1	0,2628	0,4137	0,2842	0,0393	1,3218
	0,2	0,2269	0,4063	0,3066	0,0602	1,4142
	0,3	0,1936	0,3957	0,3279	0,0828	1,4816
	0,4	0,1626	0,3821	0,3479	0,1074	1,5219
	0,5	0,1339	0,3661	0,3661	0,1339	1,5356
	0,6	0,1074	0,3479	0,3821	0,1626	1,5219
	0,7	0,0828	0,3279	0,3957	0,1936	1,4816
	0,8	0,0602	0,3066	0,4063	0,2269	1,4142
	0,9	0,0393	0,2842	0,4137	0,2628	1,3218
	1,0	0,0201	0,2612	0,4174	0,3013	1,2052

виду крайней трудности этих определений. Если, однако, для приблизительных соображений примемъ, что подъ всеми шпалами подбивка болѣе однообразна и что осадка рельса надъ шпалю пропорціональна сопротивленію представляемому шпалю къ погруженію рельса, то среднія величины изъ четырехъ наблюденій указываютъ слѣдующее распределеніе нагрузки на шпалы.

Шпалы:	I	II	III	IV	V	VI
	0,08	0,23	0,33	0,23	0,10	0,03

Это распределеніе нагрузки указываетъ, что точка ея приложенія находилась между III и IV шпалами въ разстояніи 0,13 всего промежутка отъ шпалы III и въ разстояніи 0,87 отъ IV шпалы. Обозначая *P* нагрузку и *L* разстояніе между шпалами, легко найти, что изгибающій моментъ былъ 0,47 *Pδ*.

Если бы вся нагрузка передавалась только на двѣ шпалы, то, находясь посрединѣ разстоянія между ними, она вызывала бы изгибающій моментъ въ 0,25 *LP*.

Отсюда видно, что отношеніе

$$\frac{0,47 LP}{0,25 LP} = 1,88.$$

A	$\delta$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{X(1+\delta)L + Q\delta L}{P\frac{L}{4}} = n$
1	0	0,3193	0,3950	0,2521	0,0336	1,2772
	0,1	0,2822	0,3903	0,2727	0,0548	1,3980
	0,2	0,2473	0,3828	0,2925	0,0774	1,4932
	0,3	0,2144	0,3726	0,3115	0,1015	1,5620
	0,4	0,1835	0,3601	0,3293	0,1271	1,6036
	0,5	0,1544	0,3456	0,3456	0,1544	1,6176
	0,6	0,1271	0,3293	0,3601	0,1835	1,6036
	0,7	0,1015	0,3115	0,3726	0,2144	1,5620
	0,8	0,0774	0,2925	0,3828	0,2473	1,4932
	0,9	0,0548	0,2727	0,3903	0,2822	1,3980
	1,0	0,0336	0,2521	0,3950	0,3193	1,2772
1,5	0	0,3408	0,3689	0,2398	0,0505	1,3632
	0,1	0,3055	0,3630	0,2575	0,0740	1,4894
	0,2	0,2718	0,3550	0,2746	0,0986	1,5886
	0,3	0,2396	0,3451	0,2909	0,1244	1,6600
	0,4	0,2088	0,3337	0,3063	0,1512	1,7032
	0,5	0,1790	0,3210	0,3210	0,1790	1,7160
	0,6	0,1512	0,3063	0,3337	0,2088	1,7032
	0,7	0,1244	0,2909	0,3451	0,2396	1,6600
	0,8	0,0986	0,2746	0,3550	0,2718	1,5886
	0,9	0,0740	0,2575	0,3630	0,3055	1,4894
	1,0	0,0505	0,2398	0,3689	0,3408	1,3632
2	0	0,3532	0,3540	0,2322	0,0605	1,4128
	0,1	0,3190	0,3474	0,2481	0,0855	1,5426
	0,2	0,2860	0,3392	0,2636	0,1112	1,6442
	0,3	0,2543	0,3294	0,2785	0,1378	1,7176
	0,4	0,2235	0,3183	0,2928	0,1654	1,7609
	0,5	0,1940	0,3060	0,3060	0,1940	1,7760
	0,6	0,1654	0,2928	0,3183	0,2235	1,7609
	0,7	0,1378	0,2785	0,3294	0,2543	1,7176
	0,8	0,1112	0,2636	0,3392	0,2860	1,6442
	0,9	0,0855	0,2481	0,3474	0,3190	1,5426
	1,0	0,0605	0,2322	0,3541	0,3532	1,4128

Въ случаѣ, наблюдавшемся инженеромъ А. Л. Васютынскимъ,

$$A = \frac{EJ}{KL^3} = \frac{2\,000\,000 \cdot 1122}{10\,000 \cdot 512000} = \frac{1}{2,3}$$

т. е. гораздо ближе подходит къ  $\frac{1}{2}$  чѣмъ къ  $\frac{1}{4}$ . Изъ таблицы же I видно, что при  $A = \frac{1}{2}$  и при положеніи груза, соответствующемъ  $\delta$ , отношеніе

$$\frac{X(1+\delta) + Q\delta L}{P\frac{S}{u}} = 1,23$$

Отсюда видно, что при передачѣ рельсомъ давленія не на 4, а на большее число шпаль, изгибающіе моменты возрастаютъ еще значительно, чѣмъ указано въ таблицѣ I.

Изъ этой таблицы прежде всего усматривается, что при очень малыхъ величинахъ  $A$ , т. е. при малыхъ величинахъ момента инерціи рельса, или при малой сжимаемости шпаль и поддерживающаго ихъ грунта, другими словами, при большихъ величинахъ коэффициента  $K$  и при большихъ разстояніяхъ между шпалами нельзя передавать давленіе рельса на 4 шпалы. При  $A = 1/8$ , при всѣхъ положеніяхъ груза, одна изъ крайнихъ шпаль не только не подвергается давленію, а, напротивъ, должна удерживать рельсы отъ подъема вверхъ. Все давленіе передается только на три шпалы и именно на двѣ среднія и на ту изъ крайнихъ, которая ближе къ грузу. При помѣщеніи груза посрединѣ разстоянія между двумя средними шпалами вся нагрузка распредѣляется поровну на двѣ среднія шпалы, и обѣ крайнія не подвергаются никакимъ давленіямъ.

По этой причинѣ предыдущая таблица I и не распространена на величины  $A < 1/8$ .

При  $A = 1/4$ , пока точка приложенія находится между одною изъ двухъ среднихъ шпаль и ближайшею къ ней четвертью длины промежутка между шпалами, нагрузка передается на двѣ среднія шпалы и на ближайшую изъ двухъ крайнихъ, другая же крайняя не только никакому давленію не подвергается, но должна даже производить болѣе или менѣе сильное притяженіе, достигающее почти до  $1/30$  полной нагрузки. Когда точка приложенія нагрузки занимаетъ положеніе гдѣ нибудь на двухъ среднихъ четвертяхъ разстоянія между шпалами, тогда нагрузка распредѣляется на всѣ четыре шпалы.

При  $A \geq 1/2$  нагрузка постоянно передается на всѣ четыре шпалы, исключая лишь случай при  $A = 1/2$ , когда нагрузка находится прямо надъ одною изъ среднихъ шпаль, тогда другая средняя шпала и ближайшая изъ двухъ крайнихъ нагружаются поровну, а другая крайняя, болѣе удаленная, вовсе не нагружается.

**Величина силъ въ опорахъ и сумма моментовъ ихъ при поддержкѣ рельса 4 опорами въ случаѣ приложенія нагрузки въ срединѣ пролета.**

§ 18.

Наибольшіе статическіе моменты силъ, изгибающихъ рельсъ, при сравненіи ихъ съ наибольшимъ статическимъ моментомъ отъ той же нагрузки, при томъ же разстояніи между срединами смежныхъ шпаль, но при передачѣ всей нагрузки только на двѣ шпалы, оказываются, въ большинствѣ случаевъ,

больше и даже значительно больше послѣдняго упомянутого изгибающаго момента.

При передачѣ давленія  $P$  на двѣ только шпалы, разставленныя на разстояніе  $L$ , какъ извѣстно, наибольшій статическій моментъ

$$M = \frac{PL}{4};$$

но при распредѣленіи груза на четыре шпалы, разставленныя, середина отъ середины, тоже на разстоянія  $L$ , наибольшій изгибающій моментъ при статическомъ дѣйствіи груза  $M_{\max}$ , относящійся къ положенію груза въ срединѣ средняго пролета, превышаетъ  $M$ .

Чтобы найти  $M_{\max}$ , относящійся къ опредѣленной величинѣ  $A$ , надо въ общее выраженіе момента

$$X(1 + \delta)L + Q\delta L$$

вставить вмѣсто  $X$  и  $Q$  ихъ выраженія изъ уравненій (22) и (24) и величину  $\delta = 0,5$ .

Такимъ образомъ, получается

$$X = \frac{180 A^2 - 13,5 A - 1,125 P}{720 A^2 + 336 A + 15} P$$

$$Q = \frac{180 A^2 + 181,5 A + 8,625 P}{720 A^2 + 336 A + 15} P$$

и

$$M_{\max} = 1,5 XL + 0,5 QL = 4 \frac{360 A^2 + 70,5 A + 2,625}{720 A^2 + 336 A + 15} \frac{PL}{4}$$

а раздѣляя числителя и знаменателя на ихъ общаго множителя  $30 A + 1,5$ , найдемъ, что

$$M_{\max} = \frac{48 A + 7}{24 A + 10} \frac{PL}{4} = n \frac{PL}{4}$$

Величины  $n$  отношенія  $M_{\max}$  къ  $M$  при разныхъ  $A$  приведены въ слѣдующей таблицѣ.

**В е л и ч и н ы  $n$ .**

$A =$	0,125	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$\frac{M_{\max}}{M} =$	1.13584	1.1875	1.40909	1.53571	1.6176	1.71739	1.7758

Отсюда видно, что увеличеніе  $A$ , другими словами увеличеніе момента инерціи  $J$ , уменьшеніе силы  $K$  и уменьшеніе разстоянія между серединами шпалъ  $L$  влечетъ за собою увеличеніе момента изгибающихъ силъ при той же нагрузкѣ,

Увеличение это, однако, имѣеть предѣль немного болѣе величины, найденной при  $A = 2$ .

Дѣйствительно, если рельсъ, какую бы онъ ни имѣлъ длину, опирается на четыре опоры, и если при этомъ величина  $A$  будетъ безгранично возрастать, по какой бы ни было причинѣ, то для опредѣленія силъ  $X$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $Y$  можно будетъ пользоваться тѣми же, приведенными выше, уравненіями (22), (23), (24) и (25), съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы считать въ нихъ величину  $A$  безгранично большою. Извѣстно, что дробь, содержащая въ числитель и знаменатель одну и ту же переменную величину, при безграничномъ ея возрастаніи, стремится къ величинѣ отношенія коэффиціентовъ высшихъ степеней этой переменной, находящихся въ числитель и знаменатель. Для этого частнаго случая, обозначая силы тѣми же буквами, но только со значками, найдемъ, что

$$X' = \frac{(288 - 216 \delta) A^2}{720 A^2} P = \frac{288 - 216 \delta}{720} P$$

$$Y' = \frac{(72 + 216 \delta) A^2}{720 A^2} P = \frac{72 + 216 \delta}{720} P$$

$$Q' = \frac{(216 - 72 \delta^2) A^2}{720 A^2} P = \frac{216 - 72 \delta^2}{720} P$$

$$R' = \frac{(144 + 72 \delta) A^2}{720 A^2} P = \frac{144 + 72 \delta}{720} P$$

При  $\delta = 0,5$

$$X' = \frac{P}{4}; Y' = \frac{P}{4}; Q' = \frac{P}{4}; R' = \frac{P}{4}.$$

Вставляя эти величины въ выраженіе суммы моментовъ силъ  $X(1 + \delta)L + Q\delta L$ , найдемъ

$$\frac{3}{8} PL + \frac{1}{8} PL = \frac{1}{2} PL$$

и отношеніе

$$\frac{X'(1 + 2)L + Q'\delta L}{P \frac{L}{4}} = 2.$$

При чрезвычайномъ увеличеніи момента инерціи  $J$  такъ же, какъ и при чрезвычайномъ уменьшеніи разстоянія  $L$ , число опорныхъ точекъ останется равнымъ четыремъ въ томъ лишь случаѣ, если вся длина рельса меньше  $4L$ ; а въ тѣхъ случаяхъ, когда длина рельса больше  $4L$  и число лежащихъ подъ нимъ шпалъ больше 4, число опорныхъ точекъ увеличится и изложенная теорія къ этимъ случаямъ будетъ непримѣнима.

**Силы въ опорныхъ точкахъ и сумма моментовъ этихъ силъ при числѣ опоръ  $m$  и при чрезвычайно твердыхъ рельсахъ.**

§ 19.

Если бы рельсъ, положенный на одинаково подбитыя шпалы, опирался на число ихъ  $m$ , то, при чрезвычайной твердости рельса, вся нагрузка  $P$ , положенная на срединѣ средняго промежутка, распредѣлялась бы между шпалами поровну, и на каждую шпалу пришлось бы часть

$$\frac{P}{m}.$$

Если разстояніе между серединами крайнихъ шпалъ обозначимъ  $L$ , то разстояніе между серединами смежныхъ шпалъ будетъ

$$l = \frac{L}{m-1}.$$

Сумма моментовъ всѣхъ сопротивленій шпалъ относительно средней точки рельса выразится формулою

$$\frac{P}{m} \left[ 0,5 + 1,5 + 2,5 + \dots + \left( \frac{m-2}{2} + 0,5 \right) \right]$$

или

$$\frac{P}{m} \left[ \left( 1 + \frac{m-2}{2} \right) 0,5 + 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{m-2}{2} \right]$$

или еще

$$\frac{P}{m} \left[ \left( 1 + \frac{m-2}{2} \right) 0,5 + \left( 1 + \frac{m-2}{2} \right) \frac{m-2}{4} \right] \frac{L}{m-1}$$

Если бы безъ измѣненія длины  $L$  число шпалъ  $m$ , поддерживающихъ рельсъ, стало возрастать безгранично, то послѣдняя формула обратилась бы, какъ извѣстно, въ формулу

$$P \frac{L}{4}.$$

Это и есть величина момента силъ, изгибающихъ рельсъ, въ случаѣ помѣщенія его на сплошной рядъ шпалъ. Размѣщеніе такое впрочемъ въ практикѣ никогда не дѣлается, да и рельсы безграничной твердости невозможны, поэтому величина дѣйствительно изгибающаго рельсъ момента силъ всегда будетъ больше

$$P \frac{L}{4}.$$

**а) Ординаты обертывающей  $h = y$  въ случаѣ поддержанія рельса 4 равно отстоящими и равно упругими опорами.**

§ 20.

Имѣя возможность опредѣлять силы  $X$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $Y$  по уравненіямъ (22), (23), (24) и (25), можно найти геометрическое мѣсто точекъ кривой изогнутой оси рельса въ нагруженномъ пролетѣ,

соответствующих каждому положению нагрузки. Для этого въ последнемъ уравненіи группы (2) надо поставить  $x = (1 + \varepsilon)L$  и затѣмъ ввести величины  $C_3$  и  $C_4$  изъ соответственныхъ уравненій, замѣнивъ притомъ ординаты  $y_{III}$  и  $y_{IV}$  силами  $R$  и  $Y$ , пользуясь уравненіями группы (1).

Вводя эти силы, найдемъ, послѣ небольшихъ преобразованій, что  $h = y$  опредѣляется уравненіемъ

$$6KAy = [-6A - 6 + (6A + 11)\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3]Y + [12A - 1 - (6A - 3)\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3]R \dots \dots \dots (33)$$

Коэффициенты передъ силами  $Y$  и  $R$  могутъ быть опредѣлены только при заданіи величинъ  $A$  и  $\varepsilon$ .

Такъ какъ кривая располагается совершенно симметрично относительно средней точки между двумя средними шпалами, то достаточно опредѣлить величины коэффициентовъ для величинъ  $\varepsilon$  заключенныхъ между 0 и 0,5.

Въ слѣдующей таблицѣ II приведены эти коэффициенты при  $A = 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1 1/2$  и для  $\varepsilon = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  и 0,5.

**Т а б л и ц а II.**

Таблица коэффициентовъ  $R$  и  $Y$  въ уравненіи (33).

$A$	$\varepsilon$	$R$	$Y$	$A$	$\varepsilon$	$R$	$Y$
1/8	0	1,5	— 6,75	1	0,3	7,307	— 6,363
	0,1	1,696	— 5,514		0,4	6,984	— 5,196
	0,2	1,838	— 4,152		0,5	6,625	— 4,125
	0,3	1,932	— 2,658		0	11	— 12
	0,4	1,984	— 1,026		0,1	10,671	— 10,359
	0,5	2	— 0,75		0,2	10,288	— 8,832
1/4	0	2	— 7,5	1 1/2	0,3	9,857	— 7,413
	0,1	2,121	— 6,311		0,4	9,384	— 6,096
	0,2	2,188	— 5,232		0,5	8,875	— 4,875
	0,3	2,207	— 4,263		0	17	— 15
	0,4	2,184	— 3,396		0,1	16,371	— 13,069
	0,5	2,125	— 2,625		0,2	15,688	— 11,232
1/2	0	5	— 9	2	0,3	14,957	— 9,513
	0,1	4,971	— 7,559		0,4	14,184	— 7,896
	0,2	4,888	— 6,432		0,5	13,375	— 6,375
	0,3	4,757	— 5,313		0	23	— 18
	0,4	4,584	— 4,296		0,1	22,071	— 15,759
	0,5	4,375	— 3,375		0,2	21,088	— 13,632
3/4	0	8	— 10,5	0,3	20,057	— 11,613	
	0,1	7,821	— 9,009		0,4	18,984	— 9,696
	0,2	7,588	— 7,632		0,5	17,875	— 7,875

Рѣшая уравненіе (33), при помощи таблицъ I и II можно найти величины  $y$ .

Величины, вычисленные для  $A = 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1,5$  и  $2$  для  $\delta$  от  $0$  до  $0,5$  через  $0,1$  приведены в следующей таблице III.

**Т а б л и ц а III.**

Величины  $y$  или  $h$  при  $P=10,000$  и при  $K=10,000; 20,000; 30,000$  и  $40,000$  килограммов.

A	$\delta$	Величины $y$ или $h$ сантиметров при $P=10000$ кил. и при			
		$K = 10,000^k$	$20,000^k$	$30,000^k$	$40,000^k$
$1/8$	0	0,6200	0,3100	0,2067	0,1550
	0,1	0,6322	0,3161	0,2107	0,1580
	0,2	0,6418	0,3209	0,2133	0,1605
	0,3	0,6536	0,3268	0,2178	0,1634
	0,4	0,6662	0,3331	0,2222	0,1666
	0,5	0,6666	0,3333	0,2230	0,1667
$1/4$	0	0,5314	0,2657	0,1772	0,1312
	0,1	0,5384	0,2692	0,1798	0,1360
	0,2	0,5474	0,2737	0,1817	0,1373
	0,3	0,5550	0,2775	0,1850	0,1387
	0,4	0,5582	0,2791	0,1860	0,1395
	0,5	0,5578	0,2789	0,1860	0,1395
$1/2$	0	0,4544	0,2272	0,1515	0,1135
	0,1	0,4570	0,2285	0,1523	0,1143
	0,2	0,4586	0,2293	0,1529	0,1147
	0,3	0,4620	0,2310	0,1539	0,1155
	0,4	0,4642	0,2321	0,1547	0,1160
	0,5	0,4644	0,2322	0,1548	0,1161
$3/4$	0	0,4172	0,2086	0,1391	0,1043
	0,1	0,4168	0,2084	0,1389	0,1042
	0,2	0,4148	0,2074	0,1383	0,1037
	0,3	0,4152	0,2076	0,1384	0,1038
	0,4	0,4160	0,2080	0,1387	0,1040
	0,5	0,4162	0,2081	0,1387	0,1040
1	0	0,3950	0,1975	0,1316	0,0988
	0,1	0,3912	0,1956	0,1304	0,0978
	0,2	0,3882	0,1941	0,1294	0,0970
	0,3	0,3862	0,1932	0,1288	0,0966
	0,4	0,3858	0,1929	0,1286	0,0965
	0,5	0,3852	0,1926	0,1284	0,0963
$1\frac{1}{2}$	0	0,3689	0,1844	0,1230	0,0922
	0,1	0,3611	0,1806	0,1204	0,0903
	0,2	0,3540	0,1770	0,1180	0,0885
	0,3	0,3518	0,1759	0,1173	0,0879
	0,4	0,3500	0,1750	0,1167	0,0875
	0,5	0,3489	0,1745	0,1163	0,0872
2	0	0,3490	0,1745	0,1163	0,0872
	0,1	0,3444	0,1722	0,1148	0,0861
	0,2	0,3368	0,1684	0,1123	0,0842
	0,3	0,3321	0,1660	0,1107	0,0830
	0,4	0,3294	0,1647	0,1098	0,0824
	0,5	0,3286	0,1643	0,1095	0,0821

Въ этой же таблицѣ III приведены величины ординатъ  $y$ , вычисленныя при  $P = 10\,000$  и при четырехъ различныхъ величинахъ  $K$  для грунтовъ, особенно податливаго при  $K = 10\,000$  килогр., для средняго при  $K = 20\,000$  килогр. и для очень твердаго при  $K = 30\,000$  и даже  $K = 40\,000$  килограммовъ.

Величины ординатъ перемѣщенія точекъ изогнутой оси рельса, составляющихся какъ отъ перемѣщенія точекъ опоры, такъ и отъ изгиба рельса при другихъ нагрузкахъ, могутъ быть найдены при помощи таблицы III простымъ умноженіемъ приведенныхъ въ ней чиселъ на отношеніе заданной нагрузки къ  $10,000$ . Такъ, напр., при нагрузкѣ въ  $8,000$  килограммовъ надо умножать числа таблицы III на  $0,8$ .

Зная ординаты перемѣщенія, пропорціональныя нагрузкѣ, дѣйствующей статически, можно будетъ, при помощи уравненій § 11 или § 12 найти динамическое давленіе подъ вліяніемъ поступательной скорости колеса, производящаго статически данное давленіе на рельсъ.

Изъ таблицы III видно, что геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія колеса съ рельсомъ отклоняется отъ положенія ихъ, при нагрузкѣ равной нулю, тѣмъ менѣе, чѣмъ больше  $A$  и чѣмъ больше  $K$ . Такъ, при  $A = 1/8$  и  $K = 20,000$  отклоненіе превышаетъ  $0,3$  сантиметра, а при  $A = 1$  и  $K = 40,000$  килограммовъ отклоненіе не достигаетъ и  $0,1$  сантиметра.

Изгибъ линіи этого геометрическаго мѣста при малыхъ  $A$  направленъ выпуклостью внизъ.

При  $A = 3/4$  изгибъ имѣетъ выпуклости, частью направленной внизъ, частью вверхъ. При  $A = 1$  вся линія обращена выпуклостью вверхъ. Отклоненія этой кривой линіи отъ прямой, довольно чувствительныя при малыхъ  $A$  и  $K$ , становятся чрезвычайно малыми при большихъ величинахъ  $A$  и  $K$ .

При  $A = 1/8$  и  $k = K = 20,000$  наибольшая ордината кривой  $0,3333$  сантим., наименьшая  $0,3100$ , и слѣдовательно разница между ними,  $0,0233$  сантим., выражается сотыми долями сантиметра и достигаетъ почти  $1/4$  миллиметра; при  $A = 1$  и  $K = 20,000$  наибольшая ордината  $0,1975$  сантим. и наименьшая  $0,1926$  представляютъ разницу въ  $0,0049$ , т. е. почти  $1/20$  миллиметра; а при  $A = 1$  и  $K = 40,000$  наибольшая ордината  $0,1043$  и наименьшая  $0,1040$  сантим. разнятся между собой всего на  $0,0003$  сантиметр. или на  $0,003$  миллиметр. Такую линію, съ практической точки зрѣнія, имѣя въ виду неизбѣжныя неправильности вида рельса, нельзя разсматривать иначе, какъ прямую.

Несмотря на такія небольшія отклоненія кривой линіи, представляющей геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія колеса съ рельсомъ, отъ линіи прямой, вычисленіе, приводимое далѣе, показываетъ, что скорость колеса имѣетъ вліяніе на напряженія въ рельсѣ.

Напряженія эти, однако, значительно болѣе зависятъ отъ неправильностей продольнаго профиля рельса, не только замѣчаемаго въ стыкахъ, но и на всемъ протяженіи длины рельса. Выпуклости и впадины на длинѣ рельса нерѣдко достигаютъ  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{3}$  миллиметра.

Вліяніе этихъ неправильностей можетъ быть выражено математическими формулами, какъ только будутъ опредѣлены формы выпуклостей или впадинъ и будутъ найдены ихъ измѣренія.

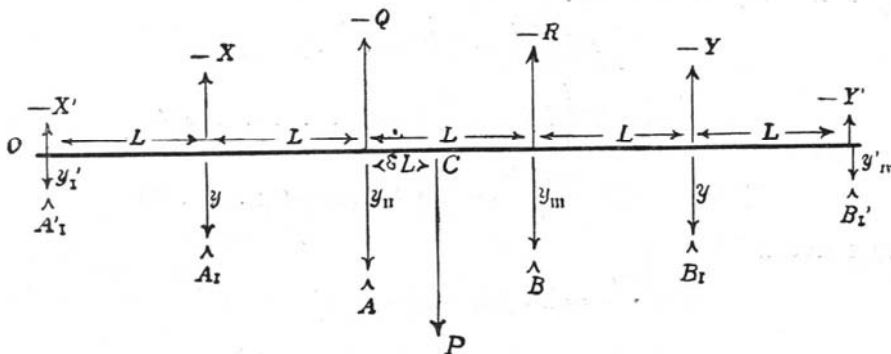
**б) Опредѣленіе линіи обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной нагрузки, въ разныхъ точкахъ средняго пролета, при 6 равно-отстоящихъ и равно-упругихъ опорахъ.**

**Опредѣленіе силъ въ точкахъ опоры.**

§ 21.

Силы, поддерживающія рельсъ, считаются пропорціональными перемѣщеніямъ соотвѣтствующихъ опорныхъ точекъ, отъ положенія ихъ въ моментъ прикосновенія съ рельсомъ.

Направленіе силы тяжести принимается за ось  $y$  и считается положительнымъ. Поддерживающія силы, направленные вверхъ, считаются отрицательными.



Начальное положеніе точки опоры  $A_1$  въ точкѣ  $O$  принимается за начало координатъ, и горизонтальная прямая, проходящая черезъ точку  $O$ , принимается за ось абсциссъ, причемъ направленіе вправо считается положительнымъ.

Когда рельсъ, подъ дѣйствиємъ нагрузки  $P$  и поддерживающихъ его силъ, приметъ свой окончательный изгибъ, тогда силы, къ нему приложенныя, придуть въ равновѣсiе и будутъ удовлетворять двумъ извѣстнымъ уравненiямъ статики твердаго тѣла, т. е. сумма всѣхъ силъ будетъ равна нулю, и сумма моментовъ силъ, относительно какой-либо точки, напимѣръ,  $C$ , будетъ тоже нуль. Эти уравненiя суть

$$\begin{aligned} -X' - X - Q - R - Y - Y' + P &= 0 \\ X'(2 + \epsilon)L + X(1 + \epsilon)L + Q\epsilon L - R(1 - \epsilon)L - Y(2 - \epsilon)L - \\ - Y'(3 - \epsilon)L &= 0 \end{aligned}$$

Для удобства дальнѣйшихъ вычисленiй, ихъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$5X' = (3 - \epsilon)P - 4X - 3Q - 2R - Y \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$5Y' = (2 + \epsilon)P - X - 2Q - 3R - 4Y \quad \dots \dots \dots (2).$$

Обозначая буквою  $K$ , съ соответствующими значками, коэффициенты упругости основанiй, поддерживающихъ опорныя точки и имѣя въ виду, что ординаты точекъ приложенiя поддерживающихъ силъ считаются величинами положительными, въ то время какъ соответственныя имъ силы, направленныя вверхъ, считаются отрицательными, получимъ группу уравненiй:

$$\begin{aligned} -X' &= -K_I y'_I; \quad -X = -K_I y_I; \quad -Q = -K_{II} y_{II}; \quad -R = -K_{III} y_{III}; \\ -Y &= -K_{IV} y_{IV} \quad \text{и} \quad -Y' = -K'_{IV} y'_{IV} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Величины силъ  $X'$ ,  $X$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $Y$   $Y'$  опредѣляются при помощи уравненiй, опредѣляющихъ видъ изогнутой нейтральной оси рельса.

Эти уравненiя будутъ:  
для части рельса  $B_1 B_1'$ .

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \dots \dots \dots (4)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2; \dots \dots (5)$$

для части  $BB_1$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = Y' (5L - x) - Y (4L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \dots Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Y \left( 4Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_3 \dots \dots (6)$$

$$EJ y = \dots Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Y \left( \frac{12Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_3 x + C_4; \dots (7)$$

для части  $CB$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - Y (4L - x) - R (3L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Y \left( 4Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_5 \quad (8)$$

$$EJy = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Y \left( \frac{12Lx^3}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_5 x + C_6;$$

для части  $AC$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - Y (4L - x) - K (3L - x) + P [(2 + \nu)L - x]$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Y \left( 4Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + P \left( (2 + \nu)Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_7 \dots (10)$$

$$EJy = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Y \left( \frac{12Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left( \frac{(6 + 3\nu)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_7 x + C_8; \dots (11)$$

для части  $A_1 A$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - Y (4L - x) - R (3L - x) + P [(2 + \nu)L - x] - Q (2L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Y \left( 4Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + P \left( (2 + \nu)Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Q \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_9 \dots (12)$$

$$EJy = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Y \left( \frac{12Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left( \frac{(6 + 3\nu)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Q \left( \frac{6Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_9 x + C_{10} \dots (13)$$

для части  $A'_1 A_1$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - Y (4L - x) - R (3L - x) + P [(2 + \nu)L - x] - Q (2L - x) - X (L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Y \left( 4Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \\ + P \left( (2 + \delta)Lx - \frac{x^2}{2} \right) - Q \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) - X \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_{11} \quad (14)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Y \left( \frac{12Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + \\ + P \left( \frac{(6 + 3\delta)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - Q \left( \frac{6Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - X \left( \frac{3Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + \\ + C_{11}x + C_{12}$$

Двѣнадцать произвольныхъ постоянныхъ, явившихся при интегрированіяхъ и вошедшихъ въ уравненія отъ (4) до (15) включительно, вмѣстѣ съ шестью неизвѣстными силами, требуютъ для своего опредѣленія восемнадцати уравненій. Въ число этихъ послѣднихъ входятъ восемь уравненій, приведенныхъ въ (1), (2) и (3), и въ дополненіе къ нимъ могутъ быть написаны еще десять условныхъ уравненій, доставляемыхъ обстоятельствами, относящимися къ точкамъ опоры  $A_1$ ,  $A$ ,  $B$ , и  $B_1$  и къ  $C$ —точкѣ приложенія силъ  $P$ .

Въ этихъ точкахъ отдѣльныя вѣтви изогнутой оси имѣютъ одинаковыя ординаты и общія касательныя. Поэтому величины  $\frac{dy}{dx}$ , опредѣляемыя уравненіями (4) и (6), такъ же, какъ и величины  $y$ , опредѣляемыя уравненіями (5) и (7), при  $x=4L$ , должны быть между собою равны, и, слѣдовательно, получаются два условныя уравненія

$$C_1 = -Y \left( 4L \cdot 4L - \frac{(4L)^2}{2} \right) + C_3$$

или

$$C_1 = -\frac{48}{6}YL^2 + C_3 \quad (16)$$

и

$$C_1 4L + C_2 = -Y \left( \frac{12L}{6} \frac{(4L)^2}{6} - \frac{(4L)^3}{6} \right) + 4C_3 L + C_4$$

или

$$4C_1 \cdot L + C_2 = -\frac{128}{6}YL + 4C_3 L + C_4$$

вмѣстѣ съ уравненіемъ (16) даетъ

$$C_2 = \frac{64}{6}YL + C_4 \quad (17)$$

Соединение вѣтвей  $CB$  и  $BB$ , въ точкѣ  $B$ , при  $x=3L$  даетъ два новыхъ условныхъ уравненія.

Изъ уравненій (6) и (8)

$$C_3 = -R \left( 3L \cdot 3L - \frac{3L^2}{2} \right) + C_5$$

откуда

$$C_3 = -\frac{27}{6} RL^2 + C_5 \dots (18)$$

и изъ уравненій (7) и (9)

$$C_3 3L + C_4 = -R \left( \frac{9L}{6} \frac{(3L)^2}{6} - \frac{(3L)^3}{6} \right) + C_5 3L + C_6$$

или

$$C_3 3L + C_4 = -\frac{54}{6} KL^3 + C_5 3L + C_6$$

а это уравненіе вмѣстѣ съ (18) даетъ

$$C_4 = \frac{27}{6} RL^3 + C_6 \dots (19).$$

Соединение, въ точкѣ  $C$ , двухъ вѣтвей  $CB$  и  $AC$  даетъ два условныя уравненія, приравнивая  $x = (2 + \delta) L$ .

Изъ уравненій (8) и (10)

$$C_5 = P \left( (2 + \delta)^2 L - \frac{(2 + \delta)^2 L^2}{2} \right) + C_7$$

или

$$C_5 = \frac{12 + 12\delta + 3\delta^2}{6} PL^2 + C_7 \dots (20).$$

и изъ уравненій (9) и 11)

$$C_5 (2 + \delta)L + C_6 = P \left( \frac{3(2 + \delta)^3 L^3}{6} - \frac{(2 + \delta)^3 L^3}{6} \right) + C_7 (2 + \delta)L + C_8$$

или

$$C_5 (2 + \delta)L + C_6 = P \frac{2(2 + \delta)^3 L^3}{6} + C_7 (2 + \delta)L + C_8$$

а это уравненіе вмѣстѣ съ (20) даетъ

$$C_6 = -\frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} PL^3 + C_8 \dots (21).$$

Принимая  $x = 2L$ , по свойству кривыхъ въ точкѣ  $A$ , найдемъ изъ уравненій (10) и (12)

$$C_7 = -Q \left( 2L \cdot 2L - \frac{(2L)^2}{2} \right) + C_9$$

или

$$C_7 = -\frac{12}{6}QL^2 + C_9 \dots \dots \dots (22)$$

и изъ уравненій (11) и (13)

$$C_7 \cdot 2L + C_8 = -Q \left( \frac{6L \cdot (2L)^2}{6} - \frac{(2L)^3}{6} \right) + C_9 \cdot 2L + C_{10}$$

или

$$C_7 \cdot 2L + C_8 = -\frac{16}{6}QL^3 + C_9 \cdot 2L + C_{10}$$

Вмѣстѣ съ уравненіемъ (22) это уравненіе даетъ

$$C_8 = \frac{8}{6}QL^3 + C_{10} \dots \dots \dots (23).$$

Наконецъ, обращаясь къ точкѣ  $A_1$  и приравнивая  $x = L$ , получимъ изъ уравненій (12 и (14)

$$C_9 = -X \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) + C_{11}$$

или

$$C_9 = -\frac{3}{6}XL^2 + C_{11} \dots \dots \dots (24)$$

и изъ уравненій (13) и (15)

$$C_9L + C_{10} = -X \left( \frac{3L^3}{6} - \frac{L^3}{6} \right) + C_{11}L + C_{12}$$

или

$$C_9L + C_{10} = -\frac{2}{6}XL^3 + C_{11}L + C_{12}$$

а оно вмѣстѣ съ (24) даетъ

$$C_{10} = \frac{1}{6}XL^3 + C_{12} \dots \dots \dots (25).$$

Выше приведенныя формулы, опредѣляющія величины произвольныхъ постоянныхъ отъ  $C_3$  до  $C_{12}$ , удобнѣе выразить въ зависимости отъ перемѣщеній точекъ  $B_1'$  и  $B_1$ , отъ ординатъ  $y'_{iv}$  и  $y_{iv}$ .

Эти ординаты опредѣляются изъ уравненія (5), подставляя въ немъ  $5L$  или  $4L$  вмѣсто  $x$ . Такимъ образомъ получаемъ

$$EJ y'_{iv} = -\frac{250}{6}Y'L^3 + 5C_1L + C_2$$

и

$$EJ y_{iv} = -\frac{176}{6}YL^3 + 4C_1L + C_2$$

отсюда

$$EJ y_{iv} - EJ y'_{iv} = \frac{74}{6} Y' L^3 - C_1 L$$

или

$$C_1 = \frac{74}{6} Y' L^3 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (26)$$

и

$$C_2 = -\frac{120}{6} Y' L^3 + 5 EJ y_{iv} - 4 EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (27).$$

При посредствѣ этихъ двухъ уравненій находимъ изъ уравненій съ (16) по (25) слѣдующія десять уравненій:

$$C_3 = \frac{74}{6} Y' L^2 + \frac{48}{6} Y L^2 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (28)$$

$$C_4 = -\frac{120}{6} Y' L^3 - \frac{64}{6} Y L^3 + 5 EJ y_{iv} - 4 EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (29)$$

$$C_5 = \frac{74}{6} Y' L^2 + \frac{48}{6} Y L^2 + \frac{27}{6} R L^2 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (30)$$

$$C_6 = -\frac{120}{6} Y' L^3 - \frac{64}{6} Y L^3 - \frac{27}{6} R L^3 + 5 EJ y_{iv} - 4 EJ y'_{iv} \dots \dots (31)$$

$$C_7 = \frac{74}{6} Y' L^2 + \frac{48}{6} Y L^2 + \frac{27}{6} R L^2 - \frac{12 + 12 \delta + 3 \delta^2}{6} P L^2 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (32)$$

$$C_8 = -\frac{120}{6} Y' L^3 - \frac{64}{6} Y L^3 - \frac{27}{6} R L^3 + \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 + 5 EJ y_{iv} - 4 EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (33)$$

$$C_9 = \frac{74}{6} Y' L^2 + \frac{48}{6} Y L^2 + \frac{27}{6} R L^2 - \frac{12 + 12 \delta + 3 \delta^2}{6} P L^2 + \frac{12}{6} Q L^2 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (34)$$

$$C_{10} = -\frac{120}{6} Y' L^3 - \frac{64}{6} Y L^3 - \frac{27}{6} R L^3 - \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 - \frac{8}{6} Q L^3 + 5 EJ y_{iv} - 4 EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (35)$$

$$C_{11} = \frac{74}{6} Y'L^2 + \frac{48}{6} YL^2 + \frac{27}{6} RL^2 - \frac{12 + 12\delta + 3\delta^2}{6} PL^2 + \frac{12}{6} QL^2 + \\ + \frac{3}{6} XL^2 - \frac{EJ}{L} y_{iv} + \frac{EJ}{L} y'_{iv} \dots \dots \dots (36)$$

$$C_{12} = -\frac{120}{6} Y'L^3 - \frac{64}{6} YL^3 - \frac{27}{6} RL^2 + \frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} PL^3 - \\ - \frac{8}{6} QL^3 - \frac{1}{6} XL^3 + 5EJ y_{iv} - 4EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (37)$$

Вставляя вторыя части уравненій (28) и (29) въ уравненіе (7), приравнивая въ то же время  $x=3L$ , найдемъ  $y_{iii}$ .

$$\frac{EJ}{L^3} y_{iii} - 2 \frac{EJ}{L^3} y_{iv} + \frac{EJ}{L^3} y'_{iv} + \frac{6}{6} Y' + \frac{1}{6} Y = 0 \dots \dots \dots (38)$$

Вставляя вторыя части уравненій (30) и (31) въ уравненіе (11), вмѣстѣ съ тѣмъ принимая  $x=2L$ , найдемъ  $y_{ii}$ .

$$\frac{EJ}{L^3} y_{ii} - 3 \frac{EJ}{L^3} y_{iv} + 2 \frac{EJ}{L^3} y'_{iv} + \frac{24}{6} Y' + \frac{8}{6} Y + \frac{1}{6} R = \frac{\delta^3}{6} P \dots (39)$$

Величина  $y_i$  опредѣлится изъ уравненія (13), когда  $x=L$  и когда вмѣсто  $C_9$  и  $C_{10}$  вставимъ вторыя части уравненій (34) и (35). Соотвѣтствующее уравненіе будетъ

$$\frac{EJ}{L^3} y_i - 4 \frac{EJ}{L^3} y_{iv} + 3 \frac{EJ}{L^3} y'_{iv} + \frac{60}{6} Y' + \frac{27}{6} Y + \frac{8}{6} R + \frac{1}{6} Q = \\ = \frac{1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3}{6} P \dots \dots \dots (40).$$

Наконецъ,  $y'_1$  опредѣлится изъ уравненія (15), вставляя въ него  $x=0$  и вводя вмѣсто  $C_{12}$  вторую часть уравненія (37). Такимъ образомъ получаемъ уравненіе

$$\frac{EJ}{L^3} y'_1 - 5 \frac{EJ}{L^3} y_{iv} + 4EJ y'_{iv} + \frac{120}{6} Y' + \frac{64}{6} Y + \frac{27}{6} R + \frac{8}{6} Q + \frac{1}{6} X = \\ = \frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} P \dots \dots \dots (41).$$

Если въ уравненіяхъ (38) — (41) вмѣсто ординатъ  $y'_i$ ,  $y_i$ ,  $y_{ii}$ ,  $y_{iii}$ ,  $y_{iv}$  и  $y'_{iv}$  вставимъ соотвѣтственные имъ силы, опредѣляемыя уравненіями группы (3), обозначая вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$\frac{EJ}{K_1 L^3} = A'_1, \quad \frac{EJ}{K_1 L^3} = A_1, \quad \frac{EJ}{K_{ii} L^3} = A_{ii}, \quad \frac{EJ}{K_{iii} L^3} = A_{iii}, \quad \frac{EJ}{K_{iv} L^3} = A_{iv} \quad \text{и} \\ \frac{EJ}{K'_{iv} L^3} = A'_{iv}$$

то послѣ умноженія уравненій на 6 получимъ уравненія:

$$\begin{aligned} (6 A'_{iv} + 6) Y' - (12 A_{iv} - 1) Y + 6 A_{iii} R &= 0 \\ (12 A'_{iv} + 24) Y' - (18 A_{iv} - 8) Y + R + 6 A_{ii} Q &= \delta^3 P \\ (18 A_{iv} + 60) Y' - (24 A_{iv} - 27) Y + 8 R + Q + 6 A_i X &= (1 + 3 \delta + 3 \delta^2 + \delta^3) P \\ (24 A'_{iv} + 120) Y' - (30 A_{iv} - 64) Y + 27 R + 8 Q + X + 6 A'_i X'_i &= \\ &= (8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3) P. \end{aligned}$$

Присоединяя къ этой группѣ два первыя уравненія (1) и (2), получимъ всѣ шесть уравненій, необходимыхъ для опредѣленія всѣхъ шести силъ, дѣйствующихъ на опорахъ. Рѣшеніе этихъ уравненій, въ ихъ общемъ видѣ, требуетъ довольно сложныхъ вычисленій и упрощается значительно при заданіи численныхъ величинъ различныхъ  $A$ .

Для нашей цѣли достаточно найти рѣшеніе при предположеніи, что

$$A'_i = A_i = A_{ii} = A_{iii} = A_{iv} = A'_{iv} = A.$$

**Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и величины  $h = y$  при  $A = 0,5$ .**

§ 22.

Въ такомъ случаѣ шесть уравненій, подлежащихъ разрѣшенію, будутъ слѣдующія

$$\begin{aligned} 9 Y' - 5 Y + 3 R &= 0 \\ 30 Y' - Y + R + 3 Q &= \delta^3 P \\ 69 Y' + 15 Y + 8 R + Q + 3 X &= (1 + 3 \delta + 3 \delta^2 + \delta^3) P \\ 132 Y' + 49 Y + 27 R + 8 Q + X + 3 X' &= (8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3) P \\ 5 X' &= (3 - \delta) P - 4 X - 3 Q - 2 R - Y \\ 5 Y' &= (2 + \delta) P - X - 2 Q - 3 R - 4 Y \end{aligned}$$

Выключая  $Y'$  и  $X'$  изъ четырехъ первыхъ посредствомъ двухъ послѣднихъ, получимъ группу

$$\begin{aligned} 61 Y + 12 R + 18 Q + 9 X &= (18 + 9 \delta) P \\ 25 Y + 17 R + 9 Q + 6 X &= (12 + 6 \delta - \delta^3) P \\ 201 Y + 167 R + 133 Q + 54 X &= (133 + 54 \delta - 15 \delta^2 - 5 \delta^3) P \\ 286 Y + 267 R + 233 Q + 139 X &= (233 + 69 \delta - 30 \delta^2 - 5 \delta^3) P \end{aligned}$$

Выключая изъ этихъ уравненій  $X$ , получимъ три слѣдующія:

$$\begin{aligned} 47 Y - 27 R + 9 Q &= 3 \delta P \\ 24 Y - 14 R - 52 Q &= (-25 + 15 \delta^2 - 4 \delta^3) P \\ 1759 Y + 761 R - 147 Q &= (270 + 420 \delta + 180 \delta^2 - 109 \delta^3) P \end{aligned}$$

Отсюда исключимъ  $Y$  и получимъ

$$\begin{aligned} 10 R + 2660 Q &= (1175 - 705 \delta^2 + 260 \delta^3) P \\ 83260 R - 22740 Q &= (12690 + 19740 \delta + 8460 \delta^2 - 10400 \delta^3) P \end{aligned}$$

Изъ этихъ двухъ исключаемъ  $R$  и находимъ  $Q$ ,  
 $221\ 699\ 000\ Q = (97\ 703\ 600 - 197\ 400\delta - 58\ 782\ 900\delta^2 + 21\ 751\ 600\delta^3) P$   
 или

$$Q = (0,44070 - 0,00089\delta - 0,26515\delta^2 + 0,09811\delta^3) P$$

$$R = (0,27278 + 0,23686\delta + 0,02919\delta^2 - 0,09811\delta^3) P$$

слѣдовательно

$$Y = (0,07231 + 0,13624\delta + 0,06754\delta^2 - 0,01132\delta^3) P$$

$$X = (0,26476 - 0,23742\delta + 0,03358\delta^2 + 0,01132\delta^3) P$$

$$X' = (0,00020 - 0,13152\delta + 0,10704\delta^2 - 0,02642\delta^3) P$$

$$Y' = (-0,05075 - 0,00326\delta + 0,02779\delta^2 + 0,02642\delta^3) P$$

Величины отношеній этихъ силъ къ нагрузкѣ  $P$  при разныхъ величинахъ  $\delta$  приведены въ слѣдующей таблицѣ IV.

Такъ какъ формулы таковы, что, при замѣнѣ величины  $\delta$  величиною  $1-\delta$ , многочленъ, выражающій  $R$ , даетъ многочленъ, выражающій  $Q$ , многочленъ, выражающій  $X$ , даетъ многочленъ, выражающій  $Y$ , и выражающій  $X'$  даетъ  $Y'$ , то достаточно вычислить силы, соответствующія значеніямъ  $\delta$  отъ 0 до 0,5, чтобы прямо имѣть остальные величины отъ 0,5 до 1.

Т а б л и ц а I V.

$\delta$	$\frac{X'}{P}$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{Y'}{P}$
0	0,00020	0,26476	0,44070	0,27278	0,07231	- 0,05075
0,1	- 0,01190	0,24136	0,43806	0,29666	0,08660	- 0,05075
0,2	- 0,02203	0,21871	0,43070	0,32054	0,10217	- 0,05008
0,3	- 0,03033	0,19686	0,41922	0,34382	0,11896	- 0,04851
0,4	- 0,03697	0,17589	0,40420	0,36592	0,13689	- 0,04592
0,5	- 0,04210	0,15586	0,38623	0,38624	0,15590	- 0,04213
0,6	- 0,04592	0,13689	0,36592	0,40420	0,17589	- 0,03697
0,7	- 0,04851	0,11896	0,34382	0,41922	0,19686	- 0,03033
0,8	- 0,05008	0,10217	0,32054	0,43070	0,21871	- 0,02203
0,9	- 0,05075	0,08660	0,29666	0,43806	0,24136	- 0,01190
1,0	- 0,05075	0,07231	0,27278	0,44070	0,26476	0,00020

Изъ этой таблицы видно, что если размѣры рельса, расположеніе его опоръ и упругія свойства какъ самаго рельса, такъ основанія опорныхъ его точекъ таковы, что  $A = 0,5$ , то, въ большинствѣ случаевъ, такой свободно лежащій рельсъ опирается только на четыре шпалы и въ крайне рѣдкихъ случаяхъ на пять

шпаль. Если длина рельсовъ не ограничивается пятернымъ расстояніемъ между серединами смежныхъ шпаль и простирается далѣе, какъ то и было при опытахъ инженера Васютынскаго, то самая тяжесть его концовъ, находящихся за предѣлами разсматриваемыхъ пяти пролетовъ между шпалами, можетъ вызвать нѣкоторое сопротивленіе крайнихъ опоръ, согласно съ дѣйствительно наблюдавшимися инженеромъ Васютынскимъ фактами. Во всякомъ случаѣ, можно съ большою вѣроятностью предвидѣть, что эти силы будутъ очень незначительны и изгибъ рельса въ томъ пролетѣ, гдѣ находится нагрузка, не измѣнится замѣтнымъ образомъ.

Форма этого изгиба опредѣлится при помощи уравненія (9), послѣ замѣны въ немъ произвольныхъ постоянныхъ  $C_5$  и  $C_6$  вторыми частями уравненій (30) и (31).

Послѣ надлежащей постановки и при  $A = 0,5$  уравненіе (9) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} 3K(y=h) = & - \left[ 132 - 77 \frac{x}{L} + 15 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] Y' \\ & - \left[ 49 - 45 \frac{x}{L} + 12 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] Y \\ & - \left[ 27 - 27 \frac{x}{L} + 9 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] R. \end{aligned}$$

Въ этомъ уравненіи на мѣсто  $x$  слѣдуетъ ставить

$$x = (2 + \delta)L$$

и подставляя вмѣсто  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  величины, показанныя въ предыдущей таблицѣ, противъ соотвѣтственной величины  $\delta$ , получимъ уравненіе, опредѣляющее  $y$ , соотвѣтствующій данному  $\delta$ .

Это же уравненіе можно написать въ видѣ:

$$\begin{aligned} 3K(y=h) = & - [132 - 77(2 + \delta) + 15(2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] Y' \\ & - [49 - 45(2 + \delta) + 12(2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] Y \\ & - [27 - 26(2 + \delta) + 9(2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] R. \end{aligned}$$

Это уравненіе и представляетъ геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія спокойно дѣйствующей нагрузки съ рельсомъ.

При помощи этого уравненія можно составить таблицу, необходимую для опредѣленія напряженій въ рельсѣ подъ вліяніемъ катящагося колеса, какъ въ случаѣ правильнаго вида рельсовъ и колесъ, такъ и въ случаѣ встрѣчающихся неправильностей профиля рельсовъ и колесныхъ шинъ.

Для составленія такой таблицы надо, прежде всего, составить таблицу величинъ коэффициентовъ передъ  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  при разныхъ величинахъ  $\delta$  отъ  $\delta = 0$  до  $\delta = 0,5$ .

Величины этихъ коэффициентовъ приведены въ слѣдующей таблицѣ.

**Т а б л и ц а V**  
коэффициентовъ передъ величинами  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$ .

Коэффиц.	$M'$	$M$	$N$
$\delta$	передъ $Y'$	передъ $Y$	передъ $R$
0	— 30	1	— 1
0,1	— 27,189	1,841	— 0,729
0,2	— 24,552	2,568	— 0,512
0,3	— 22,083	3,187	— 0,343
0,4	— 19,776	3,704	— 0,216
0,5	— 17,625	4,125	— 0,125

Вставляя эти величины въ послѣднее уравненіе, вводя въ него на мѣсто  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  величины, приведенныя въ таблицѣ IV, получимъ величины  $3ky$ , соответствующія разнымъ  $\delta$ .

**Т а б л и ц а VI,**  
доставляющая произведенія силъ  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  и ихъ коэффициентовъ  $M'$ ,  $M$  и  $N$ .

$\delta$	$M'Y'$	$MY$	$NR$	$\frac{3K(y=h)}{P}$
0	1,5225	+ 0,0723	— 0,2728	1,3220
0,1	1,3798	0,1594	— 0,2163	1,3229
0,2	1,2296	0,2624	— 0,1641	1,3279
0,3	1,0712	0,3791	— 0,1179	1,3324
0,4	0,9081	0,5070	— 0,0790	1,3361
0,5	0,7425	0,6431	— 0,0483	1,3373

Имѣя эту таблицу, нетрудно уже найти величины  $y$  при  $P = 10\ 000$  и  $K = 10\ 000$ ,  $K = 20\ 000$ ,  $K = 30\ 000$  и  $K = 40\ 000$ .

Соответствующіе результаты приведены въ таблицѣ VII.

**Т а б л и ц а VII**

величина  $y = h$  въ сантиметрахъ.

$K =$ $\delta$	10 000 кил.	20 000 кил.	30 000 кил.	40 000 кил.
0	0,4407	0,2204	0,1468	0,1102
0,1	0,4409	0,2205	0,1469	0,1102
0,2	0,4426	0,2213	0,1475	0,1106
0,3	0,4441	0,2221	0,1480	0,1110
0,4	0,4454	0,2227	0,1485	0,1114
0,5	0,4458	0,2229	0,1486	0,1115
0,6	0,4454	0,2227	0,1485	0,1114
0,7	0,4441	0,2221	0,1480	0,1110
0,8	0,4426	0,2213	0,1475	0,1106
0,9	0,4409	0,2205	0,1469	0,1102
1,0	0,4407	0,2204	0,1468	0,1102

Изъ этой таблицы ясно обнаруживается, что у рельса, опирающагося на 6 одинаково упругихъ опоръ, обертывающая послѣдовательные прогибы нагруженнаго пролета очень мало отстываетъ отъ прямой линіи. Наиболѣе понижающаяся средняя точка (при  $\delta = 0,5$ ) опускается ниже крайнихъ точекъ (при  $\delta = 0$  и  $\delta = 1$ ) всего на

$$0,4458 - 0,4407 = 0,0051 \text{ сант.} = 0,051 \text{ миллим.}$$

это при  $K = 10\,000$  килогр.; а при  $K = 20\,000$  пониженіе оказывается всего

$$0,2229 - 0,2204 = 0,0025 \text{ сант.} = 0,025 \text{ миллим.}$$

Эти величины всегда значительно меньше неизбежныхъ выпуклостей и впадинъ на рельсахъ и колесныхъ шинахъ.

Эта замѣтка, имѣющая, повидимому, характеръ по преимуществу теоретическій, не лишена чисто практическаго интереса. Въ дѣйствительности рельсы поддерживаются не только болѣе, чѣмъ четырьмя или даже шестью шпалами, но, благодаря своему вѣсу, связямъ съ тяжелыми шпалами и, особенно, вліянію многихъ колесъ, находятся въ состояніи нѣкотораго закрѣпленія на концахъ. Всѣ эти обстоятельства вліяютъ на изгибы нагруженнаго пролета, ослабляя его кривизну, и даютъ право ожидать, что дѣйствительныя различія въ пониженіяхъ точекъ рельса надъ шпалами и въ срединѣ пролета должны быть еще менѣ приведенныхъ въ таблицѣ IV.

**Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій и  $y = h$  при  $A=1$ .**

§ 23.

При  $A = 1$  слѣдуетъ разрѣшить уравненія:

$$\begin{aligned} 6 K (y=h) &= - [144 - 80 (2 + \delta) + 15 (2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] Y' = - M' Y' \\ & - [34 - 42 (2 + \delta) + 12 (2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] Y = - M Y \\ & - [27 - 27 (2 + \delta) + 9 (2 + \delta)^2 - (2 + \delta)^3] K = - N R \end{aligned}$$

и для опредѣленія силъ  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  надо разрѣшить шесть слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned} 12 Y' - 11 Y + 6 R &= 0 \\ 36 Y' - 10 Y + R + 6 Q &= \delta^3 P \\ 78 Y' + 3 Y + 8 R + Q + 6 X &= (1 + \delta)^3 P \\ 144 Y' + 34 Y + 27 R + 8 Q + X + 6 X' &= (2 + \delta)^3 P \\ 5 Y' + 4 Y + 3 R + 2 Q + X &= (2 + \delta) P \\ Y + 2 R + 3 Q + 4 X + 5 X' &= (3 - \delta) P \end{aligned}$$

Рѣшеніе этихъ уравненій доставляетъ

$$\begin{aligned} Y' &= [-0,042883 + 0,029184 \delta + 0,039309 \delta^2 + 0,017272 \delta^3] P \\ Y &= [0,099639 + 0,125284 \delta + 0,039099 \delta^2 - 0,010721 \delta^3] P \\ R &= [0,268438 + 0,171319 \delta - 0,006937 \delta^2 - 0,054199 \delta^3] P \end{aligned}$$

Вставляя въ выраженія  $M'$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Y'$ ,  $Y$  и  $R$  величины  $\delta$  въ десятыхъ доляхъ отъ  $\delta = 0$  до  $\delta = 0,5$ , получается таблица VIII.

**Т а б л и ц а VIII.**

$\delta$	$M'$	$M$	$N$	$\frac{Y'}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{R}{P}$	$y \frac{K}{P} = h \frac{K}{P}$ сантим.
0	36	-10	1	-0,042883	0,099639	0,268438	0,378623
0,1	32,889	-10,541	0,729	-0,039555	0,112547	0,285447	0,379865
0,2	29,952	-10,968	0,512	-0,035336	0,126174	0,301991	0,381273
0,3	27,183	-11,287	0,343	-0,030124	0,140454	0,317747	0,382530
0,4	24,576	-11,504	0,216	-0,023815	0,155320	0,332387	0,383380
0,5	22,125	-11,625	0,125	-0,016305	0,170716	0,345585	0,383687

и шесть уравнений:

$$\begin{aligned} 18 Y' - 23 Y + 12 R &= 0 \\ 48 Y' - 28 Y + R + 12 Q &= \delta^3 P \\ 96 Y' - 21 Y + 8 R + Q + 12 X &= (1 + \delta)^3 P \\ 168 Y' + 4 Y + 27 R + 8 Q + X + 12 X' &= (2 + \delta)^3 P \\ 5 Y' + 4 Y + 3 R + 2 Q + X &= (2 + \delta) P \\ Y + 2 R + 3 Q + 4 X + 5 X' &= (3 - \delta) P \end{aligned}$$

Эти послѣднія шесть уравнений даютъ

$$\begin{aligned} Y' &= [-0,016452 + 0,063791 \delta + 0,038887 \delta^2 + 0,009932 \delta^3] P \\ Y &= [0,114521 + 0,111189 \delta + 0,019788 \delta^2 - 0,001452 \delta^3] P \\ R &= [0,244178 + 0,117425 \delta - 0,020404 \delta^2 - 0,017681 \delta^3] P \end{aligned}$$

При посредствѣ этихъ уравнений составлена таблица X.

**Таблица X.**

$\delta$	$M'$	$M$	$N$	$\frac{Y'}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{R}{P}$	$y \frac{K}{P} = h \frac{K}{P}$ сантим.
0	48	-28	1	-0,016453	0,114521	0,244178	0,31268
0,1	44,299	-27,941	0,729	-0,009675	0,125822	0,255699	0,31316
0,2	40,752	-27,768	0,512	-0,002059	0,137539	0,266705	0,31388
0,3	37,383	-27,487	0,343	+0,006453	0,149620	0,279091	0,31464
0,4	34,176	-27,104	0,216	+0,015922	0,162070	0,286752	0,31547
0,5	31,125	-26,625	0,125	+0,026407	0,174881	0,295579	0,31645

**Сравненіе ординатъ  $y = h$  соответствующихъ 4 и 6 опорамъ.**

§ 26.

Величины  $h$  пониженій рельса въ точкахъ прикосновенія колеса съ рельсомъ при помѣщеніи его на 4 или 6 равно упругихъ и равно отстоящихъ опоръ при разныхъ величинахъ  $A$ , въ случаяхъ, когда  $K = 10.000$  и  $P = 10.000$  килогр., на основаніи таблицъ I, VII, VIII, IX и X приведены къ слѣдующей таб. XI.



Эта таблица XI указываетъ, что общее пониженіе пролета непосредственно поддерживающаго нагрузку колеса уменьшается по мѣрѣ увеличенія числа  $A$ .

При четырехъ опорахъ, поддерживающихъ рельсъ, при  $A = 0,5$ ,  $y_{i=0} = 0,4544$ , а при  $A = 2$ ,  $y_{i=0} = 0,3490$ .

Разница пониженій  $0,4544 - 0,3490 = 0,1054$  сантиметра, величина замѣтная.

При 6 опорахъ, поддерживающихъ рельсъ, при  $A = 0,5$ ,  $y_{i=0} = 0,4407$  а при  $A = 2$ ,  $y_{i=0} = 0,3127$ . Разница пониженій  $0,4407 - 0,3127 = 0,1280$ . Эта величина еще болѣе замѣтна. Такія величины на путяхъ могутъ быть наблюдаемы при употребленіи измѣрительныхъ приборовъ, не отличающихся даже особою точностью.

Но отклоненія линіи прогиба отъ прямой линіи, что собственно и вызываетъ проявленіе силы инерціи колеса и измѣненіе вертикальнаго давленія колеса на рельсъ, то эти отклоненія при 4 и 6 опорахъ различаются значительно менѣе.

Такъ при $A = 0,5$ ,	при 4 опорахъ,	отклоненіе $h_5 - h_0 = 0,0100$	сант.	
„ „ „ „	6 „ „	„ „	0,0050 „	
				Разница . . 0,0050 сант.
„ при $A = 1$ ,	при 4 опорахъ,	отклоненіе $h_5 - h_0 = 0,0098$	сант.	
„ „ „ „	6 „ „	„ „	0,0051 „	
				Разница . . 0,0047 сант.
„ при $A = 1,5$ ,	при 4 опорахъ,	отклоненіе $h_5 - h_0 = 0,0200$	сант.	
„ „ „ „	6 „ „	„ „	0,0374 „	
				Разница . . 0,0174 сант.
„ при $A = 2$ ,	при 4 опорахъ,	отклоненіе $h_5 - h_0 = 0,0204$	сант.	
„ „ „ „	6 „ „	„ „	0,0038 „	
				Разница . . 0,0242 сант.

При  $A = 0,5$  и  $A = 1$ , разницы отклоненій выражаютъ сотыми долями миллиметра, т. е. такими величинами, которыя на путяхъ едва ли могутъ быть наблюдаемы.

При  $A = 1,5$  и  $A = 2$ , разницы достигались  $\frac{1}{5}$  и  $\frac{1}{4}$  миллиметра, могли-бы быть опредѣляемы, но эти величины относятся къ одной средней точкѣ пролета и въ другихъ точкахъ разницы менѣе значительны и потому труднѣе наблюдаемы; поэтому

при изученіи вліянія катящагося колеса не будетъ большой разницы въ получаемыхъ результатахъ, соотвѣствующихъ предположеніямъ, что рельсъ поддерживается 4 или 6 упругими опорами.

Вѣрность этого предположенія подтверждается динамически таб. VIII и таб. XXV. Въ таблицѣ VIII вычисленія сдѣланы въ предположеніи, что рельсъ поддерживается 4 упругими опорами, а въ таб. XXV—что онъ поддерживается 6 упругими опорами.

Траекторіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, какъ видно на графической таблицѣ, относящейся къ колесу съ плоскимъ мѣстомъ глубиною въ 0,2 сантиметра и къ поступательной, скорости колеса въ 75 верстъ, представляютъ волнистыя линіи очень близко расположенныя одна къ другой. Та же графическая таблица указываетъ, что и отношеніе динамическаго давленія колеса на рельсъ очень мало отличается отъ статическаго давленія, которое бы изъ двухъ предположеній ни было принято.

Наибольшее отношеніе динамическаго давленія къ статическому оказалось, при 4 опорахъ 2.20

„ 6 „ 2.26.

Второе больше перваго, но разница меньше чѣмъ на 3%.

Для колеса съ плоскимъ мѣстомъ, углубленнымъ на 0,4 сантиметра, наибольшее отношеніе динамическаго давленія къ статическому оказалось

при 75 верстахъ и 4 опорахъ  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max}$  3.098

„ „ „ „ 6 опорахъ  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max}$  3.283

Разница 6%.

Вмѣстѣ съ тѣмъ обнаружилось, что увеличеніе глубины плоскаго мѣста съ 0,2 до 0,4 сантим. увеличиваетъ отношеніе динамическаго давленія къ статическому, при допущеніи, что число упругихъ

опоръ 4, съ  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max} = 2,20$  до  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max} = 3,098$  или на 41%

„ 6, „  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max} = 2,26$  „  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\max} = 3,283$  „ „ 45%

Оба расчета указываютъ огромное вліяніе увеличеній глубины впадины.

Къ подобнымъ же заключеніямъ приводятъ динамическія таблицы IX и XIV. Въ этихъ двухъ таблицахъ приведены вычи-

сленія, относящіяся къ очень сильнымъ рельсамъ ( $I = 2160$  сант.<sup>4</sup>) къ очень сближеннымъ шпаламъ (60 сант.) при поступательной скорости колеса 75 верстъ въ часъ, при глубинѣ плоскаго мѣста въ 0,2 сантим., динамическая таблица XIX относится къ 4 опорамъ и динамическая таб. XXIV—къ 6 опорамъ.

При 4 опорахъ уклоненіе отъ прямой линіи, проходящей горизонтально черезъ точку прикосновенія колеса съ рельсомъ надъ первую опору, вверхъ самое большое равно  $0,3490 - 0,0843 = 0,2647$  сант. и внизъ  $0,6189 - 0,3490 = 0,2699$  и уклоненіе динамическаго давленія колеса отъ статическаго измѣняется отъ  $\left(\frac{y}{h}\right) = 0,2503$  до  $\left(\frac{y}{h}\right) = 1,876$ .

При 6 опорахъ и впадинѣ глубиною 0,4 уклоненіе отъ вышеупомянутой прямой вверхъ равно  $0,3127 - 0,0730 = 0,2397$  и внизъ  $0,5840 - 0,3127 = 0,2713$ , а уклоненіе динамическаго давленія отъ статическаго измѣняется отъ  $\left(\frac{y}{h}\right) = 0,2317$  до  $\left(\frac{y}{h}\right) = 1,8451$ .

Различіе между найденными двумя наибольшими отклоненіями, между 1,876 и 1,845, меньше 2%. Небольшая разница между величинами отношеній динамическихъ давленій къ статическимъ, опредѣленнымъ, съ одной стороны, въ предположеніи, что рельсъ опирается на 4 упругія опоры, а съ другой стороны, что онъ опирается на 6 упругихъ опоръ, устраняетъ необходимость дѣлать расчеты, относящіяся, какъ къ тому, такъ и къ другому предположенію, и позволяетъ ограничиваться которымъ нибудь однимъ расчетомъ.

Большая часть расчетовъ относится къ предположенію, что число опоръ равно 4. Это предположеніе принято потому, что при малыхъ величинахъ  $A$  трудно допустить, что рельсъ изгибается, какъ балка опирающаяся на 6 опоръ. Изъ приведенныхъ выше таблицъ, указывающихъ отношенія силъ, дѣйствующихъ на рельсъ со стороны опоръ, къ полной нагрузкѣ рельса, видно, что при 6 опорахъ, дѣйствіе крайнихъ опоръ выражается, хотя и не очень значительными, но отрицательными величинами.

Поэтому можно сказать, что, при хорошо уложенныхъ рельсахъ на хорошо подбитыхъ шпалахъ и хорошо обточенныхъ и центрированныхъ колесахъ, скорости поступательнаго движенія, даже и очень большія, не вызываютъ существеннаго увеличенія напряженій въ рельсахъ. Другими словами говоря, можно сказать, что при расчетахъ рельсовъ можно было бы совершенно не принимать во вниманіе скорости движенія поѣздовъ, если путь, самъ по себѣ, былъ вполне хорошъ и колеса вполне правильны.

Напротивъ, на пути неудовлетворительномъ, при колесахъ сильно изношенныхъ, при большихъ скоростяхъ наибольшія напряженія въ рельсахъ вызываются неправильностями формъ рельсовъ и особенно колесъ плоскими мѣстами этихъ послѣднихъ.

**в) Опредѣленіе линіи обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной нагрузки въ разныхъ точкахъ средняго пролета, при 6 равно-отстоящихъ и 5 равно-упругихъ опорахъ, когда шестая опора дѣйствуетъ неправильно.**

**Опредѣленіе пролета, подлежащаго изученію.**

§ 27.

На основаніи изложеннаго § 22 относительно опредѣленія геометрическаго мѣста точекъ прикосновенія спокойно дѣйствующей нагрузки съ рельсомъ, лежащимъ на шести опорахъ, извѣстно, что при помѣщеніи нагрузки въ пролетѣ III-мъ шпалы 1 и 6 нагружаются только въ двухъ случаяхъ: шпала 1 во время помѣщенія нагрузки надъ шпалою 3 и шпала 6—при помѣщеніи нагрузки надъ шпалою 4; при всѣхъ другихъ положеніяхъ нагрузки, не очень близкихъ къ шпаламъ 3 и 4, шпалы 1 и 6 не нагружаются, таб. IV<sup>а</sup>, напротивъ, удерживаютъ рельсъ на его мѣстѣ дѣйствіемъ своего вѣса при содѣйствіи собственнаго вѣса рельса. Изъ этого слѣдуетъ, что осадка шпалы 6-й не вызоветъ никакого измѣненія въ изгибахъ рельса въ пролетѣ III-мъ, пока нагрузка не подойдетъ близко къ шпалѣ 4-ой; но, когда нагрузка приблизится къ шпалѣ 4-ой настолько, что шпала 6-ая, при правильномъ ея положеніи, начала бы уже принимать на себя часть нагрузки, тогда при осадкѣ шпалы 6-ой весь непринимаемый ею грузъ ляжетъ на шпалы 4-ю и 5-ю. Въ этомъ случаѣ обѣ эти шпалы погрузятся нѣсколько болѣе, чѣмъ въ случаѣ правильнаго положенія шпалы 6-ой. Геометрическое мѣсто точекъ пролета III-го нѣсколько измѣнится, и правая часть его понизится. При переходѣ нагрузки въ пролетъ IV, шпалы, принимающія нагрузку, будутъ 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Участіе каждой изъ этихъ шпалъ можетъ быть опредѣлено помощью уравненій, данныхъ въ случаѣ опоры на 6 шпалъ § 21. Если осадка шпалы 6-ой обозначена черезъ  $\alpha$ , то соотвѣтствующая ей сила  $Y$  опредѣлится уравненіемъ

$$- Y = - K_{VI} (y_{VI} - \alpha).$$

Если же осадка  $\alpha$  такъ велика, что рельсъ вовсе не ложится на шпалу 6-ю во все время помѣщенія нагрузки въ пролетѣ IV, тогда надо опредѣлить распредѣленіе нагрузки между шпалами 2, 3, 4, 5 и 7, считая  $Y=0$ . Въ обоихъ этихъ случаяхъ геометрическое мѣсто точекъ приложенія нагрузки въ пролетѣ IV можетъ быть опредѣлено вычислениями, подобными приведеннымъ въ случаѣ опоры на 6 шпаль, § 21.

При переходѣ нагрузки въ пролетѣ V, нагрузка размѣстится на шпалахъ 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

Прогибъ пролета V опредѣляется изъ уравненій, уже упомянутыхъ, съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы сила  $R$  была опредѣлена уравненіемъ

$$-R = -K_{III} (y_{III} - \alpha).$$

Дальнѣйшее движеніе нагрузки въ пролетахъ VI, VII и VIII вызываетъ такіе ихъ изгибы, которые будутъ симметричны съ изгибами пролетовъ V, IV и III. Изъ сказаннаго ясно, что достаточно изучить первые три пролета, чтобы, составивъ для нихъ таблицу, можно было написать таблицу, относящуюся къ послѣднимъ тремъ пролетамъ; для этого достаточно переписать найденныя уже числа, но поставить ихъ только въ обратномъ порядкѣ.

Въ приводимомъ далѣе расчетѣ принимается, что осадка шпалы 4 почти достигла полнаго погруженія хорошо подбитыхъ шпаль, при помѣщеніи нагрузки надъ самою шпалою. Принято, поэтому, что  $\alpha=0,4$  сантиметра. Полное же погруженіе шпаль, при  $A=0,5$ , было опредѣлено въ 0,4407 сантиметра.

### Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій.

**Формы изогнутой оси рельса подѣ дѣйствіемъ спокойной нагрузки, въ предположеніи, что одна изъ 6-ти шпаль погружается безъ сопротивленія на 0,4 сантиметра.**

#### § 28.

Такъ какъ при  $A=0,5$  рельсъ, лежащій на 6-ти шпалахъ, стремится поднимать наиболѣе отдаленную отъ приложенія нагрузки шпалу, то, какъ замѣчено выше, достаточно разсмотрѣть случаи, когда мало поддерживаемыя шпалы занимаютъ положенія, соотвѣтствующія ординатамъ:  $y_{IV}$ ,  $y_{III}$ ,  $y_{II}$  и  $y_I$ .

Если поддерживающія рельсъ силы, согласно принятымъ въ § 20 обозначеніямъ, будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$X' = K_I' y_I'; \quad X = K_I y_I; \quad Q = K_{II} y_{II}; \quad R = K_{III} y_{III}; \quad Y = K_{IV} (y_{IV} - 0,4) \text{ и} \\ Y' = K_{IV}' y_{IV}' \dots \dots \dots (3')$$

то приведенныя тамъ же уравненія отъ (38) по (41) примутъ видъ

$$\frac{EJ}{K_{III} L^3} R - 2 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y - 2 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} 0,4 k_{IV} + \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{6}{6} Y' + \frac{1}{6} Y = 0 \quad \dots (38')$$

$$\frac{EJ}{K_{II} L^3} Q - 3 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y - 3 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} 0,4 k_{IV} + 2 \frac{LJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{24}{6} Y' + \frac{8}{6} Y + \frac{1}{6} R = \frac{\delta^3}{6} P \quad \dots (39')$$

$$\frac{EJ}{K_I L^3} X - 4 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y - 4 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} 0,4 k_{IV} + 3 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{60}{6} Y + \frac{27}{6} Y + \frac{8}{6} R + \frac{1}{6} Q = \frac{1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3}{6} P \quad \dots (40')$$

$$\frac{EJ}{K'_I L^3} X' - 5 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y - 5 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} 0,4 k_{IV} + 4 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{120}{6} Y' + \frac{64}{6} Y + \frac{27}{6} R + \frac{8}{6} Q + \frac{1}{6} X = \frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} P \quad \dots (41')$$

Предполагая, что

$$\frac{EJ}{K'_I L^3} = \frac{EJ}{K_I L^3} = \frac{EJ}{K_{II} L^3} = \frac{EJ}{K_{III} L^3} = \frac{EJ}{K_{IV} L^3} = \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} = A = 0,5 \text{ и } K = P \quad (1)$$

получимъ слѣдующія четыре уравненія

$$\begin{aligned} 9Y' - 5Y + 3R &= 2,4P \\ 30Y' - Y + R + 3Q &= (3,6 + \delta^3)P \\ 69Y' + 15Y + 8R + Q + 3X &= (5,8 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3)P \\ 132Y' + 49Y + 27R + 8Q + X + 3X' &= (14 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3)P \\ \left. \begin{aligned} 5Y' &= (2 + \delta)P - X - 2Q - 3R - 4Y \\ 5X' &= (3 - \delta)P - 4X - 3Q - 2R - Y \end{aligned} \right\} \quad \dots (2). \end{aligned}$$

Разрѣшая эти уравненія, найдемъ слѣдующія шесть отношеній:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{P} &= -0,01149 + 0,00138\delta + 0,09470\delta^2 - 0,02622\delta^3 \\ \frac{X'}{P} &= 0,26111 - 0,40347\delta + 0,04906\delta^2 + 0,01104\delta^3 \\ \frac{Q}{P} &= 0,46963 - 0,00089\delta - 0,26515\delta^2 + 0,09811\delta^3 \\ \frac{R}{P} &= 0,37869 + 0,23674\delta + 0,02910\delta^2 - 0,09806\delta^3 \\ \frac{Y}{P} &= -0,15324 + 0,13617\delta + 0,06749\delta^2 - 0,01129\delta^3 \\ \frac{L'}{P} &= 0,05531 + 0,03007\delta + 0,02480\delta^2 + 0,02641\delta^3 \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

Когда силы, поддерживающія рельсъ, выразятся формулами:

$$X' = K'_I y'_I; \quad X = K_I y_I; \quad Q = K_{II} y_{II}; \quad R = K_{III} (y_{III} - 0,4); \quad Y = K_{IV} y_{IV} \text{ и} \\ Y' = K'_{IV} y'_{IV} \dots \dots \dots (3'')$$

тогда уравненія (38) по (41) примутъ видъ:

$$\frac{EJ}{K_{II} L^3} Q + \frac{EJ}{K_{III} L^3} 0,4 k - 2 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y + \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{6}{6} Y' + \frac{1}{6} Y = 0 \dots (38'')$$

$$\frac{EJ}{K_{II} L^3} Q - 3 \frac{EJ}{K_{IV} L^3} Y + 2 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{24}{6} Y' + \frac{8}{6} Y + \frac{1}{6} R + \frac{\delta^3}{6} P \dots (39'')$$

$$\frac{EJ}{K'_I L^3} X - 4 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y + 3 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{60}{6} Y' + \frac{27}{6} Y + \frac{8}{6} R + \frac{1}{6} Q = \\ = \frac{1 + 3 \delta + 3 \delta^2 + \delta^3}{6} P \dots \dots \dots (40'')$$

$$\frac{EJ}{K'_I L^3} X' - 5 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y + 4 \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} Y' + \frac{120}{6} Y' + \frac{64}{6} Y + \frac{27}{6} R + \frac{8}{6} Q + \\ + \frac{1}{6} X = \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P \dots \dots \dots (41'')$$

При удовлетвореніи условій, выраженныхъ группою уравненій (1), получимъ:

$$9 \frac{Y'}{P} - 5 \frac{Y}{P} + 3 \frac{R}{P} = -1,2$$

$$30 \frac{Y'}{P} - \frac{Y}{P} + \frac{R}{P} + 3 \frac{Q}{P} = \delta^3$$

$$60 \frac{Y'}{P} + 15 \frac{Y}{P} + 8 \frac{R}{P} + \frac{Q}{P} + 3 \frac{X}{P} = 1 + 3 \delta + 3 \delta^2 + \delta^3$$

$$132 \frac{Y'}{P} + 49 \frac{Y}{P} + 27 \frac{R}{P} + 8 \frac{Q}{P} + \frac{X}{P} + 3 \frac{X'}{P} = 8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3$$

къ которымъ слѣдуетъ присоединить еще два слѣдующія:

$$5 \frac{Y'}{P} = 2 + \delta - \frac{X}{P} + 2 \frac{Q}{P} + 3 \frac{R}{P} - 4 \frac{Y}{P}$$

$$5 \frac{X'}{P} = 3 - \delta - 4 \frac{X}{P} - 3 \frac{Q}{P} - 2 \frac{R}{P} - \frac{Y}{P}$$

Рѣшеніе этихъ шести уравненій приводитъ къ слѣдующимъ опредѣленіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{P} &= -0,01468 - 0,13196 \delta + 0,10964 \delta^2 - 0,15662 \delta^3 \\ \frac{X}{P} &= 0,28596 - 0,23680 \delta + 0,02988 \delta^2 + 0,17353 \delta^3 \\ \frac{Q}{P} &= 0,54981 - 0,00089 \delta - 0,26515 \delta^2 + 0,09811 \delta^3 \\ \frac{R}{P} &= 0,05054 + 0,23674 \delta + 0,02990 \delta^2 - 0,09726 \delta^3 \\ \frac{Y}{P} &= 0,17907 + 0,13617 \delta + 0,06795 \delta^2 - 0,01083 \delta^3 \\ \frac{Y'}{P} &= -0,05070 - 0,00326 \delta + 0,02786 \delta^2 - 0,00693 \delta^3 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Когда силы, поддерживающія рельсъ, опредѣляются уравненіями:

$$\begin{aligned} X' = K'_1 y'_1; \quad X = K_1 y_1; \quad Q = K_{II} (y_{II} - 0,4); \quad R = K_{III} y_{III}; \quad Y = K_{IV} y_{IV} \text{ и} \\ Y' = K'_{IV} y'_{IV} \dots \dots \dots (3''') \end{aligned}$$

тогда отношенія, подобныя вышеприведеннымъ, получатся изъ уравненій группы (4) простымъ помѣщеніемъ вторыхъ частей въ обратномъ порядкѣ, т. е. шестую строку написавъ первую, пятую—вторую, четвертую—третьею и т. д. и сверхъ того замѣнивъ  $\delta$  разностью  $1 - \delta$ .

Когда же силы, поддерживающія рельсъ, выразятся уравненіями

$$\begin{aligned} X' = K'_1 y'_1; \quad X = K_1 y_1; \quad Q = K_{II} y_{II}; \quad R = K_{III} y_{III}; \quad Y = K_{IV} (y_{IV} - 0,4) \text{ и} \\ Y' = K'_{IV} y'_{IV} \dots \dots \dots (3''') \end{aligned}$$

тогда отношенія этихъ силъ къ  $P$  получимъ изъ группы уравненій (3), опять написавъ вторыя части уравненій въ обратномъ порядкѣ и замѣнивъ  $\delta$  на  $1 - \delta$ .

Отношенія силъ  $X'$ ,  $X$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $Y$  и  $Y'$  къ нагрузкѣ  $P$  при  $K = P$ , въ случаѣ  $Y = K_{IV} (y_{IV} - 0,4)$ , вычисленныя по уравненіямъ группы (3), приведены въ слѣдующей таблицѣ I.

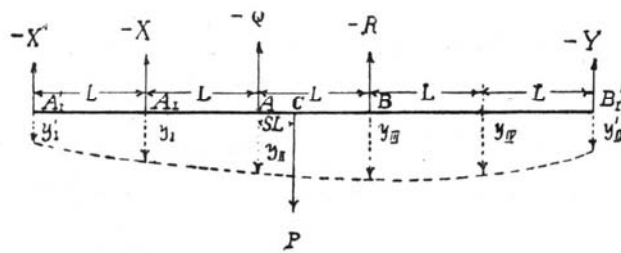
Т а б л и ц а I.

Относящаяся къ случаю, когда  $Y = K_{IV} (y_{IV} - 0,4)$ ;  $A = 0, 5$ ;  $K = P$ .

$\delta$	$\frac{X'}{P}$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{Y'}{P}$
0	-0,01149	0,26111	0,46963	0,37869	-0,15324	0,05531
0,1	-0,01067	0,22127	0,46699	0,40256	-0,13896	0,05858
0,2	-0,00515	0,18247	0,45963	0,42642	-0,12340	0,06253
0,3	0,00047	0,14478	0,44815	0,44968	-0,10662	0,06664
0,4	0,00751	0,10828	0,43013	0,47177	-0,08870	0,07300
0,5	0,01581	0,07302	0,41516	0,49208	-0,06970	0,07985
0,6	0,02522	0,03908	0,39483	0,51003	-0,04968	0,08699
0,7	0,03558	0,00651	0,37274	0,52503	-0,02872	0,09827
0,8	0,04673	-0,02462	0,34945	0,53650	-0,00689	0,10876
0,9	0,05852	-0,05423	0,32558	0,54384	-0,01575	0,12171

Эта таблица съ отрицательными величинами  $Y$ , достигающими до 1500 килограммовъ, чего не можетъ дать вѣсъ самаго рельса вмѣстѣ съ полушпалюю, показываетъ, что силу  $Y$  нельзя выразить принятою формулою  $Y = K_{IV} (y_{IV} - 0,4)$ . Очевидно, что  $y_{IV}$  не достигаетъ величины 0,4 смт. и что, слѣдовательно, въ этомъ мѣстѣ рельсъ вовсе не поддерживается шпалюю. При такихъ обстоятельствахъ рельсъ лежитъ всего на пяти шпалахъ.

Для опредѣленія силъ, проявляющихся въ мѣстахъ соприкосновенія рельса съ этими пятью шпалами, необходимо особо изслѣдовать форму изогнутой оси рельса, подобно тому, какъ было сдѣлано въ случаѣ съ 6-ю шпалами.



Фиг. 3.

На фиг. 3 представлено схематическое изображеніе рельса и его опоръ. На ней обозначены силы и ординаты перемѣщенія точекъ опоры, когда рельсъ, подъ дѣйствіемъ груза  $P$ , приложеннаго на разстояніи  $SL$  отъ опоры  $A$ , и подъ дѣйствіемъ опор-

ныхъ сопротивленій, придетъ къ равновѣсію, при чемъ будутъ удовлетворены два уравненія статики твердыхъ тѣлъ:

$$-X' - X - Q - R - Y' + P = 0$$

$$X'(2 + \epsilon)L + X(1 + \epsilon)L + Q\epsilon L - R(1 - \epsilon)L - Y'(3 - \epsilon) = 0$$

или

$$5X' = (3 - \epsilon)P - 4X - 3Q - 2R \dots \dots \dots (1)$$

$$5Y' = (2 + \epsilon)P - X - 2Q - 3R \dots \dots \dots (2)$$

Принимая опять обозначенія § 21 и сохраняя ту же нумерацію уравненій, найдемъ, что:

$$-X' = -K_1' y'; -X = -K_1 y; -Q = -K_{II} y_{II}; -R = -K_{III} y_{III} \text{ и} \\ -Y' = -K_{IV}' y_{IV}' \dots \dots \dots (3)$$

и уравненія, опредѣляющія форму изогнутой оси, примутъ слѣдующій видъ:

для части рельса  $B B'$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \dots \dots \dots (4)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \dots \dots \dots (5)$$

для части  $CB$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - R(3L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_5 \dots \dots \dots (8)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_5 x + C_6 \dots \dots (9)$$

для части  $AC$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - R (3L - x) + P [(2 + \epsilon)L - x]$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \\ + P \left[ (2 + \epsilon)Lx - \frac{x^2}{2} \right] + C_4 \dots \dots (10)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + \\ + P \left[ \frac{(6 + 3\epsilon)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right] + C_7 x + C_8 \dots \dots (11)$$

для части  $A_1 A$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - R (3L - x) + P [(2 + \nu)L - x] - Q (2L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + P \left( (2 + \nu)Lx - \frac{x^2}{2} \right) - \\ - Q \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_9 \dots \dots \dots (12)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left[ \frac{(6 + 3\nu)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right] - \\ - Q \left( \frac{6Lx}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_9 x + C_{10} \dots \dots \dots (13)$$

и для части  $A_1' A$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Y' (5L - x) - R (3L - x) + P [(2 + \nu)L - x] - \\ - Q (2L - x) - X (L - x)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -Y' \left( 5Lx - \frac{x^2}{2} \right) - R \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + P \left( (2 + \nu)Lx - \frac{x^2}{2} \right) - \\ - Q \left( 2Lx - \frac{x^2}{2} \right) - X \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_{11} \dots \dots \dots (14)$$

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + P \left[ \frac{(6 + 3\nu)Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right] - \\ - Q \left( \frac{6Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - X \left( \frac{3Lx^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_{11} x + C_{12} \dots \dots (15)$$

Десять произвольныхъ постоянныхъ, явившихся при интегрированіяхъ и вошедшихъ въ уравненія отъ (4) до (15), вмѣстѣ съ пятью неизвѣстными силами, требуютъ для своего опредѣленія пятнадцати уравненій. Въ число ихъ входятъ семь уравненій (1), (2) и группа (3) и въ дополненіе къ нимъ могутъ быть написаны еще восемь условныхъ уравненій, получаемыхъ изъ обстоятельствъ изгиба оси въ соответствующихъ точкахъ  $A_1, A, C$  и  $B$ .

При  $x=3$  изъ уравненій (4) и (8) и изъ уравненій (5) и (9) находимъ:

$$C_1 = -\frac{27}{6}RL^2 + C_5 \dots \dots \dots (16)$$

$$C_2 = \frac{27}{6}RL^3 + C_6 \dots \dots \dots (17)$$

При  $x = (2 + \delta) L$ , изъ уравненій (8) и (10) и затѣмъ изъ (9) и (11):

$$C_5 = \frac{12 + 12\delta + 3\delta^2}{6} PL^2 + C_7 \dots \dots \dots (20)$$

$$C_6 = -\frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} PL^3 + C_8 \dots \dots \dots (21)$$

При  $x = 2L$  изъ уравненій (10) и (12) и затѣмъ изъ (11) и (13) находимъ:

$$C_7 = -\frac{12}{6} QL^2 + C_9 \dots \dots \dots (22)$$

$$C_8 = -\frac{8}{6} QL^3 + C_{10} \dots \dots \dots (23)$$

Наконецъ, при  $x = L$  изъ уравненій (12) и (14) и потомъ изъ (13) и (15) находимъ, что:

$$C_9 = -\frac{3}{6} XL^2 + C_{11} \dots \dots \dots (24)$$

$$C_{10} = \frac{1}{6} XL^3 + C_{12} \dots \dots \dots (25)$$

Формулы для величинъ  $C_1$  до  $C_{12}$  удобнѣе выразить въ зависимости отъ ординатъ точекъ  $B'_1$  и  $B$ , послѣ ихъ перемѣщенія на величины  $y'_{iv}$  и  $y_{in}$ . Эти ординаты опредѣляются изъ уравненія (5), подставляя въ него  $x = 5L$  и  $x = 3L$ . Такимъ образомъ получимъ:

$$C_1 = \frac{71}{6} Y' L^2 - \frac{3 EJ}{6 L} y_{in} + \frac{3 EJ}{6 L} y'_{iv} \dots \dots \dots (26)$$

$$C_2 = -\frac{105}{6} Y' L^3 + \frac{15}{6} EJ y_{in} - \frac{9}{6} EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (27)$$

$$C_5 = \frac{71}{6} Y' L^2 + \frac{27}{6} RL^2 - \frac{3 EJ}{6 L} y_{in} + \frac{3 EJ}{6 L} y'_{iv} \dots \dots \dots (30)$$

$$C_6 = -\frac{105}{6} Y' L^3 - \frac{27}{6} RL^3 + \frac{15}{6} EJ y_{in} - \frac{9}{6} EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (31)$$

$$C_7 = \frac{71}{6} Y' L^2 + \frac{27}{6} RL^2 - \frac{12 + 12\delta + 3\delta^2}{6} PL^2 - \frac{3 EJ}{6 L} y_{in} + \frac{3 EJ}{6 L} y'_{iv} \dots \dots \dots (32)$$

$$C_8 = -\frac{105}{6} Y' L^3 - \frac{27}{6} RL^3 + \frac{8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3}{6} PL^3 + \frac{15}{6} EJ y_{in} - \frac{9}{6} EJ y'_{iv} \dots \dots \dots (33)$$

$$C_9 = \frac{71}{6} Y' L^2 + \frac{27}{6} R L^2 + \frac{12}{6} Q L^2 - \frac{12 + 12 \delta + 3 \delta^2}{6} P L^2 - \frac{3 EJ}{6 L} y_{III} + \frac{3 EJ}{6 L} y'_{IV} \dots \dots \dots (34)$$

$$C_{10} = -\frac{105}{6} Y' L^3 - \frac{27}{6} R L^3 - \frac{8}{6} Q L^3 + \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 + \frac{15}{6} EJ y_{III} - \frac{9}{6} EJ y'_{IV} \dots \dots \dots (35)$$

$$C_{11} = \frac{71}{6} Y' L^2 + \frac{27}{6} R L^2 + \frac{12}{6} Q L^2 + \frac{3}{6} X L^2 - \frac{12 + 12 \delta + 3 \delta^2}{6} P L^2 - \frac{3 EJ}{6 L} y_{III} + \frac{3 EJ}{6 L} y_{IV} \dots \dots \dots (36)$$

$$C_{12} = -\frac{105}{6} Y' L^3 - \frac{27}{6} R L^3 - \frac{8}{6} Q L^3 - \frac{1}{6} X L^3 + \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 + \frac{15}{6} EJ y_{III} - \frac{9}{6} EJ y'_{IV} \dots \dots \dots (37)$$

Вставляя вторья части уравнений (32) и (33) въ уравнение (11) и приравнивая  $x=2L$ , найдемъ  $y_{II}$ .

$$EJ y_{II} = -\frac{15}{6} Y' L^3 + \frac{1}{6} R L^3 + \frac{\delta^3}{6} P L^3 + \frac{9}{6} EJ y_{III} - \frac{3}{6} EJ y'_{IV} \quad (39)$$

Вставляя вторья части уравнений (34) и (35) въ уравнение (13) и приравнивая  $x=L$ , найдемъ  $y_I$ .

$$EJ y_I = -\frac{48}{6} Y' L^3 - \frac{8}{6} R L^3 + \frac{1 + 3 \delta + 3 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 - \frac{1}{6} Q L^3 + \frac{12}{6} EJ y_{III} - \frac{6}{6} EJ y'_{IV} \dots \dots \dots (40)$$

Наконецъ, вставляя вторья части уравнений (36) и (37) въ уравнение (15) и приравнивая  $x=0$ , найдемъ  $y'_I$ .

$$EJ y'_I = -\frac{105}{6} Y' L^3 - \frac{27}{6} R L^3 - \frac{8}{6} Q L^3 - \frac{1}{6} X L^3 + \frac{8 + 12 \delta + 6 \delta^2 + \delta^3}{6} P L^3 + \frac{15}{6} EJ y_{III} - \frac{9}{6} EJ y'_{IV} \dots \dots (41)$$

Если въ уравнения (39)—(41) вмѣсто ординатъ  $y'_I, y_I, y_{II}, y_{III}$  и  $y'_{IV}$  вставимъ соответственныя имъ силы, опредѣляемыя уравненіями группы (3), обозначая вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\frac{EJ}{K'_I L^3} = A'_I; \quad \frac{EJ}{K_I L^3} = A_I; \quad \frac{EJ}{K_{II} L^3} = A_{II}; \quad \frac{EJ}{K_{III} L^3} = A_{III} \quad \text{и} \quad \frac{EJ}{K'_{IV} L^3} = A'_{IV},$$

считая при томъ всѣ величины  $A'_i = A_i = A_{ii} = A_{iii} = A'_{iv} = 0,5$ , то найдемъ слѣдующія три уравненія

$$\begin{aligned} 33 Y' - 7 R + 6 Q &= 2 \delta^3 P \\ 102 Y' + 4 R + 2 Q + 6 X &= 2 (1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3) P \\ 219 Y' + 39 R + 16 Q + 2 X + 6 X' &= 2 (8 + 12\delta + 6\delta^2 + \delta^3) P. \end{aligned}$$

Присоединяя къ этимъ тремъ уравненіямъ еще (1) и (2) и имѣя въ виду, что  $Y=0$ , получимъ всего пять уравненій первой степени относительно  $\frac{Y'}{P}$ ,  $\frac{R}{P}$ ,  $\frac{Q}{P}$ ,  $\frac{X}{P}$  и  $\frac{X'}{P}$ , откуда и можно определить всѣ пять неизвѣстныхъ отношеній.

Группа пяти подлежащихъ разрѣшенію уравненій слѣдующая:

$$\begin{aligned} 33 \frac{Y'}{P} - 7 \frac{R}{P} + 6 \frac{Q}{P} &= 2 \delta^3 \\ 102 \frac{Y'}{P} + 4 \frac{R}{P} + 2 \frac{Q}{P} + 6 \frac{X}{P} &= 2 + 6\delta + 6\delta^2 + 2\delta^3 \\ 219 \frac{Y'}{P} + 39 \frac{R}{P} + 16 \frac{Q}{P} + 2 \frac{X}{P} + 6 \frac{X'}{P} &= 16 + 24\delta + 12\delta^2 + 2\delta^3 \\ 5 \frac{Y'}{P} = 2 + \delta - \frac{X}{P} - 2 \frac{Q}{P} - 3 \frac{R}{P} \\ 5 \frac{X'}{P} = 3 - \delta - 4 \frac{X}{P} - 3 \frac{Q}{P} - 2 \frac{R}{P} \end{aligned}$$

Выключая  $Y'$  и  $X'$  изъ первыхъ трехъ уравненій посредствомъ двухъ послѣднихъ, получаемъ уравненія:

$$\begin{aligned} 134 \frac{R}{P} + 36 \frac{Q}{P} + 33 \frac{X}{P} &= 66 + 33\delta - 10\delta^3 \\ 286 \frac{R}{P} + 194 \frac{Q}{P} - 72 \frac{X}{P} &= 194 + 72\delta - 30\delta^2 - 10\delta^3 \\ 474 \frac{R}{P} + 376 \frac{Q}{P} + 233 \frac{X}{P} &= 376 - 93\delta - 60\delta^2 - 10\delta^3 \end{aligned}$$

Выключая отсюда  $\frac{X}{P}$ , находимъ:

$$\begin{aligned} 7 \frac{R}{P} - 127 \frac{Q}{P} &= -55 + 33\delta^2 - 13\delta^3 \\ 1558 \frac{R}{P} - 402 \frac{Q}{P} &= 297 + 462\delta + 198\delta^2 - 200\delta^3 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{Q}{P} = 0,44998 + 0,01658\delta - 0,25648\delta^2 + 0,09661\delta^3$$

$$\frac{R}{P} = 0,30673 + 0,30081 \varepsilon + 0,06027 \varepsilon^2 - 0,10344 \varepsilon^3$$

$$\frac{X}{P} = 0,26360 - 0,23941 \varepsilon + 0,03507 \varepsilon^2 + 0,01161 \varepsilon^3$$

$$\frac{Y'}{P} = -0,01675 + 0,06076 \varepsilon + 0,05942 \varepsilon^2 + 0,02110 \varepsilon^3$$

$$\frac{X'}{P} = -0,00356 - 0,13874 \varepsilon + 0,10173 \varepsilon^2 - 0,02588 \varepsilon^3$$

Въ слѣдующей таблицѣ II приведены отношенія силъ  $X'$ ,  $X$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $Y'$  къ нагрузкѣ  $P$ .

**Т а б л и ц а II,**  
при  $Y = 0$ .

$\varepsilon$	$\frac{X'}{P}$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y'}{P}$
0	-0,00356	0,26360	0,44998	0,30673	-0,01675
0,1	-0,01644	0,24002	0,44917	0,33731	-0,01010
0,2	-0,02745	0,21720	0,44391	0,36837	-0,00221
0,3	-0,03703	0,19525	0,43448	0,39960	0,00699
0,4	-0,04444	0,17419	0,42176	0,43008	0,01824
0,5	-0,05073	0,15412	0,40623	0,45926	0,03000
0,6	-0,05577	0,13509	0,38846	0,48657	0,04398
0,7	-0,05971	0,11718	0,36905	0,52135	0,05993
0,8	-0,06270	0,10046	0,34856	0,53299	0,07781
0,9	-0,06489	0,08500	0,32758	0,55087	0,09780
1,0	-0,06645	0,07087	0,30669	0,56437	0,12453

Въ этой таблицѣ хотя и являются отрицательными крайнія силы  $X'$  и  $Y'$ , но величины ихъ такъ незначительны, что могутъ быть произведены вѣсомъ самаго рельса и соединенныхъ съ нимъ шпаль. Это даетъ право признавать рѣшеніе вопроса соответствующимъ дѣйствительности.

**Опредѣленіе ординатъ  $h = y$  обертывающей линіи.**

§ 29.

Форма изогнутой оси нагруженнаго пролета рельса опредѣлится изъ уравненія:

$$EJ y = -Y' \left( \frac{15 L x^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) - R \left( \frac{9 L x^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right) + C_5 x + C_6$$

или, замѣняя  $C_5$  и  $C_6$  вторыми частями уравненій (30 и (31), форма изогнутой оси опредѣлится изъ уравненія:

$$y=h = \frac{Y'}{P} \left\{ \frac{2}{6} \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \frac{30}{6} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{145}{6} \frac{x}{L} - \frac{219}{6} \right\} +$$

$$+ \frac{R}{P} \left\{ \frac{2}{6} \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \frac{18}{6} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{51}{6} \frac{x}{L} - \frac{39}{6} \right\}$$

а, замѣчая, что  $x = (2 + \delta)L$ , получимъ уравненіе:

$$y=h = \frac{1}{6} \left\{ 2(2 + \delta)^3 - 30(2 + \delta)^2 + 145(2 + \delta) - 219 \right\} \frac{Y'}{P} +$$

$$+ \frac{1}{6} \left\{ 2(2 + \delta)^3 - 18(2 + \delta)^2 + 51(2 + \delta) - 39 \right\} \frac{R}{P} = M \frac{Y'}{P} + N \frac{R}{P}. \quad (44)$$

Коэффициенты  $M$  и  $N$  при разныхъ величинахъ  $\delta$  отъ 0 до 1 приведены въ слѣдующей таблицѣ III.

**Т а б л и ц а III.**

$2 + \delta$	$M$	$N$
2,0	-5,5	1,16667
2,1	-4,54633	1,207
2,2	-3,984	1,22933
2,3	-3,311	1,23567
2,4	-2,692	1,228
2,5	-2,125	1,20833
2,6	-1,608	1,17967
2,7	-1,139	1,126
2,8	-0,716	1,09733
2,9	-0,337	1,04933
3	0	1

Уравненіе (42), при помощи таблицъ II и III, даетъ величины  $y$  соответственно каждой изъ величинъ  $\delta$ , отъ  $\delta=0$  до  $\delta=1$ .

**Т а б л и ц а IV.**

$\delta$	$y=h$	$\delta$	$y=h$
0	0,44998	0,6	0,50327
0,1	0,45305	0,7	0,51878
0,2	0,46165	0,8	0,52916
0,3	0,47063	0,9	0,54509
0,4	0,47903	1,0	0,56437
0,5	0,49119		

Для полного опредѣленія формы кривой, обертывающей изгибающуюся ось рельса, при постепенномъ перемѣщеніи груза, подходящаго къ осѣвшей шпалѣ и удаляющагося отъ нея съ чрезвычайно малою скоростью, необходимо еще вычислить силы по уравненіямъ группы (4) и по этимъ силамъ вычислить ординаты  $y = h$ , пониженія точки рельса, поддерживающей грузъ.

Силы, вычисленные по уравнениямъ группы (4), приведены въ таблицѣ V.

**Т а б л и ц а V.**

	$\frac{X'}{P}$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{Y'}{P}$
0	0,01468	0,28596	0,54981	0,05054	0,17907	-0,05070
0,1	-0,02694	0,26275	0,54717	0,07442	0,19336	-0,05076
0,2	-0,03794	0,24136	0,53981	0,09801	0,20894	-0,05029
0,3	-0,04853	0,22229	0,52833	0,12163	0,22575	-0,04936
0,4	-0,05995	0,20713	0,51331	0,14380	0,24372	-0,04799
0,5	-0,07283	0,19672	0,49534	0,16423	0,26279	-0,04622
0,6	-0,08822	0,19212	0,47501	0,18234	0,28290	-0,04412
0,7	-0,10705	0,19436	0,45292	0,19755	0,30397	-0,04171
0,8	-0,13027	0,20449	0,42963	0,20927	0,32596	-0,03903
0,9	-0,15881	0,22355	0,40576	0,21692	0,34877	-0,03612
1,0	-0,19362	0,25257	0,38188	0,21992	0,37236	-0,03303

Уравнение, опредѣляющее  $y$ , имѣетъ видъ <sup>1)</sup>,

$$y = \frac{1}{3} M' \frac{Y'}{P} + \frac{1}{3} N \frac{Y}{P} + \frac{1}{3} N \frac{R}{P} \dots \dots \dots (43)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} M' &= (2 + \varepsilon)^3 - 15(2 + \varepsilon)^2 + 77(2 + \varepsilon) - 132 \\ M &= (2 + \varepsilon)^3 - 12(2 + \varepsilon)^2 + 45(2 + \varepsilon) - 49 \dots \dots (44) \\ N &= (2 + \varepsilon)^3 - 9(2 + \varepsilon)^2 + 27(2 + \varepsilon) - 27 \end{aligned}$$

Величины  $\varepsilon$  должны получить значенія отъ  $\varepsilon=0$  до  $\varepsilon=1$ .

Величины этихъ коэффициентовъ приведены въ слѣдующей таблицѣ VI.

**Т а б л и ц а VI.**

$\varepsilon$	$\frac{1}{3} M'$	$\frac{1}{3} M$	$\frac{1}{3} N$
0	-10	0,33333	-0,33333
0,1	-9,063	0,61367	-0,243
0,2	-8,184	0,856	-0,17067
0,3	-7,361	1,06233	-0,11433
0,4	-6,592	1,23647	-0,072
0,5	-5,875	1,375	-0,04167
0,6	-5,208	1,48533	-0,02138
0,7	-4,589	1,56767	-0,009
0,8	-4,016	1,624	-0,00267
0,9	-3,487	1,65633	-0,00033
1	-3	1,66667	0

<sup>1)</sup> Н. Петровъ: Опредѣленіе геометрическаго мѣста точекъ прикосновенія спокойно дѣйствующей нагрузки съ рельсомъ, лежащимъ на шести опорахъ. „Записки Императорскаго Рус. Тех. Общ.“. Іюнь 1904.

Изъ приведеннаго выше уравненія (43), опредѣляющаго  $y$  при посредствѣ таблицъ V и VI, можно вычислить величины этихъ ординатъ для величины  $\delta$  отъ  $\delta=0$  до  $\delta=1$ . Вычисленныя величины приведены въ таблицѣ VII.

**Т а б л и ц а VII.**

$\delta$	$y = h$	$\delta$	$y = h$
0	0,5498	0,6	0,6461
0,1	0,5600	0,7	0,6664
0,2	0,5644	0,8	0,6855
0,3	0,5892	0,9	0,7029
0,4	0,6072	1,0	0,7197
0,5	0,6268		

Соединяя надлежащимъ образомъ таблицы IV и VII, можно составить таблицу ординатъ кривой, обертывающей всѣ послѣдовательныя положенія изогнутой оси рельса въ пролетахъ IV, V, VI и VII при послѣдовательномъ перемѣщеніи спокойно дѣйствующаго груза, передвигаемаго отъ опоры 4 до опоры 8 включительно. Упомянутыя ординаты приведены въ слѣдующей таблицѣ VIII.

**Т а б л и ц а VIII.**

Пролетъ.	$\delta$	$y=h$ сантим.	Пролетъ.	$\delta$	$y=h$ сантим.
IV	0	0,4500	VI	0,1	0,7029
	0,1	0,4531		0,2	0,6855
	0,2	0,4617		0,3	0,6664
	0,3	0,4706		0,4	0,6461
	0,4	0,4790		0,5	0,6268
	0,5	0,4912		0,6	0,6072
	0,6	0,5033		0,7	0,5892
	0,7	0,5188		0,8	0,5644
	0,8	0,5292		0,9	0,5600
	0,9	0,5451		1,0	0,5498
V	1,0	0,5498	VII	0,1	0,5451
	0,1	0,5600		0,2	0,5292
	0,2	0,5644		0,3	0,5188
	0,3	0,5792		0,4	0,5033
	0,4	0,6072		0,5	0,4912
	0,5	0,6268		0,6	0,4790
	0,6	0,6461		0,7	0,4706
	0,7	0,6664		0,8	0,4617
	0,8	0,6855		0,9	0,4531
	0,9	0,7029		1,0	0,4500
1,0	0,7197	VIII	0,1	0,4492	
			0,2	0,4484	
			0,3	0,4476	
			0,4	0,4468	
			0,5	0,4455	

**Результаты, полученные изъ динамической таблицы для этого случая.**

§ 30.

При помощи таблицы VIII вычислена динамическая таблица. Изъ нея видно, что наибольшія давления производитъ колесо, двигаясь по пролету VI, т. е. по пролету, слѣдующему за осѣвшей шпалой, и притомъ пройдя его середину. Но наибольшее отношеніе динамическаго давления къ статическому  $\left(\frac{y_1}{h_i}\right)_{\max}$  не превосходитъ 1,265, т. е. динамическое давление превосходитъ статическое всего на 26,5%. Моменты силъ, изгибающихъ рельсъ, взятые относительно точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, можно получить, припоминая, что для этого пролета силы, поддерживающія рельсъ, получаются изъ уравненій группы (4), найденныхъ для предыдущаго пролета путемъ обозначенія силъ тѣми же буквами, но написанными лишь въ обратномъ порядкѣ, и при замѣнѣ  $\delta$  величиною 1— $\delta$ . Согласно этому замѣчанію составлена таблица V<sup>bis</sup>.

**Т а б л и ц а V<sup>bis</sup>.**

$\delta$	$\frac{X'}{P}$	$\frac{X}{P}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{R}{P}$	$\frac{Y}{P}$	$\frac{Y'}{P}$
0,	—0,03303	0,37236	0,21992	0,38188	0,25257	—0,19362
0,1	—0,03612	0,34877	0,21692	0,40576	0,22355	—0,15881
0,2	—0,03903	0,32596	0,20927	0,42963	0,20449	—0,13027
0,3	—0,04171	0,30397	0,19755	0,45292	0,19436	—0,10705
0,4	—0,04412	0,28290	0,18234	0,47501	0,19212	—0,08822
0,5	—0,04622	0,26279	0,16423	0,49534	0,19672	—0,07283
0,6	—0,04799	0,24372	0,14380	0,51331	0,20713	—0,05995
0,7	—0,04936	0,22372	0,12163	0,52833	0,22229	—0,04853
0,8	—0,05029	0,22575	0,09801	0,53981	0,24136	—0,03794
0,9	—0,05076	0,20894	0,07442	0,54717	0,26275	—0,02694
1,0	—0,05070	0,17907	0,05054	0,54981	0,28596	—0,01468

**Суммы моментовъ силъ относительно разныхъ точекъ пролетовъ.**

§ 31.

Сумма моментовъ, изгибающихъ рельсъ, дѣйствующихъ въ вѣе точки прикосновенія, выразится формулою.

$$M = [(2 + \delta)Y' + (1 + \delta)Y + \delta Q]L$$

или

$$M = [2X' + X + (X' + X + R)\delta]L.$$

Величины  $M$  приведены въ слѣдующей таблицѣ IX.

Т а б л и ц а IX.

$\delta$	$M$ килогр. сант.	$\delta$	$M$ килогр. сант.
0	214410	0,6	246064
0,1	230650	0,7	234948
0,2	242970	0,8	219933
0,3	257943	0,9	216202
0,4	254177	1,0	172606
0,5	252525		

Умножая величины  $M$ , приведенныя въ таблицѣ IX, на величины отношенія  $\frac{y_i}{h_i}$ , показанныя противу соответственныхъ  $\delta$  въ динамической таблицѣ, опредѣлимъ величины моментовъ силъ, изгибающихъ рельсъ, при динамическомъ дѣйствіи колеса. Если бы колесо, производящее при спокойномъ своемъ состояніи нажатіе на рельсъ въ 10 000 килогр., опиралось на балку, лежащую на двухъ опорахъ, то, при среднемъ положеніи колеса и при удаленіи опоръ на 70 сантиметровъ, изгибающій моментъ былъ бы 175 000 килограммсантиметровъ.

**Динамическое вліяніе одной осѣвшей шпалы.**

§ 32.

Изъ вычисленной для этого случая динамической таблицы видно, что при движеніи по рельсу, подъ которымъ одна шпала осѣла на 0,4 саж., наибольшій изгибающій моментъ, производимый колесомъ съ нагрузкою общимъ вѣсомъ въ 10.000 килограммовъ, при скорости колеса въ 125 верстъ въ часъ, достигаетъ 308 837 килограммсантиметровъ, т. е. возрастаетъ на 76,5%.

Это число 76,5% вовсе не противорѣчитъ вышеприведенному замѣчанію, упоминающему, что динамическій моментъ превосходитъ статическій всего на 25%. Объясненіе этого кажущагося разнорѣчія заключается въ томъ, что статическій моментъ изгиба при опорѣ рельса на 6 шпалъ, изъ которыхъ одна осѣла на 0,4 сант. при  $\delta=0,4$  въ пролетѣ VII больше статического момента въ случаѣ опоры рельса только на двѣ шпалы въ отношеніи 1,443 къ 1, а динамическій моментъ больше статического момента при  $\delta=0,5$  въ 1,223 раза. Произведеніе же

$$1,443 \times 1,223 = 1,765.$$

Это указывает, что упомянутая неисправность пути дѣйствуетъ менѣе неблагоприятно, чѣмъ впадина на колесѣ, достигающая глубины въ 2 миллиметра, при чемъ динамическій моментъ, какъ видно изъ динамической таблицы, превышаетъ статическій въ 1,5 раза или на 50%, а не на 26,5%.

Дѣйствительно, принимая во вниманіе силы, проявляющіяся въ точкахъ опоры, поддерживающихъ рельсъ, приведенныя выше въ случаѣ опоры на шесть шпаль <sup>1)</sup>, можно найти моменты  $M$  силъ, изгибающихъ рельсъ, при спокойномъ дѣйствіи нагрузки, соотвѣтственно разнымъ величинамъ  $\delta$ . Величины этихъ моментовъ приведены въ слѣдующей таблицѣ X. Въ ней же приведены отношенія  $M$  къ самому большому статическому моменту при поддержкѣ рельса только двумя опорами. Величина этого послѣдняго момента  $M_0 = 175\,000$ .

Т а б л и ц а X.

$\delta$	$M$ килогр. сант.	$\frac{M}{M_0}$
0	185612	1,0605
0,1	199017	1,1366
0,2	210091	1,2005
0,3	218344	1,2480
0,4	223412	1,2766
0,5	225102	1,2863
0,6	223412	1,2766
0,7	218344	1,2480
0,8	210091	1,2005
0,9	199017	1,1366
1,0	185612	1,0605

При посредствѣ этой таблицы X и при помощи динамической таблицы, гдѣ приведены отношенія динамическихъ давленій къ статическимъ при движеніи колеса со впадиной въ 0,2 сантиметра или въ 2 миллиметра, можно найти отношенія динамическихъ моментовъ къ тому наибольшему статическому, который явился бы въ случаѣ опоры рельса только въ двухъ точкахъ. Самое большое возрастаніе динамическаго изгиба относится не къ тому времени, когда съ рельсомъ прикасается впа-

<sup>1)</sup> Н. Петровъ. Опредѣленіе геометрическаго мѣста точекъ прикосновенія спокойно дѣйствующей нагрузки съ рельсомъ, лежащимъ на шести опорахъ. „Записки Имп. Рус. Тех. Общ.“ Іюль 1904.

дина, а къ тому, когда колесо своею правильною круглою поверхностью проходит третій пролетъ, считая отъ того пролета, гдѣ касалась впадина. Отношенія динамическихъ моментовъ къ самому большому статическому получатся умноженіемъ чиселъ таблицы X, столбца  $\frac{M}{M_0}$ , на числа динамической таблицы столбца  $\frac{y_i}{h_i}$ , изъ четвертой сверху группы  $\delta$ , относящаяся къ одинаковымъ  $\delta$ . Результаты этого умноженія приведены въ динамической таблицѣ XII, въ столбцѣ  $P\frac{L}{4}$ .

Изъ этихъ данныхъ видно, что существованіе впадинъ глубиною въ 2 миллиметра, при скорости въ 125 верстъ въ часъ, можетъ увеличивать изгибающій моментъ на 90,6% противу статическаго, вычисленнаго въ предположеніи, что рельсъ опирается на двѣ опоры.

Если бы поперечные размѣры рельса были опредѣлены подѣломъ условіемъ, что наибольшій статическій моментъ, соответствующій поддержанію рельса только двумя опорами, вызывалъ напряженіе не болѣе 15 килограммовъ на кв. миллиметръ, то въ случаѣ осадки одной шпалы даже на 4 миллиметра, при скорости поѣзда въ 125 верстъ въ часъ, напряженіе въ рельсѣ увеличилось бы только до 26,5 килограммовъ на кв. миллиметръ, а образованіе на колесѣ впадины глубиною въ 2 миллиметра, при прямолинейномъ рельсѣ, одинаково поддерживаемомъ всеми 6-ю шпалами, увеличило бы напряженіе до 28,6 килограмма. Ни то, ни другое напряженіе не представляетъ еще никакой серьезной опасности. Слѣдовательно, ни то, ни другое изъ упомянутыхъ неблагоприятныхъ обстоятельствъ не слѣдуетъ считать препятствіемъ къ развитію скорости до 125 верстъ въ часъ.

**Опредѣленіе линіи, обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ нѣсколькихъ нагрузокъ въ разныхъ точкахъ пролетовъ при равно-отстоящихъ и равно-упругихъ опорахъ, принимая въ основаніе уравненія Клапейрона.**

#### Подготовительные расчеты.

##### § 33.

Для разрѣшенія вопроса о динамическомъ дѣйствіи колеса на рельсъ, не упуская изъ вида весьма большое иногда вліяніе инерціи самаго колеса, при нагрузкѣ рельса многими колесами нуженъ слѣдующій рядъ дѣйствій:

1. Для каждаго изъ колесъ надо составить діаграмму силъ, по которой можно было бы опредѣлять вертикальную слагаемую всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на колесо въ любомъ положеніи его на рельсѣ.

2. Раздѣлить пролеты на желаемое число равныхъ частей, напримѣръ на 10.

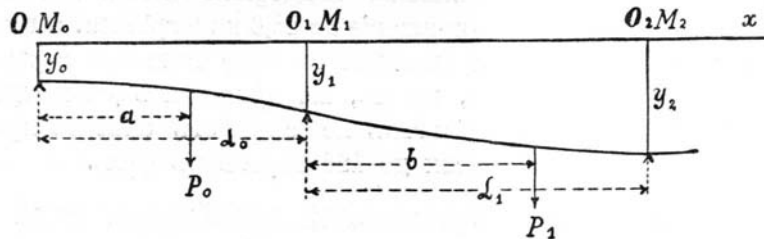
3. Помѣщая избранное для изслѣдованія колесо на каждое изъ подраздѣленій пролета, опредѣлить величины моментовъ всѣхъ прилагаемыхъ къ рельсу опорныхъ сопротивленій и колесныхъ нагрузокъ и затѣмъ, пользуясь уравненіями Клапейрона, слѣдуетъ опредѣлить сопротивленія опоръ и соотвѣтственныя имъ перемѣщенія рельса въ точкахъ опоръ.

4. Имѣя всѣ эти величины, можно опредѣлить по уравненіямъ Клапейрона уравненіе линіи, обертывающей всѣ послѣдовательные изгибы оси рельса, которые она получаетъ при перемѣщеніи разсматриваемой системы колесъ.

**Выводъ уравненія линіи обертывающей, принимая въ основаніе уравненія Клапейрона.**

§ 34.

Уравненіе этой обертывающей можно получить слѣдующимъ образомъ.



Фиг. 4.

Примемъ означенную на фигурѣ линію  $O_0M_2$  за ось абсциссъ и обозначимъ:

$y$ —вертикальныя перемѣщенія точекъ оси рельса,

$P_0$  и  $P_1$ —нагрузки,

$L_0$  и  $L_1$ —разстоянія между опорами,

$a$  и  $b$ —разстоянія точекъ приложенія нагрузокъ отъ ближайшихъ лѣвыхъ опоръ,

$M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ —моменты силъ, приложенныхъ къ рельсу лѣвѣ соотвѣтственныхъ точекъ.

Въ такомъ случаѣ можно, какъ извѣстно, написать уравненія упругихъ линій для отрѣзка оси отъ 0 до  $a$ .

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{L_0} x - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} x \dots (1)$$

и для отрѣзка отъ  $a$  до  $L_0$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{L_0} x - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} x + P_0 (x - a) \dots (2)$$

интегрированіе этихъ уравненій даетъ два слѣдующія уравненія:

$$EI \frac{dy}{dx} = M_0 x + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^2}{2} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^2}{2} + C_1 \dots (3)$$

и

$$EI \frac{dy}{dx} = M_0 x + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^2}{2} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^2}{2} + P_0 \left( \frac{x^2}{2} - ax \right) + C_2 (4)$$

Такъ какъ оба отрѣзка упругихъ линій, въ точкѣ ихъ соединенія, имѣютъ общую касательную, то при  $x = a$  вторыя части уравненій (3) и (4) взаимно равны и слѣдовательно

$$C_2 = C_1 + P_0 \frac{a^2}{2} \dots (5)$$

и группа уравненій (3) и (4) можетъ быть замѣнена группою:

$$EI \frac{dy}{dx} = M_0 x + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^2}{2} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^2}{2} + C_1 \dots (5)$$

и

$$EI \frac{dy}{dx} = M_0 x + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^2}{2} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^2}{2} + P_0 \left( \frac{x^2}{2} + ax \right) + P_0 \frac{a^2}{2} + C_1 \dots (6)$$

Второе интегрированіе доставляетъ два уравненія:

$$EI y = M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^3}{6} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_3 (7)$$

и

$$EI y = M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{M_1 - M_0}{L_0} \frac{x^3}{6} - P_0 \frac{(L_0 - a)}{L_0} \frac{x^3}{6} + P_0 \left( \frac{x^3}{6} - a \frac{x^2}{2} \right) + P_0 \frac{a^2}{2} x + C_1 x + C_4 \dots (8)$$

Такъ какъ оба отрѣзка при  $x = a$  имѣютъ общую ординату, то при  $x = a$  вторыя части двухъ послѣднихъ уравненій (7) и (8) взаимно равны и слѣдовательно

$$C_4 = C_3 - P_0 \frac{a^3}{6} \dots \text{II.}$$

Совершенно подобныя исчисленія можно сдѣлать для части рельса, помѣщающейся во второмъ пролетѣ, длиною  $L_1$

Для нея

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^2}{2} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^2}{2} + C_1' \dots (9)$$

и

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^2}{2} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^2}{2} + P_1 \left( \frac{x^2}{2} - bx \right) + C_2' \dots (10)$$

и такъ какъ при  $x = b$  первыя части уравненій (9) и (10) взаимно равны, то

$$C_2' = C_1' + P_1 \frac{b^2}{2} \dots \text{III}$$

и группа уравненій (9) и (10) замѣнится группою

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^2}{2} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^2}{2} + C_1' \dots (11)$$

и

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^2}{2} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^2}{2} + P_1 \left( \frac{x^2}{2} - bx \right) + P_1 \frac{b^2}{2} + C_1' \dots (12)$$

и послѣ второго интегрированія получатся

$$EI y = M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^3}{6} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^3}{6} + C_1' x + C_3' \dots (13)$$

и

$$EI y = M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{L_1} \frac{x^3}{6} - P_1 \frac{(L_1 - b)}{L_1} \frac{x^3}{6} + P_1 \left( \frac{x^3}{6} - \frac{bx^2}{6} \right) + P_1 \frac{b^2}{2} x + C_1' x + C_4' \dots (14)$$

Такъ какъ при  $x=b$  первыя части уравненій (13) и (14) взаимно равны, то

$$C_4' = C_3' - P_1 \frac{b_3}{6} \dots \dots \dots \text{IV}$$

Такимъ образомъ, уравненіями I, II, III и IV опредѣлены постоянныя произвольныя  $C_2, C_4, C_2'$  и  $C_4'$  и остаются еще неопредѣленными  $C_1, C_3, C_1'$  и  $C_3'$ .

Для опредѣленія ихъ надо замѣтить, что при  $x=0$  уравненіе (8) даетъ

$$C_3 = EI y_0 \dots \dots \dots \text{V}$$

и уравненіе (13), тоже при  $x=0$ , даетъ

$$C_3' = EI y_1 \dots \dots \dots \text{VI}$$

Для опредѣленія остальныхъ двухъ  $C_1$  и  $C_1'$  надо обратить вниманіе на то, что часть кривой изогнутой оси изъ пролета  $L_0$ , заключенная между  $a$  и  $L_0$ , и часть кривой изъ пролета  $L_1$ , заключенная между 0 и  $b_1$ , имѣютъ при  $y_1$  общую касательную и общую ординату.

Слѣдовательно,  $\frac{dy}{dx}$  въ уравненіи (5) при  $x=L_0$  и  $\frac{dy}{dx}$  при  $x=0$  въ уравненіи (9) взаимно равны, поэтому

$$C_1' = M_0 L_0 + (M_1 - M_0) \frac{L_0}{2} - P_0 (L_0 - a) \frac{L_0}{2} + C_1 \dots \dots (15)$$

и  $y$  въ уравненіи (8) при  $x=L_0$  и  $y$  въ уравненіи (13) при  $x=0$  тоже взаимно равны, поэтому

$$EI y_0 = M_0 \frac{L_0^2}{2} + (M_1 - M_0) \frac{L_0^2}{6} - P_0 (L_0 - a) \frac{L_0^2}{6} + P_0 \left( \frac{L_0^3}{6} - \frac{a L_0^2}{2} \right) + P_0 \frac{a^2 L_0}{2} + C_1 L_0 + EI y_0 - P_0 \frac{a^3}{6}$$

или

$$0 = M_0 \frac{L_0}{2} + (M_1 - M_0) \frac{L_0}{6} - P_0 (L_0 - a) \frac{L_0}{6} + P_0 \left( \frac{L_0^2}{6} - \frac{a L_0}{2} \right) + P_0 \frac{a^2}{2} - P_0 \frac{a^3}{L_0 6} + C_1 \dots \dots \dots (16)$$

Уравненіе (16) опредѣляетъ  $C_1$ , а вычитая (16) изъ (15), получимъ:

$$C_1' = \frac{M_0 L_0}{2} + (M_1 - M_0) \frac{L_0}{3} - P_0 (L_0 - a) \frac{L_0}{3} - P_0 \left( \frac{L_0^2}{6} - \frac{a L_0}{2} \right) - P_0 \frac{a^2}{2} + P_0 \frac{a^3}{6 L_0} \dots \dots \dots \text{VII}$$

и

$$C_1 = -\frac{M_0 L_0}{2} - (M_1 - M_0) \frac{L_0}{6} + P_0 (L_0 - a) \frac{L_0}{6} - P_0 \left( \frac{L_0^2}{6} - \frac{a L_0}{2} \right) - P_0 \frac{a^2}{2} + P_0 \frac{a^3}{6 L_0} \dots \dots \dots \text{VIII}$$

Послѣ опредѣленія величинъ  $C_1'$  и  $C_1$  можно получить уравненія кривыхъ изогнутой оси рельса въ слѣдующихъ видахъ: для пролета  $L_0$ , въ части отъ 0 до  $a$

$$EI y = EI y_0 - M_0 (L_0 - x) \frac{x}{2} - \frac{M_1 - M_0}{L_0} (L_0^2 - x^2) x - \frac{L_0 x^3 - a x^3 - a^3 x - 2 a L_0^2 x + 3 a^2 L_0 x}{6 L_0} \dots \dots \dots (17)$$

и для части отъ  $a$  до  $L_0$

$$EI y = EI y_0 - M_0 (L_0 - x) \frac{x}{2} - \frac{M_1 - M_0}{6 L_0} (L_0^2 - x^2) x + \frac{a x^3 + a^3 x - 3 a L_0 x^2 - a^3 L_0 + 2 a L_0^2 x}{6 L_0} \dots \dots \dots (18)$$

Чтобы получить линію, обертывающую всѣ положенія изогнутой оси рельса въ пролетѣ  $L_0$ , при перемѣщеніи груза отъ  $a=0$  до  $a=L_0$ , достаточно въ уравненіи (17) поставить  $a$  въ замѣну  $x$ , съ условіемъ придавать величинѣ  $a$  всѣ значенія отъ 0 до  $L_0$ .

Такимъ образомъ, получается уравненіе изогнутой оси рельса при разныхъ положеніяхъ груза

$$EI y = EI h = EI y_0 + \frac{M_0}{6 L_0} [4 L_0^2 a + 3 L_0 a^2 - a^3] - \frac{M_1 L_0^2 a}{6 L_0} - \frac{a^2}{6 L_0} [4 a L_0 - 2 L_0^2 - 2 a^2]$$

или, замѣняя  $a$  буквою  $x$ ,

$$EI y = EI y_0 + \frac{M_0}{6 L_0} [4 L_0^2 x + 3 L_0 x^2 - x^3] - \frac{M_1 L_0^2 x}{6 L_0} + \frac{1}{6 L_0} [2 L_0^2 x^2 - 4 L_0 x^3 + 2 x^4] \dots \dots \dots (19).$$

Это уравнение должно замѣнить выведенное мною ранѣе уравнение обертывающей кривой при передвиженіи одиночнаго колеса.

Въ части рельса въ пролетѣ  $L_1$  для части отъ 0 до  $b$  изъ уравненія (13) съ (VI) и (VII) получается

$$EI y = EI h = EI y_1 + \frac{(M_0 + 2 M_1)}{6 L_1} L_1^2 x + \frac{3 M_1 L_1}{6 L_0} x^2 - \frac{M_1 - M_2}{6 L_1} \frac{L_1}{L_1} x^3 - P_1 \frac{(L_1 - b) x^3}{L_1 \cdot 6} - P_0 x \frac{3 L_1^3 + a L_1^2 - 3 a^2 L_1 + a^3}{6 L_1}$$

Если  $b = a = x_1$  и  $L_0 = L_1$ , то

$$EI y = EI h = EI y_1 + \frac{M_0 + 2 M_1}{6 L_0} L_0^2 x + \frac{3 M_1}{6 L_0} L_0 x^2 - \frac{M_1 - M_2}{6 L_0} x^3 - \frac{P_1}{6 L_0} (L_0 x^3 - x^4) - P_0 \frac{3 L_0^3 x + a L_0^2 x^2 - 3 L_0 x^3 + x^4}{6 L_0} \dots \dots \dots (20)$$

Если бы въ пролетѣ  $L_0$  нагрузки не было,  $P_0 = 0$  и

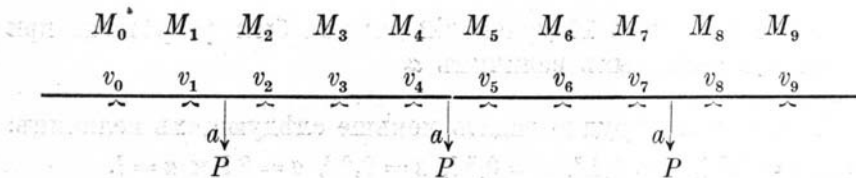
$$EI y = EI h = EI y_1 + \frac{M_0 + 2 M_1}{6 L_0} L_0 x + \frac{3 M_1}{6 L_0} L_0 x^2 - \frac{M_1 - M_2}{6 L_0} x^3 - \frac{P}{6 L_0} (L_0 x^3 - x^4) \dots \dots \dots (21).$$

Слѣдуетъ еще имѣть въ виду, что моменты  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ , зависящіе отъ сопротивленія опоръ, будутъ измѣняться съ величиною  $x$ , такъ какъ опорныя сопротивленія мѣняются при перемѣщеніи грузовъ.

**П р и м ѣ р ы.**

§ 35.

Для уясненія хода послѣдовательныхъ вычисленій, приводящихъ къ опредѣленію точекъ искомой обертывающей линіи, приводится случай дѣйствія трехъ равно нагруженныхъ колесъ, оси которыхъ разставлены на 3 пролета.



Въ такомъ случаѣ моменты отъ  $M_0$  до  $M_9$  опредѣляются уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_1 &= 1v_0L \\ M_2 &= 2v_0L + v_1L - (L-a)P \\ M_3 &= 3v_0L + 2v_1L + v_2L - (2L-a)P \\ M_4 &= 4v_0L + 3v_1L + 2v_2L + v_3L - (3L-a)P \\ M_5 &= 5v_0L + 4v_1L + 3v_2L + 2v_3L + v_4L - (5L-2a)P \\ M_6 &= 6v_0L + 5v_1L + 4v_2L + 3v_3L + 2v_4L + v_5L - (7L-2a)P \\ M_7 &= 7v_0L + 6v_1L + 5v_2L + 4v_3L + 3v_4L + 2v_5L + v_6L - (9L-2a)P \\ M_8 &= 8v_0L + 7v_1L + 6v_2L + 5v_3L + 4v_4L + 3v_5L + 2v_6L + v_7L - (12L-3a) \\ M_9 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{IX}$$

При этихъ величинахъ моментовъ, уравненія Клапейрона получаютъ слѣдующія выраженія, обозначая  $\gamma$  отношеніе  $\chi$  коэффиціента пропорціональности силы, понижающей опоры къ величинѣ пониженія, къ величинѣ  $\frac{L^3}{6EJ}$

$$\begin{aligned} \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - \frac{(l-a)}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - \frac{6l - 5a}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - \frac{12l - 6a}{l}P \\ \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - \frac{19l - 7a}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - \frac{30l - 11a}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - \frac{42l - 12a}{l}P \\ \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - \frac{55l - 13a}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 34v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - \frac{57l - 14a}{l}P + \frac{(l^2 - a^2)a}{l^3}P \\ 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 - 3P \\ 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 - \frac{15l - 3a}{l}P \end{aligned}$$

Эта группа изъ 10 уравненій должна быть разрѣшена при каждой изъ заданныхъ величинъ  $a$ .

Повидимому, трудно задать меньше слѣдующихъ величинъ:  
 $a = 0$ ,  $a = 0,2l$ ,  $a = 0,4l$ ,  $a = 0,5l$ ,  $a = 0,6l$ ,  $a = 8l$  и  $a = l$ .

При  $a = 0$  получаютя слѣдующія 10 уравненій.

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 - v_1 - P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 6P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 12P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 19P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 30P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 42P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 55P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 34v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 57P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 - 3P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 - 15P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{X}$$

При  $a = 0,2 l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - 0,608 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 4,808 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 10,8 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 17,408 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 27,608 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 39,6 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 52,208 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 54,008 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 - 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 - 14,4 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XI}$$

При  $a = 0,4 l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - 0,264 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 3,664 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 9,6 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 15,864 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 25,264 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 37,2 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 49,424 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 51,024 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 - 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 - 13,8 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XII}$$

При  $a = 0,5 l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - 0,125 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 3,125 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 9 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 15,125 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 24,125 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 36 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 48,125 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 49,625 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 - 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 - 13,5 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XIII}$$

При  $a = 0,6 l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - 0,016 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 2,616 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 8,4 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 14,416 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 23,016 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 34,8 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 46,816 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 48,216 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 = 13,2 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XIV}$$

При  $a = 0,8 l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 - 0,088 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - 1,712 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 7,2 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 13,112 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 20,912 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 32,4 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 44,312 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 45,512 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 = 12,6 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XV}$$

При  $a = l$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma(2v_1 - v_0 - v_2) &= 6v_0 + v_1 \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_2 - v_1 - v_3) &= 12v_0 + 6v_1 + v_2 - P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_3 - v_2 - v_4) &= 18v_0 + 12v_1 + 6v_2 + v_3 - 6 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_4 - v_3 - v_5) &= 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 6v_3 + v_4 - 12 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_5 - v_4 - v_6) &= 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 6v_4 + v_5 - 19 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_6 - v_5 - v_7) &= 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 6v_5 + v_6 - 30 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_7 - v_6 - v_8) &= 42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 6v_6 + v_7 - 42 P \dots\dots\dots \\
 \gamma(2v_8 - v_7 - v_9) &= 39v_0 + 33v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 4v_7 - 43 P \dots\dots\dots \\
 0 &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = 3 P \dots\dots\dots \\
 0 &= 9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 = 15 P \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \text{XVI}$$

Послѣ разрѣшенія этихъ 70-ти уравненій можно будетъ приступить къ опредѣленію обертывающей линіи, вызываемой среднимъ колесомъ въ пролетѣ между  $v_4$  и  $v_5$ .

Для этого изъ группы X надо взять  $v_4$  и по его величинѣ опредѣлить  $y_4$ , который и будетъ въ обертывающей кривой при  $x = 0$ .

Затѣмъ, изъ группы XI надо взять  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  и  $v_5$  и при ихъ посредствѣ опредѣлить  $y_4$  и помощью уравненій группы IX опредѣлить  $M_3, M_4$  и  $M_5$ .

Вставивъ эти величины въ уравненіе (21) вмѣсто  $y_1$   $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  и написавъ въ немъ  $x = 0,2$ , найдемъ  $y$ , соотвѣтствующее  $x = 0,2l$  въ пролетѣ между  $v_4$  и  $v_5$ .

Разрѣшить надо будетъ 5 уравненій.

Чтобы найти  $y$  въ томъ же пролетѣ, но соотвѣтствующій  $x = 0,4l$ , надо изъ уравненій группы XII найти  $v_4$  и всѣ величины  $v$  отъ  $v_0$  до  $v_4$  и помощью уравненій группы IX найти  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$ . Величины ихъ, вставленныя въ уравненіе 21 вмѣсто  $y_1$   $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ , при  $x = 0,4$ , дадутъ величину  $y$ , соотвѣтствующую  $x = 0,4l$ . Разрѣшить надо 5 уравненій.

Подобно вышеуказанному, для опредѣленія  $y$  въ пролетѣ  $v_4$  и  $v_5$ , соотвѣтствующаго  $a = 0,5l$ , надо изъ уравненія группы XIII найти  $v_4$  и всѣ  $v$  отъ  $v_0$  до  $v_4$  посредствомъ уравненія группы IX  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$ , ввести ихъ въ уравненіе (21) вмѣсто  $y_1$   $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  при  $x = 0,5$ , тогда опредѣлится  $y$ , соотвѣтствующее срединѣ пролета. Рѣшить надо 5 уравненій.

Такимъ образомъ, каждой изъ величинъ  $a$  соотвѣтствуетъ рѣшеніе 5 уравненій и всѣмъ 7-ми величинамъ соотвѣтствуетъ 35 уравненій.

Итакъ, для опредѣленія 7-ми точекъ обертывающей кривой надо рѣшить 35 уравненій.

Величины промежуточныхъ  $y$ , соотвѣтствующихъ  $a = 0,1$ ,  $a = 0,3$ ,  $a = 0,7$  и  $a = 0,9$ , можно будетъ найти интерполированіемъ.

Въ заключеніе этой работы будетъ получена таблица статическихъ перемѣщеній точки прикосновенія средняго колеса съ рельсомъ при дѣйствіи 3-хъ колесъ.

Примѣненіе новой теоріи доставитъ динамическія пониженія точекъ прикосновенія колесъ съ рельсомъ.

Вышеприведенныя группы уравненій отъ IX до XVI написаны въ предположеніи равенства давленій, производимыхъ колесами. Если давленія будутъ различны, то соотвѣтственно каждой величинѣ  $a$  надо будетъ поставить относящуюся къ ней величину  $P$ . При этомъ измѣняются члены, содержащіе множители  $P$ ; но ходъ разрѣшенія уравненій останется прежній.

Если для полного оборота колеса оно должно будетъ пройти нѣсколько пролетовъ, то для cadaго пролета нужно будетъ произвести всѣ упомянутыя выше дѣйствія. Напримѣръ, при діаметрѣ колеса въ 180 сантиметровъ и при пролетахъ въ 70 сантиметровъ, полный оборотъ колеса займетъ 8 пролетовъ. Въ этомъ случаѣ число уравненій, подлежащихъ разрѣшенію, будетъ  $35 \times 8 = 280$ .

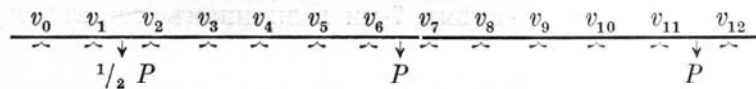
**Примѣненіе уравненій Клапейрона для опредѣленія наибольшихъ моментовъ силъ, изгибающихъ рельсъ при нагрузкѣ его тремя колесами при широко разставленныхъ осяхъ.**

§ 36.

Примѣненіе уравненій Клапейрона къ опредѣленію наибольшаго изгибающаго рельсъ момента силъ при нагрузкѣ рельса тремя колесами, отстоящими другъ отъ друга на 5 пролетовъ (при опытахъ Дудлея со скоростями 67,6 килом. и 70,8 килом. разстояніи были 5,25 и 5,20 пролета), при нагрузкѣ задняго колеса передней телѣжки половиною груза, помѣщеннаго на каждой изъ ведущихъ осей, при предположеніи, что характеризующая свойство верхняго строенія величина  $\gamma=6$  или, все равно,  $A=1$  (при опытахъ Дудлея  $A=0,885$ ).

Схему задачи представляетъ приложенный чертежъ.

Поставленныя на немъ буквы  $v$  съ номерами выражаютъ опорныя сопротивленія.  $P$ —нагрузка ведущаго колеса.



Для разрѣшенія задачи съ примѣненіемъ уравненій Клапейрона надо рѣшить слѣдующія 13 уравненій, въ которыхъ  $p = \frac{1}{16} P$ .

$$12v_0 - 11v_1 + 6v_2 = P \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$12v_0 + 12v_1 - 11v_2 + 6v_3 = 25 P \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$18v_0 + 12v_1 + 12v_2 - 11v_3 - 6v_4 = 72 P \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 12v_3 - 11v_4 + 6v_5 = 120 P \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 12v_4 - 11v_5 + 6v_6 = 168 P \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 12v_5 - 11v_6 + 6v_7 = 218 P \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 12v_6 - 11v_7 + 3v_8 = 314 P \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$48v_0 + 42v_1 + 36v_2 + 30v_3 + 24v_4 + 18v_5 + 12v_6 + 12v_7 - 11v_8 + 6v_9 = 456 P \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$54v_0 + 48v_1 + 42v_2 + 36v_3 + 30v_4 + 24v_5 + 18v_6 + 12v_7 + 12v_8 - 11v_9 + 6v_{10} = 600 P \quad \dots \dots (9)$$

$$60v_0 + 54v_1 + 48v_2 + 42v_3 + 36v_4 + 30v_5 + 24v_6 + 18v_7 + 12v_8 + 12v_9 - 11v_{10} + 6v_{11} = 744 P \quad \dots (10)$$

$$54v_0 + 49v_1 + 44v_2 + 39v_3 + 34v_4 + 29v_5 + 24v_6 + 19v_7 + 14v_8 + 9v_9 + 10v_{10} - 12v_{11} + 6v_{12} = 710 P \quad \dots \dots (11)$$

$$12v_0 + 11v_1 + 10v_2 + 9v_3 + 8v_4 + 7v_5 + 6v_6 + 5v_7 + 4v_8 + 3v_9 + 2v_{10} + v_{11} = 180 P \quad \dots \dots (12)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} = 40 P \quad \dots \dots (13)$$

Рѣшеніе этихъ уравненій даетъ:

$$v_0 = 1,11338 \quad p = 0,06959 P$$

$$v_1 = 2,53736 \quad p = 0,15859 P$$

$$v_2 = 2,59173 \quad p = 0,16198 P$$

$$v_3 = 1,61662 \quad p = 0,10104 P$$

$$\begin{aligned} v_4 &= 1,36547 & p &= 0,08535 P \\ v_5 &= 2,16771 & p &= 0,13548 P \\ v_6 &= 2,51838 & p &= 0,15740 P \end{aligned}$$

Сумма моментов силъ, расположенныхъ лѣвѣе точки приложенія нагрузки  $P$ , при длинѣ пролетовъ  $l$ , опредѣляется уравненіемъ:

$$\begin{aligned} \text{maximum } M &= \\ &= \left[ \frac{13}{2} v_0 + \frac{11}{2} v_1 + \frac{9}{2} v_2 + \frac{7}{2} v_3 + \frac{5}{2} v_4 + \frac{3}{2} v_5 + \frac{1}{2} v_6 - 5 \frac{P}{2} \right] l \\ &\quad \frac{13}{2} v_0 = 0,452335 P l \\ &\quad \frac{11}{2} v_1 = 0,872245 P l \\ &\quad \frac{9}{2} v_2 = 0,728910 P l \\ &\quad \frac{7}{2} v_3 = 0,353640 P l \\ &\quad \frac{5}{2} v_4 = 0,213375 P l \\ &\quad \frac{3}{2} v_5 = 0,203220 P l \\ &\quad \frac{1}{2} v_6 = 0,078700 P l \\ &\quad \hline &\quad 2,902425 P l \\ &\quad - \frac{5}{2} P = 2,5 P \\ &\quad \hline &\quad 0,4024 P l = \text{max. } M. \end{aligned}$$

По формулѣ Циммермана:

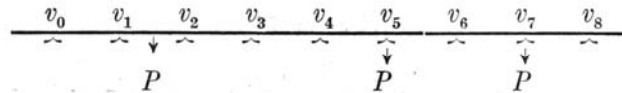
$$\frac{8 \times 6 + 7}{16 \times 6 + 40} P l = 0,4044 P l.$$

§ 37.

Различіе результатовъ, получаемыхъ при примѣненіи уравненій Блапейрона и Циммермана при сближенныхъ осяхъ и широко разставленныхъ опорахъ, можно найти, обращаясь къ сочиненію инженера А. А. Холодецкаго:

„Исслѣдованіе вліянія внѣшнихъ силъ на верхнее строеніе желѣзнодорожнаго пути“.

Инженеръ А. А. Холодецкій разсматривалъ 3 колеса съ одинаковыми нагрузками  $P$ , при чемъ двѣ оси разставлены на 3,5 пролета и третья впереди второй на два пролета, какъ указано на прилагаемой схемѣ, при  $\gamma = 2$ .



Этому требованію соотвѣтствуетъ рельсъ въ 24,5 фунта. имѣющій  $I = 925,7$ , при длинѣ пролета = 85 сант. и при  $C = 3$ .

Примѣняя уравненія Клапейрона, надо рѣшить слѣдующія 9 уравненій:

$$\begin{aligned} 8v_0 - 3v_1 + 2v_2 &= p \dots\dots\dots (1) \\ 12v_0 + 8v_1 - 3v_2 + 2v_3 &= 25p \dots\dots\dots (2) \\ 18v_0 + 12v_1 + 8v_2 - 3v_3 + 2v_4 &= 72p \dots\dots\dots (3) \\ 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 8v_3 - 3v_4 + 2v_5 &= 120p \dots\dots\dots (4) \\ 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 8v_4 - 3v_5 + 2v_6 &= 176p \dots\dots\dots (5) \\ 36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 8v_5 - 3v_6 + 2v_7 &= 264p \dots\dots (6) \\ 34v_0 + 29v_1 + 24v_2 + 19v_3 + 14v_4 + 9v_5 + 6v_6 - 4v_7 + 2v_8 &= 284p \dots (7) \\ 8v_0 + 7v_1 + 6v_2 + 5v_3 + 4v_4 + 3v_5 + 2v_6 + v_7 &= 84p \dots\dots\dots (8) \\ v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 &= 24p \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

гдѣ  $p = \frac{1}{8}P$ .

Рѣшеніе этихъ уравненій доставило инженеру А. А. Холодецкому  $v_0 = 0,0666 P$ ,  $v_1 = 0,3964 P$  и  $\max. M = 0,2981 Pl$ .

Опредѣляя для этого же случая изгибающій моментъ по уравненію Циммермана, нашли бы:

$$\frac{8 \times 2 + 7}{16 \times 2 + 40} Pl = 0,3194 Pl.$$

Этотъ послѣдній превышаетъ первый на 6,5%.

§ 38.

При болѣе жесткомъ рельсѣ, при болѣе сближенныхъ опорахъ и большей величинѣ  $C$  (какъ приблизительно было

при многихъ опытахъ Дудлея), когда величина  $\gamma = 6$ , необходимо рѣшить слѣдующія 9 уравненій:

$$12 v_0 - 11 v_1 + 6 v_2 = p \dots \dots \dots (1)$$

$$12 v_0 + 12 v_1 - 11 v_2 + 6 v_3 = 25 p \dots \dots \dots (2)$$

$$18 v_0 + 12 v_1 + 12 v_2 - 11 v_3 + 6 v_4 = 72 p \dots \dots \dots (3)$$

$$24 v_0 + 18 v_1 + 12 v_2 + 12 v_3 - 11 v_4 + 6 v_5 = 120 p \dots \dots \dots (4)$$

$$30 v_0 + 24 v_1 + 18 v_2 + 12 v_3 + 12 v_4 - 11 v_5 + 6 v_6 = 176 p \dots \dots \dots (5)$$

$$36 v_0 + 30 v_1 + 24 v_2 + 18 v_3 + 12 v_4 + 12 v_5 - 11 v_6 + 6 v_7 = 246 p \dots \dots \dots (6)$$

$$34 v_0 + 29 v_1 + 24 v_2 + 19 v_3 + 14 v_4 + 9 v_5 + 10 v_6 - 12 v_7 + 6 v_8 = 284 p \dots \dots \dots (7)$$

$$8 v_0 + 7 v_1 + 6 v_2 + 5 v_3 + 4 v_4 + 3 v_5 + 2 v_6 + v_7 = 84 p \dots \dots \dots (8)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 24 p \dots \dots \dots (9)$$

Рѣшеніе этихъ уравненій доставило

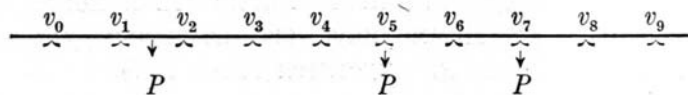
$$v_0 = 0,12718 P, v_1 = 0,30872 P, \text{ max. } M = 0,3451 Pl.$$

Этотъ моментъ уже больше опредѣленнаго по уравненію Циммермана (0,4044) на 17,2<sup>0</sup>/<sub>0</sub>.

На этой величинѣ момента нельзя, однако, останавливаться, потому что разсмотрѣнныя уравненія приводятъ къ опредѣленію опорнаго сопротивленія  $v_8 = -2.17373 P$ , что невозможно.

Обстоятельство это указываетъ, что давленіе колесъ передается не 9 опорамъ, а большому числу ихъ.

Испытать надо 10 опоръ по схемѣ:



При этомъ рѣшенію подлежатъ 10 уравненій:

$$12v_0 - 11v_1 + 6v_2 = P \dots \dots \dots (1)$$

$$12v_0 + 12v_1 - 11v_2 + 6v_3 = 25 P \dots \dots \dots (2)$$

$$18v_0 + 12v_1 + 12v_2 - 11v_3 + 6v_4 = 72 P \dots \dots \dots (3)$$

$$24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 12v_3 - 11v_4 + 6v_5 = 120 P \dots \dots \dots (4)$$

$$30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 12v_4 - 11v_5 + 6v_6 = 176 P \dots \dots \dots (5)$$

$$36v_0 + 30v_1 + 24v_2 + 18v_3 + 12v_4 + 12v_5 - 11v_6 + 6v_7 = 264 P \dots \dots \dots (6)$$

$$42v_0 + 36v_1 + 30v_2 + 24v_3 + 18v_4 + 12v_5 + 12v_6 - 11v_7 + 6v_8 = 368 P \dots \dots \dots (7)$$

$$39v_0 + 34v_1 + 29v_2 + 24v_3 + 19v_4 + 14v_5 + 9v_6 + 10v_7 - 12v_8 + 6v_9 = 396 P \dots \dots \dots (8)$$

$$9v_0 + 8v_1 + 7v_2 + 6v_3 + 5v_4 + 4v_5 + 3v_6 + 2v_7 + v_8 = 108 P \dots \dots \dots (9)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = 24 P \dots \dots \dots (10)$$

Рѣшеніе этихъ 10 уравненій доставляетъ:

$$\begin{array}{ll} v_0 = 0,13030 P; & v_5 = 0,40817 P; \\ v_1 = 0,31308 P; & v_6 = 0,52200 P; \\ v_2 = 0,33422 P; & v_7 = 0,64046 P; \\ v_3 = 0,24682 P; & v_8 = 0,18760 P; \\ v_4 = 0,26701 P; & v_9 = -0,04956 P. \end{array}$$

Величина  $v_9$  оказалась тоже отрицательною, но уже очень небольшою, почти такой, какую можетъ дать вѣсъ самага рельса и скрѣпленной съ нимъ шпалы.

Во всякомъ случаѣ опорныя сопротивленія какъ при 9, такъ и при 10 шпалахъ, различаются немного:

при 9	при 10
$v_0 = 0,12718 P$	$v_0 = 0,13030 P$
$v_1 = 0,30872 P$	$v_1 = 0,31308 P$

При послѣднихъ величинахъ  $v_0$  и  $v_1$  подъ заднею осью будетъ  $1,5 v_0 + 0,5 v_1 = 0,3520 Pl.$ , т. е. меньше чѣмъ по уравненію Циммермана на 14,8%, а не 17,2%.

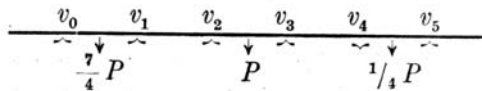
Небольшія различія величинъ и полученныхъ при 9 и 10 опорахъ указываютъ, что включеніе въ расчетъ одиннадцатой опоры не можетъ замѣтно измѣнить величину изгибающаго момента, опредѣляемаго при разсматриваемой схемѣ.

При дальнѣйшемъ увеличеніи числа опоръ моментъ, вѣроятно, еще нѣсколько увеличится и отличіе отъ момента, опредѣляемаго уравненіемъ Циммермана, еще нѣсколько уменьшится, но это уменьшеніе едва ли спустится ниже 13%.

### § 39.

Три колеса, нагруженные неодинаково: ихъ нагрузки  $\frac{7}{4} P$ ,  $P$  и  $\frac{1}{4} P$ . Точки прикосновенія колесъ съ рельсами удалены одна отъ другой на два пролета и находятся посерединѣ пролетовъ.

Схема задачи:



Въ случаѣ рельса въ 24,5 фунта на фунтъ, при  $J = 925.7$ , при пролетѣ = 85 сант.  $C = 5$ , когда  $\gamma = 2$  или  $A = 1/3$ , надо рѣшить слѣдующія семь уравненій при  $P = 1/32 P$ :

$$\begin{aligned} 8v_0 - 3v_1 + 2v_2 &= 7 p \dots\dots\dots (1) \\ 12v_0 + 8v_1 - 3v_2 + 2v_3 &= 175 p \dots\dots\dots (2) \\ 18v_0 + 12v_1 + 8v_2 - 3v_3 + 2v_4 &= 508 p \dots\dots\dots (3) \\ 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 8v_3 - 3v_4 + 2v_5 &= 940 p \dots\dots\dots (4) \\ 24v_0 + 19v_1 + 14v_2 + 9v_3 + 6v_4 - 4v_5 + 2v_6 &= 1129 p \dots\dots\dots (5) \\ 6v_0 + 5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 &= 336 p \dots\dots\dots (6) \\ v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 &= 96 p \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

Вычисленный по этимъ уравненіямъ инженеромъ А. А. Холодецкимъ  $M = 0,4784 Pl$ .

Вычисляя моментъ по уравненію Циммермана:

$$\max. M = \frac{8 \times 2 + 7}{16 \times 2 + 40} \times 1,75 = 0,559.$$

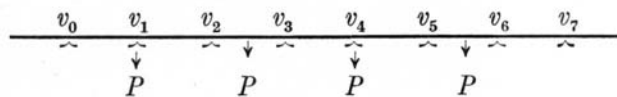
Этотъ результатъ больше предыдущаго:

$$\frac{0,559}{0,4784} = 1,169 \text{ или почти на } 17\%.$$

§ 40.

Паровозъ четырехосный съ одинаково нагруженными осями. Оси разставлены на 1,5 пролета между опорами. Рельсъ такой же, какъ и въ § 39.

Схема задачи слѣдующая:



Разрѣшить надо слѣдующія 8 уравненій, въ которыхъ  $p = \frac{1}{8} P$ .

$$\begin{aligned} 8v_0 - 3v_1 + 2v_2 &= 8 p \dots\dots\dots (1) \\ 12v_0 + 8v_1 - 3v_2 + 2v_3 &= 49 p \dots\dots\dots (2) \\ 18v_0 + 12v_1 + 8v_2 - 3v_3 + 2v_4 &= 121 p \dots\dots\dots (3) \\ 24v_0 + 18v_1 + 12v_2 + 8v_3 - 3v_4 + 2v_5 &= 224 p \dots\dots\dots (4) \\ 30v_0 + 24v_1 + 18v_2 + 12v_3 + 8v_4 - 3v_5 + 2v_6 &= 361 p \dots\dots\dots (5) \\ 29v_0 + 24v_1 + 19v_2 + 14v_3 + 9v_4 + 6v_5 - 4v_6 + 2v_7 &= 409 p \dots\dots\dots (6) \\ 7v_0 + 6v_1 + 5v_2 + 4v_3 + 3v_4 + 2v_5 + v_6 &= 120 p \dots\dots\dots (7) \\ v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 &= 32 p \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

Рѣшеніе этихъ уравненій, сдѣланное мною, даетъ:

$$\begin{aligned} v_0 &= 1,37676 & p &= 0,17209 P \\ v_1 &= 4,73961 & p &= 0,59245 P \\ v_2 &= 5,60238 & p &= 0,70029 P \\ v_3 &= 5,68457 & p &= 0,71057 P \\ v_4 &= 6,23883 & p &= 0,77985 P \\ v_5 &= 5,82808 & p &= 0,72851 P \\ v_6 &= 2,23125 & p &= 0,27891 P \\ v_7 &= 0,29852 & p &= 0,03731 P \end{aligned}$$

При этомъ сумма моментовъ опорныхъ силъ, расположенныхъ впереди передняго колеса, будетъ:

$$1,5v_7 Pl + 0,5v_6 Pl = (0,05597 + 0,13946) Pl = 0,19543 Pl.$$

Опредѣляя моментъ изгибающихъ силъ по уравненію Циммермана, найдемъ:

$$\frac{8 \times 2 + 7}{16 \times 2 + 40} Pl = 0,3194 Pl.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе Циммермана дало результатъ болѣе на 62%.

д) **Опредѣленіе линіи обертывающей послѣдовательныя положенія продольной оси рельса, изгибаемой статическимъ приложеніемъ одиночной перемѣнной нагрузки, состоящей изъ вѣса колеса съ неизмѣнно связанными съ нимъ частями, вѣса наибольшей поддерживаемой имъ нагрузки и статически же прилагаемыхъ силъ, равныхъ вертикальнымъ слагающимъ центробѣжныхъ силъ противовѣсовъ и силъ равныхъ давленіямъ шатуна на мотыль.**

**Составленіе діаграммы силъ.**

§ 41.

Для этого надо составить діаграмму вѣсхъ упомянутыхъ силъ для полнаго оборота колеса, въ родѣ прилагаемыхъ трехъ діаграммъ, составленныхъ проф. Ю. В. Ломоносовымъ, М. В. Гололовымъ и А. С. Раевскимъ для паровоза Прери, Сормовскаго завода 1—3—1. (Діаграммы приложены въ концѣ книги).

Затѣмъ, отложивъ длину окружности ведущихъ колесъ, по протяженію рельса, съ отмѣченными на немъ серединами шпаль, подраздѣлить эти послѣдніе промежутки на желаемое число равныхъ частей. На заготовленной таблицѣ въ видѣ прилагаемыхъ въ слѣдующемъ § 42 таблицъ I и II, отмѣтить номера подраздѣленій и противъ нихъ, въ столбцѣ подъ буквою  $S_i$ , написать опредѣленные по діаграммѣ величины силъ  $(1+m)q + Z_i$ . Формулы и таблицы данныя для случаевъ, когда рельсъ опирается на 4 или 6 шпаль, опредѣлятъ величины  $h_i$ , соотвѣтствующія полнымъ силамъ  $(1+m)q + Z_i$ . Въ слѣдующихъ таблицахъ I и II были приняты формулы и таблицы, соотвѣтствующія 4 шпаламъ.

Эти формулы, составленныя для случая, когда на рельсъ дѣйствуетъ одиночное колесо, примѣнены потому, что разстояніе передней, поддерживающей оси отъ передней ведущей равно 220 сантиметрамъ, а разстояніе между ведущими осями 200 сантиметровъ почти въ три раза превышаетъ разстоянія между серединами шпаль 71,9 сантиметра, при чемъ дѣйствіе одиночнаго колеса отличается отъ дѣйствительной нагрузки не болѣе чѣмъ на 6%.

Случай а) рассмотрѣнный профессоромъ Ю. В. Ломоносовымъ.

§ 42.

При составленіи диаграммы силъ, составленной проф. Ю. В. Ломоносовымъ (см. графич. таб. I), принято:

- $q = 1250$  килогр.
- $m = 5$  „
- $q(1 + m) = 7500$
- $Q = 134$  килогр., вѣсъ избыточнаго противовѣса
- $D = 119,4$  сант. діаметръ колеса
- $L = 75$  „
- $a = 7,5$  „
- $v = 50$  верстъ въ часъ
- $c = 1389$  сант. въ секунду
- $N = 2350$  килогр., центробѣжная сила противовѣса
- $\delta =$  косинусъ угла, составляемаго центробѣжною силою съ отвѣсомъ.

$$\frac{N}{q} = \frac{2350}{1260} = 1,88$$

$$\begin{array}{l} h' \text{ пониженія рельса подѣ грузомъ } q(1 + m) \\ h \text{ „ „ „ „ „ } q(1 + m + \frac{N}{q} \delta) \end{array}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{7,5}{1389} = 0,0054.$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = 0,00002916.$$

При такихъ данныхъ:

$$y^i = \frac{y_{i-1} + 0,0054 \omega_{i-1} + 0,010731 \left[ 2 \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{1}{3} \frac{N \delta^i}{q} + 1,88 \delta_{i-1} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]}{1 + \frac{0,003577}{h^i} (6 + 1,88 \delta_i)} \quad (8)$$

$$\omega = \omega_{i-1} + 2,6487 \left\{ 6 \left( 2 - \frac{y^i}{h^i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + 1,88 \left[ \delta_i \left( i - \frac{y^i}{h^i} \right) + \delta_{i-1} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \right\} \quad (9)$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ таблицу 1.

Динамическая таблица I.

При совершенно кругломъ колесѣ и прямомъ рельсѣ.

$\delta$	$Z_i$ Силы по диаграммѣ Ю. В. Ломоносова Килогр.	$Z_i$		Погруженія рельса при статическихъ нагрузкахъ:		Погружен. рельса при динамическ. дѣйствіи $y_i$ Сант.	Вертикальная скорость $\omega_i$ Сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$ = $\alpha$
		$1 + \frac{Z_i}{(1+m)q}$	$\frac{Z_i}{q}$	$(1+m)q$ $h'_i$ Сантиметры.	$(1+m)q + Z_i$ $h_i$ Сантиметры.			
0	0	1	0	0,2839	0,2839	0,2839	0	1
0,1	800	1,1067	0,610	0,2849	0,3153	0,2662	2,7401	0,8442
0,2	1.350	1,1800	1,080	0,2860	0,3375	0,2823	8,5467	0,8364
0,3	1.600	1,2133	1,280	0,2869	0,3481	0,3413	12,0016	0,9805
0,4	1.900	1,2533	1,520	0,2875	0,3603	0,4043	11,3168	1,1221
0,5	2.100	1,2800	1,608	0,2878	0,3684	0,4309	5,1699	1,1696
0,6	2.150	1,2867	1,720	0,2875	0,3699	0,4386	— 2,3422	1,1857
0,7	2.250	1,3000	1,800	0,2869	0,3730	0,4080	— 6,9699	1,0402
0,8	2.350	1,3133	1,880	0,2860	0,3756	0,3609	— 7,1236	0,9676
0,9	2.400	1,3200	1,920	0,2849	0,3761	0,3287	— 4,4386	0,8740
1,0	2,500	1,3333	2,000	0,2839	0,3785	0,3198	1,4813	0,8449
0,1	2,550	1,3400	2,040	0,2849	0,3818	0,3393	7,1401	0,8886
0,2	2.600	1,3467	2,080	0,2860	0,3872	0,3869	9,2184	1,0149
0,3	2.600	1,3467	2,080	0,2869	0,3864	0,4320	6,3990	1,1180
0,4	2.500	1,3333	2,000	0,2875	0,3833	0,4512	0,1210	1,1771
0,5	2.450	1,3267	1,960	0,2878	0,3818	0,4319	— 6,3979	1,1312
0,6	2.350	1,3113	1,880	0,2875	0,3770	0,3855	— 7,9431	1,0225
0,7	2.150	1,2867	1,720	0,2869	0,3692	0,3432	— 6,9732	0,9296
0,8	1.800	1,2400	1,440	0,2860	0,3546	0,3134	— 3,7838	0,9112
0,9	1.450	1,1933	1,160	0,2849	0,3400	0,3029	0,0352	0,8909
1,0	1.100	1,1467	0,880	0,2839	0,3255	0,3299	1,8583	1,0135
0,1	750	1,1000	0,600	0,2849	0,3134	0,3362	0,3519	1,0721
0,2	550	1,0733	0,440	0,2860	0,3070	0,3311	— 2,0415	1,0785
0,3	400	1,0533	0,320	0,2869	0,3022	0,3147	— 4,0719	1,0413
0,4	500	1,0667	0,400	0,2875	0,3067	0,2903	— 3,8530	0,9463
0,5	770	1,0127	0,616	0,2878	0,3174	0,2856	0,2864	0,8998
0,6	730	1,0973	0,584	0,2875	0,3155	0,3003	5,0252	0,9518
0,7	500	1,0667	0,400	0,2869	0,3060	0,3312	5,1466	1,0823
0,8	200	1,0267	0,160	0,2860	0,2936	0,3503	0,6008	1,1931
0,9	— 100	0,9867	— 0,080	0,2849	0,2811	0,3367	— 5,6497	1,1977
1,0	— 400	0,9467	— 0,320	0,2839	0,2688	0,2921	— 10,0541	1,0867
0,1	— 700	0,9069	— 0,560	0,2849	0,2583	0,2343	— 10,0261	0,9071
0,2	— 900	0,8800	— 0,720	0,2860	0,2517	0,1902	— 5,2758	0,7556
0,3	— 1.150	0,8467	— 0,812	0,2869	0,2429	0,1901	1,1282	0,7827
0,4	— 1.300	0,8267	— 1,040	0,2875	0,2377	0,2134	5,4582	0,8977
0,5	— 1.450	0,8067	— 1,160	0,2878	0,2322	0,2471	5,8202	1,0642
0,6	— 1.500	0,8000	— 1,200	0,2875	0,2330	0,2720	2,6756	1,1826
0,7	— 1.520	0,7974	— 1,216	0,2869	0,2288	0,2737	— 2,1435	1,1971
0,8	— 1.500	0,8000	— 1,200	0,2860	0,2288	0,2504	— 5,8412	1,0944
0,9	— 1.450	0,8067	— 1,160	0,2849	0,2298	0,2151	— 6,1287	0,9360
1,0	— 1.450	0,8067	— 1,160	0,2839	0,2290	0,1987	— 3,5401	0,8672
0,1	— 1.450	0,8067	— 1,160	0,2849	0,2298	0,1895	0,4096	0,8247
0,2	— 1.500	0,8000	— 1,200	0,2860	0,2288	0,2028	4,1010	1,8864
0,3	— 1.520	0,7974	— 1,216	0,2869	0,2288	0,2306	4,1145	1,0078
0,4	— 1.500	0,8000	— 1,200	0,2875	0,2300	0,2506	2,8778	1,0895
0,5	— 1.450	0,8067	— 1,160	0,2878	0,2322	0,2595	0,2377	1,1172
0,6	— 1.350	0,8200	— 1,080	0,2875	0,2358	0,2441	— 1,7235	1,0352
0,7	— 1.150	0,8467	— 0,812	0,2869	0,2429	0,2356	— 1,6927	0,9617
0,8	— 1.000	0,8667	— 0,800	0,2860	0,2479	0,2299	— 0,4294	0,9465

$\delta$	$Z_i$ Силы поддиаграммъ Ю. В. Ломоносова Килогр.	$1 + \frac{Z_i}{(1+m)q}$	$\frac{Z_i}{q}$	Погруженія рельса при статическихъ нагрузкахъ:		Погружен. рельса при динамическ. дѣйстви $y_i$ Сант.	Вертикальная скорость $\omega_i$ Сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$ = $\alpha$
				$(1+m)q$ $h'_i$ Сантиметры.	$(1+m)q + Z_i$ $h'_i$ Сантиметры.			
0,9	700	0,9067	-0,560	0,2849	0,2583	0,2325	1,7469	0,9001
1,0	0	1	0	0,2839	0,2839	0,2466	5,2746	0,8686
0,1	800	1,1067	0,640	0,2849	0,3153	0,2857	9,0143	0,9061
0,2	1,350	1,1800	1,080	0,2860	0,3375	0,3400	10,5289	1,0073
0,3	1,600	1,2133	1,280	0,2869	0,3481	0,3929	7,9114	1,1287
0,4	1,900	1,2533	1,520	0,2875	0,3603	0,4209	2,0806	1,1682
0,5	2,100	1,2800	1,680	0,2878	0,3684	0,4151	3,8489	1,1268
0,6	2,150	1,2867	1,720	0,2875	0,3699	0,3829	7,1539	1,0351
0,7	2,250	1,3000	1,800	0,2869	0,3730	0,3435	7,7273	0,9209
0,8	2,350	1,3013	1,880	0,2860	0,3756	0,3118	3,0450	0,8377
0,9	2,400	1,3200	1,920	0,2849	0,3761	0,3080	4,1778	0,8190
1,0	2,500	1,3333	2,000	0,2839	0,3785	0,3484	9,6977	0,9205
0,1	2,550	1,3400	2,040	0,2849	0,3818	0,4058	10,0449	1,0628
0,2	2,600	1,3467	2,080	0,2860	0,3852	0,4493	5,1463	1,1664
0,3	2,600	1,3467	2,080	0,2869	0,3864	0,4564	2,2929	1,1812
0,4	2,500	1,3333	2,000	0,2875	0,3833	0,4254	8,4975	1,1098
0,5	2,450	1,3267	1,960	0,2878	0,3818	0,3616	9,7688	0,9471

Въ этой таблицѣ  $\frac{y_i}{h_i} = \alpha$  соотвѣтствуетъ коэффициенту  $\alpha$ , поставленному въ формулѣ проф. Ю. В. Ломоносова.

Изъ таблицы 1, изъ столбца  $\frac{y_i}{h_i} = \alpha$ , видно, что динамическое дѣйствіе разсматриваемой совокупности силъ болѣе всего превышаетъ статическое ихъ дѣйствіе при  $\delta = 0,4$  второго пролета. Мѣра превышенія почти 16%. Для сравненія этого наибольшаго динамическаго дѣйствія со статическимъ дѣйствіемъ колеса, съ нагрузкою его рессоры безъ добавочныхъ силъ  $Z$ , надо сравнить соотвѣтствующія  $y_i$  съ  $h'_i$ . Искомое отношеніе будетъ  $\frac{4444}{2875} = 1,547$ .

**б) Случай съ ведущимъ колесомъ паровоза Прери.**

При составленіи диаграммы силъ относящейся къ паровозу Прери (графическая табл. П) принять въ расчетъ вѣсъ ведущаго колеса съ осью и принадлежностями въ 1665 килогр.; нагрузка оси 6185 килогр. силы инерціи противовѣсовъ и другихъ механизмовъ и силы, производимыя паромъ, передаваемыя колесу въ вертикальномъ направленіи, при скоростяхъ въ 52 и 104 километра въ часъ. Моментъ инерціи рельса  $J = 925,7$  сант.<sup>4</sup>, коэффициентъ балласта  $C = 4$  и сила  $K = 9000$  килограммъ при погруженіи шпалъ на 1 сант.

При рельсахъ совершенно прямыхъ и колесахъ совершенно круглыхъ нѣтъ надобности включать въ таблицу еще какихъ нибудь дополнительныхъ данныхъ. Если же рельсы или колеса имѣютъ впадины, то положеніе и размѣры углубленія впадинъ должны быть указаны въ таблицѣ съ необходимою степенью точности, какъ это и сдѣлано во вторыхъ частяхъ динамическихъ таблицъ I-bis и II-bis. Въ столбцахъ, подъ буквою  $y_i'$ , указаны углубленія, нерѣдко встрѣчающіяся на колесахъ.

Числа въ остальныхъ столбцахъ этихъ таблицъ вычислены по установленнымъ выше уравненіямъ, имѣя въ виду, что рельсъ опирается на 4 шпалы и что

$$\text{величина } A = \frac{2.000.000 \times 925,7}{9000 \times (71,9)^3} = 0,55344.$$

$v = 52$  килом. въ часъ, или  $c = 1494$  сант. въ 1 секунду.

$$a = 7,19 \text{ сант.}, \quad \frac{a}{c} = 0,005 \text{ сек.} \left( \frac{a}{c} \right)^2 = 0,0000248.$$

$$\frac{g}{8,3} (t-t)^2 = 0,0010137, \quad \frac{1+m}{3} = \frac{4,71}{3} = 1,57.$$

$$y_i = \frac{\left\{ \begin{array}{l} y_{i-1} + y_i' - y_{i-1}' + 0,005 \omega_{i-1} + 0,009.123 \left[ 1,57 \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{Z_i}{q} + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \end{array} \right\}}{1 + \frac{0,002886}{h_i} \left( 4,71 + \frac{Z_i}{q} \right)}.$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 2,4427 \left[ 4,7 \left( 2 - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{Z_i}{q} \left( 1 - \frac{y_i}{h_i} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Динамическая таблица I.

Колесо совершенно круглое. Рельс прямой.

$\delta$	Z Клгр.	$S_i$ (1+m)q+Zi	$h_i$ Сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y_i$ Сант.	$\omega_i$ Сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q}$ $\frac{y_i}{h}$
0,	-700	7.150	0,3543	-0,4204	0,3543	0	1	0,9109
0,1	-420	7.430	0,3681	-0,2522	0,3554	0,1835	0,9655	0,9139
0,2	-170	7.680	0,3816	-0,1021	0,3584	1,0499	0,9392	0,9189
0,3	+ 80	7.930	0,3957	0,0480	0,3610	2,7475	0,9125	0,9219
0,4	330	8.180	0,4091	0,1982	0,3801	4,9196	0,9291	0,9682
0,5	800	8.650	0,4327	0,4805	0,4104	7,2787	0,9484	1,0451
0,6	1.170	9.020	0,4511	0,7027	0,4519	8,4543	1,0017	1,1511
0,7	1.520	9.370	0,4681	0,9129	0,4937	7,6834	1,0546	1,2589
0,8	1.850	9.700	0,4820	1,1111	0,5285	5,5654	1,0964	1,3543
0,9	2.170	10.020	0,4964	1,3033	0,5502	3,2142	1,1084	1,4149
1,0	2.480	10.330	0,5120	1,4900	0,5596	0,2184	1,0930	1,4336
0,1	2.750	10.600	0,5231	1,6516	0,5554	-2,0830	1,0577	1,4283
0,2	2.950	10.800	0,5367	1,7718	0,5423	-3,1426	1,0104	1,3902
0,3	3.160	11.010	0,5501	1,8979	0,5276	-2,6479	0,9591	1,3453
0,4	3.200	11.050	0,5526	1,9219	0,5188	-0,9730	0,9372	1,3194
0,5	3.180	11.030	0,5517	1,9100	0,5196	0,9825	0,9418	1,3235
0,6	3.120	10.970	0,5486	1,8739	0,5200	2,7588	0,9479	1,3248
0,7	2.950	10.800	0,5396	1,7718	0,5377	3,6508	0,9965	1,3800
0,8	2.700	10.550	0,5242	1,6216	0,5559	2,6839	1,0662	1,4331
0,9	2.350	10.200	0,5053	1,4114	0,5643	-1,0269	1,1801	1,5335
1,0	2.170	10.020	0,4966	1,3033	0,5482	-5,2391	1,1039	1,4091
0,1	1.960	9.810	0,4860	1,1711	0,5161	-7,6333	1,0619	1,3272
0,2	1.750	9.600	0,4770	1,0510	0,4755	-8,4702	0,9968	1,2191
0,3	1.550	9.400	0,4696	0,9309	0,4352	-7,4184	0,9268	1,1099
0,4	1.380	9.230	0,4611	0,8288	0,4045	-4,7531	0,8772	1,0314
0,5	1.160	9.010	0,4507	0,6967	0,3896	-1,3047	0,8644	0,9922
0,6	960	8.810	0,4406	0,5766	0,3921	1,9719	0,8899	0,9933
0,7	800	8.650	0,4322	0,4805	0,4084	4,0183	0,9449	1,0413
0,8	550	8.400	0,4174	0,3303	0,4513	4,3064	1,0333	1,1058
0,9	250	8.100	0,4013	0,1501	0,4503	2,4507	1,1221	1,1578
1,0	-150	7.700	0,3816	-0,0901	0,4552	-1,1681	1,1929	1,1702
0,1	-400	7.450	0,3691	-0,2402	0,4398	-5,0016	1,1525	1,0938
0,2	-560	7.290	0,3622	-0,3363	0,4078	-8,0039	1,1258	1,0455
0,3	-700	7.150	0,3572	-0,4204	0,3633	-9,5236	1,0171	0,9266
0,4	-750	7.100	0,3551	-0,4504	0,3168	-8,5523	0,8921	0,8069
0,5	-780	7.070	0,3536	-0,4685	0,2812	-5,3454	0,7952	0,7162
0,6	-780	7.070	0,3536	-0,4685	0,2660	-0,6682	0,7523	0,6776
0,7	-730	7.120	0,3557	-0,4384	0,2756	4,2727	0,7748	0,7030
0,8	-620	7.230	0,3593	-0,3724	0,3082	8,1563	0,8578	0,7901
0,9	-480	7.370	0,3651	-0,2882	0,3551	9,9690	0,9713	0,9120
1,0	-250	7.600	0,3766	-0,1501	0,4057	9,4192	1,0773	1,0430
0,1	0	7.850	0,3889	0	0,4482	6,8104	1,1524	1,1524
0,2	480	8.330	0,4139	0,2882	0,4443	3,2830	1,1459	1,2160
0,3	800	8.650	0,4322	0,4804	0,4512	0,9485	1,0440	1,1505
0,4	1.180	9.030	0,4516	0,7087	0,4544	0,3137	1,0062	1,1575
0,5	1.580	9.430	0,4717	0,9490	0,4569	0,6689	0,9686	1,1637
0,6	1.950	9.800	0,4901	1,1711	0,4635	1,8809	0,9457	1,1807
0,7	2.250	10.100	0,5046	1,3513	0,4771	3,4591	0,9455	1,2166
0,8	2.750	10.600	0,5267	1,6516	0,4992	5,0683	0,9478	1,2799
0,9	3.150	11.000	0,5449	1,8918	0,5291	6,3450	0,9710	1,3668
1,0	3.550	11.400	0,5650	2,1321	0,5636	6,8551	0,9975	1,4488

$\delta$	Z Клгр.	$S_i$ (1+m)q+Zi	$h_i$ Сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y_i$ Сант.	$\omega_i$ Сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
0,1	3,850	11,700	0,5796	2,3123	0,5984	6,3418	1,0324	1,5389
0,2	4,150	12,000	0,5963	2,4925	0,6281	4,8906	1,0533	1,6103
0,3	4,300	12,150	0,6070	2,5832	0,6486	2,7757	1,0685	1,6539
0,4	4,400	12,250	0,6126	2,6426	0,6573	0,2499	1,0729	1,6745
0,5	4,450	12,300	0,6152	2,6727	0,6436	-0,7364	1,0461	1,6392
0,6	4,420	12,270	0,6136	2,6546	0,6369	-2,2474	1,0379	1,6224
0,7	4,330	12,180	0,6085	2,6006	0,6235	-3,3669	1,0246	1,5899
0,8	4,200	12,050	0,5988	2,5225	0,6058	-4,0138	1,0118	1,5535
0,9	3,950	11,800	0,5846	2,3723	0,5859	-4,3748	1,0022	1,5066
1,0	3,700	11,550	0,5724	2,2222	0,5651	-4,1228	0,9864	1,4525
0,1	3,320	11,170	0,5534	1,9940	0,5466	-3,6917	0,9877	1,4055
0,2	2,920	10,770	0,5352	1,7537	0,5300	-3,3361	0,9902	1,3587
0,3	2,600	10,450	0,5221	1,5615	0,5149	-2,9928	0,9865	1,3133
0,4	2,280	10,130	0,5066	1,3693	0,5016	-2,6560	0,9901	1,2778
0,5	2,000	9,850	0,4927	1,2012	0,4883	-2,3891	0,9915	1,2442
0,6	1,780	9,630	0,4816	1,0690	0,4779	-2,1534	0,9922	1,2173
0,7	1,560	9,410	0,4701	0,9369	0,4683	-1,9912	0,9962	1,1942
0,8	1,300	9,150	0,4547	0,7808	0,4590	-2,0417	1,0095	1,1768
0,9	1,020	8,870	0,4394	0,6126	0,4488	-2,3318	1,0214	1,1542
1,0	700	8,550	0,4232	0,4204	0,4346	-2,9997	1,0312	1,1233
0,1	350	8,200	0,4062	0,2102	0,4184	-3,7436	1,0301	1,0761
0,2	50	7,900	0,3926	0,0300	0,3953	-4,1782	1,0070	1,0135
0,3	-250	7,600	0,3797	-0,1501	0,3753	-4,1743	0,9884	0,9570
0,4	-500	7,350	0,3676	-0,3002	0,3557	-4,0345	0,9677	0,9062
0,5	-650	7,200	0,3601	-0,3939	0,3381	-3,0443	0,9390	0,8613
0,6	-760	7,090	0,3546	-0,4564	0,3259	-1,5630	0,9190	0,8301
0,7	-830	7,020	0,3507	-0,4985	0,3227	0,0949	0,9202	0,8229
0,8	-850	7,000	0,3478	-0,5105	0,3275	1,5087	0,9418	0,8400
0,9	-830	7,020	0,3478	-0,4985	0,3382	2,3866	0,9725	0,8697
1,0	-600	7,250	0,3575	-0,3603	0,3521	2,2075	1,0435	0,9639

**Таблица I-bis.**

Колесо со впадиной, глубиной 0,2 сантим., рельс прямой.  
Впадина вступает на 6-мь пролетъ.

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q+Z_i$	$h_i$	$\frac{Z_i}{q}$	$y'_i$	$y_i$	$\omega_i$	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
1,0	3,550	11,400	0,5650	2,1321		0,5636	6,8551	0,9975	1,4488
0,1	3,850	11,700	0,5796	2,3123	0	0,5984	6,3418	1,0324	1,5389
0,2	4,150	12,000	0,5963	2,4925	-0,05	0,5797	6,2765	0,9721	1,4866
0,3	4,300	12,150	0,6070	2,5832	-0,10	0,5650	7,9973	0,9308	1,4407
0,4	4,400	12,250	0,6126	2,6426	-0,15	0,5623	10,7007	0,9179	1,4326
0,5	4,450	12,300	0,6152	2,6727	-0,20	0,5736	13,3906	0,9324	1,4616
0,6	4,420	12,270	0,6136	2,6546	-0,15	0,6932	12,1485	1,1297	1,7659
0,7	4,330	12,180	0,6085	2,6006	-0,10	0,7898	4,5060	1,2979	2,0140
0,8	4,200	12,050	0,5988	2,5225	-0,05	0,3352	-7,7717	1,3948	2,1412

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q + Z_i$	$h_i$	$\frac{Z_i}{q}$	$y'_i$	$y_i$	$\omega_i$	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q}$	$\frac{y_i}{h_i}$
0,9	3.950	11.800	0,5846	2,3723	0	0,8138	-21,5040	1,3920	2,0926	
1,0	3.700	11.550	0,5724	2,2222		0,6783	-31,3992	1,1850	1,7437	
0,1	3.320	11.170	0,5534	1,9940		0,5127	-33,3239	0,9264	1,3184	
0,2	2.920	10.770	0,5352	1,7537		0,3584	-26,9134	0,6697	0,9189	
0,3	2.600	10.450	0,5221	1,5615		0,2535	-11,3945	0,4855	0,6463	
0,4	2.280	10.130	0,5066	1,3693		0,2367	4,3738	0,4672	0,6030	
0,5	2.000	9.850	0,4927	1,2012		0,2957	18,0359	0,6002	0,7532	
0,6	1.780	9.630	0,4816	1,0690		0,4106	25,8761	0,8526	1,0716	
0,7	1.560	9.410	0,4701	0,9369		0,5458	25,7488	1,1601	1,3904	
0,8	1.300	9.150	0,4547	0,7808		0,6753	17,0503	1,4851	1,7311	
0,9	1.020	8.870	0,4394	0,6126		0,7270	2,0623	1,6545	1,8696	
1,0	700	8.550	0,4232	0,4204		0,6973	-15,8306	1,7515	1,9079	
0,1	350	8.200	0,4062	0,2102		0,6187	-31,6817	1,5379	1,6066	
0,2	50	7.900	0,3926	0,0300		0,4353	-39,3904	1,1088	1,1160	
0,3	-250	7.600	0,3797	-0,1501		0,2391	-36,5330	0,6298	0,6098	
0,4	-500	7.350	0,3676	-0,3002		0,0824	-24,0120	0,2240	0,2500	
0,5	-650	7.200	0,3601	-0,3939		0,0105	-5,3920	0,0290	0,0266	
0,6	-760	7.090	0,3546	-0,4564		0,0335	14,2072	0,0945	0,0854	
0,7	-830	7.020	0,3507	-0,4985		0,1474	30,0080	0,4203	0,3760	
0,8	-850	7.000	0,3478	-0,5105		0,3212	36,7622	0,9232	0,8233	
0,9	-880	7.020	0,3478	-0,4985		0,4935	33,2677	1,4189	1,2689	
1,0	-600	7.250	0,3375	-0,3603		0,6347	19,6336	1,8808	1,7373	

в) Случай съ ведущимъ колесомъ паровоза Прери, идущимъ со скоростью 104 километра.

§ 43.

Графическая таблица III динамическихъ погружений рельса, имѣющаго моментъ инерціи  $J = 925,7$  сант., опирающагося на 4 шпалы, съ разстояніямъ между ихъ серединами въ 71,9 сант., при  $K = 9000$  килогр., подъ давленіемъ колеса ведущей оси паровоза Сормовскаго завода Прери 1—3—1.

Колесо діаметромъ въ 1830 миллим., вѣсомъ со всѣми своими принадлежностями  $q = 1665$  клгр., при спокойномъ состояніи производитъ на рельсъ давленіе въ 7850 килогр.

При поступательной скорости 104 килом. въ часъ, дѣйствующія на колесо силы со стороны: тяжести, пара, силъ инерціи механизмовъ и противовѣсовъ опредѣлены по диаграммѣ инженеровъ М. В. Гололобова и А. С. Раевского.

Добавочныя силы  $Z$ , прилагаемыя къ колесу сверхъ силы тяжести, опредѣлены по той же діаграммѣ.

Примѣняемыя при исчисленіяхъ величины и уравненія:

$$A = \frac{2.000.000 \times 925,7}{9000 \times (71.9)^3} = 0,55344; \quad v = 104 \text{ километровъ въ часъ,}$$

$$c = 2888 \text{ сант. въ 1 секунду}$$

$$a = 71.9 \text{ сант. } \frac{a}{c} = 0,0025 \text{ секунду}$$

$$\frac{g}{8 \times 3} (t - t_1)^2 = 0,0002281 : \frac{1+m}{3} = 1.57$$

$$y_i = \frac{\left\{ \begin{array}{l} y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0025 \omega_{i-1} + 0,002281 \times \\ \times \left[ 1.57 \left( 4 - 3 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + \frac{1}{3} \frac{Z_i}{q} + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \end{array} \right\}}{1 + \frac{0,000721}{y_i} \left( 4,71 + \frac{Z_i}{q} \right)}$$

$$\omega_{i-1} = \omega_{i-1} + 1.2212 \left[ 2 - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right] + \frac{Z_i}{q} \left( 1 - \frac{y_i}{h_i} \right) + \frac{Z_{i-1}}{q} \left( 1 - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Динамическая таблица II.  
Колесо совершенно круглое  $y' = 0$ , рельс прямая.

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q+Z_i$	$h_i$ сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
0	— 850	7.000	0,3462	—0,5105	0,3462	0	1	0,8917
0,1	— 900	6.950	0,3443	—0,5405	0,3462	—0,0231	1,0055	0,8903
0,2	— 960	6.890	0,3424	—0,5766	0,3462	—0,1024	1,0102	0,8868
0,3	— 990	6.860	0,3427	—0,5946	0,3459	—0,2066	1,0093	0,8821
0,4	—1,030	6.820	0,3401	—0,6186	0,3453	—0,3387	1,0159	0,8827
0,5	—1,060	6.790	0,3396	—0,6366	0,3443	—0,4864	1,0138	0,8769
0,6	—1,090	6.760	0,3351	—0,6547	0,3429	—0,6705	1,0234	0,8813
0,7	—1,110	6.740	0,3367	—0,6667	0,3410	—0,8492	1,0128	0,8697
0,8	—1,130	7.720	0,3339	—0,6787	0,3388	—0,9849	1,0147	0,8687
0,9	—1,150	6.700	0,3319	—0,6907	0,3362	—1,1158	1,0121	0,8639
1,0	—1,180	6.670	0,3306	—0,7087	0,3333	—1,2150	1,0082	0,8567
0,1	—1,150	6.700	0,3319	—0,6907	0,3303	—1,2213	0,9951	0,8494
0,2	—1,120	6.730	0,3344	—0,6727	0,3273	—1,0945	0,9791	0,8395
0,3	—1,070	6.780	0,3387	—0,6427	0,3250	—0,7910	0,9595	0,8288
0,4	— 970	6.880	0,3441	—0,5826	0,3237	—0,2921	0,9107	0,7982
0,5	— 850	7.000	0,3501	—0,5105	0,3238	0,3903	0,9249	0,8248
0,6	— 730	7.120	0,3561	—0,4384	0,3258	0,5401	0,9149	0,8299
0,7	— 610	7.240	0,3617	—0,3664	0,3283	1,4592	0,9077	0,8373
0,8	— 480	7.370	0,3662	—0,2883	0,3332	2,4331	0,9099	0,8543
0,9	— 350	7.500	0,3716	—0,2102	0,3405	3,3774	0,9163	0,8755
1,0	— 240	7.610	0,3772	—0,1441	0,3501	4,2358	0,9282	0,8999
0,1	— 100	7.750	0,3839	—0,0601	0,3616	4,9639	0,9420	0,9304
0,2	0	7.850	0,3901	0	0,3748	5,5175	0,9608	0,9608
0,3	80	7.930	0,3962	0,0480	0,3891	5,8457	0,9822	0,9923
0,4	160	8.010	0,4006	0,0960	0,4040	5,8997	1,0084	1,0291
0,5	220	8.070	0,4037	0,1320	0,4186	5,6900	1,0367	1,0658
0,6	270	8.120	0,4061	0,1620	0,4322	5,1625	1,0643	1,1010
0,7	280	8.130	0,4062	0,1680	0,4441	4,2261	1,0933	1,1324
0,8	290	8.140	0,4045	0,1740	0,4544	2,9370	1,1234	1,1650
0,9	280	8.130	0,4028	0,1680	0,4599	1,3595	1,1418	1,1823
1,0	230	8.080	0,4004	0,1380	0,4612	—0,3809	1,1519	1,1858
0,1	180	8.030	0,3978	0,1080	0,4595	—2,1884	1,1550	1,1816
0,2	120	7.970	0,3960	0,0720	0,4519	—3,9208	1,1411	1,1587
0,3	90	7.940	0,3967	0,0540	0,4402	—5,3799	1,1097	1,1226
0,4	70	7.920	0,3961	0,0420	0,4253	—6,4447	1,0738	1,0835
0,5	80	7.930	0,3967	0,0480	0,4083	—7,0437	1,0295	1,0401
0,6	100	7.950	0,3976	0,0601	0,3905	—7,1107	0,9821	0,9947
0,7	150	8.000	0,3997	0,0900	0,3732	—6,6188	0,9337	0,9516
0,8	250	8.100	0,4025	0,1500	0,3577	—5,5718	0,8887	0,9170
0,9	350	8.200	0,4062	0,2102	0,3470	—4,0383	0,8542	0,8924
1,0	480	8.330	0,4128	0,2883	0,3393	—2,0809	0,8220	0,8723
0,1	730	8.580	0,4251	0,4384	0,3370	0,3042	0,7927	0,8665
0,2	980	8.830	0,4388	0,5986	0,3412	3,0447	0,7775	0,8746
0,3	1,250	9.100	0,4546	0,7508	0,3552	5,9411	0,7813	0,9058
0,4	1,510	9.360	0,4681	0,9069	0,3737	8,7789	0,7283	0,9876
0,5	1,740	9.590	0,4797	1,0450	0,3990	11,3393	0,8319	1,0159
0,6	1,950	9.800	0,4901	1,1711	0,4238	13,4887	0,8647	1,0796
0,7	2,130	9.980	0,4986	1,2792	0,4598	15,0276	0,9221	1,1725
0,8	2,270	10.120	0,5029	1,3633	0,4985	15,5393	0,9912	1,2779
0,9	2,400	10.250	0,5078	1,4414	0,5373	15,1686	1,0581	1,3818

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q + Z_i$	$h_i$ сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
1,0	2,540	10,390	0,5149	1,5255	0,5740	13,8608	1,1147	1,4755
0,1	2,640	10,490	0,5197	1,5855	0,6063	11,7191	1,1667	1,5592
0,2	2,730	10,580	0,5257	1,6396	0,6323	8,8587	1,2029	1,6214
0,3	2,780	10,630	0,5311	1,6697	0,6505	5,5360	1,2248	1,6587
0,4	2,800	10,650	0,5326	1,6817	0,6597	1,9230	1,2388	1,6808
0,5	2,820	10,670	0,5337	1,9937	0,6599	-1,7846	1,2365	1,6809
0,6	2,820	10,670	0,5336	1,6937	0,6510	-5,3489	1,2200	1,6584
0,7	2,820	10,670	0,5331	1,6937	0,6331	-8,5334	1,1877	1,6146
0,8	2,820	10,670	0,5302	1,6937	0,6079	-10,9919	1,1274	1,5326
0,9	2,850	10,700	0,5301	1,7117	0,5782	-12,7006	1,0908	1,4870
1,0	2,890	10,740	0,5323	1,7357	0,5451	-13,5915	1,0229	1,4000
0,1	2,900	10,750	0,5326	1,7417	0,5111	-13,4537	0,9596	1,3143
0,2	2,880	10,730	0,5332	1,7297	0,4784	-12,3279	0,8971	1,2263
0,3	2,850	10,700	0,5346	1,7117	0,4499	-10,2939	0,8416	1,1472
0,4	2,780	10,630	0,5316	1,6697	0,4274	-7,5440	0,8041	1,0890
0,5	2,700	10,550	0,5277	1,6216	0,4125	-4,3349	0,7817	1,0507
0,6	2,600	10,450	0,5226	1,5616	0,4059	-0,9421	0,7767	1,0340
0,7	2,400	10,250	0,5121	1,4414	0,4077	2,2984	0,7956	1,0390
0,8	2,200	10,050	0,4994	1,3213	0,4169	5,0461	0,8348	1,0689
0,9	2,000	9,850	0,4880	1,2012	0,4331	7,0737	0,8874	1,1136
1,0	1,780	9,630	0,4772	1,0691	0,4523	8,2544	0,9478	1,1629
0,1	1,500	9,350	0,4632	0,9009	0,4736	8,4683	1,0225	1,2180
0,2	1,260	9,110	0,4527	0,7568	0,4942	7,7046	1,0916	1,2669
0,3	980	8,830	0,4411	0,5986	0,5117	6,0582	1,1601	1,3050
0,4	700	8,550	0,4276	0,4204	0,5241	3,6116	1,2256	1,3350
0,5	480	8,330	0,4167	0,2883	0,5295	0,5500	1,2710	1,3488
0,6	100	7,950	0,3981	0,0601	0,5268	-2,9796	1,3232	1,3401
0,7	— 200	7,650	0,3822	-0,1202	0,5146	-6,7957	1,3464	1,3122
0,8	— 480	7,370	0,3662	-0,2883	0,4929	-10,6072	1,3460	1,2638
0,9	— 830	7,020	0,3478	-0,4985	0,4619	-14,1547	1,3281	1,1877
1,0	— 1,100	6,750	0,3345	-0,6607	0,4226	-17,1369	1,2633	1,0864

Таблица II-bis.

Колесо со впадиной, глубиной 0,2 сантимет., рельс прямой.  
Впадина вступает на 6-мъ пролетѣ.

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q + Z_i$	$h_i$ сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
1,0	2,540	10,390	0,5149	1,5255		0,5740	13,8608	1,1147	1,4755
0,1	2,640	10,490	0,5197	1,5855	0	0,6063	11,7091	1,1667	1,5589
0,2	2,730	10,580	0,5257	1,6396	-0,05	0,5828	9,5895	1,1085	1,4941
0,3	2,780	10,630	0,5311	1,6697	-0,10	0,5550	8,3988	1,0450	1,4152
0,4	2,800	10,650	0,5326	1,6817	-0,15	0,5259	8,1471	0,9873	1,3396
0,5	2,820	10,670	0,5337	1,6937	-0,20	0,4967	7,8459	0,9307	1,2652
0,6	2,820	10,670	0,5336	1,6937	-0,15	0,5671	7,8967	1,0628	1,4448
0,7	2,820	10,670	0,5331	1,6937	-0,10	0,6350	6,1932	1,1911	1,6192
0,8	2,820	10,670	0,5302	1,6937	-0,05	0,6966	2,4244	1,3138	1,7860
0,9	2,850	10,700	0,5301	1,7117	0	0,7463	-3,1744	1,4078	1,9191

$\delta$	$Z_i$	$(1+m)q + Z_i$	$h_i$ сант.	$\frac{Z_i}{q}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\frac{S_i}{(1+m)q} \frac{y_i}{h_i}$
1,0	2.890	10.740	0,5323	1,7357		0,7299	— 9,0365	1,3526	1,8508
0,1	2,900	10.750	0,5326	1,7417		0,7007	—14,2911	1,3157	1,8020
0,2	2.880	10.730	0,5332	1,7297		0,6593	—18,6267	1,2365	1,6903
0,3	2.850	10.700	0,5346	1,7117		0,6086	—21,5193	1,1385	1,5520
0,4	2.780	10.630	0,5316	1,6697		0,5526	—22,9118	1,0396	1,4079
0,5	2.700	10.550	0,5277	1,6216		0,4958	—22,7528	0,9395	1,2628
0,6	2.600	10.450	0,5226	1,5616		0,4406	—21,0837	0,8432	1,1226
0,7	2.400	10.250	0,5121	1,4414		0,3913	—18,1184	0,7641	0,9978
0,8	2.200	10.050	0,4994	1,3213		0,3508	—14,1602	0,7023	0,8992
0,9	2.000	9.850	0,4880	1,2012		0,3211	— 9,4907	0,6580	0,8257
1,0	1.780	9.630	0,4772	1,0691		0,3037	— 4,4488	0,6364	0,7808
0,1	1.500	9.350	0,4632	0,9009		0,2989	0,5406	0,6450	0,7683
0,2	1.260	9.110	0,4527	0,7568		0,3062	5,1252	0,6764	0,7850
0,3	980	8.830	0,4411	0,5986		0,3242	8,9969	0,7349	0,8267
0,4	700	8.550	0,4276	0,4204		0,3512	11,8290	0,8214	0,8947
0,5	480	8.330	0,4167	0,2883		0,3831	13,4373	0,9193	0,9756
0,6	100	7.950	0,3981	0,0601		0,4175	13,6446	1,0487	1,0621
0,7	— 200	7.650	0,3822	—0,1202		0,4505	12,3620	1,1707	1,1488
0,8	— 480	7.370	0,3662	—0,2883		0,4786	9,7236	1,3042	1,2245
0,9	— 830	7.020	0,3478	—0,4985		0,4985	5,8636	1,4331	1,2816
1,0	—1.100	6.750	0,3345	—0,6607		0,5075	1,0904	1,5172	1,3048

**Приближенные формулы, определяющие траекторию точки прикосновения катящегося колеса с рельсом в случае малой кривизны обертывающей, допускающей замену ее прямой.**

**Возможность такого допущения.**

§ 44.

В приложенной выше (см. отдѣлъ б) таблицѣ XI приведены ординаты линий, обертывающих изогнутыя продольныя оси рельсъ, вычисленныхъ для сильно нагруженныхъ колесъ ( $P = 10000$  килогр.), опирающихся на пути, характеризуемые разными величинами числа  $A$ , отъ  $A = 0,5$  до  $A = 2$ , т. е. при числахъ, почти обнимающихъ всѣ практическіе случаи. Вычисления сдѣланы въ двухъ предположеніяхъ: съ одной стороны допуская, что рельсъ опирается на 4 равно отстоящія и равно упругія опоры и, съ другой, что онъ опирается на 6 подобныхъ же опоръ.

Во всѣхъ восьми приведенныхъ случаяхъ величины вычисленныхъ ординатъ рассматриваемой обертки мало отличаются отъ средней ихъ величины

Наибольшія различія ординатъ оказались при  $A = 1,5$ .

Въ этомъ случаѣ, при поддержкѣ рельса 4 опорами, наибольшая ордината  $h_{\max.} = 0,3689$  сантим. и наименьшая  $y_{\min.} = 0,3489$ ; при средней величинѣ  $h_{\text{ср.}} = 0,3532$ ; отклоненія составляютъ  $h_{\max.} - h_{\text{ср.}} = 0,0137$  сантим.,  $h_{\text{ср.}} - h_{\min.} = 0,0063$  или  $+3,9\%$  и  $-1,8\%$ .

При 6 опорахъ  $h_{\max.} = 0,3447$ ,  $h_{\min.} = 0,3073$  при  $h_{\text{ср.}} = 0,3342$ . Наибольшія отклоненія оказываются:  $h_{\max.} - h_{\text{ср.}} = 0,0105$  и  $h_{\text{ср.}} - h_{\min.} = 0,0269$  или  $+3,14\%$  и  $-8\%$ .

Во всѣхъ другихъ случаяхъ уклоненія значительно меньше. Эти данныя указываютъ, что, не дѣлая ошибки болѣе 8%, а чаще не дѣлая ошибокъ значительно меньшихъ, можно разсматривать обертку какъ прямую линію. При дѣйствіи нѣсколькихъ и при томъ довольно близко другъ къ другу расположенныхъ колесъ, обертка будетъ еще болѣе приближаться къ прямой линіи.

### Дифференціальное уравненіе движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при прямолинейной обертывающей.

#### § 45.

Ограничиваясь этими предѣлами точности, можно значительно упростить уравненіе движенія вертикальной проекціи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ въ томъ случаѣ, когда колеса и рельсы будутъ имѣть совершенно правильныя формы на ихъ поверхностяхъ катанія и когда колеса будутъ хорошо уравновѣшены. Въ этомъ случаѣ, примѣняя уравненіе (17), надо считать

$$Z = 0 \dots \dots \dots (1)$$

и

$$P = q \left( 1 + m + \frac{\bar{y}}{l} \right) \frac{y}{h} \dots \dots \dots (2)$$

или, пренебрегая очень малою величиною  $\frac{\bar{y}}{l}$  по сравненію съ  $1 + m$ ,

$$P = q (1 + m) \frac{y}{h}.$$

Вставляя эти величины  $Z$  и  $P$  въ уравненіе (17) получимъ

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = q + \frac{mq}{l} (l + \bar{y}) - \left( \frac{mq}{l} + (1 + m) \frac{q}{h} \right) y \dots \dots \dots (3)$$

затѣмъ называя

$$a = \left[ 1 + m \left( 1 + \frac{\bar{y}}{l} \right) \right] g \dots \dots \dots (4)$$

и

$$b = \left[ \frac{m}{l} + \frac{1+m}{h} \right] g \dots \dots \dots (5)$$

получимъ уравненіе

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a - b y.$$

**Интегрированіе уравненія движенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ и изслѣдованіе этого уравненія.**

§ 46.

Общій интеграль этого уравненія, какъ извѣстно, есть

$$y = A \cos \sqrt{b} t + B \sin \sqrt{b} t + \frac{a}{b}.$$

Движеніе горизонтальной проекціи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, при постоянной поступательной скорости  $c$  и при обозначеніи чрезъ  $x$  длины проходимыхъ путей, опредѣляется уравненіемъ

$$x = ct.$$

Такимъ образомъ, связь между проходимыми путями  $x$  и вертикальными перемѣщеніями точки прикосновенія колеса съ рельсомъ выразится уравненіемъ

$$y = A \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x + B \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + \frac{a}{b}.$$

Согласно принятому обозначенію, уравненія (4) и (5) дадутъ

$$\frac{a}{b} = \frac{l + m l + m y}{l + m l + m h} h.$$

Величина  $y$  есть не что иное, какъ погруженіе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ въ моментъ, когда рессора производитъ давленіе, соответствующее покойному состоянію колеса.

Такъ какъ  $h$  обозначаетъ тоже погруженіе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при статическомъ давленіи колеса, то

$$y = h \text{ и } \frac{a}{b} = h.$$

Такимъ образомъ, уравненіе траекторіи обращается въ слѣдующее

$$y = A \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x + B \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + h \dots \dots \dots (6)$$

а величина вертикальной скорости опредѣлится уравненіемъ

$$\frac{dy}{dt} = \omega = -A\sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + B\sqrt{b} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x \dots \dots (7)$$

Величины постоянныхъ произвольныхъ  $A$  и  $B$  могутъ быть опредѣлены, если при какой-нибудь заданной величинѣ  $x$  будутъ извѣстны величины  $y$  и  $\omega$ . Если, напримѣръ, эти послѣднія, при  $x = 0$ , будутъ имѣть величины  $y_0$  и  $\omega_0$ ,

то

$$A = y_0 - h$$

и

$$B = \frac{\omega_0}{\sqrt{b}}$$

Уравненія (6) и (7) можно привести къ виду значительно болѣе простому.

При выводѣ этихъ уравненій осью ординатъ была вертикальная линія, а осью абсциссъ горизонтальная, на уровнѣ верхней поверхности ненагруженнаго рельса.

Если же за ось абсциссъ примемъ прямую параллельную, первой, но расположенную на уровнѣ, соответствующемъ среднему погруженію обертывающей кривой, т. е. ниже уровня верхней поверхности ненагруженнаго рельса на величину  $y$ , то, называя  $z$  новыя ординаты, увидимъ, что

$$y = z + h.$$

Вставляя эту величину вмѣсто  $y$  въ уравненіе траекторіи увидимъ, что

$$z = A \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x + B \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x.$$

Вертикальная проекція скорости точки прикосновенія колеса съ рельсомъ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \omega = -A\sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + B\sqrt{b} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x.$$

Если же за начало координатъ примемъ ту точку на оси  $x$ , въ которой колесо прикасается съ рельсомъ, опустившимся соответственно статической нагрузкѣ, то при  $x = 0$  должно быть и  $z = 0$ , и слѣдовательно

$$0 = A \cos 0 = A.$$

При такой системѣ координатъ уравненіе траекторіи будетъ

$$z = B \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x . . . . . (8)$$

и

$$\frac{dz}{dt} = \omega = B \sqrt{b} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x . . . . . (9)$$

Эти уравненія позволяютъ сдѣлать нѣсколько заслуживающихъ вниманія заключеній:

Первое изъ нихъ указываетъ, что въ случаѣ небольшой, но часто встрѣчающейся гибкости рельсовъ, когда обертывающая всѣхъ положеній оси изгибаемаго статически рельса можетъ считаться прямою, траекторія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ будетъ синусоида, и, слѣдовательно, насколько верхняя часть волны поднимается надъ уровнемъ средняго статическаго погруженія верхней поверхности рельса, настолько же эта траекторія опускается ниже того же средняго статическаго уровня.

Колесо, катящееся по рельсу, находясь въ прикосновеніи съ рельсомъ, можетъ подниматься вверхъ не болѣе, чѣмъ до уровня поверхности катанія совершенно не нагруженнаго рельса, т. е. на величину не болѣе  $h$ . Послѣ такого подъема оно погружается до уровня ниже соотвѣтствующаго средней статической нагрузкѣ на величину тоже  $h$ . При этомъ полное погруженіе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ будетъ  $2h$ . Давленіе колеса при упомянутомъ наибольшемъ подъемѣ будетъ нуль, а давленіе при наибольшемъ погруженіи  $2h$  будетъ двойное статическое. Итакъ, если только колесо отъ рельса не отдѣляется, то, съ какою бы скоростью оно ни катилось, при правильныхъ формахъ поверхностей катанія колеса и рельса, давленіе, производимое колесомъ, не можетъ быть меньше нуля и больше двойнаго статическаго.

Если наибольшій подъемъ колеса  $z < h$ , то, такъ какъ наибольшая величина  $z$  соотвѣтствуетъ  $x$ , при которомъ

$$\sin \frac{\sqrt{b}}{c} x = 1,$$

по уравненію (8) получимъ

$$B < h.$$

Наибольшая величина вертикальной проекціи скорости  $\omega$  соотвѣтствуетъ  $x$ , при которомъ, по уравненію (9),

$$\cos \frac{\sqrt{b}}{c} x = 1.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\omega = B\sqrt{b}$$

и если  $B < h$ , то

$$\omega < h\sqrt{b}.$$

Если колесо получить нѣкоторую вертикальную скорость въ тотъ моментъ, когда точка прикосновенія его съ рельсомъ проходитъ черезъ уровень, соотвѣтствующій среднему статическому погруженію поверхности катанія рельса, и если эта скорость будетъ удовлетворять послѣднему неравенству, то давленіе колеса на рельсъ, уменьшаясь, не дойдетъ до нуля и затѣмъ, увеличиваясь, не достигнетъ величины, равной двойному статическому давленію.

Если при  $z = 0$ , т. е. когда

$$\sin \frac{\sqrt{b}}{c} x = 0 \text{ и } \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x = 1,$$

скорость  $\omega = 0$ , то

$$B = 0,$$

а въ такомъ случаѣ постоянно

$$z = 0.$$

Это значитъ, что колесо, не получающее отъ внѣшнихъ причинъ никакой вертикальной скорости, будетъ катиться, оставаясь своею точкою прикосновенія съ рельсомъ на линіи, соотвѣтствующей обертывающей всѣ положенія изогнутой оси рельса при статическихъ нагрузкахъ его въ разныхъ мѣстахъ и принятой нами за прямую.

Такое заключеніе находится въ противорѣчій съ наблюдаемыми явленіями и потому невѣрно. Его ошибочность вытекаетъ изъ предположенія, что колесо получаетъ вертикальныя скорости только благодаря дѣйствию упругихъ силъ, развиваемыхъ изгибающимся рельсомъ и упругими основаніями опоръ, поддерживающихъ рельсъ, тогда какъ вертикальныя скорости, вызываемыя другими обстоятельствами, и особенно неправильностями поверхностей катанія колесъ, оказываются во много разъ болѣе значительными. Увеличеніе вертикальныхъ скоростей, въ зависимости отъ этихъ послѣднихъ обстоятельствъ, при нѣкоторыхъ увеличеніяхъ поступательной скорости и вызываетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, очень большія увеличенія напряженій въ рельсахъ при увеличеніи поступательной скорости колесъ.

Вліяніе поступательной скорости колеса на напряженіе въ рельсы съ полною ясностью выступаетъ, какъ только колесо, по тѣмъ или другимъ причинамъ, получаетъ вертикальную скорость.

**Движеніе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ при впадинѣ на колесѣ.**

§ 47.

Въ числѣ причинъ, сообщающихъ колесу вертикальныя скорости, занимаютъ самое видное мѣсто неправильности поверхностей катанія рельса и колеса.

Впадины на колесной шинѣ относятся едва-ли не къ наиболѣе важнымъ причинамъ, сообщающимъ колесу вертикальныя скорости.

При отсутствіи какихъ бы то ни было указаній опыта, опредѣляющихъ величины вертикальныхъ скоростей, встрѣчающихся въ практикѣ, для освѣщенія вопроса о вліяніи этихъ скоростей на напряженія въ рельсахъ слѣдуетъ остановиться на способѣ выбора болѣе или менѣе вѣроятныхъ вертикальныхъ скоростей.

Чтобы не вводить въ этотъ выборъ произволь, трудно оправдываемый какими-нибудь указаніями опыта и даже вообще какими-нибудь сужденіями, представлялось довольно естественнымъ допустить предположеніе, что колесо, катящееся своею правильною поверхностью катанія по совершенно правильной поверхности катанія рельса, не имѣя никакой вертикальной скорости, начинаетъ въ нѣкоторой точкѣ рельса прикасаться къ нему своею впадиною, имѣющею заранѣе опредѣленные видъ и размѣры. Къ моменту прикосновенія послѣдней точки впадины, или первой точки вновь вступающей правильной поверхности катанія колеса, оно пріобрѣтаетъ нѣкоторую вполнѣ опредѣленную вертикальную скорость. Эта-то скорость и служитъ начальною вертикальною скоростью при дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Благодаря малому отличію обертывающей всѣ положенія изогнутой оси рельса отъ прямой линіи, положеніе точки прикосновенія первой точки впадины съ рельсомъ на самомъ рельсѣ не имѣетъ существеннаго значенія и можетъ быть взято, гдѣ угодно. Въ виду этого свойства, для удобства вычисленій принималось, что первая точка впадины попадаетъ на рельсъ прямо надъ шпалою.

Въ дальнѣйшія вычисленія введены впадины четырехъ различныхъ очертаній, представлявшихъ болѣе или менѣе близкими къ встрѣчающимся на практикѣ.

Точное очертаніе этихъ видоизмѣненныхъ поверхностей катанія никогда не можетъ быть заранѣе установлено. Оно всегда

является послѣдствіемъ случайныхъ обстоятельствъ, проявляющихся преимущественно при тормажениі. На не тормазныхъ паровозныхъ колесахъ плоскія мѣста часто встрѣчаются въ мѣстахъ лишь близкихъ къ пересѣченію шины съ воображаемымъ продолженіемъ кривошины.

Въ виду упомянутой непрестанной перемѣнчивости очертанія плоскихъ мѣстъ на колесахъ, можно изучать ихъ вліяніе лишь приблизительно, ограничиваясь не разрѣшеніемъ, а только лучшимъ освѣщеніемъ вопроса.

Движеніе колеса, прикасающагося къ совершенно правильному рельсу совершенно правильною шиною, послѣ движенія впалымъ мѣстомъ, было вычислено для рельсовъ съ разными величинами гибкости, выраженной величиною  $A$ , при разныхъ поступательныхъ скоростяхъ и при разныхъ очертаніяхъ впадинъ. Результаты этихъ вычисленій приведены далѣе. Вычисленія сдѣланы, пользуясь, съ одной стороны, данными выше уравненіями (28) и (29) и—съ другой—приведенными ниже формулами, полученными рассматривая линію, описываемую точкою прикосновенія колеса съ рельсомъ, какъ синусоиду.

Для удобства этихъ сравненій, имѣя особенно въ виду необходимость сравнивать наибольшія и наименьшія величины углубленій рельса такъ же, какъ наибольшія и наименьшія величины вертикальныхъ скоростей, при опредѣленіи того и другого рода величинъ, пользуясь то динамическими таблицами, то уравненіемъ синусоиды, полезно привести формулы, удобныя для примѣненія.

Обозначая избранныя для начала: ординату и вертикальную скорость чрезъ  $y_0$  и  $\omega_0$ , можно будетъ опредѣлить соответствующія значенія  $A$  и  $B$  въ общемъ уравненіи (6) синусоиды, имѣя въ виду, что при

$$x = 0, y = y_0 \text{ и } \omega = \omega_0.$$

Вставляя эти величины въ общія выраженія ординаты и скорости уравненія (6) и (7), получимъ уравненія

$$y_0 = A + h \text{ и } \omega_0 B \sqrt{b}$$

откуда

$$A = y_0 - h \text{ и } B = \frac{\omega_0}{\sqrt{b}}$$

и уравненія, опредѣляющія величины  $y$  и  $\omega$ , вообще, примутъ видъ:

$$y = (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + h$$

и

$$\omega = -(y_0 - h) \sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + \omega_0 \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x.$$

Замѣняя ось  $x$  линією ей параллельною, но помѣщенною ниже, на величину  $h$ , гдѣ она располагается на уровнѣ средняго погруженія рельса подѣвствомъ статической нагрузки, и называя  $\eta$  новую ординату, надо замѣтить, что

$$y = \eta + h \quad . . . . . (10)$$

Новая ордината опредѣлится уравненіемъ

$$\eta = (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x$$

и, попережнему,

$$\omega = -(y_0 - h) \sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} x + \omega_0 \cos \frac{\sqrt{b}}{c} x.$$

Если начало координатъ перенесемъ въ такую точку, гдѣ синусоида пересѣкаетъ новую ось  $x$ , то вмѣсто  $x$  надо ввести  $\xi + \alpha$ , т. е.

$$x = \xi + \alpha$$

избирая величину  $\alpha$  такъ, чтобы при  $\xi = 0$  ордината  $y = 0$ .

Для удовлетворенія этому требованію необходимо, чтобы въ уравненіи

$$\eta = (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} (\xi + \alpha) + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} (\xi + \alpha)$$

при  $\xi = 0$  оказалось и  $\eta = 0$  или чтобы

$$0 = (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha$$

откуда, для опредѣленія  $\alpha$ , находимъ уравненіе

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha = - \frac{y_0 - h}{\omega} \sqrt{b}.$$

Чтобы найти уравненія, опредѣляющія  $\eta$  и  $\omega$ , при условіи что  $\alpha$  удовлетворяетъ послѣднему уравненію, замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} \eta &= (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - (y_0 - h) \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha + \\ &+ \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \eta = & \left[ (y_0 - h) \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \right] \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi - \\ & - \left[ (y_0 - h) \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \right] \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \end{aligned}$$

Сумма, стоящая въ большихъ скобкахъ, въ первомъ членѣ второй части равенства, по условію равна нулю, слѣдовательно

$$\eta = - \left[ (y_0 - h) \operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \right] \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi;$$

замѣняя  $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha$  равною ему величиною, найдемъ, что

$$\eta = \left[ \frac{(y_0 - h)^2}{\omega_0} \sqrt{b} + \frac{\omega_0}{\sqrt{b}} \right] \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi,$$

а выключая  $\cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha$  посредствомъ  $\operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha$ , найдемъ, что

$$\eta = \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b}} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \dots \dots \dots (11)$$

Вводя найденную величину  $\alpha$  въ уравненіе, опредѣляющее скорость  $\omega$ , найдемъ, что

$$\omega = - (y_0 - h) \sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} (\xi + \alpha) + \omega_0 \cos \frac{\sqrt{b}}{c} (\xi + \alpha)$$

или

$$\begin{aligned} \omega = & - (y_0 - h) \sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - (y_0 - h) \sqrt{b} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha + \\ & + \omega_0 \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \omega_0 \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega = & - \left[ (y_0 - h) \sqrt{b} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \omega_0 \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \right] \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi - \\ & - \left[ (y_0 - h) \sqrt{b} \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \omega_0 \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \right] \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi. \end{aligned}$$

Сумма, стоящая въ большихъ скобкахъ, перваго члена второй части равенства, по условію, равна нулю, слѣдовательно

$$\omega = - \left[ (y_0 - h) \sqrt{b} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha - \omega_0 \right] \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi,$$

а такъ какъ

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha = -\frac{y_0 - h}{\omega_0} \sqrt{b} \quad \text{и} \quad \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \alpha = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + (y_0 - h)^2 b}}$$

то

$$\omega = \pm \frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + (y_0 - h)^2 b}} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi = \sqrt{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2} \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi. \quad (12)$$

**Наивышшія и наинизшія положенія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ и наибольшія и наименьшія вертикальныя скорости движенія этой точки.**

§ 48.

Имѣя общія выраженія  $\gamma$  и  $\omega$ , не трудно найти ихъ наибольшія и наименьшія величины. Эти послѣднія будутъ соответствовать тѣмъ величинамъ  $\xi$ , при которыхъ

$$\sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi = \pm 1 \quad \text{и} \quad \cos \frac{\sqrt{b}}{c} \xi = \pm 1.$$

Другими словами, наибольшія и наименьшія величины  $\gamma$  и  $\omega$  соответствують случаямъ, когда

$$\gamma_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b}}$$

и

$$\omega_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \sqrt{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}$$

Припоминая уравненіе (10), легко опредѣлить наибольшую и наименьшую величины  $y$ . Онѣ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b} + h} \\ y_{\min} &= -\sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b} + h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Наибольшія и наименьшія величины вертикальной скорости будутъ

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max} &= \sqrt{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2} \\ \omega_{\min} &= -\sqrt{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Сопоставляя эти четыре уравненія, видимъ, что

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= \frac{\omega_{\max}}{\sqrt{b}} + h \\ y_{\min} &= \frac{\omega_{\min}}{\sqrt{b}} + h \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что наибольшая величина  $y$  зависитъ отъ вертикальной скорости, а чѣмъ меньше будетъ величина  $h$ , тѣмъ существеннѣе становится зависимость  $y$  отъ величины  $\omega$ .

**Длина синусоидальной волны траекторіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ.**

§ 49.

Полная длина волны синусоиды опредѣляется условіемъ, чтобы приращеніе  $\xi$ , обозначенное  $\xi'$ , удовлетворяло уравненію

$$\frac{\sqrt{b}}{c} \xi' = n 2 \pi$$

или чтобы

$$\xi' = \frac{2 n \pi}{\sqrt{b}} c \dots \dots \dots (16)$$

гдѣ  $n$  есть нѣкоторое цѣлое число.

Отсюда прежде всего видно, что длина волнъ синусоиды возрастаетъ пропорціонально скорости поступательнаго движенія колеса. Такъ какъ уравненіе (5) показываетъ, что величина  $b$  увеличивается при уменьшеніи величины  $h$ , или величины пониженія рельса подъ дѣйствіемъ статической нагрузки, то, чѣмъ меньше при такой нагрузкѣ понижается рельсъ, тѣмъ больше будетъ  $\sqrt{b}$  и тѣмъ меньше будетъ  $\xi'$  длина волны.

**Вліяніе очертаній впадини на величину вертикальныхъ перемѣщеній точки прикосновенія колеса съ рельсомъ.**

§ 50.

Впадины, къ которымъ относятся нижеприведенные результаты расчетовъ, имѣли очертаніе, здѣсь указанное:

Части общей длины впадины.	Углубленіе въ сантиметрахъ.			
	1-я впад.	2-я впад.	3-я впад.	4-я впад.
0	0	0	0	0
0,1	0,04	0,08	0,025	0,04
0,2	0,08	0,16	0,050	0,08
0,3	0,12	0,24	0,100	0,12
0,4	0,16	0,32	0,200	0,16
0,5	0,20	0,40	0,400	0,20
0,6	0,16	0,32	0,200	0,24
0,7	0,12	0,24	0,100	0,28
0,8	0,08	0,16	0,050	0,32
0,9	0,04	0,08	0,025	0,36
1	0	0	0	0,40
0,1	Вся длина 70 сант.	Вся длина 70 сант.	Вся длина 70 сант.	0,36
0,2				0,32
0,3				0,28
0,4				0,24
0,5				0,20
0,6				0,16
0,7				0,12
0,8				0,08
0,9				0,04
1,0				0
				Вся длина 140 сант.

Наибольшее число расчетовъ относится ко впадинѣ 2-ой и результаты этихъ расчетовъ помѣщены въ слѣдующихъ 7 таблицахъ.

**Т а б л и ц а 1,**

относящаяся къ впадинѣ 2-го очертанія.

Для одиночнаго колеса, катящагося по рельсу прямому, опирающемуся на 6 шпаль.

$$A = 0,5; h = 0,4433 \text{ и } b = 18,681.$$

При вступленіи на рельсъ первой точки впадины

$$y_i = 0,4407 \text{ и } w_i = 0.$$

Опредѣленные по уравненіямъ (28) и (29) для конца впадины величины въ сантиметрахъ.		<i>v</i> километровъ въ часъ.	<i>c</i> сантиметровъ въ секунду.	Наибольшія и наименьшія величины <i>y</i> сантиметровъ.			Наибольшія и наименьшія величины <i>w</i> сантиметровъ.		
<i>y</i> <sub>0</sub>	<i>w</i> <sub>0</sub>			По урав. (28) и (29)	По урав. 13.	Различіе %.	По урав. (28) и (29)	По урав. (14).	Различіе %.
0,4432	— 0,709	25	695	0,4513	0,4485	0,62	0,833	0,709	17,5
				0,4339	0,4382	0,97	— 1,239	— 0,709	74,8
0,2376	—58,703	50	1389	0,9733	0,8881	9,2	70,751	60,795	16,0
				—0,1012	—1,0015	—	—71,398	—60,795	17,4
0,8697	—48,924	75	2083	1,0152	0,9997	1,5	79,830	76,092	5,0
				—0,1662	—0,1153	46,0	—80,118	—76,092	5,0
0,9468	— 9,379	100	2778	0,9708	0,9514	2,0	71,858	69,45	3,5
				—0,1015	—0,0648	56	—72,219	—69,45	4,0
1,3106	—30,094	150	4166	0,8325	0,8327	0,02	51,738	53,218	2,8
				0,0620	0,0539	15,3	—52,841	—53,218	0,7

**Т а б л и ц а 2.**

Для одиночнаго колеса, катящагося по рельсу, прямому опирающемуся на 6 шпаль.

$$A = 1; h = 0,3812; b = 21564.$$

При вступленіи на рельсъ первой точки впадины

$$y_i = 0,3786 \text{ и } w_i = 0.$$

Опредѣленные по уравненіямъ (28) и (29) для конца впадины величины въ сантиметрахъ.		<i>v</i> километровъ въ часъ.	<i>c</i> сантиметровъ въ секунду.	Наибольшія и наименьшія величины <i>y</i> сантиметровъ.			Наибольшія и наименьшія величины <i>w</i> сантиметровъ.		
<i>y</i> <sub>0</sub>	<i>w</i> <sub>0</sub>			По урав. (28) и (29)	По урав. (13).	Различіе %.	По урав. (28) и (29)	По урав. (14).	Различіе %.
0,4038	2,951	25	695	0,4181	0,4114	1,6	4,180	4,44	6%
				+0,3513	0,3510	0,01	— 4,396	— 4,44	1%
0,1832	—51,378	50	1389	0,7891	0,7817	0,95	54,061	58,827	7%
				—0,0244	0,0193	26,0	—57,938	—58,827	1,5
0,7718	—61,511	75	2083	0,9362	0,9411	0,5	81,508	82,81	2
				—0,2246	—0,1787	26,0	81,507	—82,81	1,6
0,9048	—20,276	100	2778	0,8372	0,9227	4,0	72,703	79,514	9,4
				—0,2401	—0,1603	49,8	—84,033	—79,514	5,7
0,7716	20,756	150	4166	0,7935	0,7845	1,1	59,244	59,117	0,1
				—0,0505	—0,0221	109,0	—63,438	—59,177	7,2

**Т а б л и ц а 3.**

Для одиночного колеса, катящегося по прямому рельсу, опирающемуся на 6 шпаль.

$$A = 2; h = 0,3238; b = 25213.$$

При вступлении на рельс первой точки впадины

$$y_i = 0,3221 \text{ и } \omega_i = 0.$$

Определенные по уравнениям (28) и (29) для конца впадины величины в сантиметрах.		v километровъ въ часъ.	c сантиметровъ въ секунду.	Наибольшія и наименьшія величины. y сантиметровъ.			Наибольшія и наименьшія величины. w сантиметровъ.		
y <sub>0</sub>	w <sub>0</sub>			По урав. (28) и (29)	По урав. (13)	Различіе %.	По урав. (28) и (29)	По урав. (14)	Различіе %.
0,3471	3,041	25	695	—	0,3539	—	—	4,78	—
				—	0,2917	—	—	— 4,78	—
0,1287	—52,356	50	1389	—	0,7069	—	—	60,8	—
				—	—0,0593	—	—	—60,8	—
0,5960	—75,354	75	2083	0,8375	0,8409	0,4	80,968	86,90	7,3
				—0,2486	—0,2233	11,3	—85,604	—86,90	1,5
0,8592	—32,484	100	2778	0,9437	0,8962	5,3	97,128	91,00	6,7
				—0,3940	—0,2492	58,1	—92,737	—91,00	1,9
0,7156	20,635	150	4166	0,7621	0,7466	2,0	71,036	67,14	5,8
				—0,0921	—0,0990	7,5	—65,353	—67,14	2,7

**Т а б л и ц а 4.**

При впадинѣ 1-ой, при  $A=0,5$ ,  $m=7$ ,  $l=7$ ,  $h=0,4433$  и  $b=18683$ .

Определенные для конца впадины по ур. (28) и (29) сант.		Скорость въ		Наиб. и наим. величины u при движ. по правил. поверхн. по уравнениямъ сантиметровъ.			Наиб. и наим. величины ω при движ. по правил. поверхн. по уравнениямъ сантиметровъ.		
y <sub>0</sub>	ω <sub>0</sub>	часъ	секун.	(28) и (29)	(13)	Раз. %	(28) и (29)	(14)	Раз. %
		верстъ.	сант.						
0,6604	9,194	125	3,472	0,6676	0,6696	—	+30,717	+31,913	—
				0,2210	0,2170	—	—30,687	—31,913	—

**Т а б л и ц а 5.**

При впадинѣ 2-ой при  $A=0,5$ ,  $m=7$ ,  $l=7$ ,  $h=0,4433$  и  $b=18683$ .

Определенные для конца впадины по ур. (28) и (29) сант.		Скорость въ		Наиб. и наим. величины $y$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.			Наиб. и наим. величины $\omega$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.		
$y_0$	$\omega_0$	часъ	секун.	(28) и (29)	(13)	Раз. %	(28) и (29)	(14)	Раз. %
		верстѣ.	сант.						
0,8742	12,702	125	3,472	—	0,8841	—	—	+60,252	—
					0,0025			--60,252	

**Т а б л и ц а 6.**

При впадинѣ 3-ей при  $A=0,5$ ,  $m=7$ ,  $l=7$ ,  $h=0,4433$  и  $b=18683$ .

Определенные для конца впадины по ур. (28) и (29) сант.		Скорость въ		Наиб. и наим. величины $y$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.			Наиб. и наим. величины $\omega$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.		
$y_0$	$\omega_0$	часъ	секун.	(28) и (29)	(13)	Раз. %	(28) и (29)	(14)	Раз. %
		верстѣ.	сант.						
0,3678	36,204	25	695	0,6734	0,7086	5	22,408	36,294	
				0,3864	0,1378		-19,849	-36,294	
0,7283	-31,089	75	2,083	0,8628	0,8079	7	54,221	+49,842	
				0,0711	0,0789	10	-53,320	-49,842	9
0,7063	7,702	125	3,472	0,7007	0,7122		35,649	36,764	
				0,1811	0,6744		-35,203	-36,764	

**Т а б л и ц а 7.**

При впадинѣ 4-ой при  $A=0,5$ ,  $m=7$ ,  $l=7$ ,  $h=0,4433$  и  $b=18683$ .

Определенные для конца впадины по ур. (28) и (29) сант.		Скорость въ		Наиб. и наим. величины $y$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.			Наиб. и наим. величины $\omega$ при движ. по правил. поверхн. по уравненіямъ сантиметровъ.		
$y_0$	$\omega_0$	часъ	секун.	(28) и (29)	(13)	Раз. %	(28) и (29)	(14)	Раз. %
		верстѣ.	сант.						
0,6558	-69,854	125	3,472	-0,9114	0,9967	9	64,866	75,653	—
				0,1013	-0,1101	9	-73,371	-75,653	

Изъ этихъ таблицъ видно, что приближенныя формулы (13) и (14), требующія лишь очень простыхъ вычисленій, сразу даютъ довольно близкія къ дѣйствительности величины наибольшихъ углубленій точки прикосновенія колеса правильной формы съ правильнымъ рельсомъ и наибольшія скорости при этомъ движеніи. Трудъ вычисленій по приближеннымъ формуламъ въ нѣсколько десятковъ разъ легче, чѣмъ по формуламъ болѣе точнымъ, но требующимъ цѣлаго ряда послѣдовательныхъ опредѣленій.

Полнаго согласія результатовъ по упрощеннымъ формуламъ и по формуламъ болѣе точнымъ нельзя и ожидать по двумъ основнымъ причинамъ. Прежде всего потому, что при выводѣ упрощенныхъ формулъ допускалось, что обертывающая всѣхъ положеній оси рельса, изгибаемой статическимъ грузомъ, есть не кривая, а прямая линія, и затѣмъ предполагалось, что давленіе рельса на колесо всегда пропорціонально перемѣщенію точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, тогда какъ колесо, поднявшись выше уровня ненагруженнаго рельса, никакому давленію со стороны рельса не подвергается. Результаты вычисленій по приближеннымъ формуламъ и по болѣе точнымъ будутъ ближе, если вычисления будутъ относиться только къ нижнимъ частямъ волны, гдѣ давленіе рельса на колесо не отступаетъ отъ предположенія. Въ этомъ случаѣ результаты вычисленій по приближенію, естественно, не отклоняются очень значительно отъ болѣе точныхъ.

Оставляя въ сторонѣ мѣста неизбежныхъ уклоненій, тѣ, гдѣ колесо подпрыгиваетъ надъ рельсомъ, увидимъ, что въ практическихъ случаяхъ наибольшія углубленія рельса опредѣляются съ погрѣшностью не болѣе 9%. Эти же таблицы даютъ возможность уяснить вліяніе очертаній впадинъ.

При одинаковыхъ величинахъ:  $A$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $h$ ,  $b$  и скорости  $v$ , но при различныхъ очертаніяхъ впадины, получены различныя величины  $u_{max}$ .

При впадинѣ 1 съ глубиною 0,2 сант.	$u_{max} = 0,6696$	сант.
" " 2 " " 0,4 " "	" = 0,8841	"
" " 3 " " 0,4 " "	" = 0,7122	"
" " 4 " " 0,4 " "	" = 0,9967	"

Впадины 1 и 2, при одной и той же длинѣ и при очертаніяхъ, получающихся при углубленіяхъ пропорціональныхъ длинѣ, но при различіи по глубинѣ въ срединѣ, дали разницу въ углубленіи какъ  $6696 : 8841 = 1 : 1,32$ .

Впадины 2 и 4 при одной и той же глубинѣ и пропорциональности въ углубленіи, но при различіи длины, одна вдвое противъ другой, дали разницу въ величинахъ  $y_{max}$  какъ  $8841 : 9967 = 1 : 1,13$ .

Впадины 2 и 3, имѣющія одинаковыя длины и одинаковыя углубленія въ срединѣ, но различно очерченныя, дали отношенія  $y_{max}$  какъ  $7122 : 8841 = 1 : 1,15$ .

Наконецъ, впадины 1 и 4, имѣющія и различную глубину (0,2 сант. и 0,4 сант.) и различныя длины (70 сант. и 140 сант.), дали отношенія  $y_{max}$  какъ  $6696 : 9967 = 1 : 1,5$ .

Эти данныя достаточно указываютъ необходимость внимательнаго и подробнаго изученія очертанія впадинъ.

Наконецъ, эти таблицы показываютъ справедливость сдѣланнаго въ § 28 замѣчанія относительно незначительности различія въ опредѣленіяхъ вліянія катящагося колеса на рельсъ, зависящаго отъ введенія въ расчеты обертывающихъ линій, соотвѣтствующихъ 4 или 6 опорамъ. Оказывается теперь, что не только замѣна одной изъ этихъ двухъ кривыхъ другою не оказываетъ существеннаго вліянія на результаты расчетовъ, но и замѣна ихъ прямою линіею, упрощая расчеты, опредѣляющіе наибольшія отклоненія траекторіи точки прикосновенія катящагося колеса, почти не мѣняетъ окончательныхъ выводовъ.

## ОТДѢЛЪ IV.

### Вліяніе вибрацій рельса на напряженіе въ немъ.

#### Дифференціальное уравненіе вибраціоннаго движенія.

##### § 51.

Несоотвѣтствіе теоретически опредѣляемыхъ прогибовъ рельсовъ подъ напоромъ катящагося колеса привели бельгійскаго инженера Фламаша къ мысли, что одною изъ самыхъ главныхъ причинъ, вызывающихъ въ рельсѣ большія напряженія, являются вибраціи рельса.

Дѣйствительно, нѣкоторые писатели полагаютъ, что напряженія въ рельсахъ могутъ значительно увеличиваться подъ вліяніемъ тѣхъ вибрацій, которыя вовсе не принимаются въ расчетъ, когда ограничиваются примѣненіемъ обыкновенной теоріи

изгиба, предполагая, что рельсъ есть балка, такъ или иначе поддерживаемая опорами и нагруженная подвижнымъ грузомъ.

Этотъ упрекъ нельзя сдѣлать теоріи Сенъ-Венана, не упустившей изъ вида вибраціи рельса,

Примѣненіе этой теоріи указываетъ, что вибраціи повышаютъ напряженія только весьма немного, но надо помнить, что примѣненіе относится къ скоростямъ не очень большимъ, всего около 40 или 60 километровъ въ часъ. Сверхъ того, надо замѣтить, что Сенъ-Венанъ разсматриваетъ вибраціи балки, лежащей на двухъ смежныхъ опорахъ, — балки очень короткой и поддерживающей вполне правильное круглое колесо.

Фламашъ не довелъ свои изслѣдованія до численнаго опредѣленія напряженій, вызываемыхъ вибраціями, не смотря на то, что его опыты даютъ нѣкоторый матеріалъ для рѣшенія вопроса при надлежащей математической подготовкѣ его. Въ виду возможности достигнуть нѣкотораго полезнаго результата, выясняющаго вліяніе вибрацій рельсовъ, необходимо сначала привести математическія соображенія, устанавливающія связь между теоретическими соображеніями и опытными данными. Фламашъ, на основаніи своихъ наблюденій, полагаетъ, что при изученіи вибрацій надо разсматривать часть рельса, заключенную между точками прикосновенія его не съ двумя смежными шпалами, а съ двумя смежными колесами. Эти точки рельса можно считать наиболѣе пониженными и у этихъ точекъ можно считать концы балокъ закрѣпленными. Въ теченіе очень короткаго времени эти точки рельса остаются неподвижными и касательныя съ изогнутой оси рельса въ этихъ точкахъ можно считать на горизонтальномъ пути—горизонтальными.

Въ промежуткѣ между этими двумя точками рельсъ получаетъ отъ шпалъ давленія, уравновѣшиваемыя давленіями колесъ на рельсъ.

Давленіе шпалъ на подошву рельса прикладывается къ ней только въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, но безъ большой погрѣшности можно допустить, что эти давленія распределены по всей подошвѣ и дѣйствуютъ пропорціонально перемѣщенію подошвы отъ положенія, вызваннаго нажатіемъ двухъ упомянутыхъ смежныхъ колесъ на рельсъ.

Относительно этого предмета Фламашъ выражается слѣдующимъ образомъ: изъ разсмотрѣнія діаграммъ съ очевидностью явствуетъ, что путь принимаетъ видъ упругой непрерывной ленты, поддерживаемой на всей ея длинѣ, и каждая точка которой подъ дѣйствіемъ нагрузки колесами и подъ вліяніемъ все-

возможныхъ сопротивленій погружается независимо, въ очень широкихъ предѣлахъ, отъ распредѣленія шпаль.

Если силы, дѣйствующія на балку сверху, въ видѣ давленія колесъ, и снизу, въ видѣ сопротивленія шпаль, придутъ въ равновѣсіе и затѣмъ балка начнетъ вибрировать, то различныя ея точки будутъ подниматься или опускаться.

Каждое изъ такихъ перемѣщеній вызоветъ дополнительныя силы со стороны шпаль, величина которыхъ будетъ пропорціональна вибраціоннымъ перемѣщеніямъ. Ось балки будетъ при этихъ вибраціяхъ измѣнять свою форму и ея очертаніе можно опредѣлить, если возьмемъ въ расчетъ не только силы, двигающія балку, но и силы инерціи ея частей.

Если горизонтальную прямую линію, проходящую черезъ точки прикосновенія двухъ разсматриваемыхъ смежныхъ колесъ съ рельсомъ, примемъ за ось абсциссъ  $x$ ; опущенную внизъ вертикальную линію за ось  $y$ ; одну изъ вышеупомянутыхъ точекъ прикосновенія колесъ съ рельсомъ примемъ за начало координата и обозначимъ:

- $E$ —коэффициентъ упругости матеріала рельса,
- $J$ —моментъ инерціи поперечнаго сѣченія, обыкновенно принимаемый въ расчетъ относительно изгиба,
- $\omega$ —поперечное сѣченіе рельса,
- $\delta$ —вѣсъ единицы объема,
- $g$ —ускореніе силы тяжести,
- $k$ —силу сопротивленія шпаль на единицу длины подошвы при погруженіи даннаго мѣста на единицу длины,
- $t$ —время,

то на отрѣзокъ рельса, удаленнаго отъ начала координатъ на  $x$  и длиною  $dx$ , будутъ дѣйствовать силы двигающія: перерѣзывающія рельсъ и давленіе на подошву

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} dx + ky dx$$

и сила инерціи

$$\frac{\omega \delta}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} dx$$

Обозначая для краткости

$$EI = a^4 \text{ и } \frac{\omega \delta}{g} = \mu^2$$

получимъ уравненіе

$$a^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + \mu^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \dots \dots \dots (1)$$

**Интегрирование дифференціального уравненія вибраціоннаго движенія.**

§ 52.

Этому уравненію удовлетворяетъ

$$y = \Sigma Y \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) . . . . . (2)$$

въ которомъ  $Y$  есть функція  $x$  и  $m_i$ ,  $A$  и  $B$  суть постоянныя произвольныя и знакъ  $\Sigma$  относится ко всѣмъ величинамъ  $m_i$ , число которыхъ, какъ увидимъ дальше, можетъ быть безконечно велико.

Дѣйствительно

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \Sigma \frac{d^4 Y}{dx^4} \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) . . . . . (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma Y \left( A \cos \frac{m_i^2}{\mu} t - B \frac{m_i^2}{\mu} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \Sigma Y \left( A \frac{m_i^2}{\mu} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \frac{m_i^2}{\mu^2} \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) . . . . . (4)$$

Вставляя вторыя части уравненій (2), (3) и (4) въ уравненіе (1), вмѣсто соотвѣтственно равныхъ имъ величинъ, получимъ уравненіе

$$a^4 \Sigma \frac{d^4 Y}{dx^4} \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) - \mu^2 \Sigma Y \frac{m_i^4}{\mu^2} \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) + k \Sigma Y \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) = 0.$$

Уравненіе это должно быть удовлетворено при всевозможныхъ  $x$  и при каждомъ значеніи  $m_i$ . Этому требованію можно удовлетворить только въ такомъ случаѣ, если послѣднее уравненіе будетъ удовлетворено при каждомъ отдѣльномъ значеніи  $m_i$ , то есть если будутъ удовлетворены всѣ уравненія вида

$$a^4 \cdot \frac{d^4 Y}{dx^4} \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) - m_i^4 Y \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) + k Y \left( A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t \right) = 0.$$

Въ этомъ уравненіи, очевидно, можно сократить общій множитель

$$A \frac{\mu}{m_i^2} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t + B \cos \frac{m_i^2}{\mu} t$$

вообще не равный нулю.

Послѣ сокращенія получится уравненіе

$$a^4 \frac{d^4 Y}{dx^4} - (m_i^4 - k) Y = 0 \text{ или } a^4 \frac{d^4 Y}{dx^4} = (m_i^4 - k) Y,$$

которое можно написать въ видѣ

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{m_i^4 - k}{a^4} Y = \frac{n_i^4}{a^4} Y \dots \dots \dots (5)$$

Этому уравненію удовлетворяетъ

$$Y = C_1 \left( \cosh \frac{n_i}{l} + \cos \frac{n_i}{l} x \right) + C_2 \left( \cosh \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) + \\ + C_3 \left( \sin h \frac{n_i}{l} x + \sin \frac{n_i}{l} x \right) + C_4 \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) \dots \dots \dots (6)$$

въ чемъ легко убѣдиться, продифференцировавъ уравненіе (6) четыре раза по  $x$ .

При опредѣленіи постоянныхъ произвольныхъ  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , надо имѣть въ виду, что величина  $y$ , опредѣленная уравненіемъ (2), равно какъ и  $\frac{dy}{dx}$ , при какихъ бы ни было величинахъ  $m$  и  $t$ , должна обращаться въ нуль какъ при  $x = 0$ , такъ и при  $x = l$ . Это условіе можетъ быть исполнено въ томъ лишь случаѣ, если при каждомъ  $m$  какъ  $Y$ , такъ и  $\frac{dY}{dx}$  будетъ обращаться въ нуль и при  $x = 0$  и при  $\frac{x}{l} = 1$ .

Итакъ, для опредѣленія постоянныхъ произвольныхъ  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$ , надо прежде всего найти  $\frac{dY}{dx}$ .

Изъ уравненія (6) видно, что

$$\frac{dY}{dx} = C_1 \frac{n_i}{l} \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) + C_2 \frac{n_i}{l} \left( \sin h \frac{n_i}{l} x + \sin \frac{n_i}{l} x \right) + \\ + C_3 \frac{n_i}{l} \left( \cos h \frac{n_i}{l} x + \cos \frac{n_i}{l} x \right) + C_4 \frac{n_i}{l} \left( \cos h \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right)$$

или

$$\frac{dY}{dx} = \frac{n_i}{l} \left\{ C_1 \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) + C_2 \left( \sin h \frac{n_i}{l} x + \sin \frac{n_i}{l} x \right) + C_3 \left( \cos h \frac{n_i}{l} x + \cos \frac{n_i}{l} x \right) + C_4 \left( \cos h \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) \right\} \dots (7)$$

Вставляя въ уравненіе (6) и (7), получимъ

$$0 = 2 C_1 \text{ и } 0 = 2 C_3$$

и вставляя въ тѣ же уравненія  $\frac{x}{l} = 1$ , получимъ

$$\begin{aligned} 0 &= C_2 (\cos h n_i - \cos n_i) + C_4 (\sin h n_i - \sin n_i) \\ \text{и } 0 &= C_2 (\sin h n_i + \sin n_i) + C_4 (\cos h n_i - \cos n_i) \end{aligned} \dots (8)$$

или

$$\begin{aligned} C_2 (\cos h n_i - \cos n_i) &= -C_4 (\sin h n_i - \sin n_i) \\ \text{и } C_4 (\cos h n_i - \cos n_i) &= -C_2 (\sin h n_i - \sin n_i) \end{aligned}$$

Перемножая отдѣльно первыя и вторыя части этихъ двухъ уравненій и затѣмъ сокращая общаго множителя  $C_2 C_4$ , получимъ уравненіе

$$(\cos h n_i - \cos n_i)^2 = (\sin h^2 n_i - \sin^2 n_i) \dots (9)$$

или

$$\cos h^2 n_i - 2 \cos h n_i \cos n_i + \cos^2 n_i = \sin h^2 n_i - \sin^2 n_i) \dots (10)$$

и такъ какъ

$$\cos h n_i = \frac{e^{n_i} + e^{-n_i}}{2} \text{ и } \sin h n_i = \frac{e^{n_i} - e^{-n_i}}{2},$$

то

$$\cos h^2 n_i = \frac{e^{2n_i} + e^{-2n_i}}{4} + \frac{1}{2} \text{ и } \sin h^2 n_i = \frac{e^{2n_i} + e^{-2n_i}}{4} - \frac{1}{2}$$

Вставляя вторыя части этихъ двухъ уравненій въ уравненіе (10) вмѣсто  $\cos h^2 n_i$  и  $\sin h^2 n_i$  и сокративъ подобные члены, получимъ уравненіе (11)

$$\cos h n_i \cos n_i = 1 \text{ или } \cos n_i = \frac{1}{\cos h n_i} \dots (11)$$

Затѣмъ первое уравненіе группы (8) даетъ отношеніе

$$\frac{C_2}{C_4} = -\frac{\sin h n_i - \sin n_i}{\cos h n_i - \cos n_i},$$

а второе уравненіе той же группы даетъ отношеніе

$$\frac{C_2}{C_4} = -\frac{\cos h n_i - \cos n_i}{\sin h n_i + \sin n_i}$$

Умножая числителя второй части этого уравнения на вторую часть уравнения (9), а знаменателя на первую часть уравнения (9), найдемъ, что

$$\frac{C_2}{C_4} = - \frac{\cos h n_i - \cos n_i}{\sin h n_i + \sin n_i} + \frac{\sin h^2 n_i - \sin^2 n_i}{(\cos h n_i - \cos n_i)^2} = - \frac{\sin h n_i - \sin n_i}{\cos h n_i - \cos n_i}$$

то есть оба уравнения группы (8) даютъ одну и ту же величину отношенія

$$\frac{C_2}{C_4},$$

причемъ можно написать, что

$$C_2 = C_i (\sin h n_i - \sin n_i)$$

и

$$C_4 = -C_i (\cos h n_i - \cos n_i)$$

Послѣ этихъ опредѣленій уравненіе (6) получаетъ видъ

$$Y = C_i \left\{ (\sin h n_i - \sin n_i) \left( \cos h_i \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) (\cos h n_i - \cos n_i) \right. \\ \left. - \cos n_i \right\} \times \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) \dots (12)$$

Это выраженіе должно быть вставлено въ уравненіе (2), чтобы выразить переменную  $y$ .

Прежде выполненія этой подстановки слѣдуетъ еще замѣтить, что при  $t_0$  всѣ дополнительныя перемѣщенія  $y$ , теперь разсматриваемыя, считаются равными нулю.

Вводя это условіе въ уравненіе (2), найдемъ, что

$$0 = \sum Y B.$$

Изъ этого уравненія видно, что  $B = 0$ ,

Такимъ образомъ, замѣняя въ уравненіи (2) величину  $Y$  второю частью уравненія (12), получимъ

$$y = \sum A \frac{\nu}{m_i} C_i \left\{ (\sin h n_i - \sin n_i) \left( \cos h \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) - (\cos h n_i - \cos n_i) \left( \sin h_i \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) \right\} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t$$

или обозначая

$$A \frac{\nu}{m_i} C_i = H_i$$

найдемъ, что

$$y = \sum H_i \left\{ (\sin h n_i - \sin n_i) \left( \cos h \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) - (\cos h n_i - \cos n_i) \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right) \right\} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t \dots (13)$$

Исслѣдованіе вибраціоннаго уравненія (13).

§ 53.

Величины постоянныхъ произвольныхъ  $H_i$  должны быть даны первоначальными условіями, вызывающими вибрацію балки.

Что касается величины  $n_i$ , то это суть корни уравненія (11). Число ихъ бесконечно велико. Прежде всего очевидно, что этому уравненію удовлетворяетъ  $n_i = 0$ , такъ какъ извѣстно, что и  $\cos 0 = 1$  и  $\cos h_0 = 1$ . Но такъ какъ при  $n_i = 0$  оказывается, что и  $y = 0$ , что обозначаетъ отсутствіе какихъ-либо вибрацій, то это рѣшеніе къ разсматриваемому вопросу не относится.

Увеличеніе численнаго значенія  $n_i$  положительными или отрицательными величинами сообщитъ величинамъ  $\cos n_i$  всѣ возможные величины отъ  $+1$  до  $-1$ , причемъ  $\cos n_i$  будетъ приближаться къ нулю, когда  $n_i$  будутъ приближаться къ величинамъ  $(2i + 1) \frac{\pi}{2}$ . Величина же  $\cos h n_i$  при возрастаніи численнаго значенія  $n_i$  постоянно и быстро возрастаетъ. Поэтому  $\frac{1}{\cos h n_i}$  постоянно и быстро приближается къ нулю. Слѣдовательно, корнями уравненія (11) должны быть числа, близкія къ величинамъ  $(2i + 1) \frac{\pi}{2}$ .

Разрѣшая это уравненіе, не трудно найти слѣдующія приближенныя значенія корней уравненія (11):

$$n_1 = (2 \times 1 + 1 + 0,0112364) \frac{\pi}{2} = (3 + 0,0112346) \frac{\pi}{2} = 4,7300362$$

$$n_2 = (2 \times 2 + 1 - 0,0005012) \frac{\pi}{2} = (5 - 0,0005012) \frac{\pi}{2} = 7,8531945$$

$$n_3 = (2 \times 3 + 1 + 0,0000212) \frac{\pi}{2} = (7 + 0,0000212) \frac{\pi}{2} = 10,995608$$

$$n_4 = (2 \times 4 + 1 - 0,000001) \frac{\pi}{2} = (9 + 0,000001) \frac{\pi}{2} = 14,13716$$

и т. д.

Опредѣленные такимъ образомъ величины  $n_i$  дадутъ возможность вычислить каждый изъ членовъ суммы уравненія (13).

Величины, поставленныя въ большихъ скобкахъ, соответствующія различнымъ величинамъ отношенія  $\frac{x}{l}$  отъ 0 до 1, при разныхъ значеніяхъ  $n_i$  отъ  $n_1$  до  $n_4$ , приведены въ слѣдующей таблицѣ VIII.

Обозначивъ:

$$S_i = (\sin h n_i - \sin n_i) \left( \cos h \frac{n_i}{l} x - \cos \frac{n_i}{l} x \right) - (\cos h n_i - \cos n_i) \left( \sin h \frac{n_i}{l} x - \sin \frac{n_i}{l} x \right)$$

составлена таблица величинъ  $S$ .

**Т а б л и ц а VIII.**

$\frac{x}{l}$	$n_1 = \begin{cases} 4,7300362 \\ 271^{\circ}40'5'' \end{cases}$ $S_1$	$n_2 = \begin{cases} 7,8531945 \\ 449^{\circ}57'19,7'' \end{cases}$ $S_2$	$n_3 = \begin{cases} 10,9956077 \\ 630^{\circ}0'6,93'' \end{cases}$ $S_3$	$n_4 = \begin{cases} 14,137165 \\ 809^{\circ}59'59,9'' \end{cases}$ $S_4$
0,	0	0	0	0
0,05				237960
0,1	10,9	586	22952	587358
0,15				955182
0,2	35,7	1552	44653	843858
0,25				364805
0,3	63,0	1936	24961	-226491
0,35				-766842
0,4	83,7	1330	-18760	-892474
0,45				-586573
0,5	91,3	0	-41913	0
0,55				+587700
0,6	83,7	-1330	-18721	893700
0,65				771000
0,7	63,0	-1936	25889	
0,75				
0,8	35,7	-1552	44950	
0,85				
0,9	10,9	-586	23180	
0,95				
1,00	0	0	0	

*Примѣчаніе.* Числа  $S_5$  и выше не вычислены потому, что семизначные логарифмы недостаточно точны для необходи-

мыхъ вычислений. Даже послѣднія 7 чиселъ въ столбцѣ  $S_4$  не указаны, такъ какъ они представляютъ разности чиселъ состоящихъ изъ 10—12 знаковъ, изъ которыхъ вѣрными можно считать 5—6 первыхъ знаковъ, а остальные 5—6 невѣрны. Ненаписанныя въ столбцѣ  $S_4$  числа должны выражаться разностью невѣрно выраженныхъ частей чиселъ.

Если бы обозначили

$$H_i S \sin \frac{m_i}{\mu} t = y_i \dots (14)$$

то

$$y = \Sigma y_i \dots (15)$$

### Число вибраціонныхъ волнъ между точками закрѣпленія рельсъ.

#### § 54.

Каждый изъ  $y_i$ , какъ видно изъ приведенной таблицы VIII, представляетъ волнистую линію. Число волнъ, помѣщающихся на всемъ протяженіи между двумя точками прикосновенія къ рельсамъ двухъ смежныхъ колесъ, равно числу  $i$ .

Что касается числа  $i$  не болѣе 4, то это видно изъ таблицы, но относительно числа волнъ, соотвѣствующихъ числамъ  $i$  болѣе 4, — то хотя уравненіе (13) и не даетъ непосредственнаго указанія для опредѣленія числа волнъ, но удостовѣриться въ томъ, что число волнъ будетъ дѣйствительно равно числу  $i$ , не трудно, взглядываясь въ составъ уравненія (13).

Изъ небольшой таблицы чиселъ  $n_i$  было уже видно, что чѣмъ больше  $i$ , тѣмъ менѣе  $n_i$  отличается отъ числа  $(2i + 1) \frac{\pi}{2}$ , поэтому  $\sin n_i$  почти не отличается отъ 1, а  $\cos n_i$  отъ 0. Въ то же время при возрастаніи  $n_i$ , какъ  $\sin h n_i$ , такъ и  $\cos h n_i$  быстро растутъ, сближаясь между собою. При  $i = 5$  число  $n_i$  почти не отличается отъ  $11 \cdot \frac{\pi}{2} = 17,278760$ , причемъ  $\sin h n_5$  и  $\cos h n_5$ , выражаясь однимъ и тѣмъ же цѣлымъ числомъ 15960275, отличаются одинъ отъ другого только въ цифрахъ послѣ запятой. Слѣдовательно, съ точностью до 0,0000001 можно считать

$$\sin h n_5 - \sin n_5 = \cos h n_5 - \cos n_5$$

и въ уравненіи (13) взять ихъ за скобку. Въ скобкахъ останется

$$\cos h n_5 \frac{x}{l} - \cos n_5 \frac{x}{l} - \sin h n_5 \frac{x}{l} + \sin n_5 \frac{x}{l}.$$

Въ этой суммѣ при  $\frac{x}{l} = \frac{1}{5}$  разница между  $\text{Cos } h \frac{n_i}{5}$  и  $\text{Sin } h \frac{n_i}{5}$  уже менѣе 0,03124, а при дальнѣйшемъ увеличеніи  $x$  эта разница быстро уменьшается и обращается при  $\frac{x}{l} = 1$  въ величину менѣе 0,0000001. Поэтому вышеприведенная сумма четырехъ чиселъ мало отличается отъ суммы  $\text{Sin } n_5 \frac{x}{l} - \text{Cos } n_5 \frac{x}{l}$ , а эта сумма при измѣненіи  $\frac{x}{l}$  отъ 0 до = 1 даетъ 5 полныхъ волнъ. Точно также можно удостовѣриться, что при болѣе значительныхъ величинахъ  $n_i$  число волнъ линіи, имѣющей абсциссами  $x$  и ординатами  $y$ , опредѣленное уравненіемъ (13), будетъ опредѣлено суммою

$$\text{Sin } (2i + 1) \frac{\pi}{2} - \text{Cos } (2i + 1) \frac{\pi}{2}$$

и число этихъ волнъ будетъ, очевидно,  $i$ .

Каждая изъ волнъ, съ теченіемъ времени, въ зависимости отъ величины  $\text{Sin } \frac{m_i^2}{\mu} t$ , измѣняетъ не только свою высоту, но и направленіе выпуклости.

При  $t = 0$  всѣ волны отсутствуютъ, но при увеличеніи  $t$  волны то поднимаются, то опускаются.

### Періоды вибраціонныхъ колебаній рельса.

#### § 55.

Каждому  $y_i$  соотвѣтствуетъ свой періодъ колебаній.

Продолжительность времени колебанія опредѣляется уравненіемъ

$$2\pi = \frac{m_i^2}{\mu} t \text{ или } t = 2\pi \frac{\mu}{m_i^2}$$

Число колебаній въ единицу времени

$$N_i = \frac{1}{2\pi} \frac{m_i^2}{\mu}$$

Въ этомъ уравненіи величина  $m_i$  можетъ быть замѣнена числомъ  $n_i$ . Изъ уравненій (5) видно, что

$$\frac{m_i^4 - k}{a^4} = \frac{n_i^4}{l}, \quad m_i^4 = \frac{a^4 n_i^4}{l} + k$$

Слѣдовательно

$$N_i = \frac{1}{2\pi} \frac{a^2}{\mu} \left(\frac{n_i}{l}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{k l^4}{a_4 n_i^4}} \dots \dots \dots (16)$$

Величины произвольныхъ постоянныхъ  $H_i$  опредѣляются обстоятельствами, вызвавшими вибраціи, и могутъ быть опредѣляемы при посредствѣ наблюденій надъ вибраціонными колебаніями. Такъ, Фламашъ, разсматривая діаграмму фиг. 7 <sup>1)</sup>, замѣчаетъ, что при скорости хода поѣзда въ 90 километровъ въ часъ, на участкѣ рельса, заключеннаго между двумя смежными колесами одного и того же вагона, образовывались три волны.

Присутствіе другихъ волнъ нельзя было замѣтить. Это значитъ, что въ уравненіи (13) слѣдуетъ считать всѣ величины  $H_i$  равными нулю, за исключеніемъ  $H_3$ , которому, согласно приведенной таблицѣ VIII, соотвѣтствуютъ именно три волны.

Уравненіе (13) обращается тогда въ слѣдующее

$$y = H_3 \left\{ \left( \sin h n_3 - \sin n_3 \right) \left( \cos h \frac{n_3}{l} x - \cos \frac{n_3}{l} x \right) - \left( \cos h n_3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos n_3 \right) \left( \sin h \frac{n_3}{l} x - \sin \frac{n_3}{l} x \right) \right\} \sin \frac{m_3^2}{\mu} t \dots \dots \dots (17)$$

Чтобы при посредствѣ діаграммы Фламаша, на его фиг. 7, опредѣлить численную величину  $H_3$ , надо замѣтить, что на фиг. 7 можно измѣрить полную высоту волны, которая слагается изъ величины подъема и величины опусканія. Одна изъ этихъ двухъ величинъ соотвѣтствуетъ такому времени, когда  $\sin \frac{m_3^2}{\mu} t = 1$ , другая тому времени, когда  $\sin \frac{m_3^2}{\mu} t = -1$ . Изъ этого видно, что подъемъ и углубленіе будутъ одинаково велики, и, слѣдовательно, подъемъ или углубленіе будутъ равны 0,5 полной высоты волны, опредѣленной діаграммой. Такимъ образомъ, оказывается, что для опредѣленія  $H_3$  надо въ уравненіе (17) на мѣсто  $y$  написать число, выражающее половину полной высоты, опредѣленной по діаграммѣ, на мѣсто  $S_3$  написать изъ таблицы наибольшую величину, то есть 45.000, и на мѣсто  $\sin \frac{m_3^2}{\mu} t = 1$ .

Изъ діаграммы видно, что полная высота волны не болѣе 0,75 миллиметра, а принимая во вниманіе принятый въ діаграммѣ

<sup>1)</sup> Bulletin de la Commission Internationale du Congrès des chemins de fer. Octobre 1903. Vol XVIII—№ 10, page 910.

масштабъ 5:2, надо сказать, что полная высота волны въ дѣйствительности не болѣе 0,3 миллиметра и половина этой высоты есть 0,15. Итакъ

$$0,15 = H_3 \cdot 45000$$

откуда  $H_3 = 0,000003$ .

### Число вибрацій рельса.

#### § 56.

Чтобы опредѣлить число колебаній, соответствующихъ этимъ наблюденіямъ Фламаша, надо имѣть въ виду, что по приведеннымъ имъ даннымъ

$$k = 0,86, \mu^2 = \frac{0,200}{1808}$$

$$a^4 = 20000 \times 10000000, \text{ и } \frac{l}{n_3} = \frac{2160}{10,996} \approx 200.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{k l^4}{a^4 n_3^4} = \frac{0,86 \times 1600000000}{200000000000} = 0,007.$$

Величина эта, очевидно, очень мала сравнительно съ единицею, и потому можно написать, что

$$N_3 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{40000} \sqrt{\frac{20000000000 \times 9808}{0,2}} = 394.$$

Фламашъ далѣе указываетъ, что на части рельса, заключенной между точками прикосновенія двухъ смежныхъ колесъ подъ разными вагонами, образовывалось по пяти волнъ. Это указываетъ, что въ уравненіи [13], относящемся къ этому частному случаю, надо было бы считать всѣ  $H_i$  равными нулю за исключеніемъ  $H_5$ . Для вычисленія его величины слѣдовало бы имѣть величины  $S_5$ , не приведенныя въ таблицѣ VIII. Онѣ не вычислены потому, что семизначные логарифмы недостаточно точны. Тѣмъ не менѣе о наибольшей величинѣ  $S_5$  можно составить себѣ нѣкоторое приближенное представленіе. Разсматривая таблицу, видимъ, что отношенія наибольшихъ величинъ представляетъ слѣдующій рядъ чиселъ

$$\frac{S_2}{S_1} = 20,3; \frac{S_3}{S_2} = 23,2; \frac{S_4}{S_3} = 21,3.$$

Нѣкоторыя колебанія въ приведенномъ рядѣ суть результаты того, что находящіяся въ таблицѣ наибольшія величины не суть истинныя наибольшія, а только близкія въ наибольшимъ. Глядя на эти числа, можно признать, что безъ большой погрѣшности можно допустить, что

$$\frac{S_5}{S_4} = 22 \text{ или кругло } S_5 = 21000000.$$

Принимая это число и опять считая, что половина высоты этихъ волнъ была 0,15, найдемъ изъ уравненія [13]

$$0,15 = H_5 \cdot 21000000,$$

откуда

$$H_5 = 0,000000007.$$

Число колебаній этихъ волнъ въ единицу времени, въ секунду нельзя привести потому, что Фламашъ не приводитъ разстоянія между смежными колесами двухъ вагоновъ. По всему вѣроятію, это разстояніе довольно значительно превосходитъ разстояніе между смежными колесами одного вагона, и если оно болѣе въ столько же приблизительно разъ, въ сколько  $n_5$  больше  $n_3$ , т. е. въ 1,23, то число колебаній не будетъ замѣтно отличаться отъ вышеприведеннаго  $N_3 = 394$ .

### Изгибающіе рельсъ моменты, вызываемые вибраціями.

#### § 57.

Когда при посредствѣ опытовъ опредѣлено  $H$ , тогда можно найти моменты изгибающихъ силъ, вызываемыхъ колебаніями.

Извѣстно, что изгибающій моментъ можетъ быть выраженъ формулою

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Изъ уравненія [13] не трудно найти, что

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = EJH_i \left( \frac{n_i}{l} \right)^2 \left\{ (\cos n_i - \cos hn_i) \left( \cos hn_i \frac{x}{l} + \cos n_i \frac{x}{l} \right) + \right. \\ \left. + (\sin n_i + \sin hn_i) \left( \sin hn_i \frac{x}{l} + \sin n_i \frac{x}{l} \right) \right\} \sin \frac{m_i^2}{\mu} t$$

Обозначая  $T$  множитель, стоящій въ большихъ скобкахъ, т. е.

$$T = (\text{Cos } n_i - \text{Cos } hn_i) \left( \text{Cos } hn_i \frac{x}{l} + \text{Cos } n_i \frac{x}{t} \right) + (\text{Sin } n_i + \text{Sin } hn_i) \left( \text{Sin } hn_i \frac{x}{l} + \text{Sin } n_i \frac{x}{t} \right)$$

можно найти его величины для данныхъ величинъ  $n_i$  и  $\frac{x}{l}$ .

Вставляя  $n_i$ , соответствующее образованию 3 волнъ, найдемъ величины  $T$ , приведенныя въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица величинъ  $T$ .

$\frac{x}{l}$	$T$	$\frac{x}{l}$	$T$
0	-59612	0,6	-19547
0,1	3097	0,7	23667
0,2	38760	0,8	38369
0,3	23665	0,9	5240
0,4	-19540	1	-59180
0,5	-42395		

Отсюда видно, что наибольшая численная величина момента, вызываемаго вибраціями, соответствующая

$$\text{Sin } \frac{m_i^2}{\mu} t = -1$$

будетъ

$$M_{\max} = EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 59600 EJH_i \left( \frac{n_i}{l} \right)^2$$

При  $E = 20000$ ,  $J = 10000000$ ,

$$H_i = 0,000003 \text{ и } \left( \frac{n_3}{l} \right)^2 = \frac{1}{40000}$$

найдемъ

$$M = 894000 \text{ килогр.-миллиметровъ.}$$

Статическій же моментъ для рельсовъ Фламаша, при передачѣ давленія на 4 шпалы, при нагрузкѣ въ 6500 клгр. и при разстояніи между серединами шпаль въ 800 миллиметровъ, былъ бы

$$0,444 \times PL = 0,444 \times 6500 \times 800 = 2308000 \text{ кил.-миллиметр.}$$

Слѣдовательно дополнительный изгибающій моментъ, вызываемый вибраціями, составляетъ немного менѣе 40% статическаго, что далеко недостаточно для объясненія наибольшихъ уклоненій динамическаго давленія отъ статическаго, указываемыхъ опытами.

Этотъ результатъ указываетъ, что изгибами рельса, возникающими благодаря исключительно вибраціямъ, пренебрегать не слѣдуетъ, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, онъ указываетъ, что результаты теорій, рассматривающихъ рельсъ, какъ балку совершенно правильнаго вида, опирающуюся на двѣ неподвижныя опоры и поддерживающую катящееся колесо совершенно правильной формы, недостаточно дополняются результатами, доставляемыми изученіемъ вибрацій.

Недостаточно дополняются прежде всего потому, что, помимо вибраціонныхъ напряженій, Коюаръ и Фламашъ указываютъ дѣйствительныя динамическія напряженія въ 2, въ 3 раза болѣе напряженій статическихъ, а теорія Циммермана, сильно преувеличивающая вліяніе изгиба рельсовъ, даетъ въ результатѣ напряженіе не болѣе двойного.

---

## ОТДѢЛЪ V.

**Вѣроятность опредѣленія данными опытами рельсовыхъ напряженій, заключенныхъ между данными предѣлами.**

---

**Вѣроятность, что напряженіе въ рельсѣ опредѣленное данными опытами, заключается въ данныхъ предѣлахъ.**

### § 58.

Въ описаніяхъ опытовъ надъ рельсами никогда еще не возбуждался вопросъ, упомянутый въ этомъ заголовкѣ. Необходимость его надо оправдать прежде приступа къ изложенію, представляющему отвѣтъ. Ни одно изъ физическихъ явленій болѣе или менѣе сложное, къ какимъ безспорно принадлежитъ напря-

женіе въ рельсѣ при движеніи по немъ колеса, нельзя изучать, не имѣя нѣкоторой опоры въ теоріи, составленной на возможно тщательныхъ и разнообразныхъ наблюденіяхъ. Выводы подобной теоріи должны быть провѣряемы опытами.

Попытка подобной провѣрки изложенной здѣсь теоріи для опредѣленія напряженій въ рельсахъ, путемъ сличенія ея результатовъ съ результатами опытовъ Дудлея, уже указано выше.

Сличеніе это доставило весьма удовлетворительные выводы. Оно явилось вѣскимъ подтвержденіемъ вѣрности предложенной теоріи. Небольшое различіе между выводами теоріи и опытовъ, еще не разъясненное, легко можетъ быть объяснено трудностями, связанными съ производствомъ и истолкованіемъ опытовъ. Величины моментовъ силъ, изгибающихъ рельсъ, найденныя Дудлеемъ при дѣйствіи паровозныхъ, тендерныхъ и вагонныхъ колесъ, оказались больше соотвѣтственныхъ моментовъ, найденныхъ теоретически. Это различіе можно объяснять съ одинаковою вѣроятностью различными способами. Можно полагать, что вызываемая многими колесами осадка шпаль, болѣе однообразная, чѣмъ при дѣйствіи одиночнаго колеса, вызывала болѣе сильныя сопротивленія шпаль, удаленныхъ отъ точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, и потому моменты изгибающихъ силъ оказывались болѣе значительными, чѣмъ тѣ, которые соотвѣтствовали принятому при моихъ вычисленіяхъ предположенію, что на рельсъ давить отдѣльное колесо, а не система ихъ, какъ было въ дѣйствительности. Точно такъ же можно предполагать, что принятая Дудлеемъ величина коэффиціента упругости  $E=21.100$  килограммовъ на квадратный миллиметръ (30 000 000 фунтовъ на квадратный дюймъ) была слишкомъ велика. Сомнѣваться въ этомъ можно, такъ какъ извѣстно, что для рельсовъ желѣзной дороги Парижъ, Лионъ, Средиземное море была опредѣлена величина  $E=15\,500$  килограммовъ на квадратный миллиметръ <sup>1)</sup>. Величина, принятая Дудлеемъ, больше послѣдней на 36%. Наконецъ, а можетъ быть и всего вѣроятнѣе, различіе результатовъ наблюденій Дудлея и теоретическихъ вычисленій произошло, благодаря свойствамъ прибора стрематографа. Этотъ приборъ, устроенный для измѣренія напряженій въ подошвѣ рельса, состоялъ изъ пластинки, длиною въ 125 миллиметровъ, укрѣпленной однимъ концомъ на подошвѣ рельса и направленной вдоль рельса. Остріе, помѣщенное на другомъ концѣ пластинки, опиралось на мѣдную

<sup>1)</sup> Congrès International des chemins de fer. Travaux préparatoires de la 4-me Session. Cahier 60, page 328.

полосу, не мѣнявшую своего положенія вдоль рельса, но двигавшуюся перпендикулярно къ этой длинѣ. Когда рельсъ подвергался изгибамъ, подошва его то вытягивалась, то сжималась. Двигавшаяся въ это время мѣдная полоса то удалялась, то приближалась относительно закрѣпленнаго конца пластинки съ остриемъ, а острие чертило на полосу кривую линію. Ординаты этой кривой представляли удлиненія или укороченія части соответствующаго мѣста подошвы рельса.

Зная первоначальную длину этой части и опредѣляя удлиненія или укороченія и обозначая ихъ черезъ  $l$ , можно, при извѣстной величинѣ коэффиціента упругости  $E$ , приблизительно опредѣлить напряженіе  $q$ , въ крайнихъ фибрахъ подошвы, изъ извѣстнаго уравненія

$$q = E \frac{l}{125}.$$

Въ опубликованныхъ Дудлеемъ таблицахъ, наибольшая величина  $q$  была менѣе 20 килограммовъ на квадратный миллиметръ. Отсюда видно, что при  $E = 20\,000$  наибольшая величина  $l$  была меньше 0,125 миллиметра.

Другія удлиненія были еще меньше. При измѣреніи столь малыхъ длинъ ошибка въ 10 и даже болѣе процентовъ весьма возможна.

Упомянутая попытка сличенія теоріи съ опытами, благоприятная для теоріи, подтвердила только то, что среднія величины напряженій въ рельсахъ, опредѣленные теоріею и опытомъ, если и различаются, то немного; но она ни мало не указываетъ, были ли опыты достаточно многочисленны, чтобы съ достаточнымъ вѣроятіемъ указать не только среднія величины напряженій, но и наиболѣе крайнія, какъ самыя большія, такъ и самыя малыя. При расчетахъ, опредѣляющихъ поперечные размѣры рельсовъ, наибольшія напряженія представляются особенно важными.

Несмотря на неполноту сравненія теоріи съ опытомъ, было очень важно указать на достигнутое подтвержденіе ея правильности. Увѣренность въ ея примѣнимости необходима потому, что только соображенія, вытекающія изъ этой теоріи, могутъ привести къ разрѣшенію вопроса о вѣроятности, что при извѣстномъ числѣ опытовъ будутъ усмотрѣны напряженія, находящіяся въ данныхъ предѣлахъ.

Всякій опытъ происходитъ при совершенно опредѣленныхъ условіяхъ, и для всесторонняго изученія предмета необходимо, чтобы условія, при которыхъ производятся опыты, были

въ такой мѣрѣ разнообразны, какъ то необходимо для захвата въ среду этихъ опытовъ всей области явленій, интересующихъ наблюдателя.

Распространеніе наблюденій до предѣловъ практически опредѣленной области техническихъ явленій не всегда достаточно для полученія результатовъ, нужныхъ при разрѣшеніи такихъ инженерныхъ вопросовъ, которые относятся къ явленіямъ, способнымъ, независимо отъ воли наблюдателя, принимать различныя формы и величину. Къ явленіямъ такого именно рода относятся напряжения въ рельсѣ, вызываемыя катящимся колесомъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ производится наблюденіе. Обыкновенно наблюдатель не имѣетъ средствъ для возбужденія въ данной точкѣ пути тѣхъ именно напряженій, которыя его въ данный моментъ интересуютъ.

Зная напередъ, что во время опыта, въ томъ мѣстѣ рельса, гдѣ производится наблюденіе, можетъ быть вызвано каждое изъ всѣхъ возможныхъ напряженій, отъ самаго большого до самаго малаго, наблюдатель долженъ себѣ уяснить, какъ велика вѣроятность появленія интересующаго его напряженія.

Такъ какъ эта вѣроятность зависитъ отъ числа соответственныхъ наблюденій, то онъ долженъ опредѣлить наименьшее число наблюденій, достаточно обезпечивающихъ желательную вѣроятность проявленія напряженія, заключеннаго въ данныхъ предѣлахъ.

Опыты Дудлея такъ же, какъ и предшествующіе опыты, показываютъ, что одинаковыя колеса, въ одномъ и томъ же мѣстѣ пути, вызываютъ неодинаковыя напряженія. Одно колесо прижимаетъ рельсъ больше, другое—меньше. Это даетъ поводъ предвидѣть, что одно и то же катящееся колесо неодинаково прижимаетъ рельсъ въ разныхъ его мѣстахъ или, другими словами, что траекторія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ мѣстами углубляется, мѣстами поднимается. По виду эта траекторія должна быть линіею волнообразною.

Теорія не только подтверждаетъ это ожиданіе, но даетъ возможность опредѣлить какое угодно число координатъ этой волнообразной линіи.

Во время движенія колеса надъ точкою, избранною на рельсѣ для наблюденія, можетъ появиться каждая изъ точекъ волнообразной траекторіи. При производствѣ опытовъ нѣтъ возможности заранѣе предвидѣть, какая именно точка траекторіи наблюдаемаго колеса появится надъ наблюдаемой точкой рельса. Появленіе каждой изъ точекъ траекторіи представляется равно возмож-

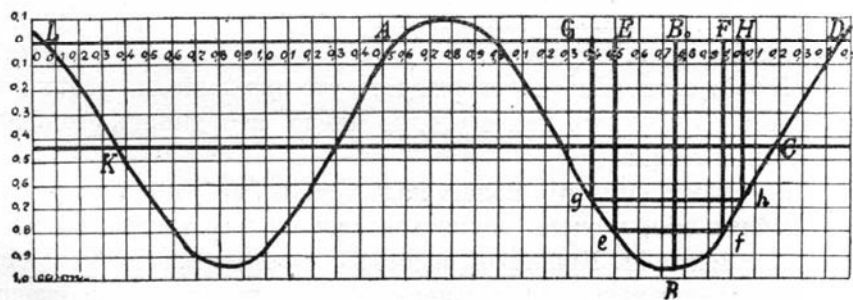
нымъ, но только появленіе нѣкоторыхъ точекъ траекторіи будетъ благоприятно въ отношеніи вызова въ рельсѣ напряженій, находящихся въ извѣстныхъ предѣлахъ. Отношеніе длины пути, проходимого колесомъ и соотвѣтственнаго этимъ точкамъ, къ длинѣ пути, соотвѣтствующаго полной длинѣ волны, представитъ величину вѣроятности, что опытъ укажетъ напряженіе, заключающееся въ опредѣленныхъ предѣлахъ.

Если бы по условіямъ опыта представилась возможность начертить траекторію точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, то было бы не трудно опредѣлить, довольно вѣрно, величину вѣроятности наблюденія напряженій, находящихся въ какихъ угодно предѣлахъ.

Для этого опредѣленія надо было бы найти ординаты, соотвѣтствующія даннымъ предѣламъ напряженій, и по даннымъ ординатамъ найти соотвѣтствующія абсциссы. Сумма отрѣзковъ абсциссъ между наибольшими и наименьшими ординатами опредѣлитъ длину пути, благоприятную для появленія напряженій, находящихся въ данныхъ предѣлахъ. Раздѣляя длину этого пути на полную длину волны, получимъ величину искомой вѣроятности.

Напримѣръ, если линія  $ABCD$  представляетъ полную волну траекторіи колеса, катящагося по рельсу, которому соотвѣтствуетъ  $A=0,5$ , при скорости  $v=100$  километровъ въ часъ, и если прямая  $AD$  находится на уровнѣ поверхности ненагруженнаго рельса, то прямая  $B_0B$  выразитъ наибольшее углубленіе. Изъ уравненія (3) извѣстно, что каждая изъ ординатъ траекторіи пропорціональна давленію  $P$ , производимому колесомъ на рельсъ въ той точкѣ, къ которой эта ордината относится. Съ другой стороны, изъ таблицы 1 изъ предшествующихъ ей шести уравненій

Траекторія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ по динамической таблицѣ.



$LD$ —уровень поверхности катанія ненагруженнаго рельса.

$KC$ —уровень поверхности катанія рельса, нагруженнаго неподвижнымъ колесомъ.

известно, что сопротивления шпаль пропорциональны тому же давлению  $P$ . Если путь, пройденный колесомъ отъ шпалы по разсматриваемому пролету, обозначенъ  $\delta\alpha$ , то моментъ  $M$ , изгибающей рельсъ въ поперечномъ сѣченіи его подъ точкою прикосновения съ колесомъ, выразится уравненіемъ

$$M = Q [3 - \delta) \gamma + (2 - \delta) \beta + (1 - \delta) \alpha] LP = \lambda P,$$

гдѣ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  суть коэффициенты, указанные въ таблицахъ VIII или IX указанныхъ далѣе.

Въ виду пропорциональности ординатъ траекторіи тѣмъ давленіямъ  $P$ , которыя этимъ ординатамъ соотвѣтствуютъ, можно написать уравненіе въ видѣ

$$y = \mu P$$

и, слѣдовательно, моментъ  $M$  выразится уравненіемъ

$$M = \frac{\lambda}{\mu} y.$$

Если наибольшее напряженіе въ разсматриваемомъ сѣченіи рельса назовемъ  $R$  и обозначимъ  $z$  разстояніе отъ нейтральной оси рельса до наиболѣе напряженной фибры, то, какъ известно, можно написать уравненіе

$$R \frac{J}{z} = M = \frac{\lambda}{\mu} y$$

или

$$R = \frac{z}{J} \frac{\lambda}{\mu} y \text{ или } y = \frac{J}{z} \frac{\mu}{\lambda} R$$

откуда видно, что ордината пропорциональна напряженію въ рельсъ.

Какъ только будутъ заданы предѣлы напряженій, тѣмъ самымъ будутъ опредѣлены и соотвѣтствующія имъ ординаты.

Если зададимъ себѣ величины  $R_0$  и  $R_1$  такъ, что ордината

$$BB_0 = \frac{J}{z} \frac{\mu}{\lambda} R_0,$$

и ордината

$$eE = \frac{J}{z} \frac{\mu}{\lambda} R_1,$$

то всѣ напряженія, промежуточные между  $R_0$  и  $R_1$ , будутъ соотвѣтствовать ординатамъ точекъ траекторіи  $eEf$ .

Перемѣщеніе колеса по рельсу, соотвѣтствующее переходу отъ точки  $e$  къ  $f$ , равно длинѣ линіи  $EF$ . Изъ числа всѣхъ ординатъ, соотвѣтствующихъ волнѣ  $ABCD$ , появленіе которыхъ оди-

наково возможно при движеніи колеса надъ избранною точкою рельса, только тѣ ординаты благопріятствуютъ появленію въ поперечномъ сѣченіи, соответствующемъ этой избранной точкѣ, напряженій, заключенныхъ между  $R_0$  и  $R_1$ , которыя соответствують перемѣщенію  $EF$ . Отсюда видно, что отношеніе благопріятныхъ случаевъ къ числу случаевъ равно возможныхъ, или вѣроятность  $p$  появленія напряженій въ предѣлахъ  $R_0$  и  $R_1$  опредѣляется уравненіемъ

$$p = \frac{EF}{AD}.$$

Если бы однимъ предѣломъ напряженій было взято  $R_1$  вышеупомянутое, а другимъ— $R_2$ , опредѣленное уравненіемъ

$$gG = \frac{J}{z} \frac{v}{\lambda} R_2,$$

то ординаты, соответствующія напряженіямъ, промежуточнымъ между  $R_1$  и  $R_2$ , соответствовали бы перемѣщеніямъ  $GE$  и  $FH$ .

Вѣроятность  $p'$ , что въ данномъ сѣченіи рельса возникаетъ при движеніи колеса напряженіе, заключенное въ предѣлахъ  $R_1$  и  $R_2$ , опредѣляется уравненіемъ

$$p' = \frac{GE + FH}{AD}.$$

Измѣряя упомянутыя выше линіи, входящія въ выраженія вѣроятностей  $p$  и  $p'$ , по масштабу, можно будетъ выразить эти вѣроятности численно.

#### **Примѣненіе синусоиды къ опредѣленію вѣроятностей наблюденій.**

##### § 59.

Если траекторію точки прикосновенія колеса съ рельсомъ можно разсматривать, какъ синусоиду, то вѣроятность появленія точекъ ея, которымъ соответствують ординаты, заключенныя въ данныхъ предѣлахъ, равна отношенію той части длины рельса, которая соответствуетъ упомянутымъ ординатамъ, къ длинѣ полной волны всей синусоиды. Для опредѣленія длины только что указанной части рельса полезно замѣтить, что длину какой угодно ординаты  $y$  можно выразить суммою изъ длины наименьшей ординаты, сложенной съ нѣкоторою частію  $\alpha$  отъ разности между наибольшею и наименьшею ординатами. Связь между  $y$  и  $\alpha$  выразится уравненіемъ

$$y = y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) \alpha$$

Замѣняя наибольшую и наименьшую ординаты ихъ выраже-  
ніями изъ уравненія (13, § 48), найдемъ, что

$$y = h + (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b}} \dots \dots (17)$$

Сличая это уравненіе съ (10, § 48), видимъ, что

$$\eta = (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b}}$$

а вставляя это выраженіе  $\eta$  въ уравненіе (11, § 48), найдемъ, что

$$(2\alpha - 1) = \sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi$$

откуда

$$\xi = \frac{c}{\sqrt{b}} \arcsin(2\alpha - 1) \dots \dots \dots (18)$$

Извѣстно, что одному и тому же синусу соотвѣтствуютъ двѣ дуги. Если одну обозначимъ  $s_1$ , то другая  $s_2 = \pi - s_1$ . Обозначая  $\xi_1$  и  $\xi_2$  длины, соотвѣтствующія дугамъ  $s_1$  и  $s_2$ , получимъ два уравненія:

$$\xi_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} s_1 \text{ и } \xi_2 = \frac{c}{\sqrt{b}} s_2.$$

Такимъ образомъ, получаются абсциссы, соотвѣтствующія ординатѣ

$$y = y_{\min} + \alpha (y_{\max} - y_{\min}).$$

Задавая другую ординату  $y'$ , которой соотвѣтствуетъ  $\alpha'$ , нашли бы другія величины дугъ  $s'_1$  и  $s'_2$  и другія величины абсциссъ

$$\xi'_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} s'_1 \text{ и } \xi'_2 = \frac{c}{\sqrt{b}} s'_2.$$

Всѣ ординаты, заключенныя между предѣлами

$$y = y_{\min} + \alpha (y_{\max} - y_{\min})$$

и

$$y' = y_{\min} + \alpha' (y_{\max} - y_{\min})$$

будетъ соотвѣтствовать абсциссамъ, заключеннымъ между предѣлами

$$\xi_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} s_1 \text{ и } \xi'_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} s'_1$$

и

$$\xi_2 = \frac{c}{\sqrt{b}} s_2 \quad \text{и} \quad \xi_2' = \frac{c}{\sqrt{b}} s_2'$$

или

$$\xi_2 = \frac{c}{\sqrt{b}} (\pi - s_1) \quad \text{и} \quad \xi_2' = \frac{c}{\sqrt{b}} (\pi - s_1').$$

Длина перемещений колеса, при которых напряжения въ рельсѣ заключаются въ данныхъ предѣлахъ, соответствующихъ величинамъ,  $\alpha$  и  $\alpha'$ , будетъ

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} (\pi - 2s_1)$$

и

$$\xi_2' - \xi_1' = \frac{c}{\sqrt{b}} (\pi - 2s_1'),$$

а сумма этихъ двухъ перемещений

$$\xi_2 - \xi_1 + \xi_2' - \xi_1' = \frac{c}{\sqrt{b}} (2\pi - 2s_1 - 2s_1') \dots \dots \dots (19)$$

Если  $\alpha' = 1$ , то изъ уравненія (17) находимъ, что

$$y' = h + \sqrt{\frac{(y_0 - h)^2 b + \omega_0^2}{b}} = y_{\max}$$

и изъ уравненія (18)

$$\xi' = \frac{c}{\sqrt{b}} \arcsin 1$$

откуда

$$s_1' = s_2' = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\xi_1' = \xi_2' = \frac{c}{\sqrt{b}} \frac{\pi}{2}$$

а уравненіе (19) обращается въ

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{c}{\sqrt{b}} (\pi - 2s_1) \dots \dots \dots (20)$$

Полная длина  $L$  волны соответствуетъ такому приращенію длины абсциссы, которое обращаетъ уравненіе (11, § 48) въ слѣдующее:

$$\sin \frac{\sqrt{b}}{c} \xi = \sin \frac{\sqrt{b}}{c} (\xi + L),$$

откуда очевидно

$$\frac{\sqrt{b}}{c} L = 2\pi$$

или

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{b}} c \dots (21)$$

Слѣдовательно, вѣроятность  $p$ , что давленіе, производимое колесомъ въ данной точкѣ рельса, будетъ заключаться между предѣлами, соотвѣтствующими ординатамъ

$$y = y_{\min} + \alpha (y_{\max} - y_{\min}) \text{ и } y' = y_{\min} + \alpha' (y_{\max} - y_{\min})$$

на основаніи уравненій (19) и (21) будетъ

$$p = \frac{\xi_2 - \xi_1 + \xi_2' - \xi_1'}{L} = 1 - \frac{s_1}{\pi} - \frac{s_2}{\pi}$$

или

$$p = 1 - \frac{\arcsin(2\alpha - 1)}{\pi} - \frac{\arcsin(2\alpha' - 1)}{\pi} \dots (22)$$

Вѣроятность  $p_0$ , что давленіе, производимое колесомъ въ данной точкѣ рельса, будетъ заключаться между предѣлами, соотвѣтствующими

$$y = y_{\min} + \alpha (y_{\max} - y_{\min}) \text{ и } y_0 = y_{\max}$$

на основаніи уравненій (20) и (21) будетъ

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{s_1}{\pi}$$

или

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{\arcsin(2\alpha - 1)}{\pi} \dots (23)$$

Вторая части уравненій (22) и (23) зависятъ только отъ величинъ  $\alpha$  и  $\alpha'$ , т. е. отъ величинъ той доли разности между наибольшею и наименьшею ординатою, которыя должны быть прибавлены къ наименьшей ординатѣ, чтобы получить избранныя предѣльныя ординаты. Будетъ ли при этомъ синусоида съ высокими или низкими волнами, отъ этого вѣроятности не мѣняются.

Если бы предѣлы ординатъ желательно было выражать известными долями наибольшей ординаты, то надо было бы припомнить, что во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда колесо не подпрыгиваетъ надъ рельсомъ, а катится по нему, не отдѣляясь, точка прикосновенія колеса съ рельсомъ погружается ниже уровня.

соотвѣтствующаго поверхности катанія рельса, нагруженнаго статическимъ дѣйствіемъ колеса, ровно настолько же, насколько оно поднимается надъ тѣмъ же уровнемъ, и, слѣдовательно, обозначая  $h'$  величины этихъ пониженій и повышеній, увидимъ, что

$$y_{\max} = h + h' \text{ и } y_{\min} = h - h'$$

и

$$y = y_{\min} + \alpha (y_{\max} - y_{\min}) = h + (2\alpha - 1) h'$$

Если ординату  $y$  выразимъ въ видѣ нѣкоторой доли  $\varepsilon$  отъ наибольшей ординаты  $h + h'$ , то

$$y = \varepsilon (h + h') = h + (2\alpha - 1) h'$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{h + (2\alpha - 1) h'}{h + h'} \dots (24)$$

Задавая  $\varepsilon$ , можно найти  $\alpha$ , а по величинѣ  $\alpha$ , изъ уравненій (22) или (23), найти вѣроятности.

### П р и м ѣ р ы.

#### § 60.

Если бы  $h' = 0,5 h$ , то

$$\varepsilon = \frac{0,5 + \alpha}{1,5} \dots (25)$$

Величины вѣроятностей, вычисленныя по уравненію (23), соотвѣтственныя различнымъ  $\varepsilon$ , приведены въ слѣдующей таблицѣ.

Т а б л и ц а 12.

$\alpha_1$	$p_0$	$\alpha_1$	$p_0$
0,95	0,143	0,7	0,369
0,9	0,205	0,65	0,403
0,85	0,253	0,6	0,436
0,8	0,295	0,55	0,468
0,75	0,333	0,5	0,5

Въ случаѣ, когда  $h' = h$ , величина  $\varepsilon = \alpha$  и потому прямо находится въ этой же таблицѣ.

Если же  $h' = 0,5 h$ , то величины  $\varepsilon$ , соответственные величинам  $\alpha$ , помещеннымъ въ таблицѣ 12, оказываются равными величинамъ, приведеннымъ въ таблицѣ 13.

Т а б л и ц а 13.

$\alpha_1$	$\varepsilon$	$\alpha_1$	$\varepsilon$
0,95	0,967	0,7	0,8
0,9	0,933	0,65	0,767
0,85	0,9	0,6	0,733
0,8	0,867	0,55	0,7
0,75	0,83	0,5	0,67

Изъ таблицы 12 видно, что при движеніи колеса съ такими вертикальными скоростями, при которыхъ его траекторія поднимается до уровня поверхности катанія совершенно не нагруженнаго рельса и опускается до уровня вдвое болѣе низкаго, чѣмъ уровень, соответствующій статической нагрузкѣ, т. е. когда  $y_{\min} = 0$  и  $y_{\max} = 2h$ , вѣроятность, что катящееся колесо произведетъ въ данной точкѣ рельса давленіе, заключающееся между двойною статическою нагрузкою и 0,9 этой нагрузки, есть  $p = 0,205$  или почти  $p = \frac{1}{5}$ .

Вѣроятность, что давленіе будетъ заключаться между двойною статическою нагрузкою и 0,8 этой нагрузки, будетъ

$$p = 0,295$$

и, что давленіе будетъ не менѣе 0,7 двойного, вѣроятность

$$p = 0,369.$$

Если же траекторія будетъ болѣе отлога, если она будетъ подниматься не выше  $0,5 h$  и опускаться не ниже  $1,5h$ , то для опредѣленія вѣроятности, что давленіе колеса въ данной точкѣ рельса будетъ между предѣлами, соответствующими  $1,5 h$  и  $0,9 \times 1,5 h$ , слѣдуетъ взять  $\varepsilon = 0,9$ , чему соответствуетъ въ таблицѣ 13 величина  $\alpha_1 = 0,85$  и по таблицѣ 12

$$p = 0,253 \text{ или почти } p = \frac{1}{4}.$$

Если давленіе должно заключаться между предѣлами, соответствующими  $1,5 h$  и  $0,8 \times 1,5 h$ , то  $\varepsilon = 0,8$  и  $\alpha_1 = 0,7$ , и  $p = 0,369$ .

Въ случаѣ же требованія, чтобы давленіе заключалось въ предѣлахъ, соответствующихъ  $0,5 h$  и  $0,7 \times 1,5 h$ ,

$$\varepsilon = 0,7; \alpha_1 = 0,55 \text{ и } p = 0,468.$$

Изъ этихъ данныхъ видно, что при меньшей извилисти траекторіи, или при меньшихъ вертикальныхъ скоростяхъ, вѣроятность, что давленіе колеса въ данной точкѣ окажется между наибольшею его величиною и опредѣленною долею этой величины, становится больше, чѣмъ при болѣе извилистой траекторіи.

Если бы вертикальныя скорости колеса были такъ велики, что колесо поднималось бы надъ негруженнымъ рельсомъ на величину  $h$  и опускалось, погружая рельсъ втрое болѣе, чѣмъ статическая нагрузка, то было бы

$$y_{\min} = -h; y_{\max} = 3h$$

и

$$y = -h + \alpha(3h + h) = (4\alpha - 1)h.$$

Съ другой стороны, если бы

$$y = \epsilon_1 3h,$$

то

$$3\epsilon_1 = 4\alpha - 1$$

и

$$\epsilon_1 = \frac{4\alpha - 1}{3} \dots \dots \dots (26)$$

откуда найденныя величины  $\epsilon_1$  помѣщены въ таблицѣ 14.

**Т а б л и ц а 14.**

$\alpha_1$	$\epsilon_1$	$\alpha_1$	$\epsilon_1$
0,95	0,933	0,8	0,733
0,9	0,833	0,75	0,667
0,85	0,8	0,7	0,6

Вѣроятность, соотвѣтствующая  $\alpha_1 = 0,85$ ,  $p = 0,253$  или почти  $\frac{1}{4}$ , соотвѣтствуетъ ожиданіямъ, что: 1) при извилистости, достигающей

$$y_{\max} = 3h$$

давленіе колеса на рельсъ въ избранной точкѣ рельса будетъ заключаться между предѣлами, соотвѣтствующими наибольшему и 0,8 отъ наибольшаго.

2) При извилистости, доставляющей

$$y_{\max} = 2h$$

давленіе колеса на рельсъ въ избранной точкѣ рельса будетъ заключено между предѣлами, соотвѣтствующими наибольшему давленію и 0,85 наибольшаго.

3) При извилисти, доставляющей

$$y_{\max} = 1,5h$$

давление колеса на рельсъ въ избранной его точкѣ будетъ заключаться между наибольшимъ и 0,9 отъ наибольшаго.

**Число опытовъ, обеспечивающихъ опредѣленной величины вѣроятность наблюденія напряженій, заключенныхъ въ данныхъ предѣлахъ.**

§ 61.

Устанавливая число опытовъ, обеспечивающихъ извѣстную вѣроятность, что наблюденія доставятъ величины давленій, заключенныя между извѣстными предѣлами, или что они будутъ отличаться отъ наибольшаго не болѣе, чѣмъ на извѣстную его долю, напримѣръ, не болѣе, чѣмъ на 0,2, при неизвѣстной извилистости, надо рассчитывать на случай наиболѣе неблагоприятный, т. е., напримѣръ, на то, что можетъ быть  $y_{\max} = 3h$ .

Если бы опыты удостовѣрили, что  $y_{\max} = 2h$ , то то же число опытовъ, съ тою же вѣроятностью, обеспечивало бы, что наблюденныя усилія отклонялись отъ наибольшаго не болѣе, чѣмъ на 0,15 его величины; а если бы получилась увѣренность, что  $y_{\max} = 1,5h$ , то то же число опытовъ, съ тою же вѣроятностью, обеспечивало бы, что наибольшее отклоненіе было не болѣе 0,1 наибольшаго.

Вѣроятность, что при одномъ испытаніи давленіе колеса на рельсъ, въ данной его точкѣ, будетъ меньше величины, соответствующей предѣлу  $\epsilon y_{\max}$ , будетъ

$$1 - p_{\epsilon}$$

гдѣ  $p_{\epsilon}$  должно быть взято изъ таблицы 14.

При  $n$  опытахъ вѣроятность, что всѣ наблюденные результаты будутъ меньше соответствующаго  $\epsilon y_{\max}$ , будетъ

$$(1 - p_{\epsilon})^n.$$

Если при  $y_{\max} = 3h$  возьмемъ  $\epsilon = 0,833$ , то по таблицѣ 12  $p_{\epsilon} = \frac{1}{5}$ , и вѣроятность  $p_1$ , что при  $n$  испытаніяхъ всѣ наблюденія дадутъ меньше  $0,833 \times 3h = 2,499h$ , будетъ

$$p_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Напротивъ, вѣроятность, что хотя одно наблюденіе будетъ больше  $0,833 \times 3h$ , будетъ

$$p_1' = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Если бы было желательно имѣть  $p_1' = 0,99$ , то надо, чтобы

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0,01$$

откуда

$$n \operatorname{Log} \frac{4}{5} = -2 \quad \text{или} \quad n = \frac{1}{1 - \operatorname{Lg} 8} \quad \text{или почти } n = 20$$

при  $p_1' = 0,999$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0,001$$

откуда

$$n \operatorname{Lg} \frac{8}{10} = -3 \quad \text{или почти } n = 30$$

и 40 опытовъ обезпечиваютъ наблюдателя въ правѣ ожидать, что хотя бы одинъ разъ появится величина болѣе  $0,8 \times 3 h$ , или болѣе  $0,85 \times 2 h$ , или болѣе  $0,9 \times 1,5 h$ , съ вѣроятностью  $p_1' = 0,9999$ .

Для разъясненія вопроса о вѣроятности наблюденія при  $n$  опытахъ группы явленій, состоящей изъ  $m$  членовъ, заключенныхъ въ заданныхъ предѣлахъ  $y_{\max}$  и  $\epsilon y_{\max}$ , надо припомнить, что число сочетаній безъ повтореній изъ  $n$  членовъ по  $m$  выражается дробью

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

Вѣроятность, что при одномъ испытаніи появится ордината въ предѣлахъ отъ 0 до  $\epsilon y_{\max}$  назовемъ  $p_\epsilon$ . При этомъ вѣроятность появленія при томъ же испытаніи ординаты въ предѣлахъ отъ  $\epsilon y_{\max}$  до  $y_{\max}$  будетъ  $1 - p_\epsilon$ .

При  $n$  испытаніяхъ вѣроятность, что будутъ получены только ординаты, заключенныя въ предѣлахъ отъ 0 до  $\epsilon y_{\max}$ , будетъ

$$p_\epsilon^n.$$

Вѣроятность, что при  $n$  испытаніяхъ получится  $(n-1)$  ордината, заключенная въ предѣлахъ 0 и  $\epsilon y_{\max}$ , и одна ордината въ предѣлахъ  $\epsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , опредѣлится слѣдующимъ образомъ. Испытанія числомъ  $n$  можно подраздѣлить на  $n$  группъ. Каждая группа будетъ состоять изъ одного отдѣльнаго испытанія и изъ  $n-1$  испытаній взятыхъ вмѣстѣ. Каждое изъ  $n$  испытаній можетъ быть взято за испытаніе отдѣльное.

Вѣроятность, что въ первомъ испытаніи получится ордината въ предѣлахъ  $\epsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , есть  $1 - p_\epsilon$ , а вѣроятность, что при остальныхъ  $n-1$  получатся только такія ординаты, которыя заключаются въ предѣлахъ 0 и  $\epsilon y_{\max}$ , есть

$$p_\epsilon^{n-1}.$$

Вѣроятность совокупности этихъ двухъ явленій есть

$$(1 - p_{\varepsilon}) p_{\varepsilon}^{n-1}.$$

Такъ какъ число такихъ совокупностей есть  $n$ , то вѣроятность, что при  $n$  опытахъ получится одна ордината въ предѣлахъ  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , а всѣ остальные ординаты будутъ заключены въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon p$ , выразится формулою

$$p_2 = n (1 - p_{\varepsilon}) p_{\varepsilon}^{n-1}.$$

Вѣроятность, что при  $n$  опытахъ  $n-2$  ординаты будутъ заключаться въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$  и 2 ординаты въ предѣлахъ  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , опредѣлится разсужденіями, подобными вышеприведеннымъ. Всѣ  $n$  испытаній можно себѣ представить принадлежащими къ одной изъ группъ, составленныхъ слѣдующимъ образомъ. Всѣ  $n$  испытаній собираются въ группы по 2 испытанія. Такихъ группъ можно составить, согласно вышеприведенной формулѣ,

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ группы.}$$

Къ каждой изъ такихъ группъ должны быть присоединены всѣ остальные испытанія, не вошедшія въ группу. Присоединяемая группа будетъ состоять изъ  $n-2$  испытаній. Вѣроятность, что всѣ эти испытанія покажутъ ординаты, заключенныя только въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ , есть

$$p_{\varepsilon}^{n-2}.$$

Вѣроятность, что въ группѣ, состоящей изъ 2 испытаній, будутъ получены только ординаты между предѣлами  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , есть

$$(1 - p_{\varepsilon}).$$

Вѣроятность совокупности этихъ двухъ явленій въ одной группѣ будетъ

$$(1 - p_{\varepsilon})^2 p_{\varepsilon}^{n-2},$$

а такъ какъ группъ подобнаго рода, одинаково дающихъ  $n$  испытаній, можетъ быть

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

то вѣроятность получить при  $n$  испытаніяхъ 2 ординаты въ предѣлахъ  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , а  $n-2$  ординаты въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ , оказывается

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (1-p_\varepsilon)^2 p_\varepsilon^{n-2}.$$

Подобно изложенному можно найти вѣроятность, что при  $n$  испытаніяхъ будетъ получено  $n-m$  ординатъ, заключающихся въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ , и  $m$  ординатъ въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ .

Всѣ  $n$  испытаній могутъ принадлежать къ одной изъ слѣдующихъ группъ. Изъ  $n$  испытаній могутъ быть отмѣчены нѣкоторыя въ числѣ  $m$ . Такихъ группъ можно составить

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

и къ каждой такой группѣ надо будетъ присоединять всѣ не вошедшія въ нее  $n-m$  испытаній. Вѣроятность, что всѣ эти  $n-m$  испытаній дадутъ ординаты, не выходящія за предѣлы 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ , какъ извѣстно, есть

$$p_\varepsilon^{n-m},$$

а вѣроятность, что въ относящейся къ нимъ группѣ  $m$  испытаній выступятъ только ординаты, находящіяся въ предѣлахъ  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , есть

$$(1-p_\varepsilon)^m.$$

Вѣроятность совокупности такихъ двухъ явленій есть

$$(1-p_\varepsilon)^m p_\varepsilon^{n-m}.$$

Такъ какъ число группъ, состоящихъ изъ  $n$  испытаній, выражается вышеприведенною дробью, и такъ какъ каждая изъ этихъ группъ равно возможна и одинаково благоприятна появленію  $m$  испытаній, доставляющихъ ординаты въ предѣлахъ  $\varepsilon y_{\max}$  и  $y_{\max}$ , и  $n-m$  испытаній, дающихъ ординаты въ предѣлахъ 0 и  $\varepsilon y_{\max}$ , то вѣроятность такого сочетанія результатовъ наблюденій будетъ

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots m} (1-p_\varepsilon)^m p_\varepsilon^{n-m}.$$

Въ видѣ примѣра приведемъ расчетъ вѣроятности, когда

$$p_\varepsilon = \frac{1}{5} \text{ и } n = 20.$$

$m$	$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$	$(1 - P_\varepsilon)^m$	$P_\varepsilon^{(n-m)}$	$P_m$
0	1	1	0,0000000000001048576	0,0000000000001048576
1	20	0,8	0,000000000000524288	0,00000000000083886080
2	190	0,64	0,000000000000262144	0,0000000000003187671040
3	1140	0,512	0,000000000000131072	0,00000000000076504104960
4	4845	0,4096	0,00000000000065536	0,00000001290569784323
5	15504	0,32768	0,0000000000032768	0,00000016647293177280
6	38760	0,262144	0,00000000016384	0,00000166472928672000
7	77520	0,2097152	0,0000000008192	0,00001331783460384000
8	125670	0,16777216	0,000000004096	0,00008535976636889000
9	167960	0,134217728	0,00000002048	0,00046168493259720000
10	184756	0,1073741824	0,0000001024	0,00203141365169600000
11	167960	0,08589934592	0,000000512	0,00738695873344000000
12	125670	0,068719476736	0,00000256	0,02210809964352000000
13	77520	0,0549755813888	0,0000128	0,05454984926352000000
14	38760	0,04398046511104	0,000064	0,10909698372200000000
15	15504	0,035184372088832	0,00032	0,17455951739520000000
16	4845	0,0281474976710656	0,0016	0,21719939674400000000
17	1140	0,02251799813645248	0,008	0,20536413834000000000
18	190	0,018014398509491984	0,04	0,13690942556000000000
19	20	0,0144115188075855842	0,2	0,0576460739188234880
20	1	0,01152921504606846976	1	0,01152921478392446976

Изъ этой таблицы видно, что при 20 опытахъ и при  $p_\varepsilon = \frac{1}{5}$ , которому, при очень извилистой траекторіи ( $y_{\max} = 3h$ ), соответствуетъ  $\varepsilon = 0,833$ ; при траекторіи, имѣющей  $y_{\max} = 2h$ , соответствуетъ  $\varepsilon = 0,90$  и при довольно отлогій траекторіи, когда  $y_{\max} = 1,5h$ , соответствуетъ  $\varepsilon = 0,933$ , вѣроятность, что всѣ 20 опытовъ составятъ только ординаты не менѣе  $0,83 \times 3h$ , или  $0,9 \times 2h$ , или  $0,933 \times 1,5$ , есть величина чрезвычайно малая. Она почти  $\frac{1}{10^{14}}$ . Вѣроятность, что изъ всѣхъ 20-ти опытовъ только одинъ дастъ ординату менѣе указанныхъ предѣловъ, а остальные 19 дадутъ ординаты большія, тоже еще очень мала. Она почти  $\frac{84}{10^{14}}$ .

Вѣроятность, что 10 опытовъ дадутъ ординаты болѣе указанныхъ выше предѣловъ и 10 дадутъ ординаты менѣе длинныя, чѣмъ указанные предѣлы, немного превосходитъ  $\frac{2}{1000}$ .

Напротивъ, вѣроятность, что всѣ 20 опытовъ дадутъ ординаты исключительно менѣе длинныя, чѣмъ заданныя выше предѣлы, есть  $\frac{11}{1000}$ .

Это значить, что вѣроятность полученія хотя бы одного опыта съ ординатою болѣе значительною есть  $\frac{989}{1000}$ .

Наиболѣе вѣроятнымъ представляется сочетаніе, при которомъ 16 ординатъ будутъ меньше указанныхъ выше предѣловъ и 4 ординаты болѣе этихъ предѣловъ. Вѣроятность этого сочетанія почти  $\frac{217}{1000}$ .

Вѣроятность, что не менѣе 15 опытовъ дадутъ ординаты менѣе указанныхъ выше предѣловъ, а 5 опытовъ доставятъ ординаты болѣе значительныя, опредѣлится суммою

$$0,1745596 + 0,2171994 + 0,2053641 + 0,3069094 + 0,0576461 + \\ + 0,0115292 = 0,9632078.$$

Слѣдовательно, вѣроятность, что изъ 20 опытовъ не болѣе 5 дадутъ ординаты болѣе значительныя, чѣмъ указанные предѣлы, будетъ то же число 0,9632078.

## ОТДѢЛЪ VI.

### Силы горизонтальныя, расширяющія путь.

#### Общее понятіе объ опасныхъ скоростяхъ.

##### § 1.

Общее равноѣрно-поступательное движеніе паровоза сопровождается всегда многими побочными, колебательными движеніями, достигающими иногда значительныхъ размѣровъ. Когда величины этихъ колебаній переходятъ за нѣкоторыя, извѣстныя предѣлы, тогда вредное дѣйствіе паровоза на путь увеличивается и, что еще важнѣе, паровозъ получаетъ стремленіе сойти съ рельсъ. Большее, или меньшее развитіе колебаній паровоза находится въ зависимости отъ свойствъ самаго паровоза, отъ состоянія пути, по которому онъ движется и отъ величины общей поступательной скорости движенія. Естественно, что тѣ скорости хода паровоза, при которыхъ колебанія могутъ достигать опасныхъ размѣровъ, называются *опасными скоростями*. На путяхъ различныхъ свойствъ, для одного и того же паровоза, опасныя скорости будутъ не одинаковы. На пути, дурно уложенномъ или испорченномъ пучинами, размывами и т. п., для безопаснаго движенія, придется ограничить скорость можетъ быть 10-ю или даже 5-ю верстами въ часъ для такого паровоза, который, по пути вполне исправному, можетъ идти, съ полною безопасностью, по 60 или по 70 верстъ въ часъ.

Вліяніе пути крайне трудно выразить какими-нибудь несомнѣнными указаніями и потому весь дальнѣйшій разборъ будетъ относиться къ условіямъ движенія по пути удовлетворительныхъ свойствъ и будетъ касаться только свойствъ, присущихъ самому паровозу.

#### Періодическія движенія паровоза.

##### § 2.

Нервноѣрность и непрямолинейность движенія паровоза вызываются многими, совершенно независимыми другъ отъ друга, причинами.

Преобразование поступательнаго движенія поршней въ круговое вращеніе мотылей, не только при расширеніи пара въ цилиндрахъ, но и при совершенно равномерномъ давленіи пара во все время хода поршней, непрерывно вызываетъ неравенства работы двигателя съ работою постояннаго сопротивленія. Являющіеся отсюда избытки или недостатки работы двигателя, сравнительно съ работою сопротивленія, измѣняютъ живую силу паровоза, а вмѣстѣ съ тѣмъ и поступательную скорость его движенія. Появленія избытковъ и недостатковъ работы двигателя совершаются періодически, поэтому и скорость поступательнаго движенія паровоза измѣняется тоже періодически. При каждомъ оборотѣ ведущей оси паровоза, при совершенно опредѣленныхъ положеніяхъ мотылей, эта скорость достигаетъ своихъ наибольшихъ и своихъ наименьшихъ значеній. Четыремъ положеніямъ мотылей соотвѣтствуютъ наибольшія и другимъ четыремъ—наименьшія скорости. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что даже при большихъ расширеніяхъ пара въ цилиндрахъ, разницы между наибольшими или наименьшими скоростями поступательнаго движенія и среднею величиною этой скорости, не достигаютъ большихъ величинъ. Эти разницы выражаются обыкновенно десятыми долями процента средней поступательной скорости. Поэтому періодичностью въ движеніи центра тяжести паровоза можно пренебрегать, не дѣлая значительныхъ ошибокъ и можно допускать, что работа пара, при постоянномъ сопротивленіи, можетъ сообщать колесамъ паровоза равномерное вращательное движеніе.

Вполнѣ равномерное вращеніе ведущихъ колесъ паровоза обуславливаетъ неравномерное движеніе частей его механизма: поршней, стержней съ головками, шатуновъ; а по геометрическимъ свойствамъ этого механизма нѣкоторыя его части двигаются и не прямолинейно. Слѣдствіемъ неравномерности и не прямолинейности движенія частей механизма проявляются отъ этихъ частей силы инерціи, прилагающіяся къ цапфамъ колесъ и, черезъ посредство пара, къ крышкамъ паровыхъ цилиндровъ. Величины и направленія указанныхъ силъ инерціи періодически измѣняются и потому паровозныя рамы съ колесами, котлами, и всѣми частями, неизмѣнно связанными съ рамами и котлами, получаютъ два вида періодическихъ движеній. Одинъ изъ этихъ видовъ называется подергиваніемъ, а другой извилистостью движенія паровоза.

## Средства для уменьшенія періодическихъ движеній паровоза.

### § 3.

Оба эти вида движенія съ давняго времени обратили на себя вниманіе техниковъ. Практическіе и ученые инженеры указывали и принимали мѣры къ ослабленію тѣхъ силъ инерціи механизмовъ, которыя взаимно не уравновѣшиваются и производятъ подергиваніе и извилистость.

Средствомъ для ослабленія представлялось прежде всего устройство противовѣсовъ, на паровозныхъ колесахъ. Впослѣдствіи, съ тою же цѣлью, пробовали ставить на паровозахъ, съ каждой ихъ стороны, не по одному, а по два паровыхъ цилиндра и устраивать механизмъ такъ, чтобъ движеніе поршней въ цилиндрахъ одной стороны паровоза, происходило всегда въ противоположныя стороны. Въ виду неудачи этой попытки, слишкомъ усложнявшей устройство, ставили паровые цилиндры значительно выше колесъ, располагая геометрическія ихъ оси горизонтально и, въ задней части паровоза, помѣщали съ каждой стороны по коромыслу, верхніе концы этихъ послѣднихъ соединялись съ шатунами отъ головокъ паровыхъ стержней, а нижніе—съ шатунами отъ цапфъ на ведущихъ колесахъ. Самыя коромысла, въ среднихъ ихъ положеніяхъ, направлялись по отвѣсу. Эта вторая попытка не имѣла большаго успѣха, чѣмъ и первая, и потому противовѣсы, помѣщаемые на колесахъ, остаются и по настоящее время единственнымъ средствомъ уменьшенія подергиванія и извилистости движенія паровозовъ.

Вѣсъ противовѣсовъ и положеніе ихъ центровъ тяжести въ колесахъ опредѣляются разными строителями неодинаково, во-первыхъ потому, что взглядъ на это дѣло далеко еще не установился и во-вторыхъ потому, что размѣры колесъ и расположеніе различныхъ частей, лежащихъ близъ колесъ, нерѣдко мѣшаютъ такому устройству и расположенію противовѣсовъ, которое было бы желательно по соображеніямъ строителя.

Въ паровозахъ съ большими колесами можно было бы помѣщать такіе противовѣсы, при которыхъ совершенно устраняются всякія подергиванія и извилистость. Точныя математическія формулы опредѣляютъ для такихъ случаевъ и вѣсъ противовѣсовъ и положеніе ихъ центровъ тяжести. Противовѣсы, удовлетворяющіе такимъ строго опредѣленнымъ требованіямъ, совершенно устраняющіе всякія подергиванія и извилистость, ставились въ былое время на нѣкоторыхъ французскихъ пассажирскихъ паро-

возахъ; но именно этимъ противовѣсамъ были приписаны нѣкоторые случаи схода паровозовъ съ рельсъ.

Приведенный фактъ даетъ повидимому право говорить, что теоретическія соображенія не всегда могутъ быть примѣняемы къ рѣшенію практическихъ вопросовъ; но въ дѣйствительности этотъ фактъ подтверждаетъ только то общеизвѣстное понятіе, что всякое одностороннее рѣшеніе вопроса, получается ли оно путемъ математическимъ, или какимъ-нибудь инымъ, можетъ быть крайне неправильнымъ. Вычисления, дѣлавшіяся съ цѣлью опредѣленія вѣса и положенія центровъ тяжести противовѣсовъ, вызвавшихъ сходы паровозовъ съ рельсъ, вовсе не обнимали всѣхъ свойствъ движенія паровоза, а ограничивались лишь тѣмъ одностороннимъ соображеніемъ, при которомъ имѣли въ виду устраненіе подергиваній и извилистости, или такъ называемое горизонтальное равновѣсіе паровоза, вовсе не обращая вниманія на вертикальныя дѣйствія тѣхъ же противовѣсовъ. Между тѣмъ противовѣсы, укрѣпленные на паровозныхъ колесахъ, во время движенія, прикладываютъ къ колесамъ свои силы инерціи не только въ горизонтальномъ, но и въ вертикальномъ направленіи и если горизонтальныя слагающія силы инерціи противовѣсовъ оказываются достаточными для устраненія подергиванія и извилистости, то вертикальныя слагающія періодически увеличиваютъ и уменьшаютъ давленіе колесъ на рельсы. При большихъ скоростяхъ вращенія колесъ, вертикальныя слагающія силы инерціи противовѣсовъ, въ тѣ періоды времени, когда онѣ направлены вверхъ, могутъ не только значительно ослаблять давленіе колесъ на рельсы, но могутъ даже заставлятъ колесо подпрыгивать. Поэтому-то приходится по необходимости ограничиваться противовѣсами недостаточно тяжелыми для устраненія подергиванія и извилистости. Какъ сказано уже выше разные строители, при выборѣ противовѣсовъ, руководятся неодинаковыми соображеніями, но во всякомъ случаѣ эти соображенія мало имѣютъ общаго съ понятіями о тѣхъ наибольшихъ скоростяхъ, съ которыми паровозы должны будутъ двигаться впослѣдствіи.

### **Три рода колебательныхъ движеній паровоза.**

#### **§ 4.**

Не смотря на то, что опасныя скорости, какъ будетъ показано далѣе, опредѣляются главнымъ образомъ свойствами противовѣсовъ и свойствами пути Redtenbacher и его послѣдователи полагали, что опасныя скорости паровозовъ опредѣляются тѣми

свойствами паровозовъ, отъ которыхъ зависятъ еще не упомянутыя нами три рода колебательныхъ движеній паровоза. Эти три рода движеній суть: подпрыгиваніе, боковая качка, или перевалка, и продольная качка, галопированіе всего строенія паровоза, опирающагося на его рессоры.

Учеными инженерами эти три рода движенія считались главными источниками возможнаго появленія опасныхъ условій движенія. Дѣло представлялось въ такомъ видѣ потому, что колебанія рессоръ такъ-же, какъ и колебанія маятника, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что времена полныхъ колебаній не зависятъ отъ величины размаховъ. Если какое-нибудь обстоятельство, вызвавшее одно изъ колебаній, повторится вслѣдъ за окончаніемъ перваго колебанія, то размахъ втораго колебанія будетъ больше чѣмъ перваго, но продолжительность времени втораго колебанія будетъ совершенно такая же, какъ и перваго; поэтому если третье дѣйствіе причины, вызывающей колебаніе, произойдетъ по истеченіи такого же промежутка времени отъ втораго дѣйствія, какой промежутокъ времени отдѣляетъ второе дѣйствіе отъ перваго, то третье дѣйствіе произойдетъ при окончаніи втораго полнаго колебанія или, все равно, при самомъ началѣ третьяго колебанія и, слѣдовательно, размахъ этого третьяго колебанія будетъ больше и перваго и втораго. Словомъ, если промежутки времени между моментами появленія обстоятельствъ, вызывающихъ колебанія, будутъ въ извѣстномъ соотвѣтствіи съ временами полныхъ колебаній, то эти послѣднія будутъ постоянно возрастать. Какъ бы малы не были величины размаховъ вызываемыя каждымъ новымъ дѣйствіемъ причинъ, но послѣ извѣстнаго числа повтореній дѣйствія, величины полныхъ размаховъ, могутъ дѣлаться весьма большими и въ такихъ случаяхъ могутъ сообщать движенію колеблющагося паровоза опасныя свойства.

Времена полныхъ размаховъ различныхъ колебаній паровознаго строенія, опирающагося на рельсы, зависятъ отъ устройства и качества рессоръ и отъ нѣкоторыхъ свойствъ и устройства опирающейся на рессоры части паровоза и въ данномъ паровозѣ никогда не мѣняются. Продолжительность промежутковъ времени, отдѣляющихъ одно дѣйствіе механизмовъ паровоза, вызывающихъ колебаніе отъ другаго такого же дѣйствія, находится въ прямой зависимости отъ скорости движенія паровоза. вмѣстѣ съ измѣненіемъ величины скорости движенія паровоза измѣняются и величины этихъ промежутковъ времени. Отсюда очевидно, что при нѣкоторыхъ скоростяхъ разсматриваемые проме-

жутки времени, могутъ оказаться въ томъ именно соотвѣтствіи съ временами полныхъ размаховъ рессоръ, при которомъ колебанія паровознаго строенія получаютъ опасныя свойства. Скорости, при которыхъ колебанія могутъ дѣлаться опасными, называются опасными скоростями.

Опредѣленіе такихъ опасныхъ скоростей достигается путемъ довольно длинныхъ и сложныхъ вычисленій<sup>1)</sup>.

Чтобы наглядно ознакомиться съ практическимъ значеніемъ сдѣланныхъ вычисленій, слѣдуетъ замѣтить, что для пассажирскихъ паровозовъ Птгр.-варшавской желѣзной дороги и множества весьма подобныхъ имъ паровозовъ, находящихся на прусскихъ и французскихъ жел. дорогахъ опасныя скорости имѣютъ слѣдующія величины:

относительно подпрыгиванія 14,1 версты въ часъ,  
относительно боковой качки 35,6 версты въ часъ,  
относительно продольной качки 14,9 версты въ часъ,

а между тѣмъ эти паровозы ежедневно ходятъ и съ равными выше приведенными скоростями и большими, безъ всякихъ вредныхъ послѣдствій.

Такое, повидимому, противорѣчіе между теоріею и практикою есть результатъ неправильнаго примѣненія полученныхъ вычисленіями формулъ. Формулы показываютъ, что при вычисленныхъ скоростяхъ поступательнаго движенія паровоза колебанія всей его части, опирающейся на рессоры, могутъ возрастать безгранично; но такое возрастаніе возможно, безъ сомнѣнія, только въ такомъ случаѣ, если въ самомъ же паровозѣ нѣтъ такихъ частей, которыя ограничивали бы величины колебаній. Въ дѣйствительности же размѣры вырѣзовъ въ рамахъ для осей допускаютъ свободныя колебанія рамы только въ довольно ограниченныхъ предѣлахъ. За этими предѣлами колебаній рама наталкивается на осевыя буксы и получаетъ отъ нихъ удары, а появленіе этихъ ударовъ совершенно видоизмѣняетъ всѣ свойства движеній колеблющейся части паровоза и такимъ образомъ всѣ опасенія, вызывавшіяся формулами, показывающими возможность безграничнаго возрастанія колебаній, могутъ дѣлаться напрасными и, какъ показываетъ опытъ, бываютъ дѣйствительно напрасны.

---

<sup>1)</sup> См. мой курсъ Птгр. Практическаго Технологическаго Института.

### Новое опредѣленіе опасныхъ скоростей.

#### § 5.

На основаніи изложеннаго и придерживаясь установленныхъ Редтенбахеромъ воззрѣній на опасныя скорости, слѣдовало бы сказать, что дѣйствительно опасныхъ скоростей движенія паровозовъ вовсе нѣтъ; но практическіе техники знаютъ, что паровозы, при извѣстныхъ скоростяхъ движенія, начинаютъ раздвигать рельсы или, какъ говорится, расшиваютъ путь.

Тѣ скорости движенія, при которыхъ подобныя явленія становятся возможными, по справедливости, должны быть отнесены къ разряду опасныхъ скоростей и онѣ тѣмъ болѣе заслуживаютъ такого названія, что для расшиванія пути перѣдко вовсе не требуется особенно продолжительнаго движенія съ одною и тою равномерною скоростью.

Опредѣленіе такихъ именно опасныхъ скоростей, оставшихся донынѣ, насколько мнѣ извѣстно, неизслѣдованными и составляетъ главный предметъ этаго отдѣла.

Приступая къ рѣшенію вопроса, необходимо отмѣтить, что читатель не найдетъ здѣсь рѣшенія, вполне исчерпывающаго предметъ, потому что самое существо дѣла этого не допускаетъ; нѣкоторыя изъ силъ, участвующихъ въ совершающемся явленіи, какъ, на примѣръ, силы тренія между колесами и рельсами, зависящія отъ свойствъ матерьяла и еще болѣе отъ состоянія взаимно прикасающихся поверхностей, могли бы быть опредѣлены только въ такомъ случаѣ, если бы вся поверхность колесъ и рельсъ была опредѣлена съ математическою точностью, что, очевидно, невозможно.

Силы тренія между осевыми шейками паровозовъ и ихъ подпипниками также, какъ и между частями приборовъ позволяющихъ колесамъ перемѣщаться въ стороны относительно рамы тоже могутъ измѣняться въ весьма широкихъ предѣлахъ, не представляя возможности для каждаго даннаго момента времени предугадать истинную ихъ величину.

Полныя величины угловъ поворотовъ паровоза, около нѣкоторой вертикальной оси, вызываемыхъ извилистостью движенія, и совершаемыхъ паровозомъ безъ раздвиганія рельсъ, зависятъ не только отъ нормальнаго разстоянія между внутренними краями рельсъ и между наружными поверхностями закраинъ на колесахъ крайнихъ осей, но еще и отъ изношенности какъ рельсъ,

такъ и закраинъ колесъ и даже отъ тѣхъ случайныхъ и мѣстныхъ впадинъ или выступовъ на поверхностяхъ рельсъ и колесныхъ ребордъ, которые могутъ оказаться въ мѣстахъ, подлежащихъ взаимному прикосновенію колесъ съ рельсами, вызываемому извилистостью движенія. Вся очевидная невозможность знанія подобныхъ обстоятельствъ сама собою представляется каждому и потому вліяніе этихъ обстоятельствъ, конечно, не можетъ быть введено въ вычисленія. Наконецъ, надо сказать, что нѣкоторыя вычисленія, относящіяся къ настоящему вопросу, даже при предположеніи, что всѣ обстоятельства вполне опредѣлены, представляютъ трудности почти непреодолимыя. Все, только что изложенное, вынуждаетъ, дѣлать нѣкоторыя предположенія и допущенія; но всѣ отступленія отъ безусловной точности въ послѣдующихъ вычисленіяхъ, оказываются несущественными, неспособными привести къ результатамъ практически негоднымъ, напротивъ, читатель убѣдится, что результаты, получаемые изъ вычисленій, хотя и приближительныхъ, имѣютъ важное практическое примѣненіе.

**Предположенія, допущенныя при опредѣленіи величины опасныхъ скоростей.**

§ 6.

Первое допущеніе, которое необходимо сдѣлать, состоитъ въ томъ, что поверхности рельсъ и колесъ принимаются вполне правильнаго и однообразнаго вида; слѣдствіемъ этого допущенія является заключеніе, что силы тренія между всѣми колесами и рельсами пропорціональны давленіямъ колесъ на рельсы.

Въ дѣйствительности, несмотря на всѣ мѣры, принимаемыя строителями паровозовъ къ достиженію одинаковой нагрузки на оси, паровозные колеса никогда не давятъ на рельсы совершенно одинаковыми силами; разнообразіе давленій еще увеличивается колебательными движеніями паровоза, тѣмъ не менѣе въ слѣдующихъ вычисленіяхъ будемъ считать, что всѣ давленія колесъ на рельсы совершенно одинаковы или, лучше сказать, что всѣ силы тренія колесъ съ рельсами совершенно симметрично расположены относительно вертикальной плоскости, проходящей черезъ продольную ось паровоза.

Сдѣлавъ эти предположенія, можно уже приступить къ вычисленіямъ, способнымъ опредѣлить различныя свойства изви-

листоности движенія паровоза, вслѣдствіе которой рельсы подвергаются боковымъ давленіямъ, иногда сильно расширяющимъ путь.

### **Вычисленія, опредѣляющія величину опасныхъ скоростей.**

#### **Примѣненіе теоремы площадей.**

##### § 7.

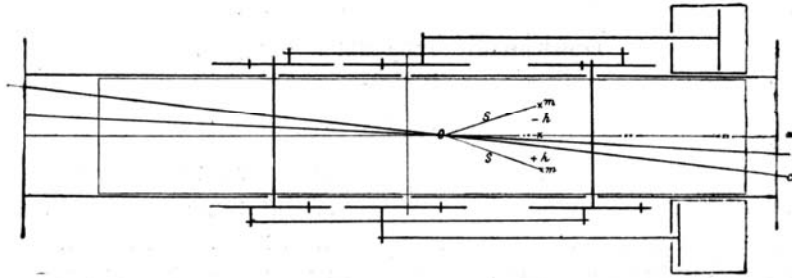
Вычисленіе можетъ быть основано на теоремѣ механики, извѣстной подъ названіемъ теоремы площадей, состоящей въ томъ, что если сумма моментовъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на какую-нибудь систему матеріальныхъ точекъ, равна нулю, то сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ матеріальныхъ точекъ этой системы, относительно той же оси, есть величина постоянная. Имѣя въ виду примѣнить эту теорему къ паровозу, слѣдуетъ замѣтить, что всѣ части его, за ничтожными отступленіями, располагаются совершенно симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей черезъ его продольную ось и черезъ вертикальную ось, проведенную черезъ центр тяжести паровоза.

Всѣ паровозныя колеса и ихъ нагрузки размѣщаются по обѣимъ сторонамъ этой плоскости совершенно симметрично; слѣдовательно, и силы тренія между колесами и рельсами, являющіяся въ отношеніи къ паровозу силами внѣшними, дѣйствуютъ попарно, доставляя относительно вышеупомянутой вертикальной оси моменты, взаимно уравновѣшивающіеся. Точно также можно сказать, что и сумма моментовъ давленій воздуха, сопротивляющагося движенію паровоза, доставитъ величину, равную нулю; наконецъ послѣдняя изъ внѣшнихъ силъ, способныхъ доставитъ моментъ относительно вертикальной оси—сила сопротивленія поѣзда—прикладывается къ паровозу тендеромъ такимъ образомъ, что плечо этой силы, относительно разсматриваемой вертикальной оси, всегда оказывается чрезвычайно малымъ, а потому и моментъ этой силы во многихъ случаяхъ можетъ считаться нулемъ. Такимъ образомъ оказывается, что сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на паровозъ, въ громадномъ большинствѣ случаевъ, равна нулю; а, слѣдовательно, сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ частей паровоза, взятая относительно вертикальной оси паровоза, проходящей черезъ центр тяжести его, должна быть величиною постоянною.

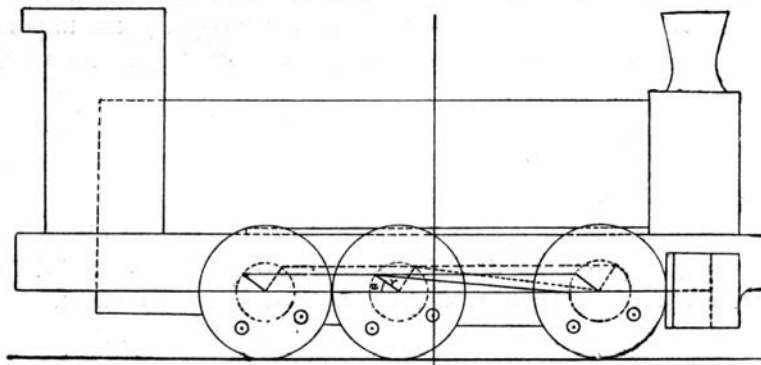
Чтобы выразить эту теорему формулою, необходимо ввести нѣкоторыя обозначенія.

На фиг. 1 представленъ паровозъ въ планѣ и на фиг. 2 въ боковомъ видѣ.

Фиг. 1.



Фиг. 2.



Точка  $O$  представляетъ проекцію вертикальной оси, проходящей черезъ центръ тяжести паровоза.

При опредѣленіи формулъ, выражающихъ моменты количества движенія разныхъ частей паровоза, подраздѣлимъ его на двѣ части. Къ одной изъ нихъ отнесемъ: раму, котель, всѣ части, неизмѣнно соединенныя съ ними и всѣ колеса съ осями; ко второй части отнесемъ всѣ механизмы и всѣ противовѣсы, расположенные на колесахъ.

Назовемъ:

$v$ —общую поступательную скорость паровоза;

$\omega$ —угловую скорость вращенія паровоза относительно оси  $O$ ;

$r$ —радіусъ мотыля (см. фиг. 2);

$\omega$ —угловую скорость его вращенія;

$\alpha$ —уголъ, составляемый направлениемъ средней линии правого мотыля (линіей, соединяющей ось колесъ съ осью

цапфы) съ направлениемъ линіи мертвыхъ точекъ этого мотыля;

$m$ —массу какой-нибудь матерьяльной точки паровоза;

$r$ —разстоянія той же точки отъ оси  $O$  (фиг. 1);

$\pm h$ —разстоянія той же точки паровоза отъ вертикальной плоскости, проходящей черезъ продольную ось паровоза; знакъ  $+$  въ случаѣ положенія точки съ правой стороны и—съ лѣвой.

Скорость точки  $m$  будетъ состояться изъ двухъ скоростей: изъ скорости поступательнаго движенія и изъ скорости вращательнаго движенія около оси  $O$ .

Какой бы части паровоза ни принадлежала точка  $m$ , ея вращательная скорость выразится формулою

$$\rho \Omega \dots \dots \dots (A)$$

Скорость поступательнаго движенія точки  $m$  будетъ зависѣть отъ того, какой части паровоза она принадлежитъ. Если точка  $m$  принадлежитъ котлу, рамѣ, или другимъ какимъ-нибудь частямъ, неизмѣнно связаннымъ съ ними, то скорость поступательнаго движенія ея будетъ

$$v \dots \dots \dots (B)$$

Поступательныя скорости точекъ, входящихъ въ составъ частей механизма, каковы поршни, стержни, шатуны, будутъ слагаться изъ двухъ: изъ скорости  $v$  и изъ скорости, зависящей отъ угловой скорости вращенія ведущей оси. При довольно большихъ отношеніяхъ длины главныхъ шатуновъ къ длинѣ мотылей, какъ это обыкновенно бываетъ въ паровогахъ, для точекъ поршней, стержней и шатуновъ, для частей, лежащихъ съ правой стороны паровоза, поступательная скорость, относительно центра тяжести паровоза, зависящая отъ угла оборота мотыля, выразится формулою

$$\omega r \sin \alpha,$$

а для частей съ лѣвой стороны паровоза формулою

$$\omega r \cos \alpha.$$

Слѣдовательно, полная поступательная скорость частей съ правой стороны опредѣлится формулою

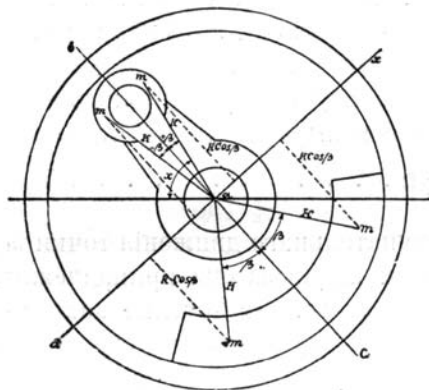
$$v + r \omega \sin \alpha \dots \dots \dots (C)$$

а для частей лѣвой стороны

$$v + r \omega \cos \alpha \dots \dots \dots (D)$$

Для мотылей, цапфъ, противовѣсовъ и колесъ, называя  $\pm \beta$  уголъ, составляемый линією, соединяющею разсматриваемую точку и центръ тяжести колеса со среднею линією мотыля или противовѣса (см. фиг. 3) и  $k$  — разстояніе точки  $m$  отъ оси вращенія того колеса, которому принадлежитъ мотыль, цапфа или противовѣсъ,

Фиг. 3.



найдемъ, что поступательная скорость, зависящая отъ угла  $\alpha$ , будетъ для мотылей и цапфъ правой стороны паровоза

$$\omega k \sin(\alpha \pm \beta),$$

а для лѣвой

$$\omega k \cos(\alpha \pm \beta);$$

для противовѣсовъ правой стороны

$$- \omega k \sin(\alpha \pm \beta)$$

и лѣвой

$$- \omega k \cos(\alpha \pm \beta).$$

Эти же формулы могутъ быть примѣнены и къ колесамъ.

Полныя скорости поступательныхъ движеній мотылей и цапфъ правой стороны будутъ

$$v + \omega k \sin(\alpha \pm \beta), \dots \dots \dots (E)$$

лѣвой

$$v + \omega k \cos(\alpha \pm \beta), \dots \dots \dots (F)$$

противовѣсовъ правой стороны

$$v + \omega k \sin(\alpha \pm \beta), \dots \dots \dots (G)$$

лѣвой

$$v + \omega k \cos(\alpha \pm \beta) \dots \dots \dots (H)$$

Эти же формулы могут быть применены и къ колесамъ.

Написавъ формулы скоростей, можно перейти къ опредѣленію формулъ, выражающихъ моменты количествъ движеній.

На основаніи формулъ (A) и (B) моментъ количества движенія нѣкоторой точки, принадлежащей котлу, рамѣ или неизмѣнно связаннымъ съ ними частямъ, взятый относительно вертикальной оси  $O$ , выразится формулою

$$(\pm v h + \rho^2 \omega) m \dots \dots \dots (I)$$

гдѣ знакъ  $+$  относится къ точкамъ паровоза съ правой, а знакъ  $-$  къ точкамъ лѣвой стороны паровоза. Такъ какъ каждой точкѣ упомянутыхъ частей паровоза, удаленной отъ продольной оси  $O$ , на растояніе  $+h$ , есть соотвѣтствующая другая, такая же точка, удаленная на растояніе  $-h$ , то сумма моментовъ количествъ движенія, выраженныхъ формулою (I), распространенная на все строеніе котла, рамы, и неизмѣнно связанныхъ съ ними частей, будетъ заключать въ себѣ совершенно одинаковые по величинѣ члены  $+v h m$  и  $-v h m$ , а потому всѣ такіе члены въ суммѣ сократятся и получимъ равенство

$$\Sigma (\pm v h + \rho_1^2 \omega) m_1 = \omega \Sigma m_1 \rho_1^2 \dots \dots \dots (I)$$

гдѣ подъ буквами  $m_1$  и  $\rho_1$  надо подразумѣвать массы и разстоянія до оси  $O$  всѣхъ частицъ: котла, рамы, цилиндровъ и всѣхъ съ ними неизмѣнно связанныхъ частей паровоза.

Сумма моментовъ количествъ движенія поршней, стержней и шатуновъ съ правой стороны, на основаніи формулъ (A) и (C), выразится формулою

$$\Sigma [h(v + \omega r \sin \alpha) + \rho_2^2 \omega] m_2 \dots \dots \dots (K)$$

а съ лѣвой стороны

$$\Sigma [-h(v + \omega r \cos \alpha) + \rho_2^2 \omega] m_2 \dots \dots \dots (L)$$

Складывая обѣ эти суммы, не трудно удостовѣриться, что

$$\Sigma h v m_2 - \Sigma h v m_2 = 0$$

и, слѣдовательно, сложеніе формулъ (K) и (L) доставитъ только

$$\Sigma h \omega r (\sin \alpha - \cos \alpha) m_2 + \omega \Sigma m_2 \rho_2^2$$

или такъ какъ  $\omega$ ,  $r$  и  $\alpha$  для всѣхъ членовъ одинаковы, то

$$\omega r [\sin \alpha - \cos \alpha] \Sigma m_2 h + \omega \Sigma m_2 \rho_2^2 \dots \dots \dots (M)$$

гдѣ  $\Sigma m_2 h$  представляетъ сумму моментовъ массъ поршня, стержня съ головкою и шатуновъ съ одной стороны паровоза, взятую относительно средней, продольной вертикальной плоскости паровоза.

Только что найденную сумму моментовъ, выраженную формулою (M), можно выразить иначе.

Называя:

- $P$ —вѣсъ поршня, стержня съ головкою или ползуномъ и шатуновъ одной стороны;
- $e$ —разстояніе ихъ общаго центра тяжести до средней, продольной вертикальной плоскости паровоза и
- $g$ —ускореніе силы тяжести, можно сумму моментовъ массъ этихъ частей, относительно вертикальной оси  $O$ , выразить формулою

$$\frac{P}{g} e r \omega [\sin \alpha - \cos \alpha] + \Omega \Sigma m_2 \rho_2^2,$$

а сравнивая эту формулу съ формулою ( $M$ ) получимъ уравненіе,

$$\omega r [\sin \alpha - \cos \alpha] \Sigma m_2 h + \Omega \Sigma m_2 \rho_2^2 = \frac{P}{g} e r \omega [\sin \alpha - \cos \alpha] + \Omega \Sigma m_2 \rho_2^2 \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ подѣ буквами  $m_2$  и  $\rho_2$  слѣдуетъ подразумѣвать массы и разстоянія до оси  $O$  всѣхъ безъ исключенія частицъ обоихъ поршней съ ихъ стержнями, головками и всѣми шатунами.

Сумма моментовъ количествъ движенія правыхъ мотылей, съ ихъ цапфами на основаніи формулъ ( $E$ ) и ( $F$ ), будетъ

$\Sigma \{h [v + \omega k \sin (\alpha \pm \beta)] + \Omega \rho_3^2\} m_3 + \Sigma \{-h [v + (\alpha \pm \beta)] + \Omega \rho_3^2\} m_3$   
 въ формулѣ этой, во всѣхъ членахъ, величины:  $v$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  и  $\Omega$  имѣютъ одни и тѣ же значенія и при томъ каждому члену суммы

$$\Sigma h v m_3$$

соотвѣтствуетъ равный по абсолютной величинѣ членъ суммы

$$\Sigma - h v m_3.$$

Слѣдовательно, можно сказать, что сумма моментовъ количествъ движенія относительно вертикальной оси  $O$ , всѣхъ мотылей съ ихъ цапфами выразится формулою:

$$\begin{aligned} & \omega [\Sigma h k \sin (\alpha \pm \beta) - \Sigma h k \cos (\alpha \pm \beta)] m_3 + \Omega \Sigma m_3 \rho_3^2 = \\ & = \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta \pm \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h k \sin \beta - \\ & - \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta \mp \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h k \sin \beta. \end{aligned}$$

Изъ разсмотрѣнія фиг. 3 видно, что какой бы уголъ  $\alpha$  ни былъ, во всякомъ случаѣ, вслѣдствіе симметричнаго расположенія частей мотыля или цапфы относительно линіи  $ab$ , въ суммѣ членовъ

$$\pm \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h k \sin \beta$$

и

$$\pm \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h k \sin \beta$$

каждому члену со знакомъ  $+$  будетъ соотвѣтствовать такой же точно, по абсолютной величинѣ, членъ со знакомъ  $-$ , и по-

тому обѣ эти суммы имѣютъ величины, равныя нулю, слѣдовательно послѣднее уравненіе можно написать въ видѣ:

$$\begin{aligned} & \omega [\Sigma h k \sin (\alpha \pm \beta) - \Sigma h k \cos (\alpha \pm \beta)] m_3 + \Omega \Sigma m_3 \rho_3^2 = \\ & = \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta - \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta . . . (3) \end{aligned}$$

Если суммованіе членовъ, стоящихъ во второй части, произведемъ сначала, оставляя  $h$  безъ переменны, т. е. сложимъ сначала всѣ члены, относящіеся къ точкамъ, принадлежащимъ мотылю, или цапфѣ, расположеннымъ въ одной и той же плоскости, удаленной на величину  $h$  отъ средней, продольной вертикальной плоскости паровоза, то получимъ члены, которые можно будетъ написать въ видѣ:

$$\begin{aligned} & h \omega \sin \alpha \Sigma m_3 k \cos \beta \text{ и} \\ & - h \omega \cos \alpha \Sigma m_3 k \cos \beta. \end{aligned}$$

Въ этихъ членахъ суммы

$$\Sigma m_3 k \cos \beta$$

можно будетъ замѣнить массою всѣхъ точекъ, принадлежащихъ взятой плоскости, умноженною на разстояніе центра тяжести этой массы до линіи  $de$ , проведенной перпендикулярно къ  $ab$ .

Назовемъ  $r_1$ , разстояніе этого центра тяжести до линіи  $de$ , въ такомъ случаѣ

$$\Sigma m_3 k \cos \beta = r_1 \Sigma m_3.$$

Если по устройству мотыля или цапфы величины  $r_1$  останутся одинаковыми для всѣхъ величинъ  $h$ , то вторую часть уравненія (3) можно написать проще, а именно:

$$\begin{aligned} & \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta - \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h k \cos \beta = \\ & = r_1 \omega \sin \alpha \Sigma m_3 h - r_1 \omega \cos \alpha \Sigma m_3 h, \end{aligned}$$

формулу  $\Sigma m_3 h$  можно замѣнить произведеніемъ массы мотыля или цапфы на разстояніе ихъ центровъ тяжести до средней, продольной, вертикальной плоскости паровоза. Поэтому, называя  $q$  — вѣсъ мотылей и цапфъ одной стороны паровоза;

$e_1$  — разстояніе ихъ центра тяжести до только что упомянутой плоскости, можно будетъ написать взамѣнъ уравненія (3) слѣдующее:

$$\begin{aligned} & \omega [\Sigma h k \sin (\alpha \pm \beta) - \Sigma h k \cos (\alpha \pm \beta)] m_3 + \Omega \Sigma m_3 \rho^2 = \\ & = \frac{q}{g} e_1 r_1 \omega [\sin \alpha - \cos \alpha] + \Omega \Sigma m_3 \rho_3^2 . . . . . (4) \end{aligned}$$

Въ этой формулѣ  $m_3$  и  $\rho_3$  обозначаютъ массы и разстоянія до оси  $O$  точекъ, принадлежащихъ всѣмъ безъ исключенія мотылямъ и цапфамъ обѣихъ сторонъ паровоза.

Разсужденія, совершенно подобныя только что приведеннымъ, указываютъ, что называя:

- $Q_2$ — вѣсь противовѣсовъ одной стороны паровоза;
- $r_2$ — разстояніе ихъ центровъ тяжести до соотвѣтствующей оси вращения;
- $h_2$ — разстояніе ихъ центровъ тяжести до средней, вертикальной, продольной плоскости паровоза;
- $m_4$ — массы и  $\rho_4$  разстоянія до оси  $O$  точекъ, принадлежащихъ разнымъ частямъ всѣхъ противовѣсовъ паровоза, можно написать сумму моментовъ количествъ движенія противовѣсовъ, относительно вертикальной оси  $O$ , въ видѣ

$$-\frac{Q_2}{g} e_2 r_2 \omega (\sin \alpha - \cos \alpha) + \Omega \sum m_4 \rho_4^2 \dots \dots \dots (5)$$

Обращаясь къ колесамъ съ осями, надо взять ту же самую формулу, но съ тѣмъ, чтобы обратить вниманіе на величину разстоянія центра тяжести колесъ отъ осей вращения. Такъ какъ это разстояніе равно нулю, то множитель, соотвѣтствующей  $r_2$  въ первомъ членѣ формулы (5), сдѣлается нулемъ, а слѣдовательно и весь первый членъ долженъ будетъ обратиться въ нуль. Поэтому называя

- $m_5$  массы и  $\rho_5$  разстоянія оси  $O$  частицъ колесъ, вся величина суммы моментовъ количествъ движенія колесъ съ осями, относительно вертикальной оси  $O$  выразится формулою:

$$\Omega \sum m_5 \rho_5^2 \dots \dots \dots (6)$$

Полная сумма моментовъ количествъ движенія для всѣхъ частей паровоза получится послѣ сложенія вторыхъ частей уравненій (1), (2) и (4) съ формулами (5) и (6).

Эта сумма будетъ:

$$\left[ \frac{P}{g} e r + \frac{q}{g} e_1 r_1 - \frac{Q}{g} e_2 r_2 \right] \omega (\sin \alpha - \cos \alpha) + \Omega [\sum m_1 \rho_1^2 + \sum m_2 \rho_2^2 + \sum m_3 \rho_3^2 + \sum m_4 \rho_4^2 + \sum m_5 \rho_5^2] \dots \dots \dots (7)$$

**Два рода членовъ, выражающихъ моменты количествъ движенія.**

§ 8.

Разсматривая эту формулу, слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что величины  $\rho_1$ , относящіяся къ твердымъ частямъ паровоза, не зависятъ ни отъ времени, ни отъ угла  $\alpha$ ; но величины  $\rho_1$ ,

относящаяся къ водѣ, находящейся въ паровозѣ, способной волноваться и дѣйствительно волнуемой, точно также какъ величины  $\rho_1$ , соотвѣтствующія частямъ горящаго топлива, зависятъ отъ времени, не завися отъ угла  $\alpha$ . Для вычисленія совершенно точнаго, безусловно, необходимо было бы выразить зависимость этихъ послѣднихъ величинъ  $\rho_1$  отъ времени, но при теперешнемъ состояніи нашихъ знаній это совершенно невозможно и сверхъ того съ большимъ вѣроятіемъ можно сказать, что едва ли это удастся когда-либо. Если бы частицамъ воды и топлива принадлежало преобладающее вліяніе на движеніе паровоза, то отказываясь отъ выраженія зависимости  $\rho_1$  отъ времени, надо было бы отказаться совершенно отъ теоретическаго изученія всего разсматриваемаго вопроса, но такъ какъ вѣсъ воды и топлива составляютъ только около  $\frac{1}{10}$  доли вѣса паровоза, и такъ какъ сверхъ того тѣ массы воды, которыя могутъ значительно перемѣщаться внутри паровоза и массы непрерывно исчезающаго топлива составляютъ небольшія доли вѣса количества воды и топлива, находящихся въ паровозѣ, то нельзя ждать сколько-нибудь серьезной и значительной ошибки вычисленій, если допустимъ, что ни одна изъ величинъ  $\rho_1$  не зависитъ ни отъ времени, ни отъ угла  $\alpha$ .

Величины  $\rho_3$ , относящаяся къ колесамъ и ихъ осямъ, измѣняются въ зависимости отъ угла  $\alpha$ , а черезъ него и въ зависимости отъ времени, но вслѣдствіе полной симметріи колесъ относительно ихъ осей вращенія и вслѣдствіе частаго расположенія спиць, можно сказать, что при каждой величинѣ  $\alpha$  найдутся точно такой же величины члены  $m_5 \rho_5$ , какіе находятся при какомъ угодно другомъ углѣ  $\alpha$ .

Поэтому можно сказать, что членъ

$$\sum m_5 \rho_5^2$$

не мѣняетъ своей величины въ зависимости отъ измѣненій угла  $\alpha$ , а слѣдовательно и въ зависимости отъ времени.

Остальныя величины:  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $\rho_4$ , находятся въ зависимости отъ угла  $\alpha$  и могутъ мѣняться весьма много. Зависимость эту, безъ особенно большаго труда, можно было бы даже выразить формулами, но всѣ дальнѣйшія вычисленія, необходимыя для полученія практически примѣнимыхъ результатовъ, становятся трудными до непреодолимости, поэтому необходимо ограничиться вычисленіемъ величины

$$\sum m_2 \rho_2^2 + \sum m_3 \rho_3^2 + \sum m_4 \rho_4^2$$

при какомъ-нибудь углѣ, и затѣмъ считаютъ эту величину какъ бы постоянною.

**Выводъ основнаго уравненія.**

§ 9.

Полная сумма членовъ

$$\Sigma m_1 \rho_1^2 + \Sigma m_2 \rho_2^2 + \Sigma m_3 \rho_3^2 + \Sigma m_4 \rho_4^2 + \Sigma m_5 \rho_5^2$$

представляетъ моментъ инерціи всего паровоза относительно вертикальной оси  $O$ . Средніе три члена этой суммы, къ какой бы величинѣ угла  $\alpha$  они ни относились, всегда представляютъ очень малую долю полнаго момента инерціи, всего около 1% или много, 2%, а наибольшія различія между моментами инерціи паровоза, вычисленными при различныхъ величинахъ  $\alpha$  едва-ли достигнуть и 1%, поэтому называя  $J$  полный моментъ инерціи паровоза, относительно вертикальной оси  $O$ , вычисленный при какомъ-нибудь углѣ  $\alpha$ , будемъ считать величиною постоянною.

При этомъ обозначеніи, формула (7) приметъ видъ

$$J \Omega + \frac{Pre + qr_1 e_1 - Qr_2 e_2}{g} \omega (\sin \alpha - \cos \alpha) \dots \dots \dots (8)$$

Дробь, стоящая во второмъ членѣ, представляетъ сумму моментовъ, неуравновѣшенныхъ въ горизонтальномъ отношеніи частей механизма, для простоты обозначимъ ее одною буквою

$$M = \frac{Pre + qr_1 e_1 - Qr_2 e_2}{g} \dots \dots \dots (9)$$

Въ такомъ случаѣ формула, выражающая сумму моментовъ количествъ движенія паровоза, взятыхъ относительно вертикальной оси  $O$ , приметъ видъ:

$$J \Omega + M \omega (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

Эта-то сумма, при равновѣсіи всѣхъ внѣшнихъ дѣйствующихъ силъ, должна быть величиною постоянною, которую обозначимъ  $C$ .

Если сверхъ того обозначимъ:  $t$  время, въ теченіе котораго мотыль обернулся на уголъ  $\alpha$ , при угловой скорости  $\omega$ , то

$$\alpha = \omega t.$$

При этихъ обозначеніяхъ основное уравненіе наше пишется въ видѣ:

$$J \Omega + M \omega (\sin \omega t - \cos \omega t) = C \dots \dots \dots (10)$$

или

$$\Omega = \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega + \frac{C}{J} \dots \dots \dots (10)^{bis}$$

**Исследование основного уравнения.**

**а) Угловая скорости вращения продольной оси паровоза.**

§ 10.

Это уравнение показывает, что горизонтальная, продольная ось паровоза  $Oa$  вращается около вертикальной оси  $O$ , производя довольно сложное движение. Угловая скорость этого движения  $\Omega$  состоит из двух членов.

Один из них

$$\frac{C}{J}$$

есть величина постоянная—соответствующая некоторому равномерному вращению, и другой член

$$\frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega$$

есть величина переменная, изменяющаяся вместе с временем. Все эти изменения совершаются периодически; периодом служить время, удовлетворяющее уравнению

$$\omega t = n 2 \pi$$

или

$$t = \frac{n 2 \pi}{\omega} \dots \dots \dots (11)$$

где  $n$  есть некоторое целое число.

Наибольшая величина переменной части угловой скорости получается при

$$t = \frac{(8n - 1) \pi}{4 \omega} \dots \dots \dots (12)$$

и равна

$$1,41 \frac{M \omega}{J},$$

а наименьшая величина переменной части угловой скорости соответствует

$$t = \frac{(8n - 5) \pi}{4 \omega} \dots \dots \dots (13)$$

и равна

$$-1,41 \frac{M}{J} \omega.$$

Слѣдовательно, предѣлы, между которыми колеблется угловая скорость  $\Omega$ , суть:

$$\Omega_{\max} = \frac{C}{J} + 1,41 \frac{M}{J} \omega \dots \dots \dots (14)$$

и

$$\Omega_{\min} = \frac{C}{J} - 1,41 \frac{M}{J} \omega \dots \dots \dots (15)$$

**б) Углы поворота продольной оси паровоза.**

Пользуясь уравненіемъ (10 bis), не трудно найти и углы поворотовъ, совершаемыхъ продольною осью паровоза  $Oa$  съ нѣкоторымъ постояннымъ направленіемъ.

На фиг. 1 линія  $Oa_0$  представляетъ нѣкоторое постоянное направленіе.

Обозначимъ

$\gamma$  —уголь  $a_0$   $Oa$ , составляемый осью  $Oa$  съ избраннымъ постояннымъ направленіемъ. Въ такомъ случаѣ

$$\Omega = \frac{d\gamma}{dt}$$

и на мѣсто уравненія (10)<sup>bis</sup> можно написать уравненіе

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega + \frac{C}{J}$$

или

$$d\gamma = \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega dt + \frac{C}{J} dt$$

откуда, обозначая  $\gamma_0$  величину угла  $\gamma$ , которая соотвѣтствуетъ времени  $t_0$ , интегрированіе доставитъ

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \frac{M}{J} (\sin \omega t + \cos \omega t) - \\ &- \frac{M}{J} (\sin \omega t_0 + \cos \omega t_0) + \frac{C}{J} (t - t_0) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

Это уравненіе показываетъ, что уголь  $\gamma$  составляется изъ трехъ частей: изъ нѣкоторой постоянной, соотвѣтствующей нѣкоторому моменту времени  $t_0$ , выражающейся формулою

$$\gamma_0' = \gamma_0 - \frac{M}{J} (\sin \omega t_0 + \cos \omega t_0) - \frac{C}{J} t_0,$$

изъ части измѣняющейся пропорціонально времени  $t$

$$\gamma_1 = \frac{C t}{J}$$

и изъ части періодически измѣняющейся вмѣстѣ съ постояннымъ измѣненіемъ времени

$$\gamma' = \frac{M}{J} (\sin \omega t + \cos \omega t)$$

періодомъ этихъ измѣненій опять является время  $t$ , удовлетворяющее уравненію (11)

$$t = \frac{n 2 \pi}{\omega}$$

Наибольшая величина части угла  $\gamma$  періодически измѣняющейся соотвѣтствуетъ временамъ

$$t = \frac{(8n - 7) \pi}{4 \omega}$$

и равна

$$\gamma'_{\max} = -1,41 \frac{M}{J};$$

наименьшая величина періодически измѣняющейся части угла соотвѣтствуетъ времени

$$t = \frac{(8n - 3) \pi}{4 \omega}$$

и равна

$$\gamma'_{\max} = 1,41 \frac{M}{J},$$

а при временахъ  $t$ , удовлетворяющихъ уравненіямъ (12) и (13), когда скорость  $\omega$  получаетъ наибольшія или наименьшія величины, періодически измѣняющаяся величина

$$\gamma' = 0.$$

Если линія  $Ob$  составляетъ съ постояннымъ направленіемъ  $Oa_0$  уголъ

$$\gamma'_0 + \gamma_1 + \gamma_1$$

въ то время, когда ось  $Oa$  составляетъ съ тѣмъ же направленіемъ  $Oa_0$  уголъ

$$\gamma = \gamma'_0 + \gamma_1 + \gamma'$$

то очевидно, что уголъ между линіями  $Ob$  и  $Oa$  будетъ

$$\gamma'.$$

Слѣдовательно, если будетъ извѣстно положеніе линіи  $Ob$ , то зная уголъ  $\gamma$ , можно будетъ опредѣлить и положеніе оси паровоза  $Oa$ .

Линія  $O b$ , составляющая углы

$$\gamma_0' + \gamma_1 = \gamma_0 + \frac{C}{J} t,$$

вращается около оси  $O$  очевидно равномерно съ угловою скоростью

$$\frac{C}{J},$$

а ось  $O a$ , составляющая съ линією  $O b$  углы, периодически измѣняющіеся въ предѣлахъ отъ

$$+ 1,41 \frac{M}{J} \text{ до } - 1,41 \frac{M}{J},$$

очевидно келеблется около линіи  $O b$ , то совпадая съ нею при временахъ

$$t = \frac{(8n-1)\pi}{4\omega} \text{ и } t = \frac{(8n-5)\pi}{4\omega},$$

то опережая ее, то отставая отъ нее въ другія времена.

**в) Наибольшія и наименьшія угловыя скорости вращения продольной оси паровоза.**

Въ моменты наибольшаго удаленія оси  $O a$  отъ равномерно вращающейся линіи  $O b$ , т. е. въ моменты времени

$$t = \frac{(8n-7)\pi}{4\omega} \text{ и } t = \frac{(8n-3)\pi}{4\omega}$$

угловая скорость оси  $O a$ , какъ видно изъ уравненія (10)<sup>bis</sup>, становится равною

$$\frac{C}{J},$$

а въ моменты совпаденія оси  $O a$  съ линією  $O b$ , т. е. при

$$t = \frac{(8n-1)\pi}{4\omega} \text{ и } t = \frac{(8n-5)\pi}{4\omega},$$

какъ видно изъ того же уравненія (10)<sup>bis</sup>, угловая скорость  $\omega$  достигаетъ наибольшихъ или наименьшихъ своихъ величинъ

$$\frac{C}{J} + 1,41 \frac{M}{J} \text{ и } \frac{C}{J} - 1,41 \frac{M}{J}.$$

Если начальная скорость оси  $O a$  была нуль, т. е. если

$$C = 0,$$

то всѣ измѣненія скорости  $\omega$  будутъ происходить въ предѣлахъ

$$+ 1,41 \frac{M}{J} \omega \text{ и } - 1,41 \frac{M}{J} \omega;$$

если сверхъ того первоначальное направленіе оси  $Oa$  будетъ такое, что уголь  $\gamma_0 = 0$ , то при  $t = t_0$ , какъ показываетъ уравненіе (16), и уголь

$$\gamma = 0.$$

**г) Случай, когда среднее постоянное направленіе продольной оси паровоза совпадаетъ съ осью пути.**

Если избранное такимъ образомъ постоянное направленіе будетъ совпадать съ осью пути, то углы, составляемые осью паровоза  $Oa$  съ осью пути, опредѣлятся уравненіемъ

$$\gamma = \frac{M}{J} (\sin \omega t - \cos \omega t - \sin \omega t_0 + \cos \omega t_0).$$

Если, наконецъ, въ начальное мгновеніе движенія  $t_0$  и  $\omega$  будутъ такіа, что

$$\sin \omega t_0 - \cos \omega t_0 = 0$$

то

$$\gamma = \frac{M}{J} (\sin \omega t - \cos \omega t).$$

Въ рассматриваемыхъ условіяхъ движенія колебанія оси паровоза  $Oa$ , относительно оси пути, будутъ совершаться въ обѣ стороны, и абсолютныя величины наибольшихъ отклоненій будутъ

$$\gamma_{\max} = 1,41 \frac{M}{J}.$$

Чтобы ознакомиться, въ какой мѣрѣ приведенныя формулы могутъ быть точны, а потому и практически примѣнимы, замѣтимъ, что для паровозовъ часто встрѣчающейся конструкціи, (8-ми колеснаго паровоза правительственнаго типа, завода Струве) величины, входящія во вторую часть, имѣютъ слѣдующее значеніе

$$Mg = 108 \text{ килограммъ квадр. метр.}$$

$$Jg = 290.000 \text{ килограммъ квадр. метр.}$$

Слѣдовательно

$$\gamma_{\max} = 0,00053.$$

При удаленіи крайнихъ осей паровоза отъ вертикальной геометрической оси  $O$  на 2000 миллиметровъ, передняя и задняя оси будутъ перемѣщаться въ стороны отъ средняго положенія ихъ

$$0,00053 \times 2000 = 1,06 \text{ миллим.}$$

т. е. почти на 1 миллиметръ.

**д) Случай, когда среднее постоянное направленіе продольно оси паровоза не совпадаетъ съ осью пути.**

Подобная извилистость паровоза не произведетъ никакого бокового давленія; но если постоянное направленіе, относительно котораго паровозъ производитъ симметрическія колебанія въ ту и другую стороны, не будетъ параллельно рельсамъ, то послѣ нѣкотораго движенія въ направленіи, составляющемъ уголъ съ направленіемъ рельсъ, паровозъ однимъ изъ своихъ переднихъ колесъ приблизится къ рельсу и, сообразно со скоростью, съ которою онъ будетъ вращаться около оси  $Oa$ , переднее колесо паровоза произведетъ большее или меньшее нажатіе на рельсъ.

**Дѣйствіе колеса на рельсъ при извилистомъ движеніи паровоза.**

**а) Живыя силы при ударѣ.**

§ 11.

Дѣйствіе паровозныхъ колесъ на рельсъ, при ихъ взаимномъ прикосновеніи, будетъ зависѣть отъ того измѣненія скорости вращенія паровоза, которое будетъ вызвано сопротивленіемъ рельсъ, и, слѣдовательно, отъ того измѣненія живой силы паровоза, которое явится результатомъ работы силы сопротивленія рельсъ.

Живая сила паровоза опредѣляется безъ затрудненія, если будемъ разсматривать паровозъ, какъ нѣкоторую неизмѣняемую систему. Это безъ сомнѣнія повлечетъ за собою ошибки въ результатахъ, но о незначительности такихъ ошибокъ выше было уже достаточно указано.

Если назовемъ:

$T$ —полный вѣсъ паровоза;

$J$ —моментъ инерціи его относительно оси вращенія  $Oa$ ;

$v$ —поступательную скорость центра тяжести паровоза;

$\omega$ —угловую скорость вращенія около оси  $Oa$ ,

то полная живая сила паровоза, въ какой-нибудь моментъ его движенія, выразится формулою

$$\frac{T}{g} \frac{v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}.$$

Если боковыя давленія на колеса, полученныя отъ рельсъ, уничтожатъ вращательную скорость паровоза и вслѣдствіе перпендикулярности этихъ давленій къ направленію поступательнаго движенія центра тяжести паровоза, скорость  $v$  совсѣмъ не измѣнится, то остающаяся живая сила будетъ

$$\frac{T}{g} \frac{v^2}{2}$$

и живая сила потерянная будетъ

$$S = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Вставляя въ эту формулу на мѣсто  $\omega$  вторую часть уравненія (10<sup>bis</sup>) найдемъ

$$S = \frac{J}{2} \left[ \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega + \frac{C}{J} \right]^2$$

или такъ какъ при колесахъ паровоза имѣющихъ  $D$  діаметръ

$$\omega = \frac{2v}{D}$$

то, потерянная живая сила будетъ

$$S = \frac{J}{2} \left[ \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \frac{2v}{D} + \frac{C}{J} \right]^2.$$

Величина эта будетъ зависѣть и отъ  $C$  и отъ величины формулы

$$\cos \omega t - \sin \omega t$$

въ моментъ дѣйствія рельса на колеса.

Если въ началѣ было

$$C = 0,$$

то потерянная живая сила была бы

$$S = \frac{J}{2} \left( \frac{M}{J} \right)^2 (\cos \omega t - \sin \omega t)^2 \frac{4v^2}{D^2}$$

или

$$S = \frac{J}{2} \left( \frac{M}{J} \right)^2 (\cos \omega t - \sin \omega t)^2 \omega^2 \dots \dots \dots (17)$$

При данныхъ величинахъ  $M$ ,  $J$ ,  $D$  и  $v$ , наибольшая потеря обнаружится въ томъ случаѣ, если столкновение колеса съ рельсомъ совершится въ такой моментъ, когда

$$\cos \omega t - \sin \omega t = 1,41.$$

Въ такомъ случаѣ она будетъ

$$S_{\max} = 4 J \left( \frac{M}{J} \right)^2 \frac{v^2}{D^2}$$

или

$$S_{\max} = J \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2$$

Обращаясь къ взятому для примѣра 8-ми колесному паровозу, увидимъ, что наибольшая живая сила, которую онъ можетъ потерять при ударѣ колесъ объ рельсы, при  $C=0$ , будетъ

$$\frac{290000}{9.81} \cdot (0,00037)^2 \omega^2 = 0,004 \omega^2 \text{ килогр. метр.}$$

или

$$4 \omega^2 \text{ килограм. миллиметра.}$$

Вообще же живая сила, теряющаяся при ударѣ, будетъ нѣкоторая часть отъ  $S_{\max}$ , обозначая  $\delta^2$  эту часть, можно будетъ сказать, что живая сила, теряемая при ударѣ, будетъ

$$S = \delta^2 J \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 = J \left( \delta \frac{M}{J} \omega \right)^2 \dots \dots \dots (18)$$

Сравненіе этого уравненія съ уравненіемъ (17) указываетъ, что  $\delta$  опредѣляется уравненіемъ

$$\delta^2 = \frac{(\cos \omega t - \sin \omega t)^2}{2}.$$

Если давленія, произведенныя колесами на рельсы не вызовутъ въ этихъ послѣднихъ или въ ихъ соединеніяхъ со шпалами такихъ напряженій, которыя превзошли бы предѣлы упругости

соотвѣтственныхъ матеріаловъ, то рельсы не только уничтожатъ вращательную скорость паровоза, но и сообщатъ паровозу новое вращательное движеніе въ сторону, противоположную той, куда вращался паровозъ при ударѣ. Эта новая скорость будетъ начальной скоростью при слѣдующемъ вращеніи и будетъ соотвѣтствовать члену  $\frac{C}{J}$  въ уравненіи (10<sup>bis</sup>).

Такъ какъ величина  $\frac{C}{J}$  есть угловая скорость при началѣ движенія и такъ какъ изъ уравненія (18) видно, что при началѣ движенія послѣ удара, угловая скорость есть не что иное, какъ

$$\frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{M}{J} \omega$$

то слѣдовательно

$$\frac{C}{J} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{M}{J} \omega.$$

Для обстоятельствъ движенія послѣ перваго удара назовемъ

$$\frac{C_1}{J} = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} \frac{M}{J} \omega$$

и въ такомъ случаѣ послѣ перваго удара угловая скорость движенія паровоза  $\Omega$  опредѣлится уравненіемъ (10<sup>bis</sup>), если его напишемъ въ видѣ

$$\Omega = \frac{M}{J} (\cos \omega t - \sin \omega t) \omega + \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} \frac{M}{J} \omega$$

или

$$\Omega = \frac{M}{J} \omega \left[ \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} + (\cos \omega t - \sin \omega t) \right].$$

Съ такою угловою скоростью паровозъ будетъ вращаться въ направленіи данномъ при ударѣ до тѣхъ поръ, пока не ударится о другой рельсъ. Скорость  $\Omega$  въ моментъ втораго удара будетъ зависѣть отъ величины

$$\cos \omega t_2 - \sin \omega t_2,$$

соотвѣтствующей моменту удара и, теряемая при второмъ ударѣ живая сила

$$S_2 = \frac{J}{2} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} + \cos \omega t_2 - \sin \omega t_2 \right]^2$$

можетъ быть больше, равна или меньше живой силы, потерянной при первомъ ударѣ, въ зависимости отъ того, имѣютъ ли

величины  $\delta_1$  и  $\cos \omega t_2 - \sin \omega t_2$  одинаковые знаки или онъ будутъ имѣть знаки разные. Называя

$$\cos \omega t_2 - \sin \omega t_2 = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}$$

можно будетъ написать, что

$$S_2 = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 [\delta_1 + \delta_2]^2.$$

Разсуждая совершенно подобно предыдущему относительно движенія паровоза послѣ второго удара, можно будетъ сказать, что угловая скорость послѣ этого удара будетъ

$$\Omega = \frac{M}{J} \omega \left[ \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_2}{\sqrt{2}} + \cos \omega t - \sin \omega t \right]$$

и обозначая въ моментъ третьяго удара

$$\cos \omega t_3 - \sin \omega t_3 = \frac{\delta_3}{\sqrt{2}}.$$

увидимъ, что живая сила, теряемая при третьемъ ударѣ  $S_3$  опредѣлится уравненіемъ

$$S_3 = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 [\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2].$$

Продолжая тѣ же разсужденія далѣе до какого ни есть  $n$  удара увидимъ, что начальная скорость вращательнаго движенія вертикальной оси, послѣ  $n$ -го удара будетъ

$$\Omega = \frac{M}{J} \omega \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (19)$$

а живая сила въ моментъ  $n$ -го удара будетъ

$$S_n = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left( \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i \right)^2 \dots \dots \dots (20)$$

Каждый изъ членовъ вида

$$\delta_1$$

можетъ имѣть всевозможныя величины отъ

$$+\sqrt{2} \text{ до } -\sqrt{2},$$

слѣдовательно

$$\left( \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i \right)^2$$

можетъ имѣть всевозможныя величины отъ

$$0 \text{ до } 2 n^2.$$

Слѣдовательно, предѣлы, между которыми должна находиться живая сила, теряемая послѣ  $n$ -го удара боковыхъ поверхностей колесныхъ закраинъ, будутъ:

$$0 \text{ и } n^2 \frac{J}{2} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2.$$

### б) Уголъ поворота продольной оси паровоза.

Уголъ поворота паровоза, соотвѣтствующій начальной скорости вращения послѣ  $n$ -го удара и соотвѣтствующій времени одного полнаго оборота ведущей оси, будетъ во столько разъ меньше  $2\pi$ , во сколько разъ скорость  $\omega$ , опредѣленная уравненіемъ (19), будетъ меньше  $\omega$ , и если назовемъ:

$\varphi$  этотъ уголъ поворота, то онъ опредѣлится изъ уравненія:

$$\varphi : 2\pi = \frac{M}{J} \omega \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\sqrt{2}}$$

или

$$\varphi = 2\pi \frac{M}{J} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\sqrt{2}}.$$

Если назовемъ еще

$\varphi_1$ —полный уголъ поворота паровоза между двумя послѣдовательными ударами, то

$m$ —число оборотовъ ведущей оси между двумя послѣдовательными ударами опредѣлится уравненіемъ

$$m = \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\varphi_1}{2\pi} \frac{J}{M} \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} \right)} \dots \dots \dots (21)$$

Изъ этого уравненія видно, что  $m$  вовсе не есть какое-нибудь, разъ на всегда опредѣленное число для даннаго паровоза, напротивъ, оно можетъ быть весьма различно, въ зависимости отъ тѣхъ обстоятельствъ, при которыхъ происходитъ движеніе.

Чтобы воспользоваться выше приведенными формулами и вывести изъ нихъ практически полезные результаты, надо прежде всего рассмотреть въ какихъ случаяхъ и въ какой мѣрѣ обстоятельства, не принятыя при расчетѣ во вниманіе, могутъ видоизмѣнять полученные выводы.

Въ числѣ силъ, дѣйствующихъ на паровозъ, вліяющихъ на его вращательное движеніе, и не принятыхъ въ расчетъ, есть силы, способныя нерѣдко видоизмѣнять значительно рассмотрѣнное вращеніе. Къ нимъ относятся: сила тренія колесъ съ рельсами, сила тренія осевыхъ подшипниковъ съ шейками осей, силы тренія въ приборахъ, допускающихъ боковое движеніе колесъ относительно рамы и силы сдѣвленія паровоза съ тендеромъ. До сихъ поръ мы рассматривали явленіе въ предположеніи, что относительно паровозной рамы оси паровоза могутъ имѣть только вращательное движеніе, на самомъ же дѣлѣ зазоры между подшипниками и закраинами шеекъ допускаютъ нѣкоторыя перемѣщенія подшипниковъ вдоль шеекъ. Поэтому вращательное движеніе паровозной рамы съ котломъ и прочими частями, составляющими одно неизмѣнное цѣлое, около вертикальной оси, можетъ происходить почти безъ всякаго бокового передвиженія осей до тѣхъ поръ, пока не завершится движеніе въ приборахъ, допускающихъ боковое движеніе рамы безъ перемѣщенія осевыхъ подшипниковъ и подшипники не упрутся въ закраины шеекъ, и только послѣ прикосновенія подшипниковъ съ закраинами осевыхъ шеекъ начнется то вращеніе, которое приняты въ расчетъ. Работа тренія поглотитъ нѣкоторую долю живой силы вращательнаго движенія паровоза и если не предотвратитъ, то въ извѣстной мѣрѣ ослабитъ слѣдующій затѣмъ ударъ колесъ объ рельсы.

Силы тренія, дѣйствующія въ приборахъ и при набѣганіи на рельсъ колеса, стремящагося произвести боковой ударъ, доставляютъ моменты, относительно вертикальной оси  $O$ , направленные въ сторону, противоположную вращенію въ направленіи набѣганія и, такимъ образомъ, эти силы ослабляютъ ударъ и уменьшаютъ начальную скорость вращенія въ слѣдующій послѣ удара моментъ въ противоположную сторону; въ теченіе самого удара треніе закраины колеса объ рельсъ уменьшаетъ началь-

ную скорость вращения въ сторону отъ этого рельса, но тотчасъ же послѣ удара силы тренія, такія же, какія дѣйствовали до удара, доставляя моменты въ томъ же направленіи, какъ и до удара, содѣйствуютъ къ увеличенію скорости начальнаго вращения. Эти два дѣйствія силъ тренія колесъ съ рельсами могутъ и взаимно уничтожаться, но одно изъ нихъ можетъ быть и болѣе другого. Предсказать дѣйствительное явленіе крайне трудно и предвидѣть можно только то, что, при малыхъ величинахъ угловыхъ скоростей  $\omega$ , колеса одной и той же оси, катаясь кругами различныхъ діаметровъ, будутъ дѣлать большіе углы оборотовъ, чѣмъ при большихъ величинахъ  $\omega$ . Въ то время, какъ при малыхъ  $\omega$  уголъ оборота, соотвѣтствующій движенію колесъ по рельсамъ, кругами катанія разныхъ радіусовъ, можетъ быть даже въ нѣсколько разъ больше  $2\pi$ ; при большихъ  $\omega$ , тотъ же уголъ, будетъ составлять только небольшую часть полной окружности  $2\pi$ . Изъ этого выходитъ, что силы тренія, при большихъ скоростяхъ  $\omega$  могутъ имѣть значительно меньше вліянія, чѣмъ при малыхъ скоростяхъ  $\omega$ .

Сила сцѣпленія паровоза съ тендеромъ, направленная назадъ, при движеніи паровоза впередъ, всегда стремится поставить паровозъ въ среднее положеніе между рельсами, не позволяя ему отклониться ни въ ту, ни въ другую сторону. Чѣмъ больше будетъ сопротивленіе поѣзда, тѣмъ больше эта сила будетъ препятствовать извилистости движенія.

При движеніяхъ поѣзда по скатамъ, бываютъ случаи, когда паровозъ и поѣздъ идутъ какъ бы независимо другъ отъ друга, тогда сила сцѣпленія паровоза съ тендеромъ ослабѣваетъ или даже исчезаетъ и на такихъ мѣстахъ паровозъ получаетъ большую свободу для принятія всякой извилистости движенія.

На скатахъ болѣе крутыхъ, при направленіи силы сцѣпленія паровоза съ тендеромъ въ сторону движенія паровоза, когда набѣгающій поѣздъ толкаетъ паровозъ впередъ, тогда сила сцѣпленія тендера съ паровозомъ прикладывается къ паровозу сзади и такъ какъ давленіе тендера на паровозъ производится буферами, то при правильной постановкѣ буферовъ они уменьшаютъ извилистость и направляютъ паровозъ въ среднее положеніе между рельсами, а при неправильномъ положеніи—прижимаютъ паровозъ къ которой-нибудь одной сторонѣ пути.

Чтобы нѣкоторымъ образомъ выразить вліяніе двухъ послѣднихъ силъ на движеніе, надо въ вышеприведенныхъ формулахъ на мѣсто величины  $\delta_i$  ставить нѣкоторое произведеніе  $\lambda_i \delta_i$ , гдѣ множитель  $\lambda_i$  долженъ быть меньше единицы.

Вліяніе тренія осевыхъ шеекъ съ лежащими на нихъ подшипниками значительно больше двухъ только что упомянутыхъ силъ.

Живая сила вращающейся части паровоза, опирающейся на осевыя шейки, уничтожается въ извѣстной мѣрѣ треніемъ подшипниковъ и приборовъ допускающихъ поперечное перемѣщеніе надъ осями, послѣ каждой перемѣны направленія вращенія паровоза. Величину исчезающей при этомъ части живой силы крайне трудно опредѣлить съ точностью. Объ этомъ явленіи приходится пока ограничиться сужденіями, касающимися качественного, а не количественного характера.

Если назовемъ:

$\tau_i$ —живую силу, поглощенную треніемъ послѣ удара  $i$ , то полная живая сила исчезающая, начиная съ перваго удара, до удара  $n$ , будетъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i.$$

Каждая отдѣльная величина  $\tau_i$  не можетъ быть больше силы тренія подшипниковъ съ шейками, умноженной на величину возможнаго перемѣщенія подшипниковъ по шейкамъ и сложенной съ силами тренія приборовъ выше упомянутыхъ.

Если обозначимъ:

$P_1$ —вѣсъ паровознаго строенія, опирающагося на шейки осей,

$f_1$ —коэффициентъ тренія,

$\sigma_i$ —возможное перемѣщеніе подшипниковъ по шейкамъ вмѣстѣ съ перемѣщеніями, допускаемыми другими приборами, въ теченіе разсматриваемаго движенія, то

$$\tau_i = f_1 P_1 \sigma_i$$

Если во все время разсматриваемаго движенія вращеніе паровоза, включая туда и колебательныя вращенія, будетъ направлено въ одну сторону, то  $\sigma_i$  будетъ не больше зазора между осевыми шейками и подшипниками, а если вращеніе будетъ перемѣнять свое направленіе и число такихъ перемѣнъ будетъ  $n$ , то величина:

$\sigma_i$  будетъ не больше длины того же зазора во взятой  $n$  разъ.

Такъ какъ работа тренія

$$\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i$$

может совершаться только за счет произведенной другими силами работы или накопленной живой силы и такъ какъ наибольшая живая сила, которую можетъ потерять паровозъ при посредствѣ ли удара или предшествующаго ему тренія есть

$$S_n = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2$$

то необходимо должно быть удовлетворено неравенство

$$\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i \leq \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2 \dots \dots \dots (22)$$

и дѣйствительная живая сила, которую паровозъ будетъ имѣть возможность терять при ударѣ, будетъ

$$S'_n = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2 - \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i \dots \dots \dots (23)$$

Начальная угловая скорость послѣ  $n$  удара будетъ

$$\omega = \sqrt{\left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left( \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{2}{J} \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i} \dots \dots \dots (24)$$

Число оборотовъ ведущаго колеса между двумя послѣдовательными ударами будетъ

$$m = \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{M}{J} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{2}{J \omega^2} \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}} \dots \dots \dots (25)$$

Формулы эти очевидно крайне сложны и чрезвычайно трудно примѣнимы. Тѣмъ не менѣ можно вывести изъ нихъ нѣкоторые практически полезные результаты.

**в) Условія, при которыхъ извилисть движенія паровоза не раздвигаетъ рельсы.**

Прежде всего можно замѣтить, что во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда неравенство (22) обращается въ уравненіе, живая сила  $S'_n$  — теряющаяся при ударѣ, сама собою обращается въ нуль, что указываетъ, что въ такихъ случаяхъ стремленіе паровоза къ извилистому движенію на столько уничтожается треніемъ его осей съ подшипниками и треніемъ остальныхъ приборовъ допускающихъ боковое перемѣщеніе, что удары колесъ объ рельсы не являются, а, слѣдовательно, и расшиваніе пути невозможно.

Условіе это выполняется тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2,$$

а это равенство, по свойству работы силы тренія, выполнится во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда вторая часть послѣдняго уравненія будетъ не больше наибольшаго предѣла работы тренія, т. е. когда

$$\omega^2 \leq \left( \frac{J}{M} \right)^2 \frac{4 \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}{J \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2}$$

или

$$\omega^2 \leq \left( \frac{J}{M} \right)^2 \frac{4 \sum_{i=1}^{i=n} f_1 P_1 \sigma_i}{J \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i \delta_i \right]^2}$$

или такъ какъ  $f_1 P_1$  есть величина постоянная, то

$$\omega^2 \leq \left( \frac{J}{M} \right)^2 \frac{4 f_1 P_1 \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i}{J \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i \delta_i \right]^2}$$

Это неравенство будетъ выполнено, если оно будетъ удовлетворяться не только для нѣсколькихъ, слѣдующихъ другъ за другомъ ударовъ въ ихъ совокупности, а для каждаго промежутка отдѣльно, т. е. если будетъ удовлетворено неравенство

$$\omega^2 < \left( \frac{J}{M} \right)^3 \frac{4 f_1 P_1 \sigma_i}{J (\gamma_i \delta_i)^2}.$$

Выше было сказано, что  $\sigma_i$  можетъ быть равно нѣсколькимъ зазорамъ между осевыми шейками и подшипниками, слѣдовательно неравенство не нарушится, если на мѣсто нѣсколькихъ зазоровъ поставимъ всего одинъ зазоръ  $\sigma$  и точно также неравенство не нарушится, если на мѣсто знаменателя

$$\gamma_i \delta_i$$

поставимъ его наибольшее значеніе, равное  $\sqrt{2}$ .

Отсюда вытекаетъ; что боковыхъ ударовъ колесъ о рельсы, вызываемыхъ извилистостью паровоза, зависящею отъ неуравновѣщенныхъ силъ инерціи механизма, не будетъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\omega^2 < \left( \frac{J}{M} \right)^2 \frac{2 f_1 P_1 \sigma}{J}$$

Очевидно, что такихъ ударовъ не будетъ и при всѣхъ тѣхъ скоростяхъ  $\omega$ , которыя удовлетворяютъ неравенству и въ случаѣ наименьшихъ значеній  $f_1$  и  $\sigma$ .

Слѣдовательно, можно сказать, что нѣтъ основанія говорить о расширеніи пути во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\omega^2 \leq \frac{J}{M} \sqrt{\frac{2 f_{1\min} P_1 \sigma}{J}} \dots \dots (26)$$

Очевидно, что и при скоростяхъ болѣе только что опредѣленной уравненіемъ, нечего еще опасаться за расширеніе, если только  $\omega$  будетъ немного болѣе только что опредѣленнаго уравненіемъ, но чѣмъ больше будетъ  $\omega$ , тѣмъ больше будетъ становиться вѣроятною и возможность расширенія пути.

Для практическаго примѣненія этой формулы къ шести колеснымъ паровозамъ, не имѣющимъ особыхъ приборовъ, допускающихъ боковыя перемѣщенія рамы, надо замѣтить, что величиною  $f_{1\min}$  можно считать около 0,002. Величина  $\sigma$  есть среднее перемѣщеніе вдоль шеекъ, взятое для всѣхъ осей,

Перемѣщеніе на крайнихъ осяхъ можетъ быть равно полному зазору, но въ то же время перемѣщеніе на среднихъ осяхъ будетъ непремѣнно меньше. Въ паровозѣ 6-колесномъ величина будетъ около  $\frac{2}{3}$  зазора крайнихъ осей, а для 8-колеснаго  $\sigma$  будетъ около  $\frac{3}{4}$  зазора. Если полный зазоръ будетъ 5 миллиметровъ то при 8-колесномъ паровозѣ

$$\sigma = \text{почти } 4 \text{ миллим.}$$

Если для примѣра возьмемъ, какъ и прежде

$$Jg = 290900 \text{ килогр. метр.}$$

$$Mg = 108$$

$$P^1 = 36000 \text{ килограмм.}$$

$$f_1 = 0,002$$

$$\sigma = 0,0002 \text{ метра,}$$

то

$$\omega \leq \frac{290000}{108} \sqrt{\frac{0,004 \cdot 35000 \cdot 0,004}{29000}}$$

$$\omega = 12.$$

Если бы приняли болѣе часто встрѣчающуюся величину  $f_{1\min} = 0,005$ , то нашли бы

$$\omega = \text{почти } 19.$$

Или такъ какъ при одномъ оборотѣ ведущей оси въ секунду  $\omega = 6,28$ , то значить, что пока ведущая ось дѣлаетъ 2 или даже 3 оборота въ секунду, паровозъ не обнаруживаетъ никакого стремленія къ расширенію пути.

При большихъ угловыхъ скоростяхъ  $\omega$  равенство (22) уже не удовлетворяется и первый членъ его становится тѣмъ меньше второго, чѣмъ больше дѣлается  $\omega$  и, на примѣръ, если при  $\omega$ , соотвѣтствующе 2 оборотамъ въ секунду, удовлетворено равенство, то при  $\omega$  соотвѣтствующемъ 5 оборотамъ второй членъ неравенства будетъ уже болѣе перваго во столько же разъ, во сколько 25 болѣе 4.

Въ подобныхъ случаяхъ, въ уравненіяхъ (23), (24), и (25), съ достаточною для практическихъ примѣненій точностью можно

величиною  $\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i$  совсѣмъ пренебрегать и можно писать

$$S'_n = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2$$

$$\Omega = \frac{M}{J} \omega \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

$$m = \frac{\varphi_1}{2\pi} \frac{J}{M \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i}$$

и если бы для какого-нибудь случая, при которомъ расширеніе пути дѣйствительно произошло, были извѣстны  $\varphi_1$ ,  $M$ ,  $J$  и  $m$ , то изъ послѣдняго уравненія можно было бы найти

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

Если бы сверхъ того для того же случая была извѣстна величина  $\omega$ , то можно было бы найти ту живую силу  $S$ , которая и была достаточна для расширенія. Она опредѣлилась бы изъ уравненія

$$S_n = \frac{J}{2} \left( \frac{\varphi_1}{2\pi} \right)^2 \frac{\omega^2}{m^2}.$$

Напримѣръ, при катастрофѣ, случившейся 17 октября 1888 года около станціи Борки для передняго паровоза величины были приблизительно слѣдующія:

$$\frac{J}{2} = 6250 \text{ килограмметровъ.}$$

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} = 0,0036.$$

$$\omega = 4,2 \times 2\pi.$$

Слѣдовательно, приблизительно

$$S_n = 13000 \text{ килограммиллиметровъ}$$

и, слѣдовательно, для того же случая приблизительно величина

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\delta_i}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i = 3\sqrt{2}.$$

Приведенныя числа не должно разсматривать иначе, какъ величины, едва-едва приближительныя, въ которыхъ могутъ заключаться ошибки, потому что съ точностью неизвѣстна ни одна изъ вышеприведенныхъ данныхъ величинъ и въ особенности мало извѣстна величина  $\varphi$ .

**Необходимость наблюдений для опредѣленія допустимыхъ наибольшихъ скоростей паровоза, не вызывающихъ опасныхъ расширеній колеи.**

§ 12.

Отсутствіе наблюдений, способныхъ доставить численныя величины, необходимыя для вывода практически примѣнимаго правила, опредѣляющаго наибольшую скорость паровоза даннаго устройства, идущаго по пути данной прочности, вынуждаетъ ограничиться теперь только нѣкоторыми замѣчаніями.

Въ виду того, что безопасно паровозъ можетъ двигаться по данному пути, не расшивая его, только въ тѣхъ случаяхъ, когда живая сила, уничтожающаяся при ударѣ

$$S_n$$

не превосходитъ нѣкоторой величины, зависящей отъ свойствъ пути, можно сказать, что чѣмъ большею прочностью отличается путь, тѣмъ скорѣе могутъ двигаться по немъ паровозы.

Если упругое боковое перемѣщеніе головки рельса, обусловливаемое свойствами рельса, шпалъ и ихъ взаимныхъ соединеній, т. е. вбитыхъ въ нихъ костылей или ввинченныхъ шуруповъ съ подкладками или безъ подкладки, будетъ

Δ.

а наибольшая его величина

$$\Delta_{\max}$$

если сверхъ того соотвѣтствующее боковое сопротивление рельса выразится произведеніемъ  $\Delta$  на нѣкоторую величину  $\varepsilon$ , то наибольшая упругая сила сопротивленія рельса будетъ

$$\varepsilon \Delta_{\max}$$

а работа этого сопротивленія будетъ или равна или будетъ немного отличаться отъ произведенія

$$\mu \varepsilon \Delta^2$$

гдѣ  $\mu$  есть нѣкоторый множитель меньше единицы, вѣроятно, мало отличающійся отъ  $\frac{1}{2}$ .

Слѣдовательно, при ударахъ, производящихъ только упругія измѣненія рельсъ, должно быть удовлетворено слѣдующее уравненіе

$$\mu \varepsilon \Delta^2 = \frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2 - \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i$$

или

$$\omega^2 = \frac{\mu \varepsilon \Delta^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}{\frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i \right]^2} \dots \dots \dots (27)$$

Такъ какъ при скорости поступательнаго движенія паровоза  $v$  съ ведущими колесами, имѣющими діаметръ  $D$

$$\omega = \frac{2 v}{D}$$

то

$$v = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu \varepsilon \Delta^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}}{\sqrt{\frac{J}{4} \left( \frac{M}{J} \right)^2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i}} D \dots \dots \dots (28)$$

Изъ этого уравненія видно, что скорость движенія паровоза  $v$  можетъ возрастать, или должна уменьшаться вмѣстѣ съ соот-

вѣтствующими измѣненіями величины  $\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i$ ; чѣмъ большихъ ко-

личествъ можетъ достигать работа тренія подшипниковъ съ осевыми шейками, тѣмъ больше можетъ быть величина  $v$ . Въ этомъ же направленіи будутъ дѣйствовать и силы, возникающія въ приборахъ, допускающихъ поперечное перемѣщеніе рамы надъ осями.

Слѣдовательно, паровозы, предназначенные для быстрого хода, должны имѣть нѣкоторый разбѣгъ для своихъ осевыхъ подшипниковъ на шейкахъ и всякое ненужное ограниченіе этого разбѣга, не допускающее возможности воспользоваться полною работою тренія, повлечетъ за собой увеличеніе боковыхъ ударовъ колесъ о рельсы; такую же пользу принесутъ и приборы, допускающіе поперечное перемѣщеніе рамы надъ осями.

#### **Средства, способствующія увеличенію поступательной скорости паровоза при сохраненіи устойчивости пути.**

##### § 13.

Скорость  $v$  будетъ становиться тѣмъ больше, чѣмъ больше будутъ величины  $\Delta$  и  $\epsilon$ , т. е. чѣмъ больше будетъ способность рельса перемѣщаться упругимъ образомъ и чѣмъ большее сопротивленіе будетъ представлять рельсъ данному отклоненію его отъ равновѣснаго положенія, т. е. чѣмъ менѣе гибки будутъ рельсы, тѣмъ прочнѣе будутъ шпалы и тѣмъ прочнѣе будетъ соединеніе рельсъ со шпалами. Чтобы еще болѣе пояснить это послѣднее замѣчаніе, можно сказать, что если введеніе подъ рельсы подкладокъ заставитъ принимать участіе въ боковомъ перемѣщеніи рельса не одинъ наружный костыль или шурупы, а оба—наружный и внутренній, то это значительно увеличитъ величину  $\epsilon$  и съ тѣмъ вмѣстѣ увеличитъ и величину  $v$ .

Наибольшая скорость  $v_{\max}$  опредѣлится для даннаго паровоза тою наибольшею величиною  $\Delta$ , которую оно въ состояніи

принимать на данномъ пути. Если эту наибольшую величину назовемъ  $\Delta_{\max}$ , то

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon \Delta_{\max}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}}{\sqrt{4J \left(\frac{M}{J}\right)^2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta}} D \dots \dots \dots (29)$$

Изъ этого уравненія видно, что наибольшая скорость, не вызывающая въ рельсахъ опасныхъ напряженій, пропорціональна діаметру ведущихъ колесъ, какъ это и принимается практическими инженерами: но видно также, что наибольшая безопасная скорость паровоза опредѣляется не однимъ размѣромъ діаметра ведущихъ колесъ, а еще и многими другими условіями.

Это обстоятельство тоже сознается практическими техниками, хотя они и не отдають себѣ въ немъ яснаго отчета. Въ практической жизни это сознаніе проявляется въ томъ фактѣ, что отношеніе

$$\frac{v_{\max}}{D}$$

опредѣляется для пассажирскихъ и для товарнымъ паровозовъ неодинаково.

Изъ уравненія (29) видно, что скорость  $v_{\max}$  увеличивается прямо пропорціонально  $\sqrt{J}$ —момента инерціи относительно вертикальной оси, проходящей черезъ центръ тяжести;  $v_{\max}$  уменьшается прямо пропорціонально моменту  $M$ —массъ неуравновѣшенныхъ противовѣсами частей механизма и, наконецъ, эта наибольшая скорость  $v_{\max}$  зависитъ отъ суммы, не находящихся въ произволѣ людей величинъ, выраженной формулою

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i.$$

Каждый изъ членовъ этой формулы, какъ видно изъ самаго опредѣленія величинъ  $\delta_i$  и  $\lambda_i$  можетъ имѣть всевозможныя значенія въ предѣлахъ отъ  $+\sqrt{2}$  до  $-\sqrt{2}$ . Дѣйствительная величина каждаго члена зависитъ отъ величины угла, составляемаго мотылемъ съ линіей мертвыхъ точекъ въ моментъ удара колеса о рельсъ. Величина этого угла зависитъ отъ множества

обстоятельствъ, въ числѣ которыхъ есть совершенно случайныя. Предсказать эти величины совершенно невозможно и сверхъ того надо сказать, что даже ни одному изъ направлений мотыля, въ моментъ удара, нельзя отдать никакого предпочтенія передъ другими, такъ что всѣ углы представляются равно вѣроятными. Но при равенствѣ вѣроятностей каждаго изъ направлений мотыля при ударѣ, вѣроятности различныхъ сочетаній величинъ  $\lambda_i \delta_i$  не одинаковы. Въ то время какъ вѣроятности такихъ сочетаній, при которыхъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i,$$

при  $n$  ударахъ, доставитъ величину  $n\sqrt{2}$  или  $-n\sqrt{2}$  почти равны нулю, вѣроятность появленія такихъ сочетаній, при которыхъ для  $n$  ударовъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

будетъ близка къ средней величинѣ, равной нулю, не такъ мала.

Величина  $v_{\max}$  очевидно будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

но больше тѣхъ скоростей, которыя удовлетворяютъ неравенству (26), при которыхъ еще не происходитъ никакихъ боковыхъ ударовъ колесъ объ рельсы, можно допускать только такія  $v_{\max}$ , которыя будутъ соответствовать чрезвычайно вѣроятнымъ сочетаніямъ величинъ, входящихъ въ формулу

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

или другими словами такія  $v_{\max}$ , о которыхъ можно сказать, что величины меньше допущеннаго предѣла соответствують такимъ величинамъ послѣдней формулы, которыя слишкомъ мало вѣроятны.

Для возможно большаго разъясненія всѣхъ понятій, касающихся  $v_{\max}$ , обратимся еще разъ къ уравненію (29), и замѣтимъ,

что оно опредѣляетъ ту наибольшую скорость поступательнаго движенія паровоза, при которой боковые удары колесъ объ рельсы не производятъ порчи пути. Всякая скорость, опредѣленная этимъ уравненіемъ, можетъ оказаться опасною при движеніи. Опредѣлить  $v_{\max}$  по уравненію (29) нельзя безъ предварительнаго опредѣленія суммы

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

численная величина которой можетъ заключаться въ предѣлахъ отъ 0 до  $n\sqrt{2}$ .

Если на мѣсто этой суммы будетъ вставлено число, выражающее наибольшую изъ всѣхъ возможныхъ величинъ этой суммы, т. е.  $n\sqrt{2}$ , то каковы бы ни были обстоятельства движенія, всегда дѣйствительная величина суммы

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

будетъ не больше  $n\sqrt{2}$ , а потому всегда скорости опасныя будутъ больше принятой  $v_{\max}$  и слѣдовательно опасности съ этой стороны ожидать нельзя. Путь будетъ оставаться устойчивымъ.

Такое опредѣленіе наибольшей допускаемой для паровоза скорости, приводящее къ скоростямъ, при которыхъ вовсе не происходитъ никакихъ ударовъ, даже и при наименьшихъ зазорахъ между осевыми подшипниками и шейками и при наименьшихъ возможныхъ коэффициентахъ тренія этихъ подшипниковъ съ ихъ шейками, заставило бы паровозы двигаться весьма медленно изъ желанія избѣгнуть почти призрачной опасности, поэтому то практика, имѣвшая дѣло съ дѣйствительными опасностями, являвшимися не по одному разу въ десятки лѣтъ, а сколько нибудь замѣтно въ общепринятомъ смыслѣ этого слова, должна была установить наибольшія скорости паровозовъ, нѣсколько болѣе безусловно безопасныхъ въ отношеніи извилистости движенія. Такъ, напримѣръ, тѣ паровозы, восьмиколесные, къ которымъ относятся выше приведенные расчеты, для безусловно безопаснаго движенія, должны были бы ходить, какъ выше опредѣлено, дѣлая не больше 2 оборотовъ ведущей оси въ секунду, а для нихъ допускается скорость 3 и даже часто болѣе 3-хъ оборотовъ. Это дѣлается потому, что при числѣ оборотовъ ведущей

оси равномъ или даже нѣсколько большемъ 3-хъ, движеніе паровоза можетъ дѣлаться опаснымъ только при исключительно большихъ, а потому крайне мало вѣроятныхъ, величинахъ суммы

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

пока дѣйствительная величина этой формулы, зависящая отъ тѣхъ положеній мотыля, которыя онъ занимаетъ въ моменты ударовъ, не превышаетъ предѣла принятаго для нея при опредѣленіи  $v_{\max}$ , до тѣхъ поръ удары колесъ объ рельсы не вызываютъ въ этихъ послѣднихъ никакихъ неупругихъ измѣненій; послѣ каждаго удара рельсы занимаютъ ихъ первоначальныя положенія, расширение пути не происходитъ, путь сохраняетъ устойчивость и никакой опасности извилистость движенія не представляетъ; но какъ только случайныя сочетанія послѣдовательныхъ положеній мотыля въ моменты ударовъ, несмотря на малую ихъ вѣроятность, доставятъ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

величину болѣе соответствующей допущенному предѣлу  $v_{\max}$ , удары колесъ приобретутъ силу, способную расширять путь, и движеніе сдѣлается опаснымъ. Чѣмъ больше будетъ разница между  $n \sqrt{2}$ , — предѣломъ величины

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

и тою ея величиною, которая будетъ принята при опредѣленіи  $v_{\max}$ , тѣмъ больше будетъ вѣроятность, что дѣйствительная величина этой суммы превзойдетъ принятую при опредѣленіи  $v_{\max}$  и тѣмъ вѣроятнѣе будетъ появленіе при ударахъ колесъ такихъ живыхъ силъ, которыя будутъ болѣе опасны.

Ежедневный опытъ указываетъ, что движеніе паровозовъ со скоростями нѣсколько превосходящими предѣлы, опредѣленные уравненіемъ (26), практически безопасно, но этотъ опытъ вовсе не служитъ доказательствомъ совершенной безопасности и если только будутъ допущены скорости, неудовлетворяющія не-

равенству (26), то, что бы ни дѣлали инженеры, опасность можетъ явиться. Если превышеніе допущенной скорости надъ величиною, удовлетворяющею уравненію (26), будетъ очень мало, то опасность можетъ явится только очень рѣдко, скажемъ для примѣра въ 100 лѣтъ разъ; если разница будетъ больше, то несчастье можетъ случиться разъ въ 50 лѣтъ, если еще больше, то еще чаще. Число несчастій будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше будетъ паровозовъ, ходящихъ по желѣзнымъ дорогамъ; но пока инженеры будутъ вынуждены опредѣлять наибольшее допускаемая скорости, основываясь на статистикѣ несчастныхъ случаевъ, до тѣхъ поръ будетъ крайне мало надежды, что они опредѣлятъ именно такія величины, при которыхъ несчастные случаи будутъ такъ рѣдки, что одинъ будетъ приходиться на 100, на 50 или даже на 25 лѣтъ. Подобный весьма желательный результатъ могъ бы быть достигнутъ только при теоретическомъ рѣшеніи вопроса, къ которому ни авторъ этой книги, ни вообще инженеры приступить еще не могутъ не потому, чтобы не могли оцѣнить всю важность рѣшенія съ гуманной точки зрѣнія, а потому, что свѣдѣнія, необходимыя для подобнаго рѣшенія, еще далеко не разработаны въ достаточной мѣрѣ ни учеными математиками и физиками, ни самими инженерами. Вѣроятность опасности при движеніи съ тою или другою данной скоростью есть сложный результатъ вѣроятностей многихъ другихъ явленій, въ числѣ которыхъ величина

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

занимаетъ одно изъ видныхъ мѣстъ. Если эту величину мы и можемъ теперь опредѣлять, то не a priori, а только a posteriori.

**Значеніе опыта при опредѣленіи наибольшей, допустимой поступательной скорости паровоза.**

§ 14.

Не имѣя средствъ опредѣлять предѣлы скоростей паровозовъ, основываясь на вычисленіяхъ, принимающихъ въ расчетъ степень вѣроятности несчастнаго случая и находясь подъ давленіемъ требованій практической жизни, не допускающей откладываніе рѣшенія вопроса до тѣхъ поръ, пока онъ будетъ всесторонне

разъясненъ, инженеры вынуждены опираться на опытъ, на ежедневное указаніе дѣйствительности, имѣя въ то же время въ виду, что вмѣстѣ съ тѣмъ какъ излишняя ихъ смѣлость можетъ быть причиною несчастья, излишняя осторожность будетъ непременно причиною ежедневной экономической невыгоды эксплуатаціи, зависящей отъ медленности или даже отъ недостиженія желательной быстроты движенія какъ людей, такъ и грузовъ. Вынужденные проходить между этими двумя Сциллою и Харибдою весьма возможно, что одни, удаляясь отъ одной, приближаются болѣе чѣмъ нужно къ другой, а другіе поступаютъ противоположно первымъ.

Вполнѣ благополучное движеніе, совершающееся въ дѣйствительности, часто съ весьма и весьма большими скоростями, указываетъ, что наиболѣе вѣроятныя комбинаціи величинъ  $\lambda_i$   $\delta_i$  доставляютъ въ суммѣ величины незначительныя, но инженеры должны видѣть съ ясностью, что при несчастныхъ обстоятельствахъ, въ особенности при движеніяхъ на спускахъ, когда взаимодѣйствіе паровоза и тендера не только не уменьшаетъ, а скорѣе увеличиваетъ извилистость движенія паровоза

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i$$

при продолжительномъ движеніи паровоза можетъ достигать весьма большихъ величинъ. Устранить опасность при такихъ случайностяхъ возможно только однимъ путемъ: только крайнимъ уменьшеніемъ дозволяемой величины наибольшей скорости  $v_{\max}$ ; доведеніемъ ея величины до такого значенія, при которомъ никакихъ боковыхъ ударовъ, зависящихъ отъ извилистости, еще не происходитъ.

Слѣдовательно, необходимо особенно внимательно замѣтить, что назначеніе безусловно безопасныхъ скоростей возможно при непремѣнномъ соблюденіи условій, выраженныхъ неравенствомъ (26) и что движеніе по желѣзнымъ дорогамъ со скоростями, превосходящими тѣ, которыя удовлетворяютъ неравенству (26), всегда сопряжено съ нѣкоторымъ рискомъ, но опытъ указываетъ, что чѣмъ меньше можетъ быть допускаемый рискъ—тѣмъ ближе надо держаться и неравенства (26).

Это разсужденіе, вызванное формулами, вполнѣ подтверждается, между прочимъ, практикою англійскихъ желѣзныхъ дорогъ. На нихъ, при ежедневномъ движеніи курьерскихъ поѣздовъ со скоростями 80, 90 и болѣе верстъ въ часъ, поѣздъ

королевы двигается со скоростью около 40 верстъ, причемъ ведущіе колеса паровоза дѣлають около 2 оборотовъ въ секунду.

Но ежедневный опытъ показываетъ, что, по счастью, и именно не по нашему умѣнью, а по счастью, рискъ отъ быстрыхъ движеній не великъ, что громадное большинство случаевъ быстрыхъ движеній поѣздовъ проходитъ вполне благополучно.

Величина наибольшей безопасной скорости, какъ видно изъ формулы (29), зависитъ отъ величины упругаго перемѣщенія  $\Delta_{\max}$  и отъ коэффициента упругости  $\epsilon$ , слѣдовательно на путяхъ разныхъ свойствъ и величины  $v_{\max}$  должны быть не одинаковы; но численныя соотношенія между  $v_{\max}$  и механическими свойствами рельсъ, шпаль, скрѣпленій рельсъ между собою и со шпалами еще нельзя показать теперь. Вопросъ этотъ представляетъ крайнюю трудность рѣшенія, вслѣдствіе чрезвычайной сложности измѣненій вида всѣхъ тѣхъ частей верхняго строенія дороги, который принимаютъ участіе въ перемѣщеніи головки рельса, подвергающейся удару. Самъ рельсъ при этомъ отчасти изгибается и скручивается; наружный край его нижней поверхности стремится выдвинуться внаружу и опуститься внизъ, внутренній край тоже перемѣщается внаружу и стремится подняться; на путяхъ безъ подкладокъ наружный костыль или шурупъ, а на путяхъ съ подкладками оба костыля, подвергнутые нажатію рельсомъ внаружу болѣе или менѣе наклоняются внаружу; а внутренній костыль или шурупъ, препятствуя внутреннему краю рельсовой пяты подниматься вверхъ, подвергается вытягиванію; шпала подъ рельсомъ, подвергаясь большому нажиманію наружнаго края пяты или подкладки, сжимается, а подъ вліяніемъ продольнаго давленія наружнаго костыля или обоихъ костылей (при подкладкахъ) нѣсколько перекашивается. Одна эта характеристика явленія уже достаточна, чтобы убѣдиться, что явленіе весьма сложно и не подвергается какому-нибудь уже извѣстному вычисленію. Теперь остается только пожелать, чтобы въ виду чрезвычайной важности вопроса инженеры постарались какъ можно болѣе освѣтить вопросъ своими наблюденіями.

Въ ожиданіи точнаго рѣшенія, практическіе инженеры должны будутъ ограничиться сравнительнымъ методомъ. Можно будетъ сказать, что если для паровозовъ на дорогѣ  $N_1$  практически дознана возможность достаточнобезопаснаго движенія со скоростью  $v_{1\max}$ , при шпалахъ, обладающихъ извѣстными сопротивленіями смятію и вытаскиванію костылей или шуруповъ, то на дру-

гой дорогѣ  $N_2$  для тѣхъ же паровозовъ, на соответствующихъ уклонахъ, можно будетъ допустить  $v_{2\max}$ , почти во столько же разъ больше или меньше  $v_{1\max}$ , во сколько разъ сопротивление шпалъ второй дороги больше или меньше соответствующихъ сопротивлений шпалъ на первой дорогѣ. Практическая невозможность избѣгнуть при движеніи какихъ-нибудь отступлений отъ скоростей, опредѣленныхъ математическими формулами, заставляетъ предвидѣть такія отступленія и побуждаетъ указать здѣсь кста-ти, еще разъ, что живыя силы теряются при ударахъ пропорціо-нально квадратамъ скоростей и, слѣдовательно, если дѣйствитель-ная скорость превзойдетъ назначенную на 25%, то дѣйствитель-ная живая сила при ударѣ будетъ больше ожидавшейся и, допу-щенной на 56%. Сила ударовъ о рельсы при катастрофѣ 17 ок-тября, при допущенной для передняго паровоза скорости 58 в. въ часъ, была больше той, которая явилась бы при скорости 42 версты, разрѣшенной правилами, почти въ 2 раза и, если не-счастье совершилось при скорости 58 верстъ, то поѣздъ могъ бы вполне благополучно пройти при 42. Въ виду этого инженеры должны съ крайнею осторожностью увеличивать скорости, оправ-данныя многолѣтними опытами. Увеличивать можно, но это уве-личеніе должно быть крайне постепенное съ тѣмъ, чтобы про-должительныя и внимательныя наблюденія дали возможность убѣждаться въ правильности допущеннаго.

---

## ЧАСТЬ II.

### Приложенія.

**Сравненіе численныхъ результатовъ, полученныхъ изъ уравненій, опредѣляющихъ динамическое дѣйствіе катящагося колеса, съ результатами опытовъ Дудлея.**

**Общая характеристика опытныхъ данныхъ Дудлея.**

#### § 1.

Въ описаніяхъ опытовъ Дудлея приведены нѣкоторыя данныя, необходимыя при опредѣленіи статическаго и динамическаго вертикальнаго давленія колеса на рельсъ, но не указаны нѣкоторыя другія данныя, столь же необходимыя при опредѣленіи не только динамическаго, но и статическаго дѣйствія. Вмѣстѣ съ тѣмъ эти опыты представляютъ особый интересъ потому, что даютъ указанія прямыхъ измѣреній тѣхъ величинъ, по которымъ исчислялись напряженія въ подошвѣ рельса, которыя въ немъ проявлялись въ моментъ прикосновенія колеса съ рельсомъ, прямо надъ измѣрительнымъ приборомъ стремматографомъ, или когда стремматографъ находился подъ серединою части рельса, заключенной между точками прикосновенія рельса съ двумя смежными колесами.

Въ числѣ данныхъ, приводимыхъ Дудлеемъ, находятся:  $J$  моментъ инерціи поперечнаго сѣченія рельса; размѣры шпаль и число ихъ подъ рельсомъ, указанной длины, чѣмъ опредѣляется  $L$ —разстояніе между ихъ серединами, о балластѣ сказано, что онъ каменный. Для опредѣленія его коэффициента  $C$ , есть указаніе о пониженіи на немъ шпаль. Величина пониженія опредѣлена для самыхъ тяжелыхъ катящихся колесъ въ  $\frac{1}{8}$  до  $\frac{3}{8}$  дюйма или 3,2 до 9,5 миллиметровъ. При наибольшей нагрузкѣ ведущаго колеса 13090 килограммовъ, соотвѣтственно которой указанъ изгибающій

моментъ 438170 килогр. сантимѣтровъ, есть основаніе предполагать, что динамическое давленіе было больше статическаго въ 1.43 раза или составляло 18700 килограмм. Такъ какъ длина полушпалы была 122 сантим., ширина—23 сантиметра, то давленіе балласта на шпалу при коэффициентѣ  $C$  погруженія на 1 сантиметръ будетъ  $122 \times 23 \times 0,95 C = 18700$ .

Откуда  $C = 7$ .

Эта величина  $C = 7$  представляется весьма правдоподобною. Зная величины  $E, J, L$  и  $C$ , можно опредѣлить, весьма приблизительно, величину  $A = \frac{EJ}{KL^3}$ , гдѣ  $K = 19600$  или округленно  $K = 20000$  килограммамъ.

Затѣмъ относительно каждаго опыта указаны: скорость поступательнаго движенія колеса и № паровоза, а по таблицамъ, относящимся къ паровозамъ и вагонамъ, можно опредѣлить статическую нагрузку каждаго изъ испытанныхъ колесъ. Нагрузки опредѣляются не вполне точно, но ошибки не превосходятъ 3% или 4%, а есть случаи, гдѣ ошибки значительно меньше.

### Недостаточность опытныхъ данныхъ Дудлея.

#### § 2.

Въ описаніи опытовъ нѣтъ указаній о величинахъ центробѣжныхъ силъ противовѣсовъ и о величинѣ силъ, передаваемыхъ колесамъ отъ давленій пара на поршни; поэтому нельзя опредѣлить вертикальныя слагающія этихъ силъ, дѣйствующихъ на ведущія колеса.

Въ описаніяхъ опытовъ нѣтъ также указаній, позволяющихъ опредѣлить долю давленія, произведеннаго колесомъ на рельсъ, передаваемую на каждую изъ поддерживающихъ его шпалъ, и потому изгибъ рельса подъ нагрузкою и кривая, обертывающая послѣдовательныя кривыя изогнутой нейтральной оси отъ рельса, можетъ быть опредѣлена только приблизительно и столь же приблизительно можно опредѣлять и моменты силъ изгибающихъ рельсъ.

О неправильностяхъ въ формѣ колесъ нѣтъ указаній. Точно также нѣтъ возможности установить какая точка траекторіи, описываемой точкою прикосновенія колеса съ рельсомъ, приходилась надъ приборомъ—стремматографомъ, въ моментъ производимой имъ записи, опредѣляющей напряженіе въ подошвѣ рельса.

Упомянутые недостатки указаний, относящихся къ отдѣльнымъ опытамъ, не допускаютъ сравненія теоретическихъ исчисленій, относящихся къ какому-нибудь отдѣльному опыту, съ соответственными результатами наблюденій.

## **Обработка опытныхъ и теоретическихъ данныхъ для ихъ взаимнаго сравненія.**

### **а. Обработка опытныхъ данныхъ.**

#### § 3.

Тѣмъ не менѣ послѣ нѣкоторой предварительной обработки матеріала, доставленнаго опытомъ, и исключивъ изъ обсужденія результаты наблюденій надъ ведущими осями, можно сравнивать теоретическіе результаты съ опытными.

Результаты обработки опытнаго матеріала приведены въ таблицахъ XIV и XV. Обработка состояла, главнымъ образомъ, въ опредѣленіи статически изгибающихъ моментовъ, соответственныхъ даннымъ Дудлея, указаннымъ въ его таблицахъ динамически изгибающихъ моментовъ.

Изъ динамической таблицы III видно, что при статической нагрузкѣ  $P$  колеса, при разстояніи между серединами шпаль  $L$ , статически изгибающій моментъ, въ случаѣ, когда рельсъ опирается на 4 упругія опоры, выражается формулою

$$n \frac{PL}{4}$$

гдѣ  $n$  есть нѣкоторый коэффициентъ, опредѣляемый выше указаннымъ уравненіемъ (отд. I § 18).

$$n = \frac{48A + 7}{24A + 10}.$$

Для каждаго изъ опытовъ Дудлея извѣстны  $P$ ,  $J$ ,  $L$  и площадь прикосновенія шпаль съ балластомъ. Произведеніе этой площади на коэффициентъ балласта  $C$  даетъ силу  $K$ . Въ виду недостаточной опредѣленности величины  $C$  сдѣланы вычисленія при довольно вѣроятныхъ величинахъ  $C$ . Въ таблицѣ XIV принято  $C=5$  и въ таблицѣ XV принято  $C=8$ .

Имѣя въ виду всѣ эти величины, опредѣляется  $n$ , а затѣмъ и вся величина статически изгибающаго момента.

Такимъ образомъ въ таблицахъ XIV и XV написаны рядомъ изгибающіе рельсъ моменты относительно середины между шпалами, какъ динамическій моментъ, такъ и статическій.

Т А Б Л

J момент. инер. рельса килогр. сант. <sup>4</sup>	A= $\frac{EI}{KL^3}$	$n = \frac{48A+7}{24A+10}$	C коэф. постели шпаль килогр.	K килограм.	L разст. между сред. шпаль сант.	P нагрузка рельсь килограм.	Момен. изг. рел.							
							M <sub>D</sub> динам. по опыту кил. сант.	M <sub>S</sub> стат. при 4 шпал. $\frac{PL}{4}$ кил. сант.						
1.332	1.05	1.630	5	13.640	57,1	4 960	140.577	115.269						
						4.960	68.575	115.269						
						8.190	181.731	190.337						
						8.190	229.723	190.337						
						6.200	144.003	144.086						
						6.200	72.002	144.086						
						6.200	78.853	144.086						
						6.200	89.144	144.086						
						7.200	157.521	167.326						
						7.200	113.058	167.326						
						7.200	85.720	167.326						
						7.200	113.058	167.326						
						7.200	113.058	167.326						
						7.200	113.058	167.326						
7.200	82.293	167.326												
7.200	68.575	167.326												
7.200	116.582	167.326												
1.982	1.66	1.740	5	12.834	57,1	4.596	112.932	114.160						
						4.596	103.886	114.160						
						13.090	438.170	325.143						
						8.709	212.306	216.323						
						6.830	167.132	169.650						
						6.830	117.446	169.650						
						6.824	194.251	169.650						
						6.824	185.205	169.650						
						1.892	2,32	1.800	5	12.834	50,3	5.291	167.511	119.762
												5.291	83.755	119.762
11.770	167.511	266.414												
9.610	319.522	217.523												
6.800	207.445	153.920												
6.800	86.868	153.920												
6.580	89.967	148.940												
6.580	100.992	148.940												

И Ц А Х I V.

R	Скорость V километр. въ часъ.						ПОЛОЖЕНИЕ КОЛЕСЪ.
	наб.	22,5	24	52	64,4	67,6	
напр. на							
кв. мил.							
килогр.	Динамическіе коэффиціенты.						
6.81	1.22						Передн. пар. тел.
3.79	0,59						Задн. пар. тел.
8.80	0,95						Передн. ведущ.
11.29	1.20						Задн. ведущ.
6.97	1						Передн. перв. тенд. тел.
3.49	0,50						Задн. перв. тенд. тел.
3.82	0,55						Передн. втор. тенд. тел.
4.32	0,62						Задн. втор. тенд. тел.
7.64	0,94						Передн. ваг. тел.
5.48	0,67						Задн. ваг. тел.
4.15	0,51						Передн. втор. ваг. тенд.
5.48	0,67						Задн. втор. ваг. тел.
5.48	0,67						Передн. ваг. тел. втор. ваг.
3.99	0,40						Задн. ваг. тел. втор. ваг.
3.79	0,41						Передн. втор. ваг. тел. втор. ваг.
5.65	0,70						Задн. втор. ваг. тел. втор. ваг.
4.15		0,99					Передн. пар. тел.
3.82		0,90					Задн. пар. тел.
16.11		1,35					Передн. ведущ.
7.80		0,98					Задн. ведущ.
6.14		0,98					Передн. перв. тенд. тел.
4.32		0,70					Задн. перв. тенд. тел.
7.14		1,14					Передн. втор. тенд. тел.
6.81		1,09					Задн. втор. тенд. тел.
8.97			1,40				Передн. пар. тел.
4.48			0,70				Задн. пар. тел.
8.97			0,63				Передн. ведущ.
17.10			1,47				Задн. ведущ.
11.12			1,35				Передн. перв. тенд. тел.
4.65			0,56				Задн. перв. тенд. тел.
4.82			0,52				Передн. втор. тенд. тел.
4.82			0,60				Задн. втор. тенд. тел.

J момент. инер. рельса килогр. сант. <sup>4</sup>	A= $\frac{EI}{KL^3}$	$\frac{48A+7}{24A+10}$ n	C коэф. постели шпаль килогр.	K килограм.	L разст. между сред. шпаль сант.	P нагрузка рельсь килограм.	Момент. изг. рел.	
							M <sub>D</sub> динам. по опыту кил. сант.	M <sub>S</sub> стат. при 4 шпал. $\frac{PL}{4}$ кил. сант.
1.186	1.41	1.700	5	12.834	50,8	4.600	164.425	99.314
						4.600	40.334	99.314
						10.000	338.122	215.900
						10.000	232.669	215.900
						6.200	152.013	133.858
						6.200	164.425	133.858
						6.250	310.225	134.938
						6.250	232.669	134.938
						3.340	111.678	72.111
						3.340	117.890	72.111
						3.340	96.166	72.111
						3.340	136.501	72.111
						3.340	300.912	72.111
3.340	223.356	72.111						
1.186	1.41	1.700	5	12.834	50,8	5.000	176.823	107.950
						5.000	93.067	107.950
						10.000	322.624	115.900
						5.000	133.402	107.950
						5.000	105.479	107.950
						5.000	117.890	107.950
						5.000	148.900	107.950
						4.100	127.189	86.575
						4.100	167.412	86.575
						4.100	111.678	86.575
						4.100	130.289	86.575
						4.100	110.050	86.575
						4.100	117.890	86.575
1.186	1.41	1.700	5	12.834	50,8	5.000	117.890	107.950
						5.000	139.601	107.950
						10.000	297.813	215.900
						5.000	99.266	107.950
						5.000	145.800	107.950
						5.000	127.189	107.950
						5.000	179.922	107.950
						4.010	127.189	86.576
						4.010	136.501	86.576
						4.010	105.479	86.576
						4.230	105.479	91.326
						4.230	158.212	91.326
						4.230	186.135	91.326

R	Скорость V километр. в часъ.						ПОЛОЖЕНИЕ КОЛЕСЪ.
	наиб.	22,5	24	52	64,4	67,6	
напр. на							
кв. мил.							
килогр.	Динамическіе коэффициенты.						
8.80				1.65			Перед. паров. тел.
2.16				0.41			Зад. паров. тел.
18.10				1.57			Перед. ведущ.
12.46				1.07			Зав. гедущ.
8.14				1.13			Пер. перв. тенд. тел.
8.80				1.22			Зад. перв. тенд. тел.
16.61				2.30			Пер. втор. тенд. тел.
12.46				1.72			Зад. втор. тенд. тел.
5.98				1.55			Пер. ваг. тел.
6.31				1.63			Сред. ваг. тел.
5.15				1.33			Зад. ваг. тел.
7.31				1.89			Пер. втор. ваг. тел.
16.11				4.17			Сред. втор. ваг. тел.
11.96				3.09			Заднее втор. ваг. тел.
9.47				1.64			Перед. паров. тел.
4.98				0.86			Заднее паров. тел.
17.27				1.49			Заднее ведущ.
7.14				1.25			Перед. тенд. тел.
5.65				0.98			Зад. тенд. тел.
6.31				1.09			Перед. втор. тенд. тел.
7.97				1.38			Зад. втор. тенд. тел.
6.81				1.46			Пер. пер. ваг. тел.
8.97				1.93			Среднее пер. ваг. тел.
5.98				1.29			Зад. перв. ваг. тел.
6.97				1.50			Пер. втор. ваг. тел.
5.89				1.27			Среднее втор. ваг. тел.
6.81				1.36			Зад. втор. ваг. тел.
6.31				1.09			Перед. пар. тел.
7.47				1.29			Зад. пар. тел.
15.94				1.37			Зад. ведущее.
5.31				0.92			Перед. тенд. тел.
7.81				1.35			Зад. тенд. тел.
6.81				1.17			Пер. втор. тенд. тел.
9.63				1.65			Зад. втор. тенд. тел.
6.81				1.46			Пер. ваг. тел.
7.31				1.57			Сред. ваг. тел.
5.65				1.21			Зад. ваг. тел.
5.65				1.15			Пер. втор. ваг. тел.
8.47				1.73			Сред. втор. ваг. тел.
9.96				2.04			Зад. втор. ваг. тел.

Т А Б Л

<i>J</i> момент. инер. рельса килогр. сант. <sup>4</sup>	$A = \frac{EI}{KL^3}$	$n = \frac{48A+7}{24A+10}$	<i>C</i> коэф. постели шпаль килогр.	<i>K</i> килограм.	<i>L</i> разст. между сред. шпаль сант.	<i>P</i> нагрузка рельсь килограм.	Момен. изг. рел.	
							<i>M<sub>D</sub></i> динам. по опыту кил. сант.	<i>M<sub>S</sub></i> стат. при 4 шпал. $\frac{PL}{4}$ кил. сант.
1.332	0,65	1.50	8	21.824	57.1	4.960	140.577	106.156
						4.960	68.575	106.156
						8.190	181.731	175.368
						8.190	229.723	175.368
						6.200	144.003	132.757
						6.200	72.002	132.757
						6.200	78.853	132.757
						6.200	89.144	132.757
						7.200	157.521	154.170
						7.200	113.058	154.170
						7.200	85.720	154.170
						7.200	113.058	154.170
						7.200	113.058	154.170
						7.200	82.293	154.170
						7.200	68.575	154.170
7.200	116.582	154.170						
1.982	1.04	1.62	8	20.350	-57.1	4.596	112.932	106.285
						4.596	103.886	106.285
						13.090	438.170	302.713
						8.709	212.306	201.398
						6.830	167.132	157.950
						6.830	117.446	157.950
						6.824	194.251	157.808
						6.824	185.205	157.808
						1.892	1.45	1.71
5.291	83.735	113.774						
11.770	167.511	253.093						
9.610	319.522	206.646						
6.800	207.445	146.222						
6.800	86.868	146.222						
6.580	89.967	141.491						
6.580	100.923	141.491						

И Ц А Х V.

R	Скорость V километр. въ часъ.						ПОЛОЖЕНІЕ КОЛЕСЪ.
	наиб.	22,5	24	52	64,4	67,6	
напр. на кв. мил. килогр.	Динамическіе коэффициенты.						
6.81	1.33						Перед. паров. тел.
3.79	0,64						Зад. паров. тел.
8.80	1.04						Перед. ведущее.
11.29	1.31						Зад. ведущее.
6.97	1.09						Перед. перв. тенд. тел.
3.49	0,54						Зад. перв. тенд. тел.
3.82	0,59						Перед. втор. тенд. тел.
4.32	0,67						Зад. втор. тенд. тел.
7.64	1,02						Перед. ваг. тел.
5.48	0,73						Зад. ваг. тел.
4.15	0,55						Пер. втор. в г. тел.
5.48	0,73						Зад. втор. ваг. тел.
5.48	0,73						Перед. ваг. тел. втор. ваг.
3.99	0,53						Зад. втор. ваг. тел. втор. ваг.
3.79	0,45						Перед. втор. ваг. тел. втор. ваг.
5.65	0,57						Задн. втор. ваг. тел. втор. ваг.
4.15	1.06						Передн. паров. тел.
3.82	0,99						Зад. паров. тел.
16.11	1.45						Передн. ведущее.
7.80	1.05						Зад. ведущее.
6.14	1.06						Передн. перв. тенд. тел.
4.32	0,74						Задн. перв. тенд. тел.
7.14	1.22						Передн. втор. тенд. тел.
6.81	1.16						Задн. втор. тенд. тел.
8.97			1.47				Передн. паров. тел.
4.48			0,73				Задн. паров. тел.
8.97			0,66				Передн. ведущее.
17.10			1.54				Задн. ведущее.
11.12			1.42				Пер. пер. тенд. тел.
4.65			0,59				Зад. перв. тенд. тел.
4.82			0,63				Передн. втор. тенд. тел.
4.82			0,71				Задн. втор. тенд. тел.

J момент. инер. рельса килогр. сант. <sup>4</sup>	A= $\frac{EI}{KL^3}$	$n = \frac{48A+7}{24A+10}$	C коэф. постели шпаль килогр.	K килограм.	L разст. между сред. шпаль сант.	P нагрузка рельсь килограм.	Момент. изг. рел.	
							M <sub>D</sub> динам. по опыту кил. сант.	M <sub>s</sub> стат. при 4 шпал. $n \frac{PL}{4}$ кил. сант.
1.186	0,88	1.582	8	20.534	50.8	4.600	164.425	92.420
						4.600	40.334	92.420
						10.000	338.122	200.914
						10.006	232.669	200.914
						6.200	152.013	124.566
						6.200	164.425	124.566
						6.250	310.225	125.570
						6.250	232.669	125.570
						3.340	111.678	67.105
						3.340	117.890	67.105
						3.340	96.166	67.105
						3.340	136.501	67.105
						3.340	300.912	67.105
3.340	223.356	67.105						
1.186	0,88	1.582	8	20.534	50.8	5.000	176.823	100.457
						5.000	93.067	100.457
						10.000	322.624	200.914
						5.000	133.402	100.457
						5.000	105.479	100.457
						5.000	117.890	100.457
						5.000	148.900	100.457
						4.100	127.189	82.374
						4.100	167.412	82.374
						4.100	111.678	82.374
						4.100	130.289	82.374
						4.100	110.050	82.374
						4.100	117.890	82.374
1.186	0,88	1.582	8	20.534	50.3	5.000	117.890	100.457
						5.000	139.601	100.457
						10.000	297.813	200.914
						5.000	99.266	100.457
						5.000	145.800	100.457
						5.000	127.189	100.457
						5.000	179.922	100.457
						5.000	127.189	100.457
						4.010	136.501	80.567
						4.010	105.479	80.567
						4.230	105.479	84.987
						4.230	158.212	84.987
						4.230	186.135	84.987

R	Скорость V километр. въ часъ.						ПОЛОЖЕНИЕ КОЛЕСЪ.	
	наб.	22,5	24	52	64,4	67,6		70,8
	напр. на							
кв. мил.	Динамическіе коэффициенты.							
килогр.								
8.80				1.78			Передн. паров. тел.	
12.16				0,43			Задн. паров. тел.	
18.10				1.68			Передн. ведущее.	
12.46				1.15			Задн. ведущее.	
8.14				1.22			Передн. перв. тенд. тел.	
8.80				1.32			Задн. перв. тенд. тел.	
16.61				2.48			Передн. втор. тенд. тел.	
12.46				1.08			Задн. втор. тенд. тел.	
5.98				1.66			Передн. ваг. т.л.	
6.31				1.75			Среднее ваг. тел.	
5.15				1.43			Задн. ваг. тел.	
7.31				2.03			Передн. втор. ваг. тел.	
16.11				4.48			Средн. втор. ваг. т.л.	
11.96				3.33			Задн. втор. ваг. тел.	
9.47				1.76			Передн. паров. тел.	
4.98				0,93			Задн. паров. тел.	
17.27				1.60			Задн. ведущее.	
7.14				1.32			Передн. тенд. тел.	
5.65				1.05			Задн. тенд. тел.	
6.31				1.17			Передн. втор. тенд. тел.	
7.97				1.48			Задн. втор. тенд. тел.	
6.81				1.50			Передн. перв. ваг. тел.	
8.97				2.03			Средн. перв. ваг. тел.	
5.98				1.35			Задн. перв. ваг. тел.	
6.97				1.58			Передн. втор. ваг. тел.	
5.89				1.33			Средн. втор. ваг. тел.	
6.31				1.43			Задн. втор. ваг. т.л.	
6.31				1.17			Передн. паров. тел.	
7.47				1.39			Задн. паров. тенд.	
15.94				1.48			Задн. ведущее.	
5.31				0,99			Передн. тенд. тел.	
7.81				1.45			Задн. тенд. тел.	
6.81				1.27			Передн. втор. тенд. тел.	
9.63				1.79			Задн. втор. тенд. тел.	
6.81				1.27			Передн. ваг. тел.	
7.31				1.69			Средн. ваг. тел.	
5.65				1.31			Задн. ваг. тел.	
5.65				1.24			Передн. втор. ваг. тел.	
8.47				1.86			Средн. втор. ваг. тел.	
9.96				2.19			Задн. втор. ваг. тел.	

Величины статически изгибающих моментов вычислены въ предположеніи, что рельсъ поддерживается четырьмя равно упругими опорами и одиночное колесо находится въ срединѣ средняго пролета. Въ случаяхъ, когда на рельсъ опираются три колеса, слѣдовало бы примѣнить формулы Клапейрона, какъ было указано выше. Тамъ же, однако, въ примѣрныхъ расчетахъ, было упомянуто, что въ тѣхъ случаяхъ, когда разстояніе между центрами колесъ, разъ въ 5 или раза въ 4, превышаетъ разстояніе между серединами опоръ, поддерживающихъ рельсъ, величина изгибающаго момента, по, такъ называемой, формулѣ Циммермана, оказывается болѣе чѣмъ по формуламъ Клапейрона, приблизительно на 3%,—6%. Поэтому отношенія динамическихъ моментовъ къ статическимъ можно принимать въ величинахъ, указанныхъ въ таблицахъ XIV и XV или въ величинахъ на 3%—6% болѣе значительныхъ.

Величины этихъ отношеній помѣщены въ столбцахъ подъ надписью—динамическіе коэффициенты.

Всѣ эти динамическіе коэффициенты, какъ въ таб. XIV, при  $C=5$ , такъ и въ таб. XV, при  $C=8$ , указываютъ, что динамическое дѣйствіе бываетъ и слабѣе статическаго, опускаясь почти до половины (хотя изъ опытовъ въ Шюрдью Институтѣ извѣстно, что катящіяся колеса, допрыгивая вверхъ, отдѣляются отъ рельса и слѣдовательно не производятъ на него никакого давленія), а временами динамическое давленіе превышаетъ статическое очень значительно: въ 2, въ 3 и даже въ 4 раза.

Таковы результаты опытовъ Дудлея.

#### **б. Обработка теоретическихъ данныхъ.**

Обработка теоретическаго матеріала состояла въ составленіи прилагаемыхъ динамическихъ таблицъ, отъ III, IV и V, вычисленныхъ для случаевъ очень близкихъ къ случаямъ бывшимъ при опытахъ Дудлея и дальнѣйшихъ до XXVII.

Динамическая таблица III относится къ случаямъ, когда тяжелыя колеса, съ большимъ поддерживаемымъ грузомъ, всего не менѣе 10.100 килограммовъ, двигаются съ большими скоростями. Такъ какъ бывшія при опытахъ скорости были: 64,4, 67,6 и 70,8 версты въ часъ, то при вычисленіи таб. принята скорость 68 верстъ въ часъ. Величина  $C=8$  и бывшее при опытахъ  $A=0,88$  (при составленіи таблицы III принята  $A=0,9$ ). Всѣ остальные величины приняты при расчетахъ такими, какими онѣ были при опытахъ Дудлея.

Динамическая таблица IV отличается от таб. III только вѣсомъ колесъ и поддерживаемой ими нагрузки и болѣе мягкими рессорами. Принято  $P = 5000$  кил. Динамическая таб. V составлена для колесъ съ нагрузкою среднею, при  $P = 7.000$  килогр. при  $C = 5$  и при незначительной скорости 22,5 версты въ часъ.

### Сравненіе опытныхъ и теоретическихъ данныхъ.

#### § 4.

При полномъ отсутствіи указаній Дудлея о формѣ поверхности катанія колесныхъ шинъ, таблицы вычислены для колесъ совершенно правильной круглой формы и для колесъ съ впадинами принятаго очертанія; при глубинахъ впадины въ 0,2 и 0,4 сантиметра. Извѣстно однако, что плоскія мѣста, на колесахъ тормазныхъ отступаютъ отъ круглой формы и болѣе чѣмъ на 0,4 сантиметра. Изъ таб. XV видно, что колеса съ нагрузкою, доставляшіе  $P = 10000$  килогр. при скоростяхъ 64,4 : 67,6 и 40,8 версты въ часъ, давали отношенія динамическаго давленія къ статическому: 1,68, 1,15, 1,60, 1,48.

Динамическая таб. III указываетъ, что, при совершенно круглыхъ колесахъ и прямыхъ рельсахъ отношеніе динамическаго давленія къ статическому не бываетъ болѣе 1,18.

При колесахъ со впадинами, глубиною 0,2 сантиметра отношеніе достигаетъ 1,36; а при впадинахъ въ 0,4 сантиметра доходитъ и до 1,62. При увеличеніи глубины впадины съ 0,2 до 0,4 сантим., динамическое давленіе возрастаетъ съ 1,36 до 1,62. Очевидно, что и очень небольшое увеличеніе глубины впадины сверхъ 0,4 сантим., легко можетъ повысить динамическое давленіе сверхъ 1,62 до 1,68. Тѣмъ болѣе, что первые 0,2 сантиметра повышаютъ давленіе на  $1,36 - 1,18 = 0,18$  а второе 0,2 сантиметра на  $1,62 - 1,36 = 0,28$ ; разница между 1,68 и 1,61 всего 0,06.

Изъ этихъ данныхъ можно заключить, что теоретическое опредѣленіе величины отношенія динамическаго давленія къ статическому, принимающее въ расчетъ форму и глубину впадины, вполнѣ хорошо согласуется съ результатами опытовъ Дудлея.

Таблица XV, для болѣе легкихъ колесъ и нагрузокъ, указываетъ, что изъ 28 случаевъ только въ 3 случаяхъ отношенія превышаютъ 2, и именно встрѣчаются отношенія 2,67, 2,03 и 2,07, и есть 1 случай, который даетъ отношеніе менѣе 1 всего 0,99; всѣ остальные заключаются въ предѣлахъ 1,05 и 1,86.

Динамическая таблица IV показывает, что при колесах совершенно правильной круглой формы отношение не может быть больше 1,18, при колесах со впадиной глубиной 0,2 сантиметра отношение может достигать 1,36, а при впадинѣ глубиной въ 0,4 сантиметра может колебаться отъ 0 до 1,75. Очевидно что и тутъ, при небольшомъ увеличеніи глубины впадины, отношение можетъ увеличиться до находящейся въ таблицѣ величины 1,86 или всего на  $1,86 - 1,75 = 0,11$ , а при исключительно большихъ неправильностяхъ въ формахъ поверхностей катанія колеса и рельса можетъ достигать и болѣе значительныхъ величинъ.

По таблицѣ XIV для колесъ съ нагрузками средней величины, при довольно малой скорости въ 22,5 верстъ, колебанія въ величинѣ отношенія динамическаго давленія къ статическому заключены въ предѣлахъ 0,41 до 1,22. Эти колебанія вполне объясняются при разсмотрѣніи динамической таб. V, гдѣ при впадинѣ глубиной 0,4 сантим. предѣлами колебаній оказываются 0 и 1,84.

Приведенное сопоставленіе результатовъ опытнаго изученія, съ результатами теоретическаго, показало, что предложенная теорія вполне хорошо объясняетъ вліяніе неправильностей въ формѣ поверхности катанія колеса или рельса. До появленія этой теоріи вліяніе неправильностей въ формѣ поверхностей катанія совершенно ускользало отъ какого бы то ни было объясненія, не говоря уже о достигаемой теперь численной оцѣнкѣ.

Такой результатъ примѣненія новой теоріи даетъ основаніе для примѣненія ея къ изученію вліянія поступательной скорости колеса и разныхъ элементовъ верхняго строенія, точно также, какъ вліянія неправильностей формы поверхностей катанія на величину отношенія динамическаго давленія къ статическому.

#### **Вліяніе числа опоръ, поддерживающихъ рельсъ на результаты теоретическихъ расчетовъ.**

##### § 5.

Такъ какъ изученіе этихъ вліяній производится не иначе какъ путемъ вычисленія довольно сложныхъ таблицъ, принимая въ основу предположеніе о числѣ опоръ поддерживающихъ рельсъ, то при составленіи таблицъ надо было дѣлать расчеты, принимая во вниманіе какъ дѣйствіе одиночнаго колеса при поддержкѣ рельса четырьмя или шестью равно упругими опорами, такъ и нагрузку рельса нѣсколькими грузами.

Что касается изгибовъ подъ вліяніемъ одиночнаго колеса, опирающагося на четыре опоры, когда можно примѣнять при среднемъ положеніи нагрузки формулы Циммермана, то уже не разъ было упомянуто, что при 4 или 5 пролетахъ между шпалами, помѣщающихся въ разстояніи между центрами колесъ, изгибъ отъ одиночнаго колеса почти не отличается отъ изгиба производимаго тремя колесами. Слѣдовательно не было надобности составлять таблицы, исходя изъ расчетовъ, основанныхъ на формулахъ Клапейрона, представляющихъ чрезвычайныя затрудненія и достаточно было остановиться на опредѣленіяхъ прогиба рельса, опирающагося на четыре опоры, какъ указано было выше.

Различіе прогибовъ, получающихся при четырехъ и шести опорахъ, было уже указано выше, но для большей увѣренности въ правильности дальнѣйшихъ заключеній, выводимыхъ изъ таблицъ, вычисленныхъ при четырехъ опорахъ, составлены таблицы различающіяся только числомъ опоръ. Таковы динамическія таблицы X и XXVII.

номеръ таблицы	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>L</i>	<i>J</i>	<i>A</i>	<i>V</i>	
X . . . . .	20.000	2.000.000	70	1.715	0,5	75	при 4 опорахъ
XXVII . . . . .	20.000	2.000.000	70	1.715	0,5	75	при 6 опорахъ

и динамическія таблицы XX и XXVI

№ таблицы	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>L</i>	<i>J</i>	<i>A</i>	<i>V</i>	
XXI . . . . .	10.000	2.000.000	60	2.160	2	75	вер. въ часъ при 4 опорахъ
XXVI . . . . .	10.000	2.000.006	60	2.160	2	75	вер. въ часъ при 6 опорахъ

По отношенію къ величинѣ *A* эти двѣ группы таблицъ различаются очень существенно. Въ одномъ случаѣ  $A = 0,5$ , въ другомъ  $A = 2$ .

По динамическимъ таблицамъ X и XXVII составлены графическія таблицы IV и V, по динамическимъ таблицамъ XXI и XXVI составлена графическая таблица VI. Графическія таблица IV и VI относятся къ колесамъ со впадинами 0,2 сантиметра, а графическая таб. V, къ колесамъ со впадинами 0,4 сантиметра.

Таблицы IV и V указываютъ крайне ничтожныя различія какъ въ прогибахъ, такъ и въ отношеніяхъ динамическихъ давленій къ статическимъ опредѣленіямъ, имѣя въ виду 4 опоры или 6 опоръ.

Графическая таб. VI указываетъ, что траекторіи точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, при 4 и 6 опорахъ, равно и

величины отношений:  $\frac{y_i}{h_i}$  при 4 и 6 опорахъ, въ подробностяхъ различаются довольно замѣтно, но въ отношеніи наибольшихъ ихъ величинъ различаются крайне незначительно.

Такъ какъ вниманіе привлекають къ себѣ не столько подробности, сколько наибольшія величины какъ погруженія, такъ и отношеній динамическаго дѣйствія къ статическому, то эти графическія таблицы достаточно убѣждаютъ въ допустимости вводить въ расчеты только тѣ случаи, когда рельсъ опирается на 4 равно-упругія и равно-отстоящія опоры.

Въ виду большей простоты расчетовъ, опредѣляющихъ обертывающую линію, при четырехъ опорахъ чѣмъ при 6 опорахъ, всѣ остальные таблицы составлены, принимая въ основу формулы, относящіяся къ четыремъ опорамъ.

### Вліяніе поступательной скорости.

#### а) колеса съ постоянною нагрузкою, на динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ.

##### § 6.

§ 6. Вліяніе разныхъ элементовъ пути и разныхъ неправильностей въ формахъ поверхностей катанія на колесахъ или рельсахъ, производимое этими элементами или неправильностями на динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ, будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ болѣе поступательная скорость колеса будетъ отклонять динамическое его давленіе отъ статическаго. Динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ зависитъ отъ свойствъ пути, отъ гибкости рельса, отъ разстоянія между опорами, отъ упругихъ свойствъ балласта и отъ неправильностей на поверхностяхъ катанія. Динамическія таблицы, разъясняющія вліяніе поступательной скорости на динамическое давленіе колеса на рельсъ, вычислены принимая въ расчетъ рельсы: очень малой профили, средней профили и очень сильной профили: съ моментами инерціи  $J=512$  сант.<sup>4</sup>,  $J=858$  сант.<sup>4</sup>,  $J=1715$  сант.<sup>4</sup> и  $J=2160$  сант.<sup>4</sup> при разстояніяхъ между серединами опоръ  $L=80$  сант.,  $L=70$  сант. и  $L=60$ . Что касается свойствъ балласта, опредѣляющихъ силу  $K$ , то эта сила принята:  $K=10.000$  килогр. при нагрузкѣ колесъ  $P=10.000$  килогр.,  $P=7.200$  килограммахъ и 5000 килогр.

При такихъ заданіяхъ число  $A = \frac{EJ}{KL^3}$ , характеризующее свойства пути, оказалось для наиболѣе мягкаго пути  $A = \frac{2.000.000 \times 512}{10.000 \times 80^3} =$

= 0,2, для пути средних свойств  $A = \frac{2.000.000 \times 1.715}{10.000 \times 70^3} = 1$

и для пути очень жесткого  $A = \frac{2.000.000 \times 2.160}{10.000 \times 60^3} = 2$ .

Для каждого из таких путей составлены динамическія таблицы при скоростяхъ 25, 50, 75 и 100 верстѣ въ часъ. Вычисленія, приведенныя въ таблицахъ, относятся къ колесамъ совершенно правильной круглой формы и колесамъ съ плоскими мѣстами при глубинѣ впадинъ въ 0,2 сантиметра и въ 0,4 сантиметра. Болѣе глубокія впадины въ расчетъ не принимались, въ виду не часто встрѣчающихся впадинъ болѣе глубокихъ, чѣмъ 0,4 сант. Главные результаты, извлеченные изъ этихъ динамическихъ таб., при  $A=0,2$ , VI, VII и VIII, при  $A=0,5$ , изъ таб. XI, XII, XIII и XIV, при  $A=1$ , таб. XVI, XVII, XVIII и изъ таб. XIX, XX, XXI и XII, при  $A=2$  сведены въ двухъ слѣдующихъ таблицахъ XVII и XVIII.

Въ таб. XVII показаны наибольшія и наименьшія отклоненія динамическихъ погруженій точки прикосновенія колеса съ рельсомъ отъ статическихъ погруженій той же точки.

**Т а б л и ц а XVII.**

Но- меръ динам. таб- лицы.	p кило- грам.	A	V верстѣ въ часъ.	Глубина впадины на шинѣ сантиметровъ.					
				0		0,2		0,4	
				$y_i-h_i$ сант. max.	$y_i-h_i$ сант. min.	$y_i-h_i$ сант. max.	$y_i-h_i$ сант. min.	$y_i-h_i$ сант. max.	$y_i-h_i$ сант. min.
VI	10.000	0,2	50	0,1615	-0,1706	0,2167	-0,2613	0,5727	-0,4889
VII	—	—	75	0,0800	-0,0568	0,2976	-0,3137	0,4844	-0,3507
VIII	—	—	100	0,0721	-0,0297	0,3003	-0,2143	0,5283	-0,3415
XI	10.000	0,5	25	—	—	—	—	0,1912	-0,1344
XII	—	—	50	—	—	—	—	0,4064	-0,4620
XIII	—	—	75	—	—	—	—	0,5194	-0,4642
XIV	—	—	100	—	—	—	—	0,5037	-0,3864
XV	10.000	1,0	25	0,0594	-0,0170	—	—	0,0792	-0,0824
XVI	—	—	50	0,0480	-0,0022	0,2300	-0,1966	0,3433	-0,3882
XVII	—	—	75	0,0423	0,	0,3020	-0,2371	0,5166	-0,5004
XVIII	—	—	100	—	—	0,2690	-0,2208	0,5302	-0,4733
XIX	10.000	2,0	25	—	—	—	—	0,1561	-0,1051
XX	—	—	50	—	—	0,1715	-0,1102	0,3346	-0,3197
XXI	—	—	75	0,0363	-0,0076	0,2895	-0,2525	0,5201	-0,5370
XXII	—	—	100	0,0561	-0,0013	0,2809	-0,2340	0,5024	-0,3831
IX	5.000	0,5	25	—	—	0,0374	-0,0394	0,1355	-0,1048
IV	5.000	0,9	68	—	—	0,2101	-0,2459	—	—

Изъ этой таблицы видно, что при всѣхъ разсмотрѣнныхъ типахъ пути, начиная отъ самыхъ податливыхъ до очень твердыхъ, динамическія погруженія, при увеличеніи скорости до 75 верстъ въ часъ, увеличиваются, а при дальнѣйшемъ увеличеніи скорости, до 100 верстъ въ часъ, или уменьшаются или, какъ при  $A=0,2$  и при  $A=1$ , такъ мало увеличиваются, что при той степени точности, которая достижима при вычисленіи динамическихъ таблицъ, различіе оказывается вполне незамѣтнымъ.

Въ таблицѣ XVIII показаны наибольшія и наименьшія отношенія динамическаго давленія колеса къ статическому его давленію, выражаемыя величинами  $\frac{y^p}{h^i}$  max. и  $\frac{y^i}{h^i}$  min.

Т а б л и ц а XVIII.

Но- меръ динам. таб- лицы.	p кило- грам.	A	V верстъ въ часъ.	Глубина впадины на шинѣ сантиметровъ.					
				0		0,2		0,4	
				$\frac{y^i}{y^i}$	$\frac{y^i}{y^i}$	$\frac{y^i}{y^i}$	$\frac{y^i}{y^i}$	$\frac{y^i}{y^i}$	$\frac{y^i}{y^i}$
				max.	min.	max.	min.	max.	min.
VI	10.000	0,2	50	1,2764	0,7033	1,3768	0,5455	1,8911	0,1806
VII	—	—	75	1,1430	0,9033	1,5325	0,4685	2,0003	0,0989
VIII	—	—	100	1,1285	0,9491	1,5377	0,6166	1,9452	0,2174
XI	10.000	0,5	25	—	—	—	—	1,4120	0,7069
XII	—	—	50	—	—	—	—	1,9582	0,
XIII	—	—	75	—	—	—	—	2,1460	0,
XIV	—	—	100	—	—	—	—	2,1084	0,0680
XV	10.000	1,0	25	1,1538	0,9564	—	—	1,2052	0,7894
XVI	—	—	50	1,1246	0,9944	1,5955	0,4935	1,8888	0,
XVII	—	—	75	1,1090	1,0029	1,7819	0,3854	2,3374	0,
XVIII	—	—	100	—	—	1,6809	0,4285	2,3423	0,
XIX	10.000	2,0	25	—	—	—	—	1,4625	0,6987
XX	—	—	50	—	—	1,4980	0,5665	1,9712	0,0295
XXI	—	—	75	1,1102	0,0076	1,8788	0,2503	2,5680	0,
XXII	—	—	100	1,1707	0,9962	1,8340	0,3052	2,4917	0,
IX	5.000	0,5	25	—	—	1,3260	0,7691	1,5894	0,5429
IV	5.000	0,9	68	—	—	2,9567	0,	—	—

Эта таблица, подобно предыдущей таблицѣ XVIII указываетъ, что при колесахъ совершенно правильной круглой формы динамическое дѣйствіе, при измѣненіи поступательной скорости колеса, немного отличается отъ статическаго дѣйствія. Оно повышается на 15%—17%.

При колесахъ, неправильно изношенныхъ, динамическое дѣйствіе значительно превосходить дѣйствіе статическое. Съ увеличеніемъ скорости оно увеличивается, пока поступательная скорость не достигнетъ приблизительно 75 верстъ. Послѣ этой скорости величина динамическаго дѣйствія или не возрастаетъ замѣтно, или уменьшается.

### Критическая скорость поступательнаго движенія колеса.

#### § 7.

Подобное свойство поступательной скорости, близкой къ 60 или 80 километрамъ, было подмѣчено еще Коуаромъ. Въ настоящее время это свойство подтвердилось теоретическими исчислениями. Поэтому скорость въ 75 верстъ можно считать близкою къ такой скорости, которая должна быть названа *критическою скоростью*.

Существованіе критической скорости подтверждается динамическими таблицами, составленными по диаграммѣ инженера Гололобова, принимавшей въ расчетъ и дѣйствіе пара и противовѣсовъ. По этимъ таблицамъ (см. выше динамическія таблицы I и II) оказывается, что при поступательной скорости

$$V = 52 \text{ вер. для совершенно круглаго колеса } \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max} = 1,18$$

$$\text{для колеса со впадиной въ 0,2 см. } \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max} = 1,88$$

$$\text{при } V = 104 \text{ вер. для совершенно круглаго колеса } \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max} = 1,15$$

$$\text{для колеса со впадиной въ 0,2 см. } \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max} = 1,51$$

Величины  $\left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$ , относящіяся къ поступательной скорости  $V = 104$  верстъ въ часъ, оказались значительно меньше величинъ  $\left( \frac{y_i}{h_i} \right)$  соотвѣтствующихъ поступательной скорости  $V = 52$  верстъ въ часъ.

Открытие критической скорости представляется очень важнымъ въ теоретическомъ отношеніи и еще несравненно болѣе важнымъ и въ практическомъ отношеніи.

Съ теоретической точки зрѣнія оно важно потому, что позволяетъ, при изученіи вліяній разныхъ элементовъ пути, ограничиваться исчисленіемъ динамическихъ таблицъ при одной только критической поступательной скорости въ 75 верстъ, такъ какъ при этой скорости изучаемое вліяніе проявитъ свое наибольшее дѣйствіе.

Практическій результатъ открытія критической скорости, при которой динамическое дѣйствіе наиболѣе отстываетъ отъ статическаго, имѣетъ несравненно болѣе важное, чѣмъ теоретическое, значеніе. Благодаря этому открытію, можно утверждать, что путь, обнаружившій свою прочность относительно вертикальныхъ силъ при движеніи поѣздовъ со скоростью 75 верстъ въ часъ, представитъ такую же прочность въ отношеніи вертикально дѣйствующихъ силъ и при движеніи поѣздовъ со скоростью въ 100 верстъ въ часъ.

На рельсахъ, поперечные размѣры которыхъ опредѣлены, принимая въ расчетъ вертикальное динамическое дѣйствіе при критической скорости, не будетъ надобности ограничивать скорость хода поѣздовъ соображеніями о прочности рельсовъ, связанными съ дѣйствіями вертикальныхъ силъ.

Если необходимость ограниченія хода поѣздовъ останется, то она будетъ зависѣть отъ усилій, производимыхъ подвижнымъ составомъ въ горизонтальныхъ направленіяхъ. Такія усилія могутъ оказываться при движеніяхъ по кривымъ частямъ пути, или при неудовлетворительно сооруженныхъ паровозахъ, движенія которыхъ сопровождаются сильною извилистостью хода.

Если условія, при которыхъ опредѣлены поперечные размѣры рельсовъ, неизвѣстны, то послѣ опредѣленія величинъ  $h_i$  соответствующихъ случаю, по отношенію къ величинѣ  $A$  и нагрузкѣ  $P$  наиболѣе тяжелыхъ колесъ, нужно будетъ сдѣлать, по указаннымъ уравненіямъ, расчеты при нѣсколькихъ скоростяхъ. Напримѣръ, начиная съ 60, затѣмъ 45 и можетъ, быть еще при 30 верстахъ въ часъ. Та скорость, при которой при впадинѣ 0,2 сантим.

получится отношеніе  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  не болѣе наблюдавагося на опы-

тахъ Дудлея 1,60, можетъ быть принята за наибольшую—допустимую на данномъ пути скорость хода поѣздовъ.

## Вліяніе поступательной скорости.

### б) колеса съ переменною нагрузкою.

Матеріалы для раздѣленія этого важнаго вопроса очень еще скудны. Переменная нагрузка колеса постоянно встрѣчается на ведущихъ колесахъ паровозовъ. Величины вертикальныхъ силъ мѣняются вслѣдствіе дѣйствія силъ инерціи противовѣсовъ и частей механизма и вслѣдствіе переменности давленій пара на поршень.

Діаграммы такихъ силъ, показанныя на графическихъ таблицахъ I, II и III, были даны профессоромъ Ю. В. Ломоносовымъ и для паровоза, Прери, инженерами Гололобовымъ и Раевскимъ. Только эти инженеры даютъ діаграммы силъ, относящіяся къ одному и тому же паровозу при разныхъ скоростяхъ.

На основаніи динамическихъ таблицъ II и III показаны на графическихъ таблицахъ II и III линіи погруженія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, линіи отношенія  $\frac{y_i}{h_i}$  какъ при совершенно круглыхъ колесахъ, такъ и при колесахъ со впадиною глубиной 0,2 сантиметр.

Сверхъ того показаны линіи отношеній динамическаго давленія, опредѣленнаго по формулѣ

$$S_i \frac{y_i}{h_i}$$

къ нормальному статическому давленію

$$(1 + m) q.$$

Эти послѣднія отношенія, найденныя при поступательныхъ скоростяхъ колесъ въ 52 и 104 километра указываютъ, что динамическое дѣйствіе колеса на рельсъ при скорости въ 52 километра не превосходитъ 2.1412, а при скорости въ 104 километра въ часъ не превосходитъ 1.9111.

Такимъ образомъ оказывается, что и ведущія колеса производятъ давленіе, имѣющее наибольшую величину при нѣкоторой скорости, заключенной между 52 и 104 километрами въ часъ.

Для опредѣленія скорости соответствующей наибольшему давленію, надо будетъ составить діаграммы силъ, а затѣмъ вычислить динамическія таблицы для нѣсколькихъ скоростей въ предѣлахъ 52 и 104 километр. въ часъ.

**Вліяніє коефіцієнта балласта  $C$ . на динамическое дѣйствіє колеса на рельсъ и на устойчивость пути.**

§ 8.

Вліяніє этого коефіцієнта проявляється въ величинѣ силы  $K$ , соответственной данной нагрузкѣ  $P$ .

Сила  $K$ , какъ видно изъ уравненія (33) § 17, вліяетъ на величину  $y$ , выражающаго углубленіє точки прикосновенія колеса съ рельсомъ въ опредѣленной его точкѣ. Она слѣдовательно вліяетъ на изгибы рельса. Эта же сила  $K$  вліяетъ на прогибы не только явно, какъ видно изъ упомянутаго уравненія (33), но еще и неявно, черезъ посредство величины  $A$ , входящей въ то же уравненіє, такъ какъ  $A = \frac{EJ}{KL^3}$ . Во всѣхъ вычисленіяхъ вели-

чина  $K$  считается постоянною. При такомъ свойствѣ величины  $K$  путь можно считать устойчивымъ; но если большія динамическія давленія переходятъ за нѣкоторый извѣстный предѣлъ, то упругія свойства балласта нарушаются. Послѣ прохода колеса онъ не приводитъ рельсъ въ положеніє, бывшее до прохода колеса. Примѣненіє теоріи должно идти такъ, какъ было указано въ §§ 27—32.

На практикѣ путь будетъ называться неустойчивымъ и будетъ требовать возобновленія подбивокъ. Если исправленія пути нужно будетъ производить слишкомъ часто и стоимость его будетъ слишкомъ дорога, нужно будетъ уменьшить поступательную скорость колесъ, сообразуя ея величину со свойствами балласта.

**Вліяніє коефіцієнта балласта при устойчивомъ пути.**

§ 9.

Если при измѣненіяхъ величины  $K$ , въ зависимости отъ коефіцієнта балласта  $C$ , останутся безъ измѣненія моментъ инерціи  $J$  и разстояніє между серединами опоръ  $L$ , то  $A$  уменьшается пропорціонально увеличенію  $K$ . Но если при увеличеніи  $K$ , или все равно  $C$ , будетъ увеличиваться  $J$ , или уменьшаться

$L$ , то эти увеличенія или уменьшенія могутъ быть такими, при которыхъ величина  $A$  будетъ оставаться безъ измѣненія. Поэтому необходимо изслѣдовать измѣненіе величины отношенія динамическаго дѣйствія къ статическому  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  какъ при измѣняющихся величинахъ  $A$ , убывающихъ обратно пропорціоально величинѣ  $C$ , такъ и при постоянныхъ величинахъ  $A$ , когда увеличеніе  $C$  уравновѣшивается или увеличеніемъ момента инерціи  $J$ , или уменьшеніемъ  $L$ , разстоянія между серединами опоръ.

Для уясненія этихъ вопросовъ составлены динамическія таблицы X, XIII, XVII, XXIV и XXV, принимая въ расчетъ коэффициенты:  $C = 3$ ,  $C = 4,5$  и  $C = 6$ .

Въ слѣдующей таблицѣ XIX показаны измѣненія  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  при такихъ измѣненіяхъ  $C = 3$  и  $C = 6$ , или все равно  $K = 10.000$  и  $K = 20.000$  килогр. когда, благодаря измѣненію момента инерціи  $J = 858$  кил. сан.<sup>4</sup> до  $J = 1.715$  килогр. сан.<sup>4</sup>, остается безъ перемѣны величина  $A = 0,5$ .

Т а б л и ц а X I X.

Но- меръ динам. таб- лицы.	$P$ кило- грам- мовъ.	$V$ верстъ въ часъ	$J$ кило- грам- сант. <sup>4</sup>	$L$ разст. между сред. опор. сант.	$C$ кило- грам. на кв. сант.	$K$ кило- грам.	$A$	Глубина впадины сантим.		
								0	0,2	0,4
								$\left(\frac{y_i}{y_i}\right)_{\max}$	$\left(\frac{y_i}{y_i}\right)_{\max}$	$\left(\frac{y_i}{y_i}\right)_{\max}$
XIII	10.000	75	858	70	3	10,000	0,5	—	1,6203	2,240
X	10.000	75	1,715	70	6	20,000	0,5	—	2,2044	3,0980

Въ слѣдующей таблицѣ XX, указаны измѣненія величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  для сильно нагруженныхъ колесъ, также какъ и въ табл. XIX, при одинаковыхъ величинахъ  $J = 1,715$  и  $L = 70$  сант. при скорости близкой къ критической  $V = 75$  верстъ въ часъ. но при разныхъ величинахъ  $C$  или  $K$ , измѣняющихся  $A$ .

Таблица XX.

Номеръ динамической таблицы.	P килограм.	V версть въ часъ.	J килограм.-сант. <sup>4</sup>	L разст. между сред. опор. сант.	C килогр на кв. сант.	K килограм.	A	Глубина впадины сантим.		
								0	0,2	0,4
								$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$
XVII	10.000	75	1,715	70	3	10.000	1	1,1090	1,7450	2,4646
XXIV	10.000	75	1,715	70	4,5	15.000	0,67	—	2,0066	3,0130
X	10.000	75	1,715	70	6	20.000	0,5	—	2,2049	3,0980

Въ таблицѣ XXI показаны измѣненія  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  при такихъ измѣненіяхъ  $C=3$  и  $C=4,5$ , или все равно  $K=10000$  и  $K=15000$  килограммовъ, при которыхъ измѣненіе  $L$  съ величины его  $L=77$  сантим. до  $L=70$  сантим. оставляетъ  $A=0,5$ , подобно тому какъ въ таблицѣ XIX.

Таблица XXI.

Номеръ динамической таблицы.	P килограм.	V версть въ часъ.	J килограм.-сант. <sup>4</sup>	L разст. между сред. сант.	C килогр на кв. сант.	K килограм.	A	Глубина впадины сантим.		
								0	0,2	0,4
								$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$
XXV	10.000	75	1,715	77	4,5	15.000	0,5	—	1,9422	2,8608
X	10.000	75	1,715	70	6	20.000	0,5	—	2,2044	3,0980

Во всѣ три таблицы XIX, XX и XXI показываютъ, что увеличеніе коэффициента  $C$ , какъ при уменьшеніи  $A$ , въ случаѣ сохраненія величинъ  $L$  и  $S$  (таб. XX), такъ и при сохраненіи величины  $A$  посредствомъ увеличенія момента инерціи  $J$  (таб. XIX) или умень-

шенія разстоянія  $L$  (таб. XXI), наибольшее отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  увеличивается.

При движеніи тяжелыхъ колесъ ( $P=10.000$  кил.) со впадинами глубиною 0,4 сантиметра, когда  $C$  увеличивается вдвое отъ  $C=3$  до  $C=6$  (таб. XIX), отношенія динамическихъ дѣйствій къ статическимъ увеличиваются какъ  $2,146:3,098=1:1,44$ . По таб. XX, при двойномъ увеличеніи  $C$  отъ  $C=3$  до  $C=6$ , при неизмѣнности  $J$  и  $L$ , отношеніямъ разныхъ величинъ  $C$ , какъ  $1:1,5:2$ , соотвѣтствуютъ отношенія величинъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$   $2,337:2,879:3,098=1:1,23:1,33$ .

Различіе въ отношеніяхъ крайнихъ величинъ, какъ только что указано, по сравненію съ приведенными выше, произошло потому, что при разсмотрѣнннхъ величинъ, принадлежащихъ таб. XX, еще не принято во вниманіе вліяніе величины  $A$ . Въ помѣщенной далѣе таб. XXV указывается, что уменьшеніе  $A$  съ 1 до 0,5 должно было бы уменьшить величину  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  и довести ее до  $\frac{2,09}{2,25} \times 2,337=2,17$ . Исправленное такимъ образомъ показаніе таб. XX указало бы, что удвоеніе величины  $C$  съ  $C=3$  до  $C=6$  даетъ отношеніе  $\frac{3,098}{2,17}=1,43$ , не отличающееся отъ результата, полученнаго изъ таблицы XIX.

Наконецъ, изъ таблицы XXI видно, что увеличено  $C$  отъ  $C=4,5$  до  $C=6$  или въ отношеніи  $1:1,33$ , при движеніи колеса со впадиною 0,2 сантиметра, увеличиваетъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  въ отношеніи  $1,942:2,204=1,14$ . Если увеличеніе  $C$  на  $\frac{1}{3}$  его величины даетъ увеличеніе отношенія  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  на 14%, то при увеличеніи  $C$  на полную его величину, или вдвое, должно дать увеличеніе  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  въ 3 раза болѣе или 0,48, что опять близко сходится съ вышеуказаннымъ увеличеніемъ.

Итакъ, можно сказать, что увеличеніе  $C$  въ два раза увеличиваетъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  на 42%, а всякое другое болѣе или менѣе значительное увеличеніе  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  соотвѣтственно болѣе или менѣе.

Вредное вліяніе увеличенной твердости балласта на величину динамическаго дѣйствія колесъ на рельсы, здѣсь теоретически установленное, вполне доказывается практикою желѣзныхъ дорогъ. Изломы рельсовъ по всему поперечному сѣченію рельса, составляющіе послѣ смятія головокъ наибольшій процентъ всѣхъ существенныхъ поврежденій рельсъ, происходятъ большею частью зимой при сильныхъ морозахъ. Поврежденія этого рода называютъ въ Америкѣ зимнею болѣзнью рельсовъ. Суровыя зимы 1911 и 1912 годовъ доставили на сѣверныхъ дорогахъ огромное число этихъ поврежденій <sup>1)</sup>.

Къ сказанному слѣдуетъ однако добавить соображеніе относительно прочности рельсъ, подвергающихся динамическимъ дѣйствіямъ болѣе значительно превосходящимъ статическое дѣйствіе.

При увеличеніи момента инерціи, какъ приведено въ таблицѣ XX, въ два раза, когда  $J$  становится 1715 вмѣсто 858, моментъ сопротивленія рельса  $W$  увеличивается почти въ 1,9 раза <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Bullet de l'associat. du congrès Intern. des chemins de fer. Vol. XXVII № 10. 1913. page 901. Les avaries de rails et leurs causes. par. M. H. Wickhorst.

Еще нагляднее это свойства твердѣющаго балласта указывается діаграммами, помѣщенными въ Статистическомъ Сборникѣ М. П. С. Выпускъ 107. ж. дороги въ 1905—1907 гг. Діаграмма (въ концѣ тома). Къ таб. XII—XIV изъятіе изъ службы русскихъ и иностранныхъ заводовъ по ж. д. Евр. и Азіат. Россіи по мѣсяцамъ въ 1905, 1096 и 1097 г.г.

<sup>2)</sup> Bulletin de l'association du Congrès International des chemins de fer. Rapport existant entre la charge, le profit du rail et le nombre de traverses par E. C. W. Van Dijk. Vol. XXVIII № 6. Juin 1914.

Инженеръ Ванъ-Дейкъ (Van Dijk) указываетъ слѣдующія соотношенія вѣса 1 метра длины рельса, момента его инерціи и момента сопротивленія:

Вѣсъ въ килограмм. $q$ . . . . .	36	34	38	42	46
ихъ соотношенія . . . . .	1	1,13	4,37	140	153
Моменты инерціи сант. <sup>4</sup> $J$ . . . . .	790	990	1.170	1.370	1.560
ихъ соотношенія . . . . .	1	1.253	1.481	1.734	1.975
Моментъ сопротивл. сант. <sup>3</sup> $W$ . . . . .	127	149	173	194	217
ихъ соотношенія . . . . .	1	1.172	1.362	1.527	1.710
0,9 отношенія моментовъ операціи дають . . . . .	1	1.127	1.333	1.560	1.778

Послѣдній рядъ отношеній очень мало отличается отъ предпослѣдняго и подтверждаетъ, что увеличеніе момента сопротивленія составляетъ почти 0,9 увеличенія момента инерціи:

$$\frac{1560}{790} x = \frac{217}{127}$$

$$x=0,87$$

Если при моментѣ инерціи  $J_1=858$  назовемъ моментъ сопротивленія  $W_1$ , наибольшее напряженіе въ рельсѣ  $R_1$  и изгибающій моментъ  $M_1$ , то

$$W_1 R_1 = M_1$$

называя  $W_2$ ,  $R_2$  и  $M_2$  величины соответствующія моменту инерціи  $J_2=1715$ , получимъ

$$W_2 R_2 = M_2$$

Принимая, что  $J_2=2J_1$  надо отмѣтить, что

$$W_2 = 1,9 W_1$$

и если

$$M_2 = 1,44 M_1$$

то

$$1,9 W_1 R_2 = 1,44 W_1 R_1$$

откуда

$$R_2 = 0,758 R_1.$$

Если при уменьшеніи разстоянія между серединами опоръ, какъ показано въ таблицѣ XXI, увеличивается  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)$  въ отношеніи  $\frac{2.2044}{1.9422} = 1,14$ , то изгибающій статическій моментъ  $M_2$ , соответствующій разстоянію  $L=70$ , будетъ меньше статическаго изгибающаго момента  $M_1$ , соответствующаго разстоянію  $L=77$  въ отношеніи  $M_2 : M_1 = 70 : 77$ .

Динамическіе моменты  $M'_2 = W_2 R'_2$  и  $M'_1 = W_2 R'_1$  оказываются  $M'_2 = 2,2044 M_2$  и  $M'_1 = 1,9422 M_1$ , слѣдовательно

$$W_2 R'_2 = 2.2044 M_2 \text{ и } W_2 R'_1 = 1.9422 M_1$$

отсюда

$$\frac{W_2 R'_2}{W_2 R'_1} = \frac{2.2044 M_2}{1.9422 M_1} = \frac{2.2044}{1.9422} \cdot \frac{70}{77} = 1.03$$

и

$$R'_2 = 1.03 R'_1$$

Это значитъ, что при увеличеніи коэффиціента балласта  $C$  съ 4,5 до 6 и при уменьшеніи разстоянія между серединами опоръ съ 77 сант. до 70 сант. напряженіе въ рельсахъ почти не увеличивается. Какъ бы то ни было, но, увеличивая коэффиціентъ балласта и желая сохранить напряженіе въ рельсахъ безъ измѣненія, надо или увеличивать моментъ инерціи рельса и, слѣдовательно, увеличивать вѣсъ рельса, или надо увеличивать число шпаль, поддерживающихъ рельсъ.

**б) Вліяніе коэффиціента балласта на пути неустойчивомъ и соотвѣтственное уменьшеніе поступательной скорости колеса.**

§ 10.

При слабыхъ балластахъ постоянство силы  $K$  можетъ ограничиваться нѣкоторыми небольшими величинами, если путь не подвергается очень частымъ исправленіямъ, иногда слишкомъ дорогимъ. Въ случаяхъ употребленія слабого балласта и невозможности поддерживать путь въ такомъ состояніи, когда балластъ остается способнымъ принимать значительно увеличенныя динамическія давленія, величина скорости поступательнаго движенія колеса должна быть ограничена тѣми предѣлами величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  которые соотвѣтствуютъ свойствамъ слабого балласта.

Эта скорость можетъ быть опредѣлена при помощи уравненія инженера I. A. Холодецкого,

Если наибольшее пониженіе рельса, допускаемое упругими сжатіями балласта обозначимъ  $y$ , то эта величина будетъ соотвѣтствовать  $\max y$  изъ уравненія

$$\max y = h + \frac{4ac}{kl} \left(1 - \cos \frac{kl}{2c}\right)$$

гдѣ  $a$  глубина впадины въ сант.;  $c$ —скорость поступательнаго движенія сант. въ секунду;  $l$ —длина впадины въ сант.;  $k = \sqrt{\frac{(1+m)g}{h}}$ ,

$m$ —отношеніе нагрузки колеса къ его вѣсу;  $g$ —ускореніе силы тяжести въ сантиметрахъ въ секунду;  $h$ —средняя величина погруженія точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, въ сантиметрахъ.

Рѣшеніе приведеннаго уравненія для опредѣленія допустимой скорости  $c$  можно получить попытками.

Примѣры: 1) Случай, приведенный въ динамической таблицѣ XXII. Путь уложенъ на нетвердомъ балластѣ съ коэффиціентомъ  $C$ , приблизительно равнымъ 3. Въ виду уменьшенія давленій шпалы на балластъ, уложены шпалы шириною 24 см., при разстояніи между ихъ серединами  $L=60$  сант. Рельсъ весьма прочный:  $T=2160$  сант. При этомъ  $A=2$  и средняя величина погруженія  $h=0,3363$  сант. Въ такомъ случаѣ при скорости  $V=75$  верстамъ, а при впадинѣ глубиною  $a=0,4$  сант. и длины  $l=60$  сант.  $y=0,9071$  сант. и  $\frac{y_i}{h_i} \max. = 2.69$ . При спокойномъ положеніи надъ шпалою колеса съ нагрузкою, производящаго давленіе въ

10000 килограмм., придется давление согласно указанию таб. 1, § 7, части 1, равное  $0,3540 \times 10000 = 3540$  килогр. или на 1 кв. придется 1,2.

Когда наибольшее отношение  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right) = 2.69$ , придется надъ шпалю, тогда давление возрастетъ до  $12 \times 2.69 = 3.23$  килогр. Если бы такое увеличение оказалось слишкомъ большимъ и было бы признано нежелательнымъ увеличивать его далѣе 3, то надо было бы ограничить скорость движенья такою величиною, при которой  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 2.69 \times \frac{3}{3.23} = 2.5$ .

Разрѣшая вышеприведенное уравненіе инж. Г. А. Холодецкого при  $h=0,3363$ ,  $a=0,4$ ,  $l=60$ ,  $k=152.75$ , найдемъ

при $v$ верстахъ въ часъ.	75	65	55	45	35	25
$c$ сант. въ секунду.	2223	1926	1630	1334	1037	741
$y_{\max.}$ сант. . . . .	0,9071	0,9081	0,8900	0,7919	0,5700	0,3368
$\frac{y_{\max.}}{h} =$ . . . . .	2,69	2,70	2,65	2,36	1,70	1
при $a = 0,2$ $y_{\max.}$ . . . . .	0,6217	0,6222	0,6131	0,5641	0,4531	0,3394
$\frac{y_{\max.}}{h} =$ . . . . .	1,85	1,85	1,82	1,68	1,35	1

Отсюда видно, что допускаемая скорость при  $a=0,4$  должна быть ограничена до величины между 45 и 55 верстами и ближе къ 55, чѣмъ къ 45 верстамъ въ часъ.

Въ случаѣ  $a=0,2$ , можно допускать скорость критическую  $V=75$  версть , а, слѣдовательно, и болѣе значительныя скорости

Въ случаѣ, указанномъ въ динамической таблицѣ XVII, когда ширина шпаль 24 сантим., длина  $0,92 \times 134$  сант. = 123 сант. и  $L=70$ ,  $A=1$ , при средней величинѣ  $h=0,3880$  сант. и  $k=142.206$  сант. оказывается  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 2,491$ . При статическомъ дѣйствіи колеса, стоящаго надъ шпалю, при грузѣ  $P=10000$ , давление на шпалу, согласно таб. 1, § 7, части 1, составитъ  $0,3950 \times 10000 = 3950$  килогр., или на 1 кв. сантим.—1.34 килогр., а при увеличеніи динамическаго давленія сравнительно со статическимъ въ 2,491 разъ полученное давленіе, т. е.  $1.34 \times 2491 = 3.34$ . Допуская опять только 3 килограмма, надо остановиться на такой скорости, при которой наибольшее отношеніе будетъ не 2,491, а лишь  $2,401 \times \frac{3}{3,34} = 2.24$ .

Разрѣшая вышеприведенное уравненіе, при  $h=0,3880$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$  и  $k=142,206$ , найдемъ

при $v$ верстъ въ часъ .	75	65	55	45	35	25
$c$ сант. въ секунду.	2223	1926	1630	1334	1035	741
$\max. y =$ . . . . .	0,9667	0,9613	0,9110	0,7806	0,5434	0,4283
$\max. \frac{y}{h} =$ . . . . .	2,491	2,477	2,347	2,012	1,426	1,104

Въ этомъ случаѣ допустимая скорость должна быть между 45 и 55 верстами и притомъ ближе къ 55, чѣмъ къ 45 верстамъ.

Въ случаѣ, указанномъ въ динамической таблицѣ X, когда  $C$  принято въ два раза больше, т. е.  $C=6$ , и когда  $A=0,5$  при  $L=70$  сант.  $J=1715$ , средняя величина  $h=0,2300$  и  $k=184,705$ , оказывается  $\frac{y_{\max.}}{h}=3,36$ . При статическомъ дѣйствіи колеса на рельсъ, надъ самою шпалою по таб. 1, § 7, ч. 1, давленіе будетъ  $0,4546 \times 10000=4546$ , или на кв. сант. 1.54 килогр. и наибольшее динамическое давленіе будетъ  $3.36 \times 1.54=5,17$ . Это давленіе не превосходитъ 6 килограмм. и, слѣдовательно, можетъ быть допущаема, какъ критическая скорость 75 верстъ въ часъ, такъ и большія скорости, не опасаясь неустойчиваго состоянія пути.

**Увеличеніе скорости хода поѣздовъ требуетъ или усиленія ремонта, или замѣны слабого балласта твердымъ.**

### § 11.

Приведенные примѣры приводятъ къ весьма важному заключенію относительно роста величины  $\frac{\max. y}{h}$  при увеличеніи поступательной скорости колеса. Ростъ скорости  $V$  отъ  $V=25$  верстамъ довольно быстро развивается до скорости  $V=45$  или 55 верстамъ а затѣмъ увеличивается весьма медленно.

Отсюда вытекаетъ чрезвычайно важное практическое заключеніе. *Желая увеличивать скорость хода поѣздовъ свыше 55 верстъ, надо или значительно усиливать ремонтъ пути, или замѣнять слабый балластъ твердымъ.*

**Вліяніє розстоянія между серединами опоръ на динамическое дѣй-  
ствіє колеса на рельсъ.**

§ 12.

Это вліяніє можно усмотрѣть въ динамическихъ таблицахъ XXIII, XXIV и XXV. Всѣ три таблицы вычислены для случая, когда  $k=15.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $J=1.715$  сантим. при нагрузкѣ  $P=10.000$  килогр. и  $V=75$  верстъ въ часъ. Впадины колеса приняты въ 0,2 и 0,4 сантим.; ихъ длины въ 61, 70 и 77 сантим. Разстоянія между серединами опоръ приняты равными 61, 70 и 77 сантим. Эти данныя доставили  $A=0,5$ ,  $A=\frac{2}{3}=0,67$  и  $A=1$ .

Для большей наглядности въ слѣдующей таблицѣ XXII приведены главные результаты вычисленія отношеній динамического дѣйствія къ статическому дѣйствию  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$ .

**Т а б л и ц а XXII.**

Номеръ динамич. таблицъ,	A	L сантим.	Длина впадины сантим.	Глубина впадины сантим.	
				0,2	0,2
				$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$ .	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$ .
XXIII	1	61	61 77	2,0836	2,6498 2,8010
XXIV	2/3	70	70 77	—	2,9122 2,8174
XXV	0,5	77	77	1,9422	2,5493

Эта таблица указываетъ, что отношеніе динамического дѣйствія къ статическому, при уменьшеніи разстоянія между опорами, нѣсколько увеличивается и при одинаковой длинѣ впадинъ 77 сантим., уменьшеніе разстоянія съ 77 до 61 сантиметра или почти на 26%,  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  увеличивается съ 2,5 до 2,8

на 10%. Такъ какъ при передачѣ давленія рельса на 4 шпалы и при уменьшеніи разстоянія между опорами, уменьшается статически изгибающій моментъ, пропорціонально величинѣ  $\frac{48A+7}{24A+10}L$ , то при уменьшеніи разстоянія между опорами съ 77 до 61 уменьшается динамически изгибающій моментъ, но съ одной стороны уменьшаясь въ зависимости отъ уменьшенія разстоянія  $L$ , онъ съ другой стороны увеличится въ зависимости отъ увеличенія величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$

Обозначая динамическіе моменты  $M_1$  при  $L=61$  и  $M_2$  при  $L=77$  найдемъ, что

$$M_1 : M_2 = \frac{48+7}{24+10} \times 61 \times 2,80 : \frac{48 \times 0,5+7}{24 \times 0,5+10} \times 77 \times 2,54 = \\ = 275,57 : 276,35 = 1 : 0,997$$

т. е. почти не измѣняется.

**Вліяніе момента инерціи рельса на величину динамическаго дѣйствія колеса на рельсъ.**

§ 13.

Къ уясненію этой зависимости могутъ служить динамическія таблицы VII, XVII и XXI. Всѣ онѣ вычислены для большихъ нагрузкахъ  $P=10.000$  килограммовъ и критической скорости  $V=75$  верстъ.

**Т а б л и ц а XXIИ.**

Но- меръ дина- мич. таб- лицы.	A	L	J	Глубина впадины въ сантиметрахъ.					
				0		0,2		0,4	
				$\frac{y_i}{y_i}$	$\frac{y_i}{y_i}$	$\frac{y_i}{y_i}$	$\frac{y_i}{y_i}$	$\frac{y_i}{y_i}$	$\frac{y_i}{y_i}$
				max.	min.	max.	min.	max.	min.
VII	0,2	80	512	1,1430	0,9033	1,5325	0,4685	2,0003	0,0989
XVII	1	70	1715	1,1090	1,—	1,7819	0,3851	2,3374	0
XXI	2	60	2160	1,1102	0,0076	1,8788	0,2503	2,5680	0

Изъ этой таблицы видно, что при увеличеніи момента инерціи  $J$  увеличивается и отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому, т. е.  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$ . Когда увеличенія моментовъ инерціи идутъ въ отношеніяхъ

$$512 : 1715 : 2160 = 1 : 3,35 : 4,22$$

тогда величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$  возростають въ отношеніяхъ при совершенно круглыхъ колесахъ, совсѣмъ незамѣтно;

при глубинѣ впадины 0,2 въ отношеніяхъ:

$$1,5325 : 1,7819 : 1,8788 = 1 : 1,16 : 1,22$$

при глубинѣ впадины 0,4 въ отношеніяхъ

$$2,0003 : 2,3374 : 2,5680 = 1 : 1,16 : 1,28.$$

Увеличеніе динамическаго дѣйствія, по сравненію со статическимъ, оказывается несравненно менѣе значительнымъ, чѣмъ увеличеніе величины момента инерціи. Сверхъ того, надо замѣтить, что возрастанія величинъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$ , приведенныхъ въ таблицѣ, вызывались не одними только измѣненіями момента инерціи  $J$ . Они находились еще въ зависимости отъ уменьшенія расстоянія между серединами опоръ.

Изъ таблицы XXI (текста) уже извѣстно, что уменьшеніе расстоянія между серединами опоръ приблизительно отъ 80 до 60 сантим. увеличивало отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому приблизительно на 10%. Слѣдовательно въ составахъ выше приведенныхъ отношеній, 1 : 1,16 : 1,28, около 10% вызывалось не величинами моментовъ инерціи, а расстояніями между серединами опоръ. Такимъ образомъ, на долю вліянія самихъ моментовъ инерціи остается какихъ-нибудь 10% или 20%, въ то время, когда величины этихъ моментовъ инерціи возрастали въ отношеніяхъ 1 : 3,33 : 4,22. Это значитъ, что хотя увеличеніе момента инерціи повышаетъ динамическое дѣйствіе колеса, но повышеніе это крайне ничтожно. Слѣдовательно, можно считать, что все вліяніе момента инерціи на увеличеніе прочности пути остается почти въ полной его мѣрѣ.

**Заключеніе относительно вліянія разныхъ элементовъ пути на отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому дѣйствию колеса на рельсъ.**

§ 14.

Изъ приведеннаго обзора вліяній разныхъ элементовъ пути:—коэффициента балласта, разстоянія между серединами опоръ и величины момента инерціи рельса—видно, что динамическое дѣйствіе колеса, по сравненію со статическимъ, увеличивается при увеличеніи коэффициента балласта; почти не измѣняется при уменьшеніи разстоянія между серединами опоръ и увеличивается при увеличеніи момента инерціи рельса. Удвоеніе коэффициента балласта можетъ повысить динамическое дѣйствіе приблизительно на 30%. Уменьшеніе разстоянія между серединами опоръ, какъ уже сказано, почти не измѣняетъ динамическое дѣйствіе; наконецъ, увеличеніе момента инерціи даже въ 4 раза, увеличиваетъ динамическое дѣйствіе приблизительно на 20%. Моменты сопротивленія рельсъ возрастаютъ почти въ той же соразмѣрности, въ какой возрастаютъ моменты инерціи, поэтому если при возрастаніи момента инерціи въ 4 раза, когда почти во столько же разъ увеличится и моментъ сопротивленія, динамическое дѣйствіе увеличится на 20%, то прочность рельса, благодаря увеличенію момента сопротивленія, увеличится въ  $\frac{4}{1.2}=3,3$  раза.

**Вліяніе неправильностей формы поверхностей катанія колеса или рельса на величину динамическаго дѣйствія колеса на рельсъ.**

§ 15.

Вліяніе этихъ неправильностей было уже указано при разсмотрѣніи таблицъ, составленныхъ въ предположеніи, что обертывающая положенія изогнутой оси рельса, при статическомъ дѣйствіи нагрузокъ, есть прямая линія. Такъ, между прочимъ, оказалось, что значительное удлиненіе впадины, при сохраненіи глубины ея, можетъ чувствительно, до 13%, увеличивать  $\left(\frac{M_i}{h_i}\right)_{\max}$ .

Для дальнѣйшей провѣрки были сдѣланы исчисленія, принимая во вниманіе кривизну линіи, обертывающей статическіе

изгибы продольной оси рельса. Вліяніе глубины впадины хорошо обнаруживается въ таблицѣ XVIII; но для большей наглядности составлена слѣдующая таблица XXIV, относящаяся къ одной критической скорости при разныхъ величинахъ  $A$ , характеризующихъ податливость верхняго строенія. Какъ выше было упомянуто, при  $A=0,2$  строеніе можно считать очень податливымъ, при  $A=1$  верхнее строеніе можно считать средней податливости и при  $A=2$ —весьма твердымъ. Обозначая величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)$  макс., относящіяся къ совершенно правильнымъ колесамъ,  $n_0$ ; къ колесамъ со впадиною глубиной 0,2 сантим., обозначая  $n_{0,2}$  и  $n_{0,4}$  къ колесамъ со впадиною глубиной 0,4 сантим., получимъ, принимая  $n_0=1$ , слѣдующую таблицу:

Т а б л и ц а XXIV.

Номеръ динамич. табл.	$P$ килогр.	$A$	$V$ версть въ часъ.	$n_0$	$n_{0,2}$	$n_{0,4}$
VII	10.000	0,2	75	1	1,34	1,75
XIII	10.000	1	75	1	1,51	2,10
XVII	10.000	2	75	1	1,69	2,31

Въ этой таблицѣ видно, что динамическое дѣйствіе, сравнительно со статическимъ, значительно увеличивается по мѣрѣ уклоненія формы поверхности катанія колеса отъ совершенно правильной круглой формы и также очень чувствительно возрастаетъ при увеличеніи жесткости верхняго строенія.

Числа таблицы относятся къ неправильностямъ, принятымъ при составленіи динамическихъ таблицъ и должны быть замѣняемы другими числами, сообразно со свойствами неправильныхъ поверхностей колесъ, обращеніе которыхъ должно быть допущено.

При сохраненіи глубины впадины и при небольшомъ увеличеніи ея длины, съ болѣе плавными переходами, динамическое дѣйствіе ослабляется. При укороченіи длины впадины, или при увеличеніи ея крутизны, динамическое дѣйствіе колеса усиливается.

Это свойство можно замѣтить, рассматривая динамическія таблицы, XXIII и XXVI. При вычисленіи динамической таблицы XXIII были приняты въ расчетъ впадины одной и той же глубины 0,4 сантим., но въ одномъ случаѣ впадина имѣла глубину въ 0,4 сантим., углубляясь на 0,08 сантим., на каждые 6,1 сантим., въ другомъ случаѣ при той же глубинѣ въ 0,4 сантим., длина была 47 сантим. и углубленіе измѣнялось на 0,667 на каждые 6,1 сантим. Въ первомъ случаѣ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 2.7734$ , а во второмъ случаѣ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 2.534$ . При вычисленіи динамической таблицы XXIV глубина впадины была 0,2 сантим. но измѣненіе глубины въ одномъ случаѣ было 0,04 сантим., на 6 сантим. и въ другомъ 0,0333 сантим. на 6 сантим. Въ первомъ случаѣ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 1.8903$  а во второмъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = 1.81116$ . Примѣръ, приведенный въ динамической таб. XXIII, представляетъ различіе приблизительно въ 9%, а примѣръ динамической таблицы XXVI даетъ различіе въ 5%. Оба различія и особенно последнее очень незначительны.

**Вліяніе совокупности элементовъ пути выражаемой числомъ  $A$  на отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому.**

§ 16.

Вліяніе величины  $A$  на отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому, когда величина  $A$  мѣняется главнымъ образомъ вслѣдствіе измѣненія момента инерціи  $J$  особенно ясно выразилась при скорости близкой къ критической и при впадинѣ глубиною въ 0,4 сантиметра.

При такихъ обстоятельствахъ  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$ , т. е. наибольшія отношенія динамическаго дѣйствія къ статическому соотвѣтственно величинамъ  $A$ . (см. таб. XVIII)

	$A = 0,2$	$0,5$	$1$	$2$	
или	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.}$	2,00	2,14	2,34	2,56

Интерполируя эти величины можно съ достаточно точностью (съ ошибками менѣе 0,04) составить слѣдующую таблицу XXV:

Т а б л и ц а XXV.

A=	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$\left(\frac{y_i}{P_i}\right)_{\max.}$	2	2,03	2,06	2,09	2,12	2,16	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	2,40	2,44	2,47	2,50	2,53	2,56

**Напряженія въ рельсахъ при движеніи колесъ.**

§ 17.

Вопросъ о напряженіи въ рельсахъ, при движеніи по нимъ колесъ подвижного состава, относится къ числу очень важныхъ техническихъ вопросовъ. Съ точки зрѣнія безопасности движенія по желѣзнымъ дорогамъ это напряженіе не должно переходить за тотъ предѣлъ, послѣ котораго можно опасаться за прочность рельсъ. Хотя по сломавшимся рельсамъ поѣзда проходятъ вполнѣ благополучно въ огромномъ числѣ случаевъ поломки рельса, но вполнѣ желательно, по возможности, уменьшать число и рѣдкихъ неблагоприятныхъ случайностей. Останавливаясь на экономической сторонѣ вопроса слѣдуетъ имѣть въ виду громадность протяженія рельсовыхъ путей съ вѣсомъ рельсовъ на міровыхъ путяхъ едва ли не болѣе 5 миллиардовъ пуд. Небольшое увеличеніе вѣса рельсъ, вызываемое излишнею предосторожностью, по отношенію ихъ прочности, въ какой-нибудь 1 фунтъ на погонный футъ, напрасно увеличивая вѣсъ, на 2—3% повыситъ общій вѣсъ болѣе чѣмъ на 100 милліоновъ пудовъ. Ежегодный міровой расходъ на ремонтъ этихъ рельсъ потребуетъ нѣсколькихъ лишнихъ милліоновъ пудовъ. Эти всѣмъ понятныя соображенія уже давно побуждаютъ инженеровъ разныхъ странъ отыскивать способы опредѣленія напряженій въ рельсахъ.

Колеса подвижного состава, стояція или катящіяся, производятъ на рельсы своимъ грузомъ и своею силою инерціи давленія въ мѣстахъ ихъ соприкосновенія, а затѣмъ и изгибы рельса, оставляя ось рельса въ прежней вертикальной плоскости. Катящіяся колеса съ неправильною поверхностью катанія производятъ давленіе на рельсы значительно большія, чѣмъ колеса стояція. Ростъ

допускаемаго давленія стоящихъ колесъ на рельсъ едва ли и теперь прекратился, хотя при опытахъ Дудлея встрѣчались паровозныя ведущія колеса, производившія статическое давленіе 13000 килограмовъ (см. тал. XIV и XV).

Давленія на единицу поверхности прикосновенія колеса съ рельсомъ измѣняются въ очень широкихъ предѣлахъ<sup>1)</sup>. Часто повторяющіяся давленія колесъ на рельсы, далеко переходя за предѣлы упругаго сопротивленія стали, производятъ вытекание металла, образуя на боковыхъ поверхностяхъ рельсовыхъ головокъ и колесныхъ шинъ значительные выступы. Появленіе этихъ выступовъ не вызываетъ сомнѣній въ прочности рельсъ или колесныхъ шинъ. Безопасное движеніе колесъ, подвергавшихся наблюденіямъ при опытахъ Дудлея, удостовѣряетъ, что давленіе, достигающее при статическомъ дѣйствіи колесъ, до 13000 килограмовъ можетъ быть допускаемо, пока это давленіе не вызываетъ другихъ вредныхъ напряженій, кромѣ тѣхъ, которыя возникаютъ при вытеканіи металла. Сплющиваніе рельсовыхъ головокъ, производимое большими давленіями колесъ, по американскимъ наблюденіямъ<sup>2)</sup>, составляетъ такое поврежденіе рельсъ, которое появляется не часто. Изъ общаго числа рельсъ 34.489.084 штуки въ теченіе года, изъ за поврежденія головокъ, было снято 20.021 рельсъ или всего менѣе 0,06%. Изгибы рельсъ, вызываемые статическими и динамическими давленіями колесъ, вызываютъ другія напряженія въ рельсахъ и особенно въ ихъ подошвахъ.

---

<sup>1)</sup> 8-колесный паровозъ серіи 3 № 235 Николаевской дороги въ 1878 году былъ мною поднятъ въ мастерской Александровскаго завода. Рельсы и колеса были очищены отъ постороннихъ тѣлъ и подъ колесами на рельсы были положены оловянные листки изъ употребляемыхъ на обертываніе чая. Послѣ опусканія паровоза всѣми 8 колесами по возможности одновременно, онъ простоялъ на листкахъ нѣсколько минутъ. Затѣмъ паровозъ былъ поднятъ. Нѣкоторые листки довольно легко отдѣлились отъ рельсъ, другіе напротивъ не отставали и при стѣвленіи получились отверстія въ листкахъ нѣсколько увеличенныя. Такой опытъ былъ повторенъ еще разъ. Давленія, производившіяся колесами на рельсы, были опредѣлены всѣми Экгардта. Результаты двухъ взвѣшиваній были въ шести случаяхъ менѣе 3% и въ двухъ 6% и 8%. Раздѣляя величины нагрузокъ на площади оставшихся въ листкахъ отверстій, показали, что давленіе на кв. дюймъ было [отъ 1580 до 9450 пудовъ, или отъ 400 до 24.000 килогр. на кв. сантим. Первое давленіе не выше предѣла упругости стали, а второе почти въ 6 разъ болѣе и должно производить вытекание металла.

<sup>2)</sup> Bulletin de l'Assoc. du Congres int. des chemins de fer-Vol. XXVII № 10-1913. Oct. page 900 Les avaries de rails et leurs causes par M. N. Wickhorst.

### Теоретическое опредѣленіе напряженій.

#### § 18.

Для разъясненія вопроса о напряженіяхъ въ рельсахъ вызываемыхъ изгибами ихъ, примѣнялись теоретическія соображенія и опытные изслѣдованія.

Теоретическія соображенія строились на очень шаткихъ основаніяхъ, или совершенно не принимая въ расчетъ динамическаго дѣйствія самихъ колесъ, или ограничивались прибавленіемъ къ статическому давленію колеса центробѣжной силы связанныхъ съ колесомъ частей, въ родѣ противовѣсовъ и шатуновъ и еще той центробѣжной силы самого колеса, которая является вслѣдствіе движенія его по изогнутому рельсу, принимая притомъ, кривизну рельса въ средней точкѣ пролета между шпалами, когда стоящее колесо, касается рельса въ этой именно средней точкѣ. Никакія силы [инерціи колеса, зависящія отъ неправильной формы колесныхъ шинъ или рельса въ расчетъ не принимались.

При современномъ состояніи теоріи вопроса объ изгибахъ оси рельса въ вертикальной плоскости, несмотря на включеніе въ расчетъ всѣхъ обстоятельствъ, опредѣляющихъ этотъ изгибъ, нельзя достигать такихъ теоретическихъ отвѣтовъ, какіе получаютъ при изученіи напряженій въ балкахъ, подвергающихся дѣйствію различныхъ силъ, проявляющихся въ сооруженияхъ. Одна изъ главныхъ причинъ, не допускающихъ вполне точныхъ отвѣтовъ, заключается въ непрестанной измѣнчивости формы поверхностей катанія колесъ и рельса. Но въ настоящее время есть указанное далѣе средство опредѣлить величины возможныхъ напряженій въ рельсахъ, соответствующія допускаемымъ неправильностямъ и заранѣе опредѣленнымъ размѣрамъ и свойствамъ какъ верхняго строенія, такъ и двигающагося по этому строенію подвижнаго состава. Найдя самую большія изъ возможныхъ напряженій при прогибахъ продольной оси рельса въ вертикальной плоскости, можно будетъ опредѣлить поперечные размѣры рельса обезпечивающіе рельсъ отъ изломовъ силами дѣйствующими въ вертикальной плоскости.

Для окончательнаго опредѣленія поперечныхъ размѣровъ рельса надо будетъ еще надлежащимъ образомъ принять во вниманіе силы горизонтальныя, вызываемыя съ одной стороны извилистостью движенія колесъ и съ другой условіями передви-

женія колесъ по кривымъ частямъ пути. Попытки теоретическаго опредѣленія горизонтальныхъ силъ, вызываемыхъ этими двумя движеніями, находятся въ зачаточномъ состояніи и не даютъ еще никакихъ точно опредѣленныхъ указаній.

### Опытное опредѣленіе напряженій въ рельсахъ.

#### § 19.

Опыты и наблюденія, прямо опредѣляющіе напряженія въ рельсахъ, были сдѣланы американскимъ инженеромъ Дудлеемъ при посредствѣ остроумно построеннаго имъ прибора, названнаго стремматографомъ. Идея прибора состояла въ томъ, чтобы измѣрять измѣненія длины продольныхъ фибръ на нижней поверхности рельсовой подошвы.

Съ этой цѣлью къ подошвѣ рельса, по направленію ея длины, прикрѣплялась однимъ концомъ пластинка. На другомъ концѣ пластинки помѣщалось остріе, соприкасавшееся съ бронзовой линейкой, подвижной въ направленіи, перпендикулярномъ къ продольному направленію рельса. При движеніи линейки край ея остается въ неизмѣнномъ разстояніи отъ нѣкоторой точки на подошвѣ рельса. При изгибахъ рельса, когда подошва ея удлиняется, эта послѣдняя точка отдаляется отъ точки прикрѣпленія пластинки, а когда подошва укорачивается та же точка приближается къ точкѣ прикрѣпленія пластинки. Продвигая линейку при свободномъ рельсѣ, остріе чертитъ на линейкѣ прямую линію, удаленную отъ точки прикрѣпленія пластинки на все разстояніе отъ острія до точки прикрѣпленія пластинки. При изгибѣ рельса, когда подошва его удлинится или укоротится, линейка или удалится отъ точки прикрѣпленія пластинки или приблизится къ ней на всю величину измѣненія длины фибры на рельсовой подошвѣ, заключенной между точкою прикрѣпленія пластинки и точкою, опредѣляющею положеніе линейки.

Движеніе линейки, при изогнутомъ состояніи рельса, заставитъ остріе пластинки чертить на линейкѣ линію, не совпадающую съ упомянутой выше прямой.

Разстояніе  $\lambda$ , между новою линією и прямою, будетъ равно удлиненію или укороченію длины  $l$  фибры между точкою прикрѣпленія пластинки и точкою, направляющею край двигающейся линейки.

**Определение наибольшего напряжения при 4 поддерживающих  
рельсѣ опорахъ, при помощи измѣренія удлиненія фибры на подошвѣ  
рельса.**

§ 20.

Если бы рельсѣ получалъ круговой изгибъ, удлиненія частей фибры на подошвѣ были бы вездѣ одинаковы подобно тому, какъ бываетъ при растяженіи бруска съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ, то  $R$  напряжение въ фибрѣ, при коэффициентѣ упругости  $E$ , опредѣлилось бы уравненіемъ:

$$R = E \frac{\lambda}{l}.$$

Но при обыкновенныхъ изгибахъ рельса, напряжения въ фибрѣ, въ разныхъ ея точкахъ, будутъ не одинаковы. Величина напряжения въ каждой данной точкѣ опредѣляется моментомъ изгибающихъ силъ, приложенныхъ къ рельсу, взятымъ относительно этой точки.

Если моментъ такихъ силъ, взятый относительно точки, удаленной на разстояніе  $x$  отъ середины пролета между опорами, обозначимъ  $M_x$  и напряжение въ фибрѣ въ этой точкѣ обозначимъ  $R_x$ , то при моментѣ сопротивленія рельса  $W$ , удовлетворяется уравненіе:

$$W R_x = M_x,$$

Величины  $M_x$ , по мѣрѣ увеличенія  $x$  отъ  $o$ , уменьшаются; слѣдовательно уменьшаются и величины  $R_x$ . Общее удлиненіе  $\lambda$  фибры въ рельсовой подошвѣ, какъ результатъ частныхъ удлинений, при напряженияхъ достигающихъ наибольшей величины въ одной только точкѣ должно быть менѣе  $\lambda_0$ , которое было бы при повсемѣстномъ проявленіи наибольшаго напряжения и которое удовлетворило бы уравненію:

$$E \frac{\lambda_0}{l} = M_0,$$

гдѣ  $M_0$  есть моментъ, соотвѣтствующій средней точкѣ пролета и имѣющій наибольшую величину,

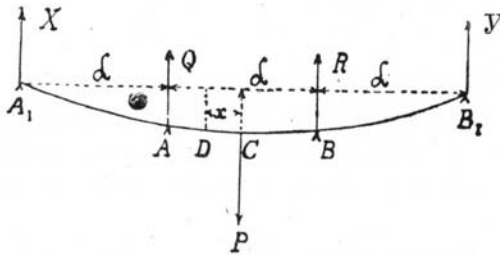
Для опредѣленія  $M_0$  необходимо опредѣлить  $\lambda_0$ .

Эта величина прямымъ наблюдениемъ не можетъ быть опредѣлена и опредѣленіе ее можетъ быть достигнуто только установлениемъ математической связи между ею и величиною  $\lambda$ , наблюдаемой по стремматографу.

Для уясненія математической зависимости  $\lambda$  отъ формъ изгиба рельса, эта форма должна быть тѣмъ или другимъ способомъ задана.

Однимъ изъ простѣйшихъ видовъ этого изгиба и притомъ, по всему вѣроятію, однимъ изъ очень близкихъ къ дѣйствительному изгибу, можно считать такой, который получается при изгибѣ прямого бруса, поддерживаемаго четырьмя равно-упругими и равно-отстоящими опорами, какъ показано на фиг. 4.

Фиг. 4.



Выше (см. стр. 47) была указана зависимость силъ  $X$  и  $R$  отъ  $P$  и отъ величинъ  $A$ . Сумма моментовъ силъ  $X$  и  $Q$ , относительно средней точки пролета  $C$ , выражается формулою:

$$1,5 L X + 0,5 L Q.$$

Въ то же время, сумма моментовъ тѣхъ же силъ  $X$  и  $Q$ , относительно точки  $D$ , находящейся въ разстояніи  $x$  влево отъ точки  $A$ , опредѣляется формулою:

$$M_x = \left(1,5 - \frac{x}{L}\right) L X + \left(0,5 - \frac{x}{L}\right) L Q = 1,5 L X + 0,5 L Q - (X + Q) x$$

Извѣстно, что наибольшій изгибающій моментъ (стр. 47)

$$1,5 L X + 0,5 L Q = \frac{48 A + 7}{24 A + 10} \frac{P L}{4}$$

и

$$X + Q = 0,5 P.$$

Слѣдовательно, обозначая какъ и прежде

$$\frac{48 A + 7}{24 A + 10} = n$$

найдемъ, что

$$M_x = \left(n - \frac{2x}{L}\right) \frac{P L}{4}.$$

Вслѣдствіе симметрическаго расположенія всѣхъ силъ относительно средней точки пролета,  $C$ , моментъ изгибающихъ силъ, относительно точки лежащей правѣе  $C$  на разстояніи  $x$ , выразится также, какъ только что указано.

Моментъ изгибающихъ силъ относительно точки  $C$ , какъ извѣстно будетъ:

$$M_0 = n \frac{PL}{4}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{M_x}{M_0} = \left(1 - \frac{2x}{nL}\right)$$

или

$$M_x = M_0 \left(1 - \frac{2x}{nL}\right) \dots \dots \dots (1)$$

Это и есть искомое уравненіе, опредѣляющее  $M_x$ , въ зависимости отъ  $x$ .

Оно даетъ возможность выразить  $R_x$ , напряженіе въ точкѣ  $x$ , въ зависимости отъ  $R_0$ , относящагося къ точкѣ  $C$  и отъ  $x$ .

Извѣстно, что при моментѣ сопротивленія  $W$  поперечнаго сѣченія рельса могутъ быть написаны уравненія:

$$W R_0 = M_0 \text{ и } W R_x = M_x$$

и, слѣдовательно, послѣ уравненія (1) можно написать, что

$$R_x = R_0 \left(1 - \frac{2x}{nL}\right).$$

Для опредѣленія связи между  $\lambda$ , опредѣляемомъ стрематографомъ и  $\lambda_0$  соответствующимъ  $R_0$ , при длинѣ фибры  $l$ , надо замѣтить, что если  $\lambda_x$  выразить дѣйствительное удлиненіе фибры длиною  $x$ , то удлиненіе фибры длиною  $x + dx$  выразить формулою:

$$\lambda_x + \frac{d\lambda_x}{dx} dx + \frac{1}{2} d^2 \lambda_x + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 \lambda_x + \dots$$

и удлиненіе элемента фибры длиною  $dx$  будетъ:

$$\frac{d\lambda_x}{dx} dx + \frac{1}{2} d^2 \lambda_x + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 \lambda_x + \dots$$

напряжение въ фибрѣ въ концѣ этого элемента будетъ:

$$E \frac{\frac{d\lambda_x}{dx} dx + \frac{1}{2} d^2\lambda_x}{dx} = E \frac{d\lambda_x}{dx} + E \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} dx + \dots$$

Съ другой стороны, если  $R_x$  выражаетъ напряжение въ фибрѣ, въ точкѣ  $D$ , удаленной на  $x$  отъ точки  $C$ , то напряжение въ концѣ фибры длиною  $x + dx$  будетъ:

$$R_x + \frac{dR_x}{dx} dx + \frac{1}{2} d^2R_x + \dots$$

Такимъ образомъ для опредѣленія напряжения въ концѣ фибры, длиною  $x + dx$ , получено два выраженія, которыя и приводятъ къ уравненію:

$$E \frac{d\lambda_x}{dx} + E \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} dx + \dots = R_x + \frac{dR_x}{dx} dx + \dots$$

При равенствѣ двухъ рядовъ, содержащихъ члены разныхъ порядковъ малости, члены одинаковыхъ порядковъ должны быть взаимно равны. Это свойство рядовъ приводитъ къ уравненію:

$$E \frac{d\lambda_x}{dx} = R_x$$

или къ уравненію

$$E \frac{d\lambda_x}{dx} = R_0 \left(1 - \frac{2x}{nL}\right), \quad d\lambda_x = \frac{R_0}{E} \left(1 - \frac{2x}{nL}\right) dx .$$

Интегрируя это уравненіе въ предѣлахъ по  $x$  отъ  $x=0$  до  $x=l_1$ , чему соотвѣтствуютъ предѣлы удлиненія  $\lambda=0$  и  $\lambda=\lambda_1$  найдемъ

$$\lambda_1 = \frac{R_0}{E} \left(1 - \frac{l_1}{nL}\right) l_1$$

Для другой части той же подошвенной фибры, отъ точки  $C$  вправо, при полной длинѣ фибры до изгиба  $l_2$  и при полномъ удлиненіи  $\lambda_2$ , найдется уравненіе

$$\lambda_2 = \frac{R_0}{E} \left(1 - \frac{l_2}{nL}\right) l_2$$

Полное удлиненіе всей фибры

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R_0}{E} \left(l - \frac{l_1^2 + l_2^2}{nL}\right)$$

Если точка  $C$  будетъ дѣлить всю фибру на двѣ равной длины части, то

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$$

и

$$\lambda = \frac{R_1}{E} \left( 1 - \frac{l}{2nL} \right) l.$$

Такъ какъ удлинёніе, соответствующее равномерному напряженію фибры  $R_0$ , при длинѣ фибры  $l$  обозначено  $\lambda_0$ , то

$$E \frac{\lambda_0}{L} = K_0$$

и

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 - \frac{l}{2nL} \right)$$

или искомое  $\lambda_0$ , при указанной стремматографомъ удлинёніи  $\lambda$ , опредѣлится уравненіемъ

$$\lambda_0 = \lambda \frac{1}{1 - \frac{l}{2nL}}$$

Наибольшес напряжение въ фибрѣ

$$R_0 = E \frac{\lambda_0}{l} = E \frac{\lambda}{l} \frac{1}{1 - \frac{l}{2nL}}$$

опредѣляемое по удлинёнію, показанному стремматографомъ напряжено

$$E \frac{\lambda}{l}$$

будетъ меньше дѣйствительнаго въ отношеніи

$$1 : \left( 1 - \frac{l}{2nL} \right)$$

Величины этого отношенія зависятъ отъ отношенія  $\frac{l}{L}$  и отъ  $n$ , зависящаго въ свою очередь отъ величины  $A$ .

Примѣняя эти формулы къ опытамъ Дудлея надо вставить величины, приведенныя въ слѣдующей таблицѣ.

**Т а б л и ц а.**

<i>A</i>	<i>n</i>	<i>L</i>	<i>l</i>	$1 - \frac{l}{2nL}$
1,05	1,6307	57,1	12,5	1,072
1,66	1,7392	57,1	12,5	1,067
1,41	1,7035	50,8	12,5	1,078
2,32	1,8020	50,3	12,5	1,074
0,65	1,4922	57,1	12,5	1,072
1,04	1,6281	57,1	12,5	1,072
0,88	1,5822	50,8	12,5	1,084
1,45	1,7027	50,3	12,5	1,079

Изъ этой таблицы видно, что для правильного опредѣленія напряженія въ нижней фибрѣ рельсовой подошвы, слѣдуетъ увеличивать отношеніе, опредѣленнаго стремматографомъ, удлиненія къ длинѣ фибры заключенной между точкою закрѣпленія пластинки прибора и точкою направляющею движеніе линейки. Увеличеніе, въ зависимости отъ условій устройства пути, выраженныхъ величинами *A* и *L*, и отъ длины *l*, составляетъ около 7 или 8 процентовъ величинѣ, опредѣленной по показанію прибора.

**Приближенное опредѣленіе наибольшаго напряженія при 4 поддерживающихъ рельсъ опорахъ имѣя удлиненіе фибры на подошвѣ рельса.**

§ 21.

Почти та же величина поправки опредѣляется другимъ, болѣе простымъ способомъ.

Длина *E* фибры на подошвѣ рельса, ограниченной приборомъ, составляла приблизительно 0,2 разстоянія *L* между срединами оноръ.

По таблицѣ 1, при  $A=1,4$  и  $\varepsilon=0,5$ , когда нагрузка лежитъ посрединѣ пролета,  $X=0,1544P$  и  $Q=0,3456P$ .

Слѣдовательно, моментъ изгибающихъ силъ относительно средней точки опредѣляется формулою:

$$1,5 \times 0,1544LP + 0,5 \times 0,3456LP = 0,4034LP$$

моментъ этихъ же силъ, относительно точки лѣвѣе середины, почти у конца фибры, на разстояніи  $0,1 L$  выражается величиною

$$1,4 \times 0,1544LP + 0,4 \times 0,3456LP = 0,3544LP.$$

Слѣдовательно, средняя величина моментовъ, изгибающихъ рельсъ, на протяженіи разсматриваемой фибры, будетъ приблизительно средняя арифметическая между двумя приведенными величинами, или  $0,3789LP$ . Этой средней величинѣ момента будетъ соответствовать и средняя величина напряженія въ фибрѣ, которая и вызоветъ удлиненіе фибры. Дѣйствительное удлиненіе, соответствующее наибольшему моменту, будетъ больше средняго въ отношеніи приблизительно  $0,4034 : 0,3789 = 1,06 : 1$ .

**Опредѣленіе наибольшаго напряженія въ подошвѣ рельса при 6 поддерживающихъ рельсъ опорахъ, имѣя удлиненіе фибры на подошвѣ рельса.**

§ 22.

Въ случаяхъ, когда рельсъ поддерживается шестью равно упругими и равно-отстоящими опорами, и когда нагрузка помѣщается посрединѣ средняго пролета, моментъ силъ, расположенныхъ справа или слѣва отъ середины, взятыхъ относительно точки, удаленной отъ середины на разстояніе  $x$ , будетъ:

$$M_x = \left(2,5 - \frac{x}{L}\right) L Y' + \left(1,5 - \frac{x}{L}\right) L Y + \left(0,5 - \frac{x}{L}\right) L R$$

или

$$M_x = [2,5 Y' + 1,5 Y + 0,5 R] L - (Y' + Y + R) x$$

или еще

$$M_x = 4 \left[ 2,5 \frac{Y'}{P} + 1,5 \frac{Y}{P} + 0,5 \frac{R}{P} \right] \frac{LP}{4} - 4 \left[ \frac{Y'}{P} + \frac{Y}{P} + \frac{R}{P} \right] \frac{x}{L} \frac{LP}{4}$$

Обозначая

$$4 \left[ 2,5 \frac{Y'}{P} + 1,5 \frac{Y}{P} + 0,5 \frac{K}{P} \right] = m$$

и имѣя въ виду, что

$$\frac{Y'}{P} + \frac{Y}{P} + \frac{Q}{P} = 0,5$$

получимъ уравненіе

$$M_x = \left[ m - \frac{2x}{L} \right] \frac{LP}{4}$$

Это уравненіе по виду своему отличается отъ приведеннаго выше только тѣмъ, что вмѣсто  $n$  стоитъ  $m$ , которое находится въ болѣе сложной зависимости отъ  $A$ , чѣмъ  $n$ . Но величину  $m$  можно опредѣлять, пользуясь таблицами VIII, IX, X или имъ подобными.  $\lambda$ , величина дѣйствительнаго указываемаго удлиненія фибры, опредѣлится попережнему

$$\lambda = \frac{R_0}{E} \left( 1 - \frac{l}{2mL} \right) l$$

$R_0$ ,—наибольшее напряженіе въ срединѣ фибры, опредѣлится уравненіемъ и дѣйствительное наибольшее напряженіе  $R_0$  опредѣлится уравненіемъ

$$R_0 = E \frac{\lambda}{l} \frac{1}{1 - \frac{l}{2mL}}$$

Величины коэффиціента

$$\frac{1}{1 - \frac{l}{2mL}}$$

при

$$l = 0,2L,$$

при величинахъ  $A = 1$ ,  $A = 1,5$  и  $A = 2$  показаны въ слѣдующей таблицѣ.

**Т а б л и ц а.**

$A$	$m$	$\frac{1}{1 - \frac{l}{2mL}}$
1	1,5524	1,069
1,5	1,8839	1,056
2	1,9045	1,055

Изъ этой таблицы видно, что даже при довольно большихъ величинахъ  $A$ , опредѣленное по стремматографу, какъ наибольшее, напряженіе должно быть увеличено приблизительно на 6, на 7 процентовъ.

Такъ какъ поправки, соотвѣтствующія четыремъ и шести опорамъ, мало между собою различаются, то которое бы изъ предположеній ни было принято, можно сказать, что наибольшія напряженія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и наибольшіе изгибающіе моменты силъ, опредѣленные Дудлеемъ и приведенные безъ измѣненія въ таблицахъ XIV и XV, преуменьшены на 6, на 7 процентовъ.

**Увеличеніе напряженія въ рельсахъ отъ неправильностей поверхностей катанія, по даннымъ Дудлея.**

§ 23.

Несмотря на эту неточность, легко поправимую, данныя, добытыя опытами Дудлея, представляются чрезвычайно цѣнными. Они даютъ очень уже близкія къ дѣйствительности напряженія въ рельсахъ, при движеніи колесъ, находящихся въ очень хорошемъ состояніи.

Вмѣстѣ съ тѣмъ эти же данныя, какъ видно въ таблицѣ XIV, относящіяся къ опытамъ, произведеннымъ при скорости 64,4 километра въ часъ, показываютъ и очень значительное вліяніе неправильностей поверхностей катанія.

Напряженіе въ подошвѣ рельса, вызванное тендернымъ колесомъ со статическою нагрузкою 6250 килограммъ, оказалось 15,61 килограмма на кв. миллиметръ; а среднее колесо вагонной телѣжки, со статическою нагрузкою всего въ 3340 килограммовъ, вызвало въ подошвѣ рельса напряженіе 16,11 килограмма на квадратный миллиметръ. Сопоставленіе этихъ чиселъ съ напряженіемъ въ подошвѣ рельса, обнаруженнымъ при опытѣ, происходившемъ во время движенія паровоза со скоростью 24 километра въ часъ, подъ заднимъ ведущимъ колесомъ, со статическою нагрузкою въ 13090 килограммовъ, оказавшимся 16,11 килограмма на кв. миллиметръ, не оставляетъ никакихъ сомнѣній въ полной необходимости принимать въ расчетъ неправильности въ формахъ поверхностей катанія колесныхъ шинъ.

Разсматривая таблицу XIV или XV можно предполагать, что напряженія болѣе значительныя, чѣмъ указанныя въ табли-

цахъ, являются въ видѣ рѣдкихъ исключеній, но это предположеніе устраняется указаніемъ Дудлея, упоминающимъ, что напряженія въ фибрахъ болѣе значительныя, чѣмъ показано въ его таблицахъ, бываютъ часто <sup>1)</sup>).

Нѣкоторымъ указаніемъ размѣра этихъ увеличеній служить указаніе, что подъ переднимъ ведущимъ колесомъ, со статической нагрузкою въ 10.000 килограммовъ, при опытѣ со скоростью 77,2 километра въ часъ, напряженіе въ подошвѣ рельса опредѣлилось въ 26,07 килограмма на кв. миллиметръ, тогда какъ при опытѣ съ такимъ же паровозомъ, шедшимъ со скоростью 70,8 километра въ часъ, было найдено напряженіе въ 18,93 килогр.

Это увеличеніе уже даетъ превышеніе почти на 40%, но, имѣя въ виду, что сравненіе результатовъ наблюденій Дудлея съ результатами, приведенными въ динамическихъ таблицахъ, указало, что, по всему вѣроятію, неправильности не всѣхъ колесныхъ шинъ его паровозовъ не заключали въ себѣ впадинъ болѣе глубокихъ чѣмъ въ 0,2 сантиметра.

**Различіе напряженій въ подошвѣ рельса отъ растяженія и отъ сжатія, по даннымъ Дудлея.**

§ 24.

Всѣ упомянутыя выше напряженія въ рельсахъ, опредѣленные опытами Дудлея, зависѣли отъ растяженія подошвы рельса отъ изгиба внизъ рельса подъ динамическимъ давленіемъ колеса; но Дудлей опредѣлялъ не только растяженія подошвы, но и сжатія ея въ частяхъ рельса, изогнутаго вверхъ, въ частяхъ, помѣщающихся между колесами.

Предѣльныя величины напряженій отъ сжатія при опытахъ съ разными скоростями, выраженные въ килограммахъ на квадратный миллиметръ, приведены въ слѣдующей таблицѣ XXVI.

---

<sup>1)</sup> Des tensions dans les fibres plus grandes que celles qui ont été enregistrées sont fréquentes. Dudley Essais effectués au moyen du stremmatographe. Bul. de la com Inern. du Congrès des chemins de fer Vol xviii. № 12 Decembre 1904. page 2079.

**Т а б л и ц а XXVI.**

Скорости въ часъ кило- метръ.	Напряженіе отъ сжатія въ килогр. на кв. мил.	
	отъ	до
22,5	0,83	3,32
24	0,83	2,43
52	0,99	5,14
64,4	0,17	3,15
67,6	0,19	2,99
70,8	0,17	2,99

Наибольшія напряженія отъ растяженія, наблюдавшіяся Дудлеемъ (безъ выше указанныхъ поправокъ и съ поправками) въ килограммахъ на квадратный миллиметръ приведены въ слѣдующей таблицѣ XXVII.

**Т а б л и ц а XXVII.**

Скорость километр. въ часъ.	Напряженіе отъ растяженія килограм. на кв. миллим.		Обозначеніе колеса.
	Безъ поправки.	Съ поправкой 8%	
22,5	6,80	7,34	Перед. паров. тел.
	8,79	9,49	Перед. ведущее.
	11,28	12,18	Второе ведущее.
	11,11	12,00	Третье ведущее.
	7,63	8,24	Перед. вагон. тел.
24	15,09	16,30	Перед. ведущее.
	7,79	8,41	Заднее поддер. паровозъ.
	7,13	7,70	Перед. въ задней тенд. тел.
52	8,95	9,67	Перед. паровоз. тел. и пер. ведущее.
	14,57	15,74	Заднее ведущее.
	17,08	18,44	Заднее поддер. паров.
	11,11	12,00	Перед. тендерн.

Скорость километр. въ часъ.	Напряженіе отъ растяженія килограм. на кв. меллим.		Обозначеніе колеса.
	Безъ поправки.	Съ поправкой 8%	
64,4	18,10	19,55	Перед. ведущее противов. внизу. Среднее ведущее против. вверху. Заднее ведущее против. почти внизу. Перед. второй тендерн. тел. Заднее втор. тендерн. тел. Сред. въ вагон. тел. Зад. въ вагон. тел.
	14,78	15,96	
	12,46	13,46	
	16,61	17,73	
	12,46	13,46	
	16,11	17,40	
	11,96	12,92	
67,6	9,47	10,23	Перед. паров. тел. Перед. ведущее. Зад. ведущее. Сред. вагон. тел.
	18,93	20,44	
	17,27	18,65	
	8,97	9,69	
70,8	7,47	8,07	Зад. паров. пер. тел. Перед. ведущее. Зад. ведущее. Зад. тендерн. тел. Сред. ваг. тел. Задн. ваг. тел.
	18,93	20,44	
	15,94	17,21	
	9,63	10,40	
	8,47	9,15	
	9,96	10,76	

Сравненіе чиселъ этихъ двухъ таблицъ указываетъ, что и самыя большія напряженія отъ сжатія фибры рельсовой подошвы почти въ 4 раза менѣе самыхъ большихъ напряженій отъ растяженія нижнихъ фибръ рельсовой телѣжки.

Слѣдовательно при расчетахъ прочности колеса надо останавливать вниманіе на опредѣленіе только растяженій.

**Отсутствіе опытныхъ данныхъ о напряженіяхъ въ рельсахъ при статическомъ дѣйствіи нагрузокъ и необходимость этихъ данныхъ.**

### § 25.

При всѣхъ чрезвычайно полезныхъ данныхъ, доставленныхъ опытами Дудлея, они не освѣтили одной чрезвычайно важной стороны вопроса. Дудлей не воспользовался своимъ остроумнымъ приборомъ, чтобы рядомъ съ указаніемъ динамическихъ напряженій показать и статическія напряженія, вызываемыя въ рельсахъ тѣми же самыми колесами. По возможности вѣрная связь между статическимъ и динамическимъ дѣйствіемъ колесъ на рельсы необходима потому, что размѣры верхняго

строения должны быть определены при условии прочнаго сопротивления этого строения силамъ динамическаго дѣйствія колесъ, а всѣ данныя, относящіяся къ подвижному составу, устанавливаются, имѣя въ виду, главнымъ образомъ, статическое дѣйствіе колесъ на рельсы. Такъ задается вѣсъ самихъ колесъ съ ихъ принадлежностями и вѣсъ строения, поддерживаемаго рессорами. Заранѣе же можно определить и часть динамическаго дѣйствія, состоящую изъ дѣйствія противовѣсовъ и силъ, приложенныхъ къ поршнямъ машинъ; но эти добавочныя динамическія дѣйствія составляютъ только часть всего динамическаго дѣйствія колесъ на рельсы и при томъ не очень большую часть.

#### **Теоретическое сравненіе напряженій при статистическомъ и динамическомъ дѣйствіи колесъ.**

##### § 26.

Для устраненія пробѣла, оставленнаго Дудлеемъ при его опытахъ въ таблицахъ XIV и XV, поставлены рядомъ моменты динамическихъ изгибающихъ рельсъ силъ, определенныхъ опытами Дудлея, безъ выше указанной поправки и моменты статически дѣйствующихъ нагрузокъ рельса колесомъ, за исключеніемъ ведущихъ колесъ. Сопоставленія сдѣланы въ предположеніи, что рельсъ, принимающій давленіе колеса, поддерживается четырьмя равно-упругими опорами и въ двухъ предположеніяхъ относительно коэффициента постели шпаль, при  $C=5$  и  $C=8$  килограммамъ.

#### **Определеніе наибольшаго допустимаго напряженія при статическомъ дѣйствіи колесъ по опыту американскихъ дорогъ.**

##### § 27.

Сравненіе вычисленныхъ такимъ образомъ динамическихъ коэффициентовъ съ результатами, полученными при исчисленіи динамическихъ таблицъ, въ случаяхъ движенія колесъ съ небольшими износами, какъ было при опытахъ Дудлея, при глубинахъ впадины около 0,2 сантиметра, показало, что при движеніи тяжелыхъ колесъ со скоростями, близкими къ критической скорости, можно принять динамическій коэффициентъ равнымъ 1.64 при  $C=5$  и не болѣе 1.78 при  $C=0,8$ .

Такимъ образомъ, оказалось, что наибольшее напряженіе  $R$  отъ растяженія рельсовой и подошвы, при моментѣ сопротивленія  $W$  рельса и при обозначеніи  $M_2$  момента статически дѣйствующихъ силъ можно написать уравненія, при  $C=5$

$$WR=1.64Ms$$

и при  $C=8$

$$WR=1.68Ms$$

Опыты Дудлея показали, что при движеніи малоизношенныхъ колесъ можно опредѣлять моментъ сопротивленія  $W$ , вставляя въ приведенныя уравненія вмѣсто  $R$  число 20 килограммовъ.

Напряженія въ рельсахъ при менѣе благоприятныхъ условіяхъ достигаютъ, несомнѣнно, значительно большихъ величинъ. Практика американскихъ дорогъ удостовѣряетъ, что рельсы ихъ можно считать вообще достаточно прочными, а это указываетъ, что и болѣе значительныя напряженія, являющіяся въ рельсахъ, при практически возможныхъ неблагоприятныхъ обстоятельствахъ, не выходятъ за тотъ предѣлъ, при которомъ рельсы представляли бы опасность движенію поѣздовъ.

Поэтому для обыденной практики, интересующейся однимъ простымъ вопросомъ объ опредѣленіи момента сопротивленія рельса, не пытающейся уяснить себѣ отношеніе возможныхъ увеличенныхъ напряженій въ рельсѣ къ предѣлу упругости рельсового металла, можно остановиться на уравненіяхъ:

$$\text{при } C=5, 20W=1.64Ms.$$

$$\text{при } C=8, 20W=1.68Ms.$$

**Наибольшія допустимыя напряженія въ рельсахъ, принимая въ расчетъ динамическія дѣйствія колесъ.**

#### § 28.

Изъ желѣзнодорожной практики извѣстно, что при прежнихъ довольно легкихъ рельсахъ получались на нихъ постоянныя прогибы, не исчезающія и въ свободныхъ рельсахъ. Это указываетъ, что напряженія въ рельсахъ выходили тогда за предѣлъ упругости матеріала рельса.

Для устраненія такихъ, не исчезающихъ прогибовъ надо опредѣлять моментъ сопротивленія, принимая въ расчетъ наибольшія возможныя напряженія, съ одной стороны и съ другой—допускаемая напряженія, близкія къ предѣлу упругости стали рельсовъ.

Изучение формы изношенных поверхностей катания тяжелых паровозных колесъ показало, что глубина впадины можетъ достигнуть 0,4 сантиметра, а изучение колебанія рессоръ показало, что на хорошихъ путяхъ нагрузка, производимая рессорою и передаваемая колесомъ рельсу, можетъ увеличивать полную статическую нагрузку  $P$  до 1.6  $P$ .

Объ увеличеніи динамическаго дѣйствія при впадинахъ глубиною 0,4, по сравненію съ динамическимъ дѣйствіемъ колеса со впадиной глубиной 0,2 сантиметра, можно судить разсматривая вышеприведенныя таблицы XVIII, XIX и XXII.

Таблица XVIII даетъ результаты сличенія величинъ динамическихъ дѣйствій, при критической скорости и при различныхъ величинахъ  $A$ .

Обозначая наибольшее отношеніе динамическаго дѣйствія къ статическому  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max.} = \gamma$  значкомъ  $\gamma_{0.4}$  при впадинѣ 0,4 сантиметра и  $\gamma_{0.2}$  при впадинѣ глубиною 0,2 сантиметра, найдемъ отношеніе:

$A = 0,2$	1,	2,
$\frac{\gamma_{0.4}}{\gamma_{0.2}} = 1,30$	1,31	1,37

Таблица XIX, составленная при критической скорости  $V=75$  вер. при разныхъ величинахъ коэффициента балласта  $C=3$  и  $C=6$ , даетъ

при $C = 3$	6
$\frac{\gamma_{0.4}}{\gamma_{0.2}} = 1,31$	1,40

Наконецъ, таблица XXII, относящаяся къ критической скорости  $V=75$  верстъ и къ разнымъ разстояніямъ  $L$  между серединами шпаль при  $L=61$  сантиметрѣ и  $L=77$  сантиметровъ, показываетъ, что при

$L = 61$ сант.	77 сант.
$\frac{\gamma_{0.4}}{\gamma_{0.2}} = 1,28$	1,31

Изъ этихъ данныхъ видно, что отношеніе  $\frac{\gamma_{0.4}}{\gamma_{0.2}}$  нѣсколько увеличивается при болѣе жесткихъ рельсахъ и при увеличеніи коэффициента постели шпаль  $C$ .

Принимая въ расчетъ наиболѣе неблагопріятное сочетаніе обстоятельствъ и наибольшую перегрузку рессоръ въ 1,6 и наибольшее увеличеніе динамическаго дѣйствія при увеличеніи коэффициента постели шпаль 1,4, найдемъ, что увеличеніе динамическаго дѣйствія, сравнительно съ тѣмъ, что было при опытахъ Дудля, составитъ  $1,6 \times 1,4 = 2,24$ .

При такомъ увеличенномъ динамическомъ дѣйствіи напряженіе въ растянутой подошвѣ шпалы должно быть больше 20 килограммовъ упомянутыхъ выше, и должно достигнуть величины  $20 \times 2,24 = 44,8$  или кругло 45 килограммовъ на квадратный миллиметръ. Такое напряженіе, проявляющееся только на самой поверхности подошвы и быстро уменьшающееся по мѣрѣ приближенія растянутыхъ фибръ къ нейтральной оси рельса, не грозитъ опасностью разрушенія рельса, сдѣланнаго даже изъ стали такого невысокаго качества, какое указано Дудлеемъ<sup>1)</sup>, и составляетъ 41—46 килограммовъ на квадратный миллиметръ разрывающаго усилія. Такія напряженія на крайнихъ фибрахъ изгибаемаго бруска могутъ быть допускаемы тѣмъ смѣлѣе, что французскій инженеръ Контамень<sup>2)</sup> (Contamin), изъ опытовъ надъ изгибами рельсовъ въ  $32\frac{1}{2}$  и  $22\frac{1}{2}$  фунта въ погонномъ футѣ, вычислилъ величину предѣла упругости при изгибѣ въ 49,92 и 50,88 килограмма на квадратный миллиметръ.

Принимая 45 килограммовъ на квадратный миллиметръ, какъ крайній предѣлъ напряженія растянутыхъ фибръ на подошвѣ рельса, получимъ для опредѣленія момента сопротивленія  $W$  уравненіе:

$$\text{при } C=5, 45W=1,64 \times 1,6 \times 1,4Ms=3,67Ms$$

$$\text{при } C=8, 45W=1,76 \times 1,6 \times 1,4Ms=3,76Ms.$$

По первому, приведенному выше, способу (чисто статическому) величины момента сопротивленія опредѣлились

$$\text{при } C=5, W=0,082Ms$$

$$\text{при } C=8, W=0,086Ms$$

<sup>1)</sup> Bullet de la commis Internat. du Congrès des chemins de fer  
Vol XVII № 12. Dec. 1904 pay 2084  
Essais effectués au moyen du Stremmatographe  
par P. H. Dudley

<sup>2)</sup> Contamin. Des coefficients de resistance des fers et aciers 1891.

по послѣднему способу (динамическому)

при  $C=5$ ,  $W=0,082Ms$

при  $C=8$ ,  $W=0,086Ms$ .

Оба способа опредѣленія приводятъ къ однимъ имъ же результатамъ; но второй представляетъ преимущество потому, что даетъ вполне ясное понятіе о возможныхъ наибольшихъ напряженіяхъ въ рельсахъ, при самыхъ неблагоприятныхъ обстоятельствахъ, зависящихъ отъ перегрузки рессоръ отъ нерѣдко встрѣчающихся неправильностей поверхностей катанія шинъ со впадинами глубиною до 0,4 сантиметра.

### Наибольшія допустимыя статическія нагрузки тяжелыхъ колесъ.

#### § 29.

Поперечные размѣры рельсовъ обыкновенно опредѣляются въ соразмѣрности съ величиною ожидаемаго самаго большого момента силъ изгибающихъ рельсъ въ вертикальной плоскости.

Самые большіе изгибающіе моменты являются при движеніи тяжелыхъ колесъ съ неправильно изношенными шинами, когда поступательная скорость достигаетъ критической величины и если вмѣстѣ съ тѣмъ рессора, поддерживаемая колесомъ, будетъ наиболѣе перегружена.

При разныхъ значеніяхъ величины,  $A = \frac{EJ}{KL^3}$ , отношеніе  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$  динамическаго момента, соотвѣтствующаго критической скорости  $V = 75$  верстъ въ часъ, при глубинѣ впадины въ 0,4 сантиметра, къ статическому моменту, указано въ приведенной ранѣ таблицѣ XXV.

Что касается наибольшаго момента статически дѣйствующей нагрузки  $P$ , при разстояніи  $L$  между серединами шпаль, когда рельсъ поддерживается четырьмя равно упругими опорами, то этотъ моментъ, относящійся къ срединѣ пролета, зависитъ еще отъ величины  $A$ . Статическій моментъ  $M_s$  можно опредѣлить изъ уравненія

$$M_s = \frac{PL}{4} n$$

гдѣ  $n$  опредѣляется выше приведеннымъ уравненіемъ:

$$n = \frac{48A + 7}{24A + 10}$$

Въ случаѣ перегрузки рессоры настолько, что вмѣсто  $P$  надо принимать въ расчетъ  $1,6P$ , динамическій изгибающій моментъ будетъ

$$M_0 = 1,6 \frac{PL}{4} n \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$$

и на мѣсто  $\left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$  должно быть поставлено число, взятое подлежащимъ образомъ, изъ таблицы XXV.

Обозначая  $W$  моментъ сопротивленія разсматриваемаго рельса и  $R$  наибольшее допустимое напряженіе, равное или близкое къ предѣлу упругости стали при изгибѣ, можно будетъ для опредѣленія допустимой самой большой статически дѣйствующей нагрузки  $P$  обратиться къ уравненію:

$$RW = \frac{M}{D} = 1,6 \frac{PL}{4} n \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$$

гдѣ  $\left( \frac{y_i}{h_i} \right)$  относится къ критической скорости и впадины глубиною 0,4 сан. (таб. XXV).

Если будетъ допущено  $R = 4500$  килограммамъ, то

$$W = \frac{1,6}{4500} n \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max} \frac{PL}{4} = T \frac{PL}{4}$$

Величина  $T$ , какъ видно изъ послѣдняго уравненія,

$$T = 0,00035555 n \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$$

Величины  $\left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$  при  $C = 3$  могутъ быть опредѣлены, соответственно величинамъ  $A$ , изъ таблицы XXV.

При другихъ величинахъ  $C$ , указанныхъ въ таблицѣ XXV, величины  $\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$ , должны быть увеличены: при двойномъ  $C$  на 42%, при меньшемъ увеличеніи  $C$  пропорціонально менѣе и именно при увеличеніи на  $\frac{1}{3} C$  или при  $C = 4$  на 14%, а при увеличеніи на  $\frac{2}{3} C$ , или при  $C = 5$ , на 28%.

Сообразно съ этими указаніями составлена слѣдующая таблица XXVIII.

**Таблица XXVIII.**

Величины  $T$ .

$A$	$n = \frac{48A + 7}{24A + 10}$	$\left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$			$T$		
		$C = 3$	$C = 4$	$C = 5$	$C = 3$	$C = 4$	$C = 5$
0,2	1,122	2,	2,28	2,56	0,000799	0,000911	0,001023
0,3	1,261	2,04	2,32	2,61	0,000915	0,001042	0,001171
0,4	1,337	2,09	2,38	2,67	0,000993	0,001132	0,001192
0,5	1,409	2,13	2,42	2,72	0,001067	0,001216	0,001365
0,6	1,467	2,17	2,47	2,77	0,001132	0,001290	0,001448
0,7	1,515	2,21	2,52	2,83	0,001190	0,001356	0,001524
0,8	1,555	2,26	2,57	2,89	0,001249	0,001423	0,001598
0,9	1,588	2,30	2,62	2,94	0,001299	0,001481	0,001663
1,	1,618	2,34	2,66	2,99	0,001379	0,001572	0,001765

Пользуясь этою таблицею можно опредѣлить  $P$  изъ уравненія

$$P = \frac{4 w}{TL}$$

Результаты такихъ опредѣленій для четырехъ типовъ новыхъ рельсъ вѣсомъ 32,5, 28,5; 24,5 и 22,5 фунта въ погонномъ футѣ и для тѣхъ же, но уже подержанныхъ рельсовъ, съ уменьшеннымъ на 10% моментомъ сопротивленія  $W$ , при укладкѣ шпалъ съ разстояніями  $L$  въ 89, 80, 74 и 69 сант., приведены въ слѣдующей таблицѣ XXIX.

Таблица XXIX.

Типь рельса въсь фунт. погон. фута.		Коэф. постели шпаль С килограмм.		К килограммов.		L разст. между сред. шпал. сантим.		J моментъ инерціи рельса кил. сант. <sup>4</sup>		W моментъ сопрот. рельса кил. р. сант.		A = $\frac{EJ}{KL^3}$		T = $\frac{1,6}{4500} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$		P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.	
Рельсь новый.								Рельсь подержанный.									
3	9000	89	1476	210	0,465	0,001041	9070	1123	186,5	0,354	0,000957	8760	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		80			0,640	0,001155	9090			0,488	0,001058	8810					
		74			0,809	0,001254	9050			0,615	0,001141	8840					
4	12000	69	1222	182	1	0,001345	9050	963	162,5	0,760	0,001224	8830	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		89			0,349	0,001086	8750			0,266	0,000998	8390					
		80			0,480	0,001200	8750			0,366	0,001101	8470					
5	15000	74	925,7	147,6	0,606	0,001293	8770	756,9	134,4	0,461	0,001184	8520	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		69			0,75	0,001391	8750			0,570	0,001267	8530					
		89			0,279	0,001141	8280			0,215	0,001043	8030					
3	9000	80	925,7	147,6	0,384	0,001166	8360	756,9	134,4	0,293	0,001167	8000	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		74			0,485	0,001351	8400			0,369	0,001242	8130					
		69			0,6	0,001448	8400			0,456	0,001303	8170					
4	12000	89	925,7	147,6	0,385	0,000981	8340	756,9	134,4	0,303	0,000917	7960	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		80			0,530	0,001086	8380			0,418	0,001006	8080					
		74			0,670	0,001173	8390			0,528	0,001085	8100					
5	15000	69	925,7	147,6	0,828	0,001263	8390	756,9	134,4	0,695	0,001187	7940	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		89			0,289	0,001028	7960			0,277	0,000993	7210					
		80			0,398	0,001080	8050			0,313	0,001054	7700					
3	9000	74	925,7	147,6	0,502	0,001217	8080	756,9	134,4	0,396	0,001124	7770	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		69			0,621	0,001303	8090			0,414	0,001143	8230					
		89			0,231	0,001068	7650			0,182	—	—					
4	12000	80	925,7	147,6	0,318	0,001187	7650	756,9	134,4	0,251	0,001097	7400	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		74			0,402	0,001273	7730			0,317	0,001186	7400					
		69			0,497	0,001362	7740			0,390	0,001260	7440					
5	15000	89	925,7	147,6	0,292	0,000913	7270	756,9	134,4	0,239	0,000844	7160	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		80			0,402	0,000994	7420			0,328	0,000937	7160					
		74			0,508	0,001070	7460			0,415	0,001004	7240					
3	9000	69	925,7	147,6	0,627	0,001148	7450	756,9	134,4	0,511	0,001074	7250	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		89			0,219	0,000935	7090			0,176	—	—					
		80			0,301	0,001054	7100			0,246	0,000971	6900					
4	12000	74	925,7	147,6	0,380	0,001113	7160	756,9	134,4	0,312	0,001053	6900	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		69			0,469	0,001189	7190			0,383	0,001117	6970					
		89			0,173	—	—			0,143	—	—					
5	15000	80	925,7	147,6	0,241	0,001088	6780	756,9	134,4	0,197	—	—	A = $\frac{EJ}{KL^3}$	T = $\frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left(\frac{y_i}{h_i}\right)_{\max}$	P статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.		
		74			0,304	0,001174	6800			0,249	0,001025	6630					
		69			0,376	0,001246	6870			0,307	0,001117	6620					

Тяж рельса въсь фунт. погон. фута.		Коэф. постели шпаль $C$ килограмм.		$K$ килограммовъ.		$L$ разст. между средн. шпал. сантим.		Рельсъ новый.				Рельсъ подержанный.									
								$J$ моментъ инерціи рельса кил. сантим. <sup>4</sup>	$W$ моментъ сопрот. рельса килотр. сантим.	$A = \frac{EJ}{KL^3}$	$T = \frac{1,6}{4500} \frac{48A+7}{24A+10} \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$	$P$ статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.	$J$ моментъ инерціи рельса кил. сантим. <sup>4</sup>	$W$ моментъ сопрот. рельса килотр. сантим.	$A = \frac{EJ}{KL^3}$	$T = \frac{1,6}{4000} \frac{48A+7}{24A+10} \left( \frac{y_i}{h_i} \right)_{\max}$	$P$ статическая допустим. нагрузка рельса колесомъ.				
3	9000	89	707,3	118,1	0,233	0,000826	6430	542,5	103,7	0,171	—	—	0,236	0,000850	6100						
					0,307	0,000919	6440			0,298	0,000913	6140									
					0,388	0,000984	6450			0,366	0,000966	6220									
		0,480	0,001052	6510	0,128	—	—														
		0,167	—	—	0,177	—	—														
		0,230	0,000950	6270	0,294	0,001077	5400														
	12000	89	707,3	118,1	118,1	0,291	0,001030			6200	542,5	103,7				0,276	0,001012	5940	0,236	0,000850	6100
						0,360	0,001096			6240						0,128	—	—			
						0,134	—			—						0,177	—	—			
		0,291	0,001030	6200	0,294	0,001077	5400														
		0,360	0,001096	6240	0,276	0,001012	5940														
		0,134	—	—	0,177	—	—														
15000	89	707,3	118,1	118,1	0,184	—	—	542,5	103,7	0,103			—	—	0,236	0,000850	6100				
					0,233	0,001069	5960			0,142			—	—							
					0,288	0,001153	5960			0,179			—	—							
	0,184	—	—	0,220	0,001051	5710															
	0,233	0,001069	5960	0,179	—	—															
	0,288	0,001153	5960	0,220	0,001051	5710															

Обзоръ таблицы XXIX указываетъ два обстоятельства, заслуживающія серьезнаго вниманія.

При рельсахъ всѣхъ четырехъ типовъ увеличеніе коэффиціента постели  $C$  съ  $C = 3$  до  $C = 4$  уменьшаетъ допустимую статическую нагрузку рельса колесомъ, приблизительно, на 3—4%, а повышеніе того же коэффиціента до  $C = 5$  уменьшаетъ допустимую нагрузку приблизительно на 8%; но такъ какъ погруженіе точки прикосновенія колеса съ рельсомъ, при болѣе значительныхъ величинахъ  $C$ , оказывается нѣсколько меньше (См. дин. таб. XI, XXIII и VIII) приблизительно на 0,2—0,3 сантиметра, то, вѣроятно, колебаніе рессоръ уменьшается и, такимъ образомъ, вредное вліяніе увеличенія величины  $C$  ослабляется меньшимъ увеличеніемъ перегрузокъ рессоръ.

Второе и притомъ значительно болѣе важное обстоятельство, указываемое таблицей XXIX относится къ вліянію разстоянія между шпалами.

Это вліяніе оказывается крайне незначительнымъ.

Въ изношенномъ типѣ I допустимая статическая нагрузка, при уменьшеніи  $L$  съ 89 до 69 сантиметровъ, повышается не болѣе, чѣмъ на  $1\frac{1}{2}\%$ , хотя число шпаль на 1 версту увеличивается съ 1200 до 1550. Даже въ слабомъ типѣ IV уменьшеніе разстоянія между шпалами съ 89 до 69 сантиметровъ увеличиваетъ допустимую статическую нагрузку съ 6430 до 6510 или всего на  $1\frac{1}{2}\%$ . Это показываетъ, что увеличеніемъ числа шпаль, поддерживающихъ рельсъ, нельзя замѣтно улучшить условій прочности рельсовъ, зависящія отъ изгибовъ въ вертикальной плоскости. Увеличеніе числа шпаль, поддерживающихъ рельсъ, можетъ быть полезно и даже необходимо для улучшенія условій прочности пути, насколько эта прочность зависитъ отъ горизонтально дѣйствующихъ силъ, являющихся при движеніи колесъ по кривымъ частямъ пути, или вслѣдствіе извилистаго движенія подвижного состава. Это увеличеніе числа шпаль, можетъ быть еще болѣе необходимо для сохраненія устойчивости пути, другими словами, для сохраненія положенія рельсъ по отношенію къ балласту.

**Опредленіе наибольшихъ практически допустимыхъ статическихъ нагрузокъ осей съ колесами.**

§ 30.

При практическомъ пользованіи таблицею XXIX для опредленія допустимой статической нагрузки рельсъ, надо имѣть въ виду, что въ числахъ, опредѣляющихъ величину  $P$ , двѣ крайнія правыя цифры нельзя считать заслуживающими полного довѣрія, и въ случаяхъ, когда число десятковъ не болѣе 5, надо ихъ отбрасывать, а если это число десятковъ 5 или болѣе, замѣнять ихъ одною сотнею. Если, сверхъ того, будетъ признано возможнымъ допускать, въ крайнихъ случаяхъ, напряженіе въ наружныхъ фибрахъ подошвы, доходящее до предѣла упругости рельсовой стали при изгибѣ, другими словами до  $R = 5000$  килограммовъ, то можно составить слѣдующую таблицу XXX.

**Т а б л и ц а X X X.**

Типъ рельса.	Статическая нагрузка рель- совъ осью тонны.
I . . . . .	17,5
II . . . . .	16
III . . . . .	14,5
IV . . . . .	12

При такихъ нагрузкахъ колеса, довольно значительно изношенныя, со впадинами глубиною даже 0,4 сантим., могутъ двигаться съ критическою скоростью, а слѣдовательно, со скоростями не только меньше критической, но и со скоростями большими, не вызывая опасеній за прочность пути.

**Опредѣленіе наибольшей поступательной скорости соотвѣтствующей устойчивости пути.**

§ 31.

Такое движеніе можетъ быть допускаемо, однако, при условіи, чтобы при критической скорости давленіе шпаль на балластъ не вызывало еще такихъ сжатій балластнаго слоя, послѣ которыхъ балластъ уже не можетъ возвращаться въ положеніе первоначальное безъ содѣйствія новой подбивки.

Если критической скорости соотвѣтствуетъ такое усиленіе динамическаго дѣйствія колеса, при которомъ утрачивается устойчивость пути, то скорость должна быть уменьшаема до такой величины, при которой динамическія давленія не превосходятъ силъ, еще не уничтожающихъ устойчивость, или нарушаютъ ее настолько значительно, что исправленіе достигается работами не требующими чрезмѣрныхъ затратъ.

Способъ опредѣленія указанъ въ § 10, часть II.

**Динамическія таблицы.**

Для разъясненія вліяній скорости, свойствъ балласта, разстояній между опорами, моментами инерціи рельса и неправильностей въ формѣ поверхности катанія колесныхъ шинъ, вычислены прилагаемыя таблицы III—XXVII.

Вычисленія сдѣланы по основнымъ уравненіямъ и въ виду очень малыхъ уклоненій поверхности катанія рельса (за исключеніемъ стыковыхъ концовъ) отъ правильной формы относятся къ прямому рельсу.

Въ таблицахъ приведены и опредѣленія наибольшихъ углубленій рельса, вычисленныя по уравненію инж. I. A. Холодецкаго:

$$\max y = h + \frac{4ac}{kl} \left( 1 - \cos \frac{kl}{2} \right) . . . . A$$

гдѣ  $h$ —среднее углубленіе рельса, вычисленное при статическомъ дѣйствіи нагрузки въ сантим.,

$a$ —углубленіе, равномерно углубляющейся до середины, впадины, въ сантим.,

$c$ —скорость поступательнаго движенія колеса въ сантиметрахъ въ секунду,

$l$ —длина впадины въ сантиметрахъ,

$g$ —ускореніе силы тяжести въ сантим.,

$$k = \sqrt{\frac{8g}{h}}$$

$y$  наибольшее углубленіе рельса.

Опредѣленные такимъ образомъ углубленія сравнены съ наибольшими углубленіями, вычисленными по основнымъ уравненіямъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ принятіе обертывающей за прямую привело къ довольно большимъ уклоненіямъ.

---

### Динамическая таблица III.

Вычислена при условиях близких к бывшим опытам Дудлея.  
Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,9.$$

$$P=10.000 \text{ кил. } K=90.000 \text{ кил. } E=2.000.000 \text{ кил. } L=50, 8 \text{ сант., } C=8, J=1.186 \text{ сант.}^4$$

Скорость  $V=68$  верст или  $v=2.016$  сант. в секунду.

$$a = 5,08 \text{ сант. } \frac{a}{v} = 0,00248, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000615, m = 7, l = 5.$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00248 \omega_{i-1} + 0,0000075417 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0000075417 \left[ \frac{8}{h_i} + 1,4 \right]} = 1.000.294$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 0,012164 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо совершенно круглое.

$\delta$	$h_i$	$y'_i$	$y_i$	$\omega_i$	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2190		0,2190	0	1
0,1	0,2146		0,2190	0,0151	1.0205
0,2	0,2114		0,2190	0,0272	1.0360
0,3	0,2093		0,2190	0,0370	1.0466
0,4	0,2075		0,2191	0,0452	1.0558
0,5	0,2059		0,2192	0,0518	1.0646
0,6	0,2075		0,2193	0,0583	1.0569
0,7	0,2093		0,2194	0,0662	1.0482
0,8	0,2114		0,2195	0,0757	1.0383
0,9	0,2146		0,2197	0,0872	1.0236
1,0	0,2190		0,2199	0,1018	1.0041
0,1	0,2146		0,2201	0,1160	1.0258
0,2	0,2114		0,2204	0,1271	1.0424
0,3	0,2093		0,2207	0,1356	1.0545
0,4	0,2075		0,2210	0,1422	1.0651
0,5	0,2059		0,2213	0,1471	1.0749
0,6	0,2075		0,2216	0,1517	1.0681
0,7	0,2093		0,2220	0,1576	1.0604
0,8	0,2114		0,2224	0,1648	1.0519
0,9	0,2146		0,2228	0,1738	1.0381
1,0	0,2190		0,2232	0,1861	1.0147
0,1	0,2146		0,2236	0,1980	1.0421
0,2	0,2114		0,2241	0,2072	1.0458
0,3	0,2093		0,2246	0,2138	1.0730
0,4	0,2075		0,2251	0,2170	1.0848
0,5	0,2059		0,2256	0,2183	1.0957
0,6	0,2075		0,2261	0,2191	1.0897
0,7	0,2093		0,2266	0,2211	1.0827
0,8	0,2114		0,2271	0,2244	1.0743
0,9	0,2146		0,2276	0,2295	1.0607
1,0	0,2190		0,2281	0,2373	1.0418
0,1	0,2146		0,2287	0,2448	1.0656
0,2	0,2114		0,2293	0,2485	1.0846

$\delta$	$h_i$	$y'_i$	$y_i$	$\omega_i$	$\frac{y_i}{h_i}$
0,3	0,2093		0,2299	0,2494	1,0983
0,4	0,2075		0,2305	0,2481	1,1108
0,5	0,2059		0,2311	0,2447	1,1223
0,6	0,2075		0,2317	0,2408	1,1165
0,7	0,2093		0,2323	0,2380	1,1097
0,8	0,2114		0,2329	0,2364	1,1015
0,9	0,2146		0,2335	0,2367	1,0880
1,0	0,2190		0,2340	0,2397	1,0687
0,1	0,2146		0,2346	0,2424	1,0930
0,2	0,2114		0,2352	0,2413	1,1124
0,3	0,2093		0,2358	0,2372	1,1264
0,4	0,2075		0,2363	0,2307	1,1390
0,5	0,2059		0,2368	0,2223	1,1502
0,6	0,2075		0,2373	0,2136	1,1436
0,7	0,2093		0,2378	0,2060	1,1360
0,8	0,2114		0,2383	0,1998	1,1271
0,9	0,2146		0,2388	0,1956	1,1125
1,0	0,2190		0,2392	0,1943	1,0924
0,1	0,2146		0,2396	0,1927	1,1167
0,2	0,2114		0,2400	0,1874	1,1355
0,3	0,2093		0,2404	0,1794	1,1487
0,4	0,2075		0,2408	0,1692	1,1605
0,5	0,2059		0,2412	0,1570	1,1713
0,6	0,2075		0,2415	0,1446	1,1640
0,7	0,2093		0,2418	0,1335	1,1552
0,8	0,2114		0,2421	0,1240	1,1451
0,9	0,2146		0,2423	0,1167	1,1292
1,0	0,2190		0,2425	0,1124	1,1075
0,1	0,2146		0,2427	0,1082	1,1311
0,2	0,2114		0,2430	0,1003	1,1493
0,3	0,2093		0,2432	0,0899	1,1618
0,4	0,2075		0,2434	0,0774	1,1728
0,5	0,2059		0,2435	0,0632	1,1827
0,6	0,2075		0,2436	0,0489	1,1740
0,7	0,2093		0,2437	0,0361	1,1642
0,8	0,2114		0,2437	0,0251	1,1529
0,9	0,2146		0,2437	0,0166	1,1358
1,0	0,2190		0,2437	0,0114	1,1130
0,1	0,2146		0,2437	0,0063	1,1357
0,2	0,2114		0,2437	-0,0010	1,1527
0,3	0,2093		0,2436	-0,0120	1,1640
0,4	0,2075		0,2436	-0,0247	1,1737
0,5	0,2059		0,2434	-0,0389	1,1823

Продолжение динамической таблицы III.

Колесо со впадиной глубиной 0,2 сант.

$\delta$	$h'$ сант.	$y_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2190	0	0,2190	0	1
0,1	0,2146	-0,0400	0,1790	3,0987	0,8342
0,2	0,2114	-0,0800	0,1505	8,6300	0,7120
0,3	0,2093	-0,1200	0,1377	15,5957	0,6580
0,4	0,2075	-0,1600	0,1434	22,6152	0,6911
0,5	0,2059	-0,2000	0,1651	28,2274	0,8018
0,6	0,2075	-0,1600	0,2753	28,2028	1,3267
0,7	0,2093	-0,1200	0,3729	19,6137	1,7821
0,8	0,2114	-0,0800	0,4389	14,5021	2,0760
0,9	0,2146	-0,0400	0,4614	-13,7565	2,1500
1,0	0,2190	0	0,4385	-31,2507	2,0023
0,1	0,2146		0,3376	-43,5529	1,5730
0,2	0,2114		0,2178	-47,2004	1,0300
0,3	0,2093		0,1025	-41,2234	0,4897
0,4	0,2075		0,0152	-26,7554	0,0733
0,5	0,2059		-0,0276	-7,8960	0
0,6	0,2075		-0,0223	11,6512	0
0,7	0,2093		0,0299	29,7734	0,1430
0,8	0,2114		0,0216	42,8608	0,5754
0,9	0,2146		0,2344	47,5285	1,0921
1,0	0,2190		0,3457	43,3468	1,5787
0,1	0,2146		0,4349	30,7833	2,0266
0,2	0,2114		0,4831	11,5010	2,2852
0,3	0,2093		0,4788	-9,6529	2,2925

по уравнению A  
при  $h=0,2110$ ,  $a=0,2$ ,  
 $c=2,016$  сант.,  $k=192,816$ .

$\max y=0,5007$

по табл.  $\max y=0,4831$ .

$$\frac{5,007}{4,831}=1,036.$$

### Динамическая таблица IV

вычисленная при условиях, близких к бывшим при опытах Дудлея. Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A=0,9.$$

$P=5.000$  кил.,  $K=20.000$  кил.,  $E=2.000.000$  к.,  $L=50,8$  сант.,  $C=8$  кил.,  $J=1.186$  сант.<sup>4</sup>  
Скорость  $V=68$  вер..  $v=2.016$  сант. в секунду.

$$a = 5,08 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00248, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000615, m = 7, l = 5.$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00248 \omega_{i-1} + 0,000075417 \left[ 32 + 0,5 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000075417 \left[ \frac{8}{h_i} + 1,4 \right]}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,2164 \left[ 16 - 0,5 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,1095	0,	0,1095	0	1
0,1	0,1073	-0,0400	0,0712	5,1595	0,6640
0,2	0,1057	-0,0800	0,0529	15,7727	0,5007
0,3	0,1047	-0,1200	0,0632	25,5365	0,6040
0,4	0,1038	-0,1600	0,0940	31,8799	0,9055
0,5	0,1030	-0,2000	0,1327	32,3053	1,2885
0,6	0,1038	-0,1600	0,2393	20,7245	2,3050
0,7	0,1047	-0,1200	0,2954	-3,9936	2,8212
0,8	0,1057	-0,0800	0,2817	-31,7950	2,6742
0,9	0,1073	-0,0400	0,2063	-51,8398	1,9222
1,0	0,1095	0,	0,1038	-57,0261	0,9476
0,1	0,1073	.	-0,0291	-45,7132	0
0,2	0,1057	.	-0,1045	-26,1695	0
0,3	0,1047	.	-0,1372	-6,5589	0
0,4	0,1038	.	-0,1220	13,0612	0
0,5	0,1030	.	-0,0618	32,6354	0
0,6	0,1038	.	0,0416	48,7017	0,4004
0,7	0,1047	.	0,1693	50,8555	1,6173
0,8	0,1057	.	0,2741	34,1924	2,5937
0,9	0,1073	.	0,3174	5,9845	2,9567
1,0	0,1095	.	0,2857		2,6102
0,1	0,1073				

по уравнению A  
при  $h=0,1056, a=0,2, l=50,8 k=272,654.$   
 $\max y=0,3387.$   
по табл.  $\max y=0,3174.$   
 $\frac{3,387}{3,174} = 1,06.$

### Динамическая таблица V

вычисленная при условиях, близких к бывшим опытам Дудлея.  
Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A=1.$$

$P=7,000$  килогр.,  $K=13.660$  кил.,  $E=2.000.000$  кил.,  $L=57,1$  сант.,  $C=5$ ,  $J=1.332$  сант.<sup>4</sup>

Скорость  $V=22,5$  вер.,  $v=667$  сант. в секунду.

$$a=5,71 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00856, \frac{a^2}{v^2} = 0,00007327, m = 7, l = 5.$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y_{i-1} + 0,00856 \omega_{i-1} + 0,00008983 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,00008983 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 0,041978 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо круглое.

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,	0,2765		0,2765	0	1.
0,1	0,2738		0,2763	0,0487	1.0093
0,2	0,2717		0,2765	0,0922	1.0178
0,3	0,2703		0,2771	0,1312	1.0245
0,4	0,2698		0,2780	0,1664	1.0304
0,5	0,2696		0,2792	0,1971	1.0395
0,6	0,2698		0,2806	0,2236	1.0440
0,7	0,2703		0,2822	0,2486	1.0442
0,8	0,2717		0,2840	0,2729	1.0455
0,9	0,2738		0,2860	0,2968	1.0448
1,0	0,2765		0,2882	0,3214	1.0425
0,1	0,2738		0,2907	0,3409	1.0612
0,2	0,2717		0,2933	0,3492	1.0794
0,3	0,2703		0,2959	0,3474	1.0943
0,4	0,2698		0,2985	0,3375	1.1062
0,5	0,2696		0,3009	0,3209	1.1162
0,6	0,2698		0,3032	0,2989	1.1236
0,7	0,2703		0,3052	0,2728	1.1293
0,8	0,2717		0,3070	0,2446	1.1300
0,9	0,2738		0,3086	0,2168	1.1270
1,0	0,2765		0,3099	0,1916	1.1208
0,1	0,2738		0,3110	0,1637	1.1359
0,2	0,2717		0,3119	0,1277	1.1477
0,3	0,2703		0,3124	0,0858	1.1558
0,4	0,2698		0,3125	0,0407	1.1584
0,5	0,2696		0,3122	-0,0048	1.1572
0,6	0,2698		0,3115	-0,0492	1.1548
0,7	0,2703		0,3105	-0,0910	1.1486

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2765	0	1.
- 0,0800	0,1966	0,0134	0,7179
- 0,1600	0,1176	0,3144	0,4328
- 0,2400	0,0430	0,7788	0,1590
- 0,3200	- 0,0279	1,3698	0.
- 0,4000	- 0,0931	2,0063	0
- 0,3200	0,0068	2,6332	0,0254
- 0,2400	0,1117	3,1361	0,4132
- 0,1600	0,2198	3,4057	0,8088
- 0,0800	0,3290	3,4402	1,2017
0	0,3577	3,2990	1,2936
	0,3848	3,1339	1,4055
	0,4101	2,9023	1,5094
	0,4332	2,6099	1,6027
	0,4536	2,2645	1,6813
	0,4707	1,8747	1,7461
	0,4843	1,4496	1,7951
	0,4940	0,9993	1,8276
	0,4999	0,5348	1,8400
	0,5018	0,0684	1,8327
	0,4997	- 0,3885	1,8074
	0,4938	- 0,8362	1,8035
	0,4753	- 1,2656	1,7494

По уравнению A  
при  $h=0,2717$ ,  $a=0,4$  сант.,  
 $c=667$  сант.,  $l=571$ ,  $k=169,93$ .  
 $\max y=0,4421$ .  
по табл.  $y_{\max}=0,5018$ .  
 $\frac{4,421}{5,018}=0,88$ .

### Динамическая таблица VI.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,2$$

$P=10.000$  кил.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=800$  сант.,  $J=512$  сант. <sup>4</sup>

Скорость  $V=50$  верстамъ,  $v=1.483$  сант. въ секунду.

$$a=8 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,0054, \frac{a^2}{v^2} = 0,00002912, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0054 \omega_{i-1} + 0,00357 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,00357 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 2.6488 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	0,5589	0	1
0,1	0,5658	-0,0800	0,4713	4,2770	0,8330
0,2	0,5750	-0,1600	0,4250	13,2948	0,7391
0,3	0,5842	-0,2400	0,4341	23,5259	0,7430
0,4	0,5903	-0,3200	0,4932	31,1237	0,8355
0,5	0,5927	-0,4000	0,5783	33,2785	0,9757
0,6	0,5903	-0,3200	0,8084	24,3651	1,3694
0,7	0,5842	-0,2400	0,9472	2,7066	1,6213
0,8	0,5750	-0,1600	0,9470	-24,0179	1,6469
0,9	0,5655	-0,0800	0,8094	-46,1151	1,4313
1,0	0,5589	0	0,5869	-55,2180	1,0501
0,1	0,5658		0,2885	-45,0083	0,5099
0,2	0,5750		0,1060	-16,9620	0,1843
0,3	0,5842		0,1055	+17,8687	0,1806
0,4	0,5903		0,2837	46,5465	0,4806
0,5	0,5927		0,5727	58,9255	0,9662
0,6	0,5903		0,8666	51,4760	1,4340
0,7	0,5842		1,0650	26,3303	1,8230
0,8	0,5750		1,0900	-8,2304	1,8956
0,9	0,5658		0,9304	-38,9762	1,6442

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	1
-0,04	0,5111	2,9743	0,9033
-0,08	0,4888	8,6913	0,8501
-0,12	0,5008	15,0047	0,8572
-0,16	0,5431	19,4127	0,9260
-0,20	0,5984	20,3363	1,0096
-0,16	0,7238	15,0256	1,2261
-0,12	0,7969	2,7019	1,3641
-0,08	0,7917	-12,3707	1,3763
-0,04	0,7093	-24,7859	1,2543
0	0,5795	-29,6650	1,0368
	0,4135	-23,7407	0,7308
	0,3137	-7,7212	0,5455
	0,3270	+11,7915	0,5597

по уравнению A  
при  $h=0,5782, a=0,2,$   
 $l=80, c=1433, k=116,469$   
 $\max y=0,8329$   
по табл.  $y_{\max}=0,7969$   
 $\frac{8329}{7969}=1,04$

Продолжение динамической таблицы IV.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
1,0	0,5589		0,6443	-54.2957	1.1528
0,1	0,5658		0,3385	-48.0274	0.5983
0,2	0,5750		0,1300	-22.6697	0.2261
0,3	0,5842		0,0953	+11.6605	0.1631
0,4	0,5903		0,2439	42.0983	0.4132
0,5	0,5927		0,5182	57.9197	0.8668
0,6	0,5903		0,8196	53.5281	1.3882
0,7	0,5842		1.0354	30.4292	1.7723
0,8	0,5750		1.0874	-2.9873	1.8911
0,9	0,5658		0.9552	-34.5156	1.6865
по уравнению А при $h=0,5782$ , $a=0,4$ , $l=80$ , $c=1483$ , $k=116,469$ $\max y=1,0875$ по табл. $y_{\max}=1,0900$ $\frac{1,0875}{1,0900}=0,998$  Колесо круглое, рельс прямой.					
$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589		0,5589	0	1
0,1	0,5658		0,5492	1.0799	0,9707
0,2	0,5750		0,5481	3.7140	0,9532
0,3	0,5842		0,5619	9.4150	0,9618
0,4	0,5903		0,6033	10.6920	1.0220
0,5	0,5727		0,6437	9.3795	1.0850
0,6	0,5903		0,6696	5.7408	1.1343
0,7	0,5842		0,6711	0.8192	1.1487
0,8	0,5750		0,6461	-3.8185	1.1237
0,9	0,5658		0,6010	-6.5924	1.0622
1,0	0,5589		0,5484	-6.1394	0,9692
0,1	0,5658		0,5105	-2.3860	0,9023
0,2	0,5750		0,4997	+3.4059	0,8690
0,3	0,5842		0,5220	9.3183	0,8935
0,4	0,5903		0,5707	13.1541	0,9668
0,5	0,5927		0,6303	13.4381	1.0634
0,6	0,5903		0,6796	9.8973	1.1513
0,7	0,5842		0,7457	1.9789	1.2764
0,8	0,5790		0,7114	-7.6499	1.2372
0,9	0,5658		0,6332	-13.9449	1.1191
1,0	0,5689		0,5399	-14.8754	0,9660
0,1	0,5658		0,4485	-11.4178	0,7927
0,2	0,5750		0,4044	+0,0619	0,7033
0,3	0,5842				

### Динамическая таблица VII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,2$$

$P=10.000$  килогр.  $K=10.000$  килогр.  $E=2.000.000$  килогр.  $L=80$  сант.  $J=512$  сант.<sup>4</sup>.  
Скорость  $V=75$  верстъ въ часъ,  $v=2223$  сант. въ секунду.

$$a=8 \text{ сант. } \frac{a}{v}=0,0036, \frac{a^2}{v^2}=0,00001296, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0036\omega_{i-1} + 0,001589 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y'_{i-2}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1,001589 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,7658 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною  
0,2 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

$\delta$	$h'$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega'$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	0,5589	0	1
0,1	0,5658	-0,0800	0,4761	2.7356	0,8414
0,2	0,5750	-0,1600	0,4107	8.9747	0,7142
0,3	0,5842	-0,2400	0,3732	17.5769	0,6388
0,4	0,5903	-0,3200	0,3695	26.9772	0,6259
0,5	0,5927	-0,4000	0,3945	35.5800	0,6656
0,6	0,5903	-0,3200	0,6080	38.6159	1.0300
0,7	0,5842	-0,2400	0,8122	32.0583	1.3902
0,8	0,5750	-0,1600	0,9744	9.7124	1.6946
0,9	0,5658	-0,0800	1.0426	-11.3376	1.8727
1,0	0,5589	0	1.0260	-33.8636	1.8357
0,1	0,5658	0	0,8578	-54.6388	1.5161
0,2	0,5750	0	0,6424	-63.7019	1.1174
0,3	0,5842	0	0,4072	-58.7026	0,6968
0,4	0,5903	0	0,2376	-45.6318	0,4025
0,5	0,5927	0	0,1063	-25.4218	0,1794
0,6	0,5903	0	0,0584	-0,9985	0,0989
0,7	0,5842	0	0,0991	+23.5461	0,1696
0,8	0,5750	0	0,2243	44.0490	0,3927
0,9	0,5658	0	0,4074	56.9865	0,7200
1,0	0,5589	0	0,6182	60.1322	1.1061
0,1	0,5658	0	0,8194	53.2584	1.4482
0,2	0,5750	0	0,9776	38.1527	1.7002
0,3	0,5842	0	1.0686	15.6067	2.0003
0,4	0,5903	0	1.0167	-7.3092	1.7223
0,5	0,5927	0	0,9480	-24.9741	1.5996
0,6	0,5903	0	0,8539	-38.8274	1.4465
0,7	0,5842	0	0,6875	-46.8107	1.1768
0,8	0,5750	0	0,5080	-46.9811	0,8836
0,9	0,5658	0	0,3443	-39.2781	0,6085
1,0	0,5589	0	0,2228	-24.8756	0,3986

по уравнению A  
при  $h=0,5782, a=0,4, c=2223, l=80, k=116,469$

$$\text{max. } y = 1,1510$$

по табл.  $y_{\text{max}} = 1,0686$

$$\frac{1,1510}{1,0686} = 1,077$$

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	1
-0,04	0,5164	1.9524	0,9127
-0,08	0,4842	5.7446	0,8421
-0,12	0,4682	10.8401	0,8009
-0,16	0,4734	16.2614	0,8019
-0,20	0,4957	20.9917	0,8353
-0,16	0,6105	22.5118	1.0342
-0,12	0,7142	19.2566	1.2225
-0,08	0,8026	10.9015	1.3958
-0,04	0,8528	-0,8208	1.5072
0	0,8565	-14,4650	1.5325
0,04	0,7984	-26,6880	1.4111
0,08	0,6938	-34,4804	1.2066
0,12	0,5564	-36,0073	0,9526
0,16	0,4272	-30,9062	0,7237
0,20	0,3284	-20,3231	0,5547
0,24	0,2766	-6,2133	0,4685
0,28	0,2800	+8,9481	0,4793
0,32	0,3348	22,5590	0,5823
0,36	0,4319	32,2880	0,7633
0,40	0,5536	36,4225	0,9305
0,44	0,6777	34,5839	1,1977
0,48	0,7839	27,5680	1,3633
0,52	0,8560	16,8036	1,4653
0,56	0,8778	6,0438	1,4870
0,60	0,8668	-4,7066	1,4624

по уравнению A  
при  $h=0,5782, a=0,2, c=2223, l=80$

$$\text{max. } y = 0,8646$$

по табл.  $y_{\text{max}} = 0,8778$

$$\frac{0,8646}{0,8778} = 0,984$$

Продолжение динамической таблицы VII.

Колесо круглое, рельс прямой.

$\delta$	$h'$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589		0,5589	0	1
0,1	0,5658		0,5544	1.0290	0,9798
0,2	0,5750		0,5544	2.5118	0,9642
0,3	0,5842		0,5605	4.2313	0,9594
0,4	0,5903		0,5724	5.8451	0,9692
0,5	0,5927		0,5892	6.9587	0,9941
0,6	0,5903		0,6085	7.2217	1.0308
0,7	0,5842		0,6268	6.4227	1.0729
0,8	0,5750		0,6402	4.5218	1.1132
0,9	0,5658		0,6450	1.7478	1.1399
1,0	0,5589		0,6389	-1.3914	1.1430
0,1	0,5658		0,6218	-3.9431	1.0990
0,2	0,5750		0,5979	-5.1424	1.0398
0,3	0,5842		0,5726	-5.4567	0,9801
0,4	0,5903		0,5496	-3.6001	0,9310
0,5	0,5927		0,5359	-0.7038	0,9033
0,6	0,5903		0,5342	+2.5531	0,9049
0,7	0,5842		0,5293	5.7930	0,9060
0,8	0,5750		0,5496	8.3657	0,9558
0,9	0,5658		0,5764	9.4289	1.0187
1,0	0,5589		0,6092	8.6859	1.0900
0,1	0,5658		0,6328	6.5712	1.1184
0,2	0,5750		0,6448	3.9803	1.1214
0,3	0,5842		0,6472	1.4873	1.1076
0,4	0,5903		0,6413	-0,5656	1.0865

### Динамическая таблица VIII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,2$$

$P=10.000$ ,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=80$  сант.,  $J=512$  сант.<sup>4</sup>.

Скорость  $V=100$  верст в час,  $v=2965$  сант. в секунду.

$$a=8 \text{ сант.}, \quad \frac{a}{v}=0,0027, \quad \frac{a^2}{v^2}=0,00000728, \quad m=7, \quad l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0027 \omega_{i-1} + 0,0008925 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0008925 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,3244 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	0,5589	0	1.
0,1	0,5658	-0,08	0,4774	2.0289	0,8436
0,2	0,5750	-0,16	0,4056	6.7775	0,7053
0,3	0,5842	-0,24	0,3364	13.9524	0,5758
0,4	0,5903	-0,32	0,3036	22.8117	0,5143
0,5	0,5927	-0,40	0,2959	32.1566	0,4992
0,6	0,5903	-0,32	0,4712	38.5485	0,7982
0,7	0,5842	-0,24	0,6546	38.8332	1.1205
0,8	0,5750	-0,16	0,8282	32.7919	1.4403
0,9	0,5658	-0,08	0,9773	20.8234	1.7273
1,0	0,5589	0	1.0872	4.0035	1.9452
0,1	0,5658		1.0663	-14.3043	1.8846
0,2	0,5750		0,9983	-30.5088	1.7361
0,3	0,5842		0,8923	-43.0791	1.5274
0,4	0,5903		0,7582	-50.8974	1.2844
0,5	0,5927		0,6107	-53.7043	1.0303
0,6	0,5903		0,4636	-51.3379	0,7853
0,7	0,5842		0,3305	-44.1447	0,5657
0,8	0,5750		0,2235	-32.8296	0,3887
0,9	0,5658		0,1522	-18.4332	0,2690
1,0	0,5589		0,1230	-2.1829	0,2174
0,1	0,5658		0,1387	+14.2118	0,2468
0,2	0,5750		0,1971	29.3135	0,3428
0,3	0,5842		0,2927	41.7730	0,5010
0,4	0,5903		0,4165	50.4632	0,7055
0,5	0,5927		0,5570	54.5963	0,9397

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,5589	0	1.
-0,0400	0,5169	1.4551	0,9136
-0,0800	0,4806	4.5776	0,8353
-0,1200	0,4550	8.6937	0,7788
-0,1600	0,4420	13.5404	0,7487
-0,2000	0,4426	18.5595	0,7467
-0,1600	0,5350	21.9451	0,9063
-0,1200	0,6323	22.0188	1.0820
-0,0800	0,7245	18.6104	1.2600
-0,0400	0,8038	11.8933	1.4206
0	0,8592	2.5003	1.5377
0,8464	-7.5957	1.4959	
0,8086	-16.3797	1.4063	
0,7496	-22.7861	1.2831	
0,6771	-26.7700	1.1470	
0,5981	-27.9328	1.0091	
0,5203	-26.3425	0,8814	
0,4508	-22.2773	0,7716	
0,3955	-16.1865	0,6879	
0,3586	-8.6475	0,6338	
0,3446	-0.3532	0,6166	
0,3530	8.0442	0,6238	
0,3833	15.9063	0,6666	
0,4332	22.5332	0,7410	
0,4984	27.3085	0,8433	
0,5730	29.7322	0,9667	

Продолжение динамической таблицы VII.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,6	0,5903		0,7012	53,7293	1,1879		0,6501	29,9816	1,1013
0,7	0,5842		0,8354	47,8006	1,4300		0,7237	26,9302	1,2388
0,8	0,5750		0,9464	37,1703	1,6460		0,7850	21,1821	1,3652
0,9	0,5658		1,0225	22,6970	1,8071		0,8273	13,1708	1,4622
1,0	0,5589		1,0554	5,7753	1,8883		0,8455	3,6789	1,5128
0,9	0,5658		1,0508	-12,6624	1,8571		0,8370	-5,9895	1,4793
<p>по уравнению A  при <math>h=0,5782</math>, <math>a=0,4</math>,  <math>c=2692</math>, <math>l=80</math>, <math>k=116,469</math>  <math>\max. y=1,0877</math>  по табл. <math>y_{\max}=1,0872</math>  <math>\frac{1,0877}{1,0872}=1</math>  Колесо совершенно  круглое.</p>									
0	0,5589		0,5589	0	1				
0,1	0,5658		0,5927	0,0723	1,0476				
0,2	0,5750		0,5888	-1,9845	1,0240				
0,3	0,5842		0,5799	+1,2950	0,9926				
0,4	0,5903		0,5806	2,0136	0,9835				
0,5	0,5927		0,5834	2,8027	0,9843				
0,6	0,5903		0,5882	3,4581	0,9964				
0,7	0,5842		0,5944	3,7862	1,0174				
0,8	0,5750		0,6110	3,4583	1,0626				
0,9	0,5658		0,6246	2,2725	1,1039				
1,0	0,5589		0,6307	0,4392	1,1285				
0,1	0,5658		0,6266	-1,4302	1,1074				
0,2	0,5750		0,6120	-2,6883	1,0661				
0,3	0,5842		0,6010	-3,1837	1,0288				
0,4	0,5903		0,5886	-2,9807	0,9971				
0,5	0,5927		0,5777	-2,2330	0,9747				
0,6	0,5903		0,5694	-1,1484	0,9646				
0,7	0,5842		0,5545	+0,2166	0,9491				
<p>по уравнению A  при <math>h=0,5782</math>, <math>a=0,2</math>,  <math>c=2965</math>, <math>k=116,469</math>,  <math>l=80</math>  <math>\max. y=0,8328</math>  по табл. <math>y_{\max}=0,8455</math>  <math>\frac{8328}{8455}=0,988</math></p>									

### Динамическая таблица IX.

Прямой рельсъ опирается на 4 опоры.

$$A = 0,5$$

$$K=20.000 \text{ килогр.}, E=2.000.000 \text{ килогр.}, L=70 \text{ сант.}, J=1715 \text{ сант.}^4.$$

$$\text{Скорость } V=25 \text{ вереть вь часть, } v=741 \text{ сант. вь секунду.}$$

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,09441, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000891, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,009441 \omega_{i-1} + 0,010926 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,010926 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 4,6404 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

$$P=10.000 \text{ килогр.}$$

$$P=5.000 \text{ килогр.}$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$	$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2272	0	0,2272	0	1	0	0,1136	0	0,1136	0	1
0,1	0,2285	-0,0800	0,1598	16,0144	0,6993	0,1	0,1143	-0,0400	0,0879	15,2122	0,7691
0,2	0,2293	-0,1600	0,2751	25,7409	1,2000	0,2	0,1147	-0,0800	0,1883	8,5783	1,6416
0,3	0,2310	-0,2400	0,3221	9,2388	1,3943	0,3	0,1155	-0,1200	0,0761	5,0831	0,6589
0,4	0,2321	-0,3200	0,2312	-1,3943	0,9961	0,4	0,1161	-0,1600	0,1413	15,1636	1,2170
0,5	0,2322	-0,4000	0,1398	+13,8536	0,6020	0,5	0,1161	-0,2000	0,1461	4,7962	1,2584
0,6	0,2321	-0,3200	0,3675	9,1389	1,5834	0,6	0,1161	-0,1600	0,1318	-2,8524	1,1352
0,7	0,2310	-0,2400	0,3103	-19,7236	1,3433	0,7	0,1155	-0,1200	0,1029	+2,2369	0,8909
0,8	0,2293	-0,1600	0,1245	-12,1695	0,5429	0,8	0,1147	-0,0800	0,1521	1,4162	1,3260
0,9	0,2285	-0,0800	0,2025	+11,9721	0,8862	0,9	0,1143	-0,0400	0,1111	-1,4724	0,9720
1,0	0,2272	0	0,3589	1,9523	1,5797	1,0	0,1136	0	0,1275	2,9354	1,1223
0,1	0,2285		0,2123	-8,9530	0,9275	0,1	0,1143		0,1160	6,1809	1,0148
0,2	0,2293		0,1609	+9,9479	0,7017	0,2	0,1147		0,1431	5,5334	1,2476
0,3	0,2310		0,2961	16,7957	1,2818	0,3	0,1155		0,1197	3,8817	1,0364
0,4	0,2321		0,3259	-0,2443	1,4041	0,4	0,1161		0,1296	6,5828	1,1163
0,5	0,2322		0,2112	-4,6426	0,9096	0,5	0,1161		0,1375	4,3641	1,1843
0,6	0,2321		0,1927	+10,4662	0,8302	0,6	0,1161		0,1198	4,9505	1,0319
0,7	0,2310		0,2972	12,7704	1,2866	0,7	0,1155		0,1360	5,7676	1,1775
0,8	0,2293		0,2985	-0,9085	1,3018	0,8	0,1147		0,1275	3,9458	1,1116
0,9	0,2285		0,2038	-1,1796	0,8918	0,9	0,1143		0,1230	5,5152	1,0757
1,0	0,2272		0,2144	+10,7278	0,9437	1,0	0,1136		0,1342	5,1640	1,1817
0,1	0,2285		0,2925	9,4458	1,2801	0,1	0,1143		0,1227	4,1614	1,0735
0,2	0,2293		0,2740	-0,3862	1,1950	0,2	0,1147		0,1271	5,9204	1,1081
0,3	0,2310		0,2107	+2,0812	0,9121	0,3	0,1155		0,1338	4,8503	1,1584
						0,4	0,1161		0,1242	5,0424	1,0698
						0,5	0,1161		0,1333	5,5723	1,1481

По уравнению A  
при  $h=0,2301, a=0,4,$   
 $l=70, k=184,65, c=741$   
 $max. y=0,3918$   
по табл.  $y_{max}=0,3675$   
 $\frac{3918}{3675}=1,065$

По уравнению A  
при  $h=0,1151, a=0,2,$   
 $l=70, k=184,65, c=741$   
 $max. y=0,1601$   
по табл.  $y_{max}=0,1521$   
 $\frac{1601}{1521}=1,053$

### Динамическая таблица X.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A=0,5$$

$P=10.000$  кил.,  $K=20.000$  кил.,  $E=2.000.000$  кил.,  $L=70$  сант.,  $J=1.815$  сант.<sup>4</sup>.

Скорость  $V=75$  вер. в час,  $v=2223$  сант. в секунду.

$$a = 7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,003147, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000990, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,003147 \omega_{i-1} + 0,001214 \left[ 32 + 1,4 (y'_i - 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_i} \right]}{1 + 0,001214 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,5468 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2272	0	0,2272	0	1	0	0,2272	0	1
0,1	0,2285	-0,0800	0,1490	5.8806	0,6514	-0,0400	0,1874	4.0555	0,8201
0,2	0,2293	-0,1600	0,1015	17.7218	0,4426	-0,0800	0,1665	11.0364	0,7261
0,3	0,2310	-0,2400	0,0972	31.8256	0,4208	-0,1200	0,1761	18.4944	0,7623
0,4	0,2321	-0,3200	0,1357	43.9702	0,5847	-0,1600	0,2003	24.2236	0,8630
0,5	0,2322	-0,4000	0,2050	50.5314	0,8829	-0,2000	0,2372	26.8408	1.0215
0,6	0,2321	-0,3200	0,4344	42.5118	1.8716	-0,1600	0,3527	22.0643	1.5163
0,7	0,2310	-0,2400	0,6018	15.3310	2.6052	-0,1200	0,4307	7.9043	1.8645
0,8	0,2293	-0,1600	0,6595	-22.8671	2.8761	-0,0800	0,4570	-11.4698	1.9930
0,9	0,2285	-0,0800	0,5922	-60.5571	2.5917	-0,0400	0,4204	-30.3809	1.8398
1,0	0,2272	0	0,4229	-86.3724	1.8597	0	0,3330	-42.0581	1.4657
0,1	0,2285		0,1278	-86.6360	0,5593		0,1869	-42.1684	0,8179
0,2	0,2293		-0,1176	-67.9651	0		0,0654	-29.9099	0,2852
0,3	0,2310		-0,2797	-42.3559	0		0,0014	-8.4588	0,0060
0,4	0,2321		-0,3571	-16.2281	0		0,0129	+15.5932	0,0555
0,5	0,2322		-0,3520	+10.0563	0		0,0949	35.0824	0,4087
0,6	0,2321		-0,2679	37.1475	0		0,2221	44.3586	0,9569
0,7	0,2310		-0,1066	62.7073	0		0,3559	40.8593	1.5364
0,8	0,2293		+0,1246	81.5334	0,5434		0,4567	25.6432	1.9921
0,9	0,2285		0,3867	80.9677	1.6923		0,5037	2.8742	2.2044
1,0	0,2272		0,6027	56.5280	2.6527		0,4644	-20.4539	2.0422
0,1	0,2285		0,7079	16.1724	3.0980		0,3611	-36.6692	1.5760
0,2	0,2293		0,6741	-20.0086	2.9883		0,2268	-40.9673	0,9891
							0,1022	-32.4307	0.4424
							0,0245	-13.8887	0,1055
							0,0157	+8.8988	0,0676

По уравнению A  
при  $h=0,2300, a=0,4, c=2223,$   
 $l=70, k=184.705.$   
 $\max y=0,7140.$   
по табл.  $y_{\max}=7.079.$   
 $\frac{7.140}{7.079}=1.009.$

По уравнению A  
при  $h=0,2300, a=0,2, c=2223,$   
 $l=70, k=184.705.$   
 $\max y=0,4722.$   
по табл.  $y_{\max}=0,5037.$   
 $\frac{4.722}{5.037}=0,94.$

### Динамическая таблица XI.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A=0,5.$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=10.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=70 \text{ сант. } J=0,858 \text{ кил.}^4.$$

$$\text{Скорость } V=25 \text{ верст в час, } v=741 \text{ сант. в секунду.}$$

$$a = 7 \text{ сант. } \frac{a}{v} = 0,00944, \frac{a^2}{v^2} = 0,00008912, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00944 \omega_{i-1} + 0,010924 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 0,24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]$$

$$3'1 = \frac{1 + 0,010924 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}{1 + 0,010924 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)} = 1,205,177.$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} - 4,6304 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,4544	0	0,4544	0	1
0,1	0,4570	-0,0800	0,3649	9,9655	0,7984
0,2	0,4586	-0,1600	0,3242	29,2379	0,7069
0,3	0,4620	-0,2400	0,5464	33,8404	1,1827
0,4	0,4642	-0,3200	0,6500	12,8181	1,4003
0,5	0,4644	-0,4000	0,5168	-6,7830	1,1128
0,6	0,4642	-0,3200	0,4510	-11,1958	0,9715
0,7	0,4620	-0,2400	0,3992	5,7481	0,8641
0,8	0,4586	-0,1600	0,5184	6,6490	1,1303
0,9	0,4570	-0,0800	0,5669	-4,7011	1,2405
1,0	0,4544	0	0,4955	-13,6568	1,0927
0,1	0,4570		0,3346	-4,1698	0,7343
0,2	0,4586		0,3626	15,9740	0,7905
0,3	0,4620		0,4360	28,6731	0,9437
0,4	0,4642		0,6554	19,3296	1,4120
0,5	0,3644		0,6531	-6,8817	1,4064
0,6	0,4642		0,4473	-16,7438	0,9635
0,7	0,4620		0,3034	-0,0493	0,6568
0,8	0,4586		0,3870	18,9234	0,8440
0,9	0,4570		0,5610	19,7244	1,2274
1,0	0,4544		0,6217	2,0133	1,3682
0,1	0,4570		0,4995	-10,9430	1,0930
0,2	0,4586		0,3620	-3,4551	0,7894
0,3	0,4620		0,3779	13,7409	0,8178
0,4	0,4642		0,5190	19,2652	1,1181
0,5	0,4644		0,6086	7,3241	1,3105
0,6	0,4642		0,5441	-6,4613	1,1721

По уравнению A  
при  $h=0,4602, a=0,4, l=70, c=741, k=130,57.$

$$\max y = 0,7189.$$

по табл.  $y_{\max} = 0,6554.$

$$\frac{7,189}{6,554} = 1,079.$$

### Динамическая таблица XII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,5.$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=10.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=70 \text{ сант.}, J=858 \text{ сант.}^4.$$

$$\text{Скорость } V=50 \text{ версть в часъ, } v=1.482 \text{ сант. в секунду.}$$

$$a = 7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00472, \frac{a^2}{v^2} = 0,00002228, m=7, l= 5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00472 \omega_{i-1} + 0,002731 \left[ 32 - 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,002731 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 2.3152 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y'_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
0.	0,4544	0	0,4544	0	1
0,1	0,4570	-0,0800	0,3717	4,7192	0,8133
0,2	0,4586	-0,1600	0,3256	14,0371	0,7100
0,3	0,4620	-0,2400	0,3293	24,6027	0,7128
0,4	0,4642	-0,3200	0,3789	32,7557	0,8162
0,5	0,4644	-0,4000	0,4545	35,6749	0,9787
0,6	0,4642	-0,3200	0,6802	27,0981	1,4653
0,7	0,4620	-0,2400	0,8245	4,7798	1,7846
0,8	0,4586	-0,1600	0,8415	-23,5293	1,8347
0,9	0,4570	-0,0800	0,7284	-47,9177	1,5939
1,0	0,4544	0.	0,5288	-59,8979	1,1636
0,1	0,4570		0,2389	-52,6719	0,5227
0,2	0,4586		0,0390	-26,3846	0,0854
0,3	0,4620		-0,0040	9,1611	0
0,4	0,4642		0,1205	42,0300	0,2596
0,5	0,4644		0,3689	60,4037	0,7945
0,6	0,4642		0,6516	58,5144	1,4037
0,7	0,4620		0,7856	40,5929	1,7004
0,8	0,4586		0,8981	12,8860	1,9582
0,9	0,4570		0,8634	-15,8144	1,8890
1,0	0,4544		0,7062	-39,6589	1,5541
0,1	0,4570		0,4722	-48,3661	1,0332
0,2	0,4586		0,2456	-38,5538	0,5035
0,3	0,4620		0,1124	-14,7739	0,2433

По уравнению A

$$\text{при } h=0,4602, a=0,4, l=70, c=1482, k=130,57$$

$$\text{max } y = 0,9788$$

$$\text{по табл. } y_{\text{max}} = 0,8981$$

$$\frac{6,788}{8,981} = 1,09$$

### Динамическая таблица XIII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,5$$

$$P=10.000 \text{ килогр.}, K=10.000 \text{ килогр.}, E=2.000.000 \text{ килогр.}, L=70 \text{ сант.}, J=858 \text{ сант.}^4$$

$$\text{Скорость } V=75 \text{ верст в час, } v=2.223 \text{ сант. в секунду.}$$

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,003147, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000990, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,003147 \omega_{i-1} + 0,001214 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,001214 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,5468 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,4544	0	0,4544	0	1
0,1	0,4570	- 0,0800	0,3732	3.1150	0,8165
0,2	0,4586	- 0,1600	0,3084	9.7458	0,6725
0,3	0,4620	- 0,2400	0,2595	19.0352	0,5617
0,4	0,4642	- 0,3200	0,2529	30.4079	0,5045
0,5	0,4644	- 0,4000	0,2825	40.3891	0,6083
0,6	0,4642	- 0,3200	0,4951	43.7597	1.0666
0,7	0,4620	- 0,2400	0.6998	36.7590	1.5147
0,8	0,4586	- 0,1600	0,8652	20.4247	1.8866
0,9	0,4570	- 0,0806	0,9658	- 2.6206	2.1133
1,0	0,4544	0	0,9870	-27.9588	2.1060
0,1	0,4570		0,8522	-50.1938	1.8648
0,2	0,4586		0,6597	-64.4369	1.4386
0,3	0,4620		0,4407	-68.0269	0,9539
0,4	0,4642		0,2306	-60.4408	0,4969
0,5	0,4644		0,0626	-43.1654	0,1347
0,6	0,4642		- 0,0375	-19.9295	0
0,7	0,4620		- 0,0597	5.0297	0
0,8	0,4586		- 0,0046	31.1707	0
0,9	0,4570		0,1295	52.5815	0,2833
1,0	0,4544		0,3173	66.1163	0,6983
0,1	0,4570		0,5297	68.9229	1.1588
0,2	0,4586		0,7318	61.1158	1.5957
0,3	0,4620		0,8920	43.3779	1.9305
0,4	0,4642		0,8838	20.2150	2.1193
0,5	0,4644		0,9966	- 5.5078	2.1460

по уравнению A

$$\text{при } h=0,4600, a=0,4, l=70, c=2223, k=130.604$$

$$\text{max. } y=1,0306$$

$$\text{по табл. } y_{\text{max}}=0,9961$$

$$\frac{10306}{9961} = 1,03$$

**Динамическая таблица XIV.**

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,5$$

$P=10\,000$  килогр.,  $K=10\,000$  килогр.,  $E=2\,000\,000$  килогр.,  $L=70$  сант.,  $J=858$  сант.<sup>4</sup>.

Скорость  $V=100$  верст в час,  $v=2964$  сант. в секунду.

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00236, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000557, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00236 \omega_{i-1} + 0,000683 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000683 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,1576 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,4544	0	0,4544	0	1
0,1	0,4570	— 0,0800	0,3737	2.3207	0,8177
0,2	0,4586	— 0,1600	0,3023	7.4498	0,6592
0,3	0,4620	— 0,2400	0,2459	14.7873	0,5322
0,4	0,4642	— 0,3200	0,2095	23.6974	0,4509
0,5	0,4644	— 0,4000	0,1955	33.3306	0,4210
0,6	0,4642	— 0,3200	0,3625	40.0426	0,7808
0,7	0,4620	— 0,2400	0,5370	40.4725	1.1601
0,8	0,4586	— 0,1600	0,7035	34.5046	1.5340
0,9	0,4570	— 0,0800	0,8481	22.6545	1.8558
1,0	0,4544	0	0,9581	5.9965	2.1084
0,1	0,4570	0	0,9447	—12.4014	2.0672
0,2	0,4586	0	0,8893	—29.3167	1.9392
0,3	0,4620	0	0,7974	—43.2285	1.7260
0,4	0,4642	0	0,6780	—52.8492	1.4605
0,5	0,4644	0	0,5423	—57.6021	1.1677
0,6	0,4642	0	0,4024	—57.0975	0,8638
0,7	0,4620	0	0,2707	—51.4383	0,5859
0,8	0,4586	0	0,1537	—41.1648	0,3461
0,9	0,4570	0	0,0763	—27.0660	0,1670
1,0	0,4544	0	0,0309	—10.6224	0,0680
0,1	0,4570	0	0,0364	6.5917	0,0799
0,2	0,4586	0	0,0715	23.0277	0,1559
0,3	0,4620	0	0,1431	37.4067	0,3124
0,4	0,4642	0	0,2446	48.4990	0,5269
0,5	0,4644	0	0,3669	55.3585	0,7900
0,6	0,4642	0	0,4990	57.3643	1.0750
0,7	0,4620	0	0,6291	54.3126	1.3617
0,8	0,4586	0	0,7453	46.4039	1.6250
0,9	0,4570	0	0,8393	34.3083	1.8365
1,0	0,4544	0	0,8981	19.1198	1.9764
0,1	0,4570	0	0,9184	2.3984	2.0096
0,2	0,4586	0	0,9483	—15.1452	2.0678

По уравнению A  
 при  $h=0,4602$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=2964$ ,  $k=130,57$   
 $\text{max. } y=0,9943$   
 по табл.  $y_{\text{max}}=0,9581$   
 $\frac{9943}{9581} = 1,04$

### Динамическая таблица XV.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = \dot{1}$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=70$  сант.,  $J=1.715$  сант. \*

Скорость  $V=25$  вереть в часъ,  $c=741$  сант. в секунду.

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00944, \frac{a^2}{v^2} = 0,00008912, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00944 \omega_{i-1} + 0,010924 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]$$

$$= \frac{1 + 0,010924 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}{\omega_i = \omega_{i-1} + 4,6304 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]}$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо круглое.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3950	0	0,2950	0	1
0,1	0,3912	- 0,0800	0,3088	11.0059	0,7894
0,2	0,3882	- 0,1600	0,3668	22.9401	0,9450
0,3	0,3862	- 0,2400	0,4654	19.3447	1,2052
0,4	0,3858	- 0,3200	0,4555	6.5428	1,1794
0,5	0,3852	- 0,4000	0,3511	2.9674	0,9114
0,6	0,3858	- 0,3200	0,4277	1.8639	1,1086
0,7	0,3862	- 0,2400	0,4404	- 6.2006	1,1403
0,8	0,3882	- 0,1600	0,3860	- 9.2527	0,9943
0,9	0,3912	- 0,0800	0,3558	- 3.2384	0,9095
1,0	0,3950	0	0,4002	+ 3.1085	1,0132
0,1	0,3912		0,3992	6.0980	1,0204
0,2	0,3882		0,4197	6.7604	1,0811
0,3	0,3862		0,4276	4.4252	1,1072
0,4	0,3858		0,4104	2.1503	1,0637
0,5	0,3852		0,3890	3.8433	1,0099
0,6	0,3858		0,3968	6.7655	1,0285
0,7	0,3862		0,4211	6.8734	1,0904
0,8	0,3882		0,4276	4.8267	1,1015
0,9	0,3912		0,4147	3.3917	1,0600
1,0	0,3950		0,4026	4.7872	1,0192
0,1	0,3912		0,4125	6.3396	1,0558
0,2	0,3882		0,4242	5.3631	1,0927
0,3	0,3862		0,4179	3.5284	1,0812
0,4	0,3858		0,4016	3.5190	1,0409

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
	0,3950	0	1
	0,3742	5.6876	0,9564
	0,4108	9.3864	1,0582
	0,4456	6.0943	1,1538
	0,4264	1.3074	1,1052
	0,3860	1.8044	1,0027
	0,3805	6.4562	0,9862
	0,4152	8.5719	1,0751
	0,4392	5.6007	1,1314
	0,4231	2.3374	1,0815
	0,3968	3.5519	1,0040
	0,4010	6.7472	1,0250

По уравненію A  
при  $h=0,3883$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=741$ ,  $k=142,15$   
 $max. y=0,3992$   
по табл.  $y_{max}=0,4654$   
 $\frac{3992}{4654} = 0,858$  <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Расчеты эти были дважды проверены, и такимъ образомъ обнаружилось не всегда допустимое примѣненіе уравненія.

### Динамическая таблица XVI.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 1.$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=10.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=70 \text{ сант.}, J=1.715 \text{ сант.}^4$$

Скорость  $V=50$  версть в часъ,  $v=1.482$  сант. в секунду.

$$a = 7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00472, \frac{a^2}{v^2} = 0,00002228, m = 7, l = 5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00472 \omega_{i-1} + 0,002731 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,002731 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 2,3152 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3950	0	0,3950	0	1	0	0,3950	0	1
0,1	0,3912	-0,0800	0,3132	5,3072	0,8006	-0,0400	0,3511	3,8732	0,8975
0,2	0,3882	-0,1600	0,2740	15,2559	0,7058	-0,0800	0,3332	10,2432	0,8583
0,3	0,3862	-0,2400	0,2842	25,8301	0,7358	-0,1200	0,3432	16,7830	0,8886
0,4	0,3858	-0,3200	0,3378	32,9271	0,8756	-0,1600	0,3827	20,9956	0,9920
0,5	0,3852	-0,4000	0,4096	33,7914	1,0633	-0,2000	0,4314	21,1738	1,1199
0,6	0,3858	-0,3200	0,6192	21,9227	1,6050	-0,1600	0,5448	14,0183	1,4121
0,7	0,3862	-0,2400	0,7295	-4,0742	1,8888	-0,1200	0,6013	-0,7701	1,5569
0,8	0,3882	-0,1600	0,7002	-32,8037	1,8037	-0,0800	0,5798	-16,9912	1,4935
0,9	0,3912	-0,0800	0,5514	-52,6696	1,4095	-0,0400	0,4920	-28,0058	1,2575
1,0	0,3950	0	0,3496	-58,3069	0,8850	0	0,3762	-28,8263	0,9052
0,1	0,3912		0,0926	-40,8765	0,2367		0,2490	-18,7950	0,6365
0,2	0,3882		-0,0279	-7,8791	0		0,1916	-1,4931	0,4935
0,3	0,3862		+0,0213	+28,2909	0,0552		0,2240	16,0847	0,5080
0,4	0,3858		0,2249	39,6839	0,5829		0,3316	29,1648	0,8595
0,5	0,3852		0,4329	46,9355	1,1238		0,4685	29,9750	1,2162
0,6	0,3858		0,6258	36,0460	1,1621		0,5777	19,6495	1,4974
0,7	0,3862		0,7264	7,9353	1,8809		0,6161	2,6982	1,5955
0,8	0,3882		0,6790	-18,4060	1,7491		0,5705	-13,7809	1,4697
0,9	0,3912		0,5256	-35,3871	1,3435				
1,0	0,3950		0,3320	-36,5184	0,8405				
0,1	0,3912		0,1775	-22,1010	0,4537				
0,2	0,3882		0,1215	-8,7070	0,3130				
0,3	0,3862		0,1379	+16,6263	0,3563				
0,4	0,3858		0,2628	35,5576	0,6812				

По уравнению A  
при  $h=0,3883$ ,  $a=0,2$ ,  $l=70$ ,  
 $c=1482$ ,  $k=142,15$ .  
 $max. y=0,6239$   
по табл.  $y_{max}=0,6162$   
6.239  
6.162=1.017.

Продолжение динамической таблицы XVI.

Колесо со впадиной глубиной 0,4 саж.

Совершенно круглое колесо,  
рельс прямой.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,5	0,3852		0,4438	40,5945	1,1524				
0,6	0,3858		0,6059	30,1069	1,5705				
0,7	0,3862		0,7270	6,8707	1,8824				
0,8	0,3882		0,6749	-19,3030	1,7380				
0,9	0,3912								
1,0	0,3950					0,3950	0		1
0,1	0,3912					0,3890	2,1800		0,9944
0,2	0,3882					0,3935	4,1444		1,0136
0,3	0,3862					0,4052	5,1683		1,0492
0,4	0,3868					0,4279	4,5329		1,1091
0,5	0,3853					0,4332	2,5848		1,1246
0,6	0,3858					0,4285	0,6104		1,1106
0,7	0,3862					0,4162	-0,5487		1,0777
0,8	0,3882					0,4016	-0,3894		1,0345
0,9	0,3912					0,3950	+0,9947		1,0097
1,0	0,3950					0,3927	2,8031		1,0038

По уравнению A  
при  $h=0,3883$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=1,482$ ,  $k=142,15$   
 $\max y=0,8594$   
по табл.  $y_{\max}=0,7295$ .  
 $\frac{8594}{7295}=1,18$ .

### Динамическая таблица XVII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 1.$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=70$  сант.;  $J = 1.715$  сант. <sup>4</sup>

Скорость  $V=75$  верст в час,  $v=2.223$  сант. в секунду.

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,003147, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000990, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_{i-1} - y'_{i-1} + 0,003147 \omega_{i-1} + 0,001214 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,001214 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,5468 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиной 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3950	0	0,3950	0	1
0,1	0,3912	-0,0800	0,3142	3.5154	0,8032
0,2	0,3882	-0,1600	0,2517	10.8027	0,6483
0,3	0,3862	-0,2400	0,2173	20.5585	0,5626
0,4	0,3858	-0,3200	0,2158	31.0092	0,5593
0,5	0,3852	-0,4000	0,2459	40.2319	0,6383
0,6	0,3858	-0,3200	0,4567	42.1711	1.1838
0,7	0,3862	-0,2400	0,6520	32.2094	1.6882
0,8	0,3882	-0,1600	0,7969	12.4483	2.0528
0,9	0,3912	-0,0800	0,8669	-13.1465	2.2160
1.0	0,3950	0	0,8522	-39.6428	2.1570
0,1	0,3912		0,6809	-60.4145	1.7405
0,2	0,3882		0,4631	-69.9058	1.1930
0,3	0,3862		0,2384	-66.2773	0,6173
0,4	0,3858		0,0482	-50.1854	0,1249
0,5	0,3852		-0,0728	-26.7357	0
0,6	0,3858		-0,1146	-1.5811	0
0,7	0,3862		-0,0781	+23.5850	0
0,8	0,3882		0,0345	47.3120	0,0888
0,9	0,3912		0,2137	64.6478	0,5462
1.0	0,3950		0,4275	70.3753	1.0823
0,1	0,3912		0,6370	63.4696	1.6283
0,2	0,3882		0,8034	45.0576	2.0698
0,3	0,3862		0,9017	18.4228	2.3348
0,4	0,3858		0,9018	-11.3226	2.3374
0,5	0,3852		0,8106	-38.3750	2.1043

По уравнению A  
при  $h=0,3883$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=2223$ ,  $k=142.206$   
 $max. y=0,9670$

по табл.  $y_{max}=0,9018$   
 $\frac{9670}{9018} = 1,06$

$\delta$	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3950	0	0	1
0,1	-0,0400	0,3532	2.4392	0,9028
0,2	-0,0800	0,3226	6.6929	0,8309
0,3	-0,1200	0,3078	12.0172	0,7970
0,4	-0,1600	0,3105	17.4771	0,8048
0,5	-0,2000	0,3293	22.0901	0,8549
0,6	-0,1600	0,4380	22.8486	1.1353
0,7	-0,1200	0,5380	17.5021	1.3930
0,8	-0,0800	0,6115	7.1901	1.5752
0,9	-0	0,6462	-5.9852	1.6518
1.0		0,6375	-19.4626	1.6139
0,1		0,5501	-29.9860	1.4062
0,2		0,4390	-34.8509	1.1310
0,3		0,3243	-32.9847	0,8397
0,4		0,2271	-24.8950	0,5886
0,5		0,1649	-12.0035	0,4281
0,6		0,1487	+3.2579	0,3854
0,7		0,1810	18.0460	0,4686
0,8		0,2552	31.1825	0,6574
0,9		0,3620	38.8500	0,9253
1.0		0,4814	38.5548	1.2190
0,1		0,5879	31.5218	1.5024
0,2		0,6615	18.8444	1.7040
0,3		0,6882	2.9295	1.7819
0,4		0,6631	-13.1521	1.7188
0,5		0,5913	-26.3506	1.5350

По уравнению A  
при  $h=0,3883$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=2,223$   
 $k=142.206$

$max. y=0,6776$   
по табл.  $y_{max}=0,6882$   
 $\frac{6776}{6882} = 0,98$

Продолжение динамической таблицы XVII.

Колесо круглое, рельс прямой

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
1,0	0,3950					0,3950	0	0	1
0,1	0,3912					0,3923	1,3573	1,3573	1,0029
0,2	0,3882					0,3937	2,5940	2,5940	1,0114
0,3	0,3862					0,3986	3,5008	3,5008	1,0321
0,4	0,3858					0,4055	3,9533	3,9533	1,0510
0,5	0,3852					0,4140	3,9102	3,9102	1,0748
0,6	0,3858					0,4205	3,4133	3,4133	1,0899
0,7	0,3862					0,4248	2,6203	2,6203	1,1000
0,8	0,3882					0,4263	1,7258	1,7258	1,0981
0,9	0,3912					0,4250	0,9628	0,9628	1,0864
1,0	0,3950					0,4218	0,5530	0,5530	1,0678
0,1	0,3912					0,4180	0,3533	0,3533	1,0684
0,2	0,3882					0,4020	0,5461	0,5461	1,0355
0,3	0,3862					0,3899	1,4250	1,4250	1,0096
0,4	0,3858					0,3914	2,5668	2,5668	1,0144
0,5	0,3852					0,3962	3,4912	3,4912	1,0285
0,6	0,3858					0,4033	4,0544	4,0544	1,0453
0,7	0,3862					0,4114	4,1873	4,1873	1,0652
0,8	0,3882					0,4190	3,9148	3,9148	1,0796
0,9	0,3912					0,4252	3,3776	3,3776	1,0869
1,0	0,3950					0,4294	2,7365	2,7365	1,0871
0,1	0,3912					0,4315	1,9076	1,9076	1,1030
0,2	0,3882					0,4305	0,8391	0,8391	1,1090
0,3	0,3862					0,4261	-0,2199	-0,2199	1,1032
0,4	0,3858					0,4187	-0,9968	-0,9968	1,0853

### Динамическая таблица XVIII.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 1.$$

$P=10.000$  кил.,  $K=10.000$  кил.,  $E=2.000.000$  кил.,  $L=70$  сант.,  $J=1.715$  сант.<sup>4</sup>.

Скорость  $V=100$  версть в часъ,  $v=2.964$  сант. в секунду.

$$a = 7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00236, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000557, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00236 \omega_{i-1} + 0,000683 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000683 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1.1576 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3250	0	0,3950	0	0
0,1	0,3912	-0,0800	0,3146	2.6379	0,8041
0,2	0,3882	-0,1600	0,2447	2.2417	0,6302
0,3	0,3862	-0,2400	0,1914	16.2857	0,4956
0,4	0,3858	-0,3200	0,1596	25.9618	0,4138
0,5	0,3852	-0,4000	0,1519	36.2627	0,3944
0,6	0,3858	-0,3200	0,3261	42.7979	0,8452
0,7	0,3862	-0,2400	0,5055	41.6101	1,3088
0,8	0,3882	-0,1600	0,6668	33.0602	1,7177
0,9	0,3912	-0,0800	0,8040	18.2359	2,0553
1,0	0,3950	0	0,9252	-1.8092	2,3423
0,1	0,3912		0,8834	-23.6101	2,2711
0,2	0,3882		0,8018	-42.9891	2,0679
0,3	0,3862		0,6769	-57.8238	1,7528
0,4	0,3856		0,5238	-66.4507	1,3576
0,5	0,3852		0,3597	-67.8285	0,9338
0,6	0,3858		0,2140	-62.2983	0,5547
0,7	0,3862		0,0813	-50.4559	0,2105
0,8	0,3882		-0,0193	-33.7405	0
0,9	0,3912		-0,0759	-15.0706	0

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3950	0	1
-0,0400	0,3540	1.8071	0,0049
-0,0800	0,3193	5.0456	0,8225
-0,1200	0,2939	8.1298	0,7611
-0,1600	0,2770	12.1294	0,7180
-0,2000	0,2702	17.6781	0,7015
-0,1600	0,3555	21.4516	0,5214
-0,1200	0,4446	21.4272	1,1513
-0,0800	0,5286	17.6859	1,3615
-0,0400	0,6035	10.6450	1,5427
0	0,6640	0,9261	1,6809
0,6489	-9.7415	1,6587	
0,6096	-19.4246	1,5703	
0,5499	-27.0440	1,4238	
0,4760	-31.7193	1,2337	
0,3955	-32.9265	1,0267	
0,3165	-30.5263	0,8204	
0,2482	-24.7756	0,6427	
0,1974	-15.7046	0,5085	
0,1704	-5.4368	0,4364	

Продолжение динамической таблицы XVIII.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
1,0	0,3950		-0,0783	3.7008	0
0,1	0,3912		-0,0469	22.4253	0
0,2	0,3882		+0,0276	40.3985	0,0711
0,3	0,3862		0,1414	55.1035	0,3661
0,4	0,3858		0,2728	64.2548	0,7072
0,5	0,3852		0,4295	66.8841	1.1150
0,6	0,3858		0,5810	66.6880	1.5059
0,7	0,3862		0,7161	52.8799	1.8542
0,8	0,3882		0,8181	36.8151	2.1072
0,9	0,3912		0,8768	17.3523	2.2414
1,0	0,3950		0,8870	- 3.3428	2.2455
0,1	0,3912		0,8489	-23.4605	2.1700

По уравнению А

при  $h=0,3883$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=2.964$ ,  $k=142,15$ .

$\max y=0,9161$

по табл.  $y_{\max}=0,9252$ .

$$\frac{9161}{9252}=0,99.$$

$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,1693		5.5258	0,4285
0,1938		13.9724	0,4954
0,2411		24.4775	0,6210
0,3060		30.9602	0,7923
0,3814		33.9376	0,9885
0,4592		34.4482	1.1921
0,5335		30.4963	1.3827
0,5942		23.5185	1.5386
0,6351		14.3226	1.6361
0,6425		4.2078	1.6423
0,6360		- 5.7461	1.6161

По уравнению А

при  $h=0,3883$ ,  $a=0,2$ ,  $l=70$ ,  
 $c=2964$ ,  $k=142,15$

$\max y=0,6522$

по табл.  $y_{\max}=0,6640$

$$\frac{6522}{6640}=0,98.$$

### Динамическая таблица XIX.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 2.$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=10.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=60 \text{ сант.}, J=2.160 \text{ сант.}^4$$

Скорость  $V=25$  вер. вь часъ,  $v=741$  сант. вь секунду.

$$a=6 \text{ сант.}, \frac{a}{v}=0,0081, \frac{a^2}{v^2}=0,0000656, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0081 \omega_{i-1} + 0,0080426 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0080426 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 3,88976 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	0,3490	0	1
0,1	6,3444	-0,0666	0,2767	9,6151	0,8034
0,2	0,3368	-0,1332	0,3137	20,3073	0,9313
0,3	0,3321	-0,2000	0,3924	19,3531	1,1816
0,4	0,3294	-0,2665	0,4172	7,9742	1,2668
0,5	0,3286	-0,3333	0,3336	0,7177	1,0153
0,6	0,3294	-0,4000	0,2554	6,9926	0,7755
0,7	0,3321	-0,3333	0,3829	9,2524	1,1529
0,8	0,3368	-0,2665	0,4929	-7,7872	1,4635
0,9	0,3444	-0,1332	0,3743	-21,8931	1,0869
1,0	0,3490	-0,0666	0,2439	-12,7303	0,6987
0,1	0,3444	0	0,2655	6,2544	0,7709
0,2	0,3368		0,3374	16,9370	1,0019
0,3	0,3821		0,4384	11,7242	1,3201
0,4	0,3294		0,4340	-2,6078	1,3176
0,5	0,3286		0,3337	-8,0787	1,0155
0,6	0,3294		0,2647	1,3650	0,8037
0,7	0,3321		0,3136	12,8569	0,9443
0,8	0,3368		0,4010	13,0718	1,1906
0,9	0,3444		9,4332	4,0994	1,2578

Продолженіе динамической таблицы XIX.

$\delta$	$h_i$ сантим.	$y'_i$ сантим.	$y_i$ сантим.	$\omega_i$ сантим.	$\frac{y_i}{h_i}$
1.0	0,3490		0,3874	-2.6045	1.1100
0,1	0,3444		0,3296	-0,5538	0,9570
0,2	0,3368		0,3215	6.0870	0,9546
0,3	0,3321		0,3601	9.0929	1.0844
0,4	0,3294		0,3905	5.4310	1.1855
0,5	0,3286		0,3739	0,2423	1.1379
0,6	0,3294		0,3334	0,0781	1.0121
0,7	0,3321		0,3200	4.9638	0,9635
0,8	0,3368		0,3499	9.0272	1.0390
0,9	0,3444		0,3892	8.0169	1.1360
1.0	0,3440		0,3984	3.4995	1.1581

По уравненію A

при  $h=0,3363$ ,  $a=0,4$ ,  $l=66$ ,  $c=741$ ,  $k=152,75$ .

$\max y=0,4913$ .

по табл.  $y_{\max}=0,4929$

$$\frac{4913}{4929} = 1.$$

### Динамическая таблица XX.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 2.$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=60$  сант.,  $J=2.160$  сант. <sup>4</sup>.

Скорость  $V=50$  версть в часъ,  $v=1.482$  сант. в секунду

$$a=6 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,00405, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000164, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,00405 \omega_{i-1} + 0,0020106 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0020106 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,9865 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.      Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	0,3490	0	1	0	0,3490	0	1
0,1	0,3444	-0,0666	0,2811	4,5910	0,8162	-0,0333	0,3129	3,4045	0,9085
0,2	0,3368	-0,1332	0,2424	13,0062	0,7197	-0,0666	0,2958	8,3715	0,8783
0,3	0,3321	-0,2000	0,2425	22,3534	0,7302	-0,1000	0,2998	13,2686	0,9028
0,4	0,3294	-0,2665	0,2770	29,5463	0,8409	-0,1333	0,3211	16,5958	0,9748
0,5	0,3286	-0,3333	0,3315	32,2489	1,0088	-0,1666	0,3502	17,3046	1,0657
0,6	0,3294	-0,4000	0,3849	29,7289	1,1652	-0,2000	0,3759	15,3616	1,1412
0,7	0,3321	-0,3333	0,5447	17,8300	1,6402	-0,1666	0,4552	8,8855	13,707
0,8	0,3368	-0,2665	0,6287	-2,6861	1,8667	-0,1333	0,4922	-2,1833	14,614
0,9	0,3444	-0,2000	0,6191	-26,2204	1,7686	-0,1000	0,4906	-13,9091	14,245
1,0	0,3490	-0,1332	0,5245	-44,0356	1,5029	-0,0666	0,4360	-22,3459	1,2493
0,1	0,3414	-0,0666	0,3795	-51,5424	1,1019	-0,0333	0,3602	-24,9699	1,0459
0,2	0,3368	0	0,2330	-46,5894	0,6918	0	0,2930	-21,7359	0,8700
0,3	0,3321		0,0698	-27,9589	0,2101		0,2140	-12,2953	0,6354
0,4	0,3294		0,097	-0,5224	0,0295		0,1866	+ 1,6616	0,5665
0,5	0,3286		0,0672	+ 27,7938	0,2045		0,2177	15,2314	0,6625
0,6	0,3294		0,2224	46,5411	0,6751		0,2949	23,9292	0,8952
0,7	0,3321		0,4195	49,5869	1,2632		0,3908	24,9940	1,1768
0,8	0,3368		0,5902	36,6294	1,7524		0,4723	18,5140	1,4023
0,9	0,3444		0,6789	11,1189	1,9712		0,5159	7,2198	1,4980

Продолжение динамической таблицы ХХ.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
1,0	0,3490		0,6542	-14,2810	1,8745		0,5072	- 6,8673	1,4533
0,1	0,3444		0,5377	-33,5869	1,5612		0,4467	-15,9805	1,2970
0,2	0,3368		0,3676	-41,2077	1,0905		0,3617	-19,4133	1,0739
0,3	0,3321		0,1992	-34,5212	0,6000		0,2777	-15,9684	0,8362
0,4	0,3294		0,0886	-15,6215	0,2690		0,2233	- 6,6307	0,6778
0,5	0,3286		0,0723	+ 8,9172	0,2200		0,2184	+ 7,3175	0,5165
0,6	0,3294		0,1537	30,5252	0,4666		0,2720	19,0737	0,8257
0,7	0,3321		0,3025	41,0924	0,9108		0,3535	22,8353	1,0644
0,8	0,3368		0,4633	38,9531	1,3756		0,4339	19,7140	1,2883
0,9	0,3444		0,5854	24,9532	1,7000		0,4875	11,3378	1,4155
1,0	0,3490		0,6318	4,7216	1,8115		0,5000	0,7688	1,4327
0,1	0,3444		0,5925	-16,0121	1,7204		0,4702	- 9,0520	1,3653

<p>По уравнению А</p> <p>при <math>h=0,3363, a=0,4, l=72, c=1482,</math> <math>k=152,75</math></p> <p><math>\max. y=0,7336</math></p> <p>по табл. <math>y_{\max}=0,6789</math></p> <p><math>\frac{7336}{6789}=1,08</math></p>	<p>По уравнению А</p> <p>при <math>h=0,3363, a=0,2, l=72,</math> <math>c=1482, k=152,75</math></p> <p><math>\max. y=0,5349</math></p> <p>по табл. <math>y_{\max}=0,5159</math></p> <p><math>\frac{5349}{5159}=1,037</math></p>
---	--

### Динамическая таблица XXI.

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 2.$$

$P=10.000$  кил.,  $K=10.000$  кил.,  $E=2.000.000$  кил.,  $L=60$  сант.,  $J=2.160$  сант. <sup>4</sup>  
Скорость  $V=75$  верст в час,  $v=2.223$  сант. в секунду.

$$a = 6 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,0027, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000729, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0027 \omega_{i-1} + 0,000896 \left[ 32 + 1,4 (y'_i - 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000896 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,3243 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиной 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ сant.	$y'_i$ сant.	$y_i$ сant.	$\omega_i$ сant.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	0,3490	0	1
0,1	0,3444	-0,0666	0,2818	3,0396	0,8182
0,2	0,3368	-0,1332	0,2278	9,0589	0,6763
0,3	0,3321	-0,2000	0,1938	17,1689	0,5836
0,4	0,3294	-0,2665	0,1739	26,5074	0,5279
0,5	0,3286	-0,3333	0,1898	35,6617	0,5776
0,6	0,3294	-0,4000	0,2268	43,0067	0,6858
0,7	0,3321	-0,3333	0,4113	43,8117	1,2388
0,8	0,3368	-0,2665	0,5820	34,5447	1,7279
0,9	0,3444	-0,2000	0,7138	17,2518	2,0708
1,0	0,3490	-0,1332	0,7888	-5,1108	2,2602
0,1	0,3444	-0,0666	0,8001	-29,7261	2,3231
0,2	0,3368	0	0,7451	-53,5690	2,2123
0,3	0,3321		0,5660	-71,1182	1,7043
0,4	0,3294		0,3559	-77,4531	1,0804
0,5	0,3286		0,1476	-71,3764	0,4491
0,6	0,3294		-0,0260	-54,5763	0
0,7	0,3321		-0,1446	-33,0712	0
0,8	0,3368		-0,2002	-11,2431	0
0,9	0,3444		-0,1966	+10,6814	0
1,0	0,3490		-0,1384	+32,4913	0

$y'_i$ сant.	$y_i$ сant.	$\omega_i$ сant.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	1
-0,0332	0,3143	2,2238	0,9132
-0,0666	0,2879	5,7219	0,8548
-0,1000	0,2736	10,0000	0,8238
-0,1333	0,2710	14,4833	0,8227
-0,1666	0,2801	18,5667	0,8523
-0,1333	0,2986	21,6979	0,9065
-0,1000	0,4154	20,8849	1,2508
-0,0666	0,4934	14,6568	1,4650
-0,0339	0,5482	5,1424	1,5918
0	0,5746	-4,7516	1,6462
0,5729	-16,7569	1,6635	
0,5482	-28,2172	1,6276	
0,4534	-36,6289	1,3652	
0,3443	-39,2636	1,0452	
0,2378	-35,5519	0,7237	
0,1506	-26,0303	0,4572	
0,0973	-12,2555	0,2930	
0,0843	+3,5601	0,2503	
0,1169	19,0159	0,3279	
0,1852	31,6853	0,5307	

Продолжение динамической таблицы XXI.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,1	0,3444		-0,0215	53.9766	0
0,2	0,3368		+0,1496	70.8120	0,4440
0,3	0,3321		0,3515	77.1675	1,0559
0,4	0,3294		0,5520	71.3582	1,6757
0,5	0,3286		0,7190	53.4467	2,1880
0,6	0,3294		0,8232	28.3199	2,5000
0,7	0,3321		0,8522	-0,5784	2,5680
0,8	0,3368		0,8008	-28.3395	2,3818
<p>По уравнению А при <math>h=0,3363, a=0,4, l=66,</math> <math>c=2223, k=152,75</math> <math>\max y=0,9152</math> по табл. <math>y_{\max}=0,8522</math> <math>\frac{9152}{8522}=107.</math></p>					
0,1	0,3444				
0,2	0,3368				
0,3	0,3321				
0,4	0,3294				
0,5	0,3286				
0,6	0,3294				
0,7	0,3321				
0,8	0,3368				
0,9	0,3444				
1,0	0,3490				
0,1	0,3444				
0,2	0,3368				
0,3	0,3321				
0,4	0,3294				
0,5	0,3286				
0,6	0,3294				
0,7	0,3321				
0,8	0,3368				
0,9	0,3344				
1,0	0,3490				

$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
	0,2809	39.5296	0,8156
	0,3889	41.2117	1,1547
	0,4914	36.3473	1,4797
	0,5716	25.7615	1,7352
	0,6164	11.2715	1,8760
	0,6189	-4.6373	1,8788
<p>По уравнению А при <math>h=0,3363, a=0,2,</math> <math>l=66, c=2223, k=152,72</math> <math>\max y=0,6248</math> по табл. <math>y_{\max}=0,6189.</math> <math>\frac{6248}{6189}=1,01.</math></p>			
<p>Колесо круглое, рельз прямой.</p>			
	0,3490	0	1.
	0,3470	1.5525	1,0076
	0,3490	2.5048	1,0362
	0,3529	2,9361	1,0629
	0,3570	2,9604	1,0838
	0,3609	2,5899	1,0983
	0,3633	2,0314	1,1026
	0,3642	1,4837	1,0967
	0,3637	1,1409	1,0802
	0,3627	1,2090	1,0531
	0,3624	1,6632	1,0386
	0,3636	2,0916	1,0557
	0,3656	2,0793	1,0855
	0,3659	1,6354	1,1018
	0,3657	0,9624	1,1102
	0,3625	0,2836	1,1031
	0,3588	-0,0562	1,0893
	0,3545	-0,1827	1,0674
	0,3493	+0,1775	1,0386
	0,3474	0,8160	1,0388

**Динамическая таблица XXII.**

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 2.$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=60$  сант.,  $J=2160$  сант. <sup>4</sup>.

Скорость  $V=100$  версть в часъ,  $v=2.965$  сант. в секунду.

$$a=6 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,002025, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000041, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,002025 \omega_{i-1} + 0,000504 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000504 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 0,9933 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	0,3490	0	1
0,1	0,3444	-0,0666	0,2794	1,4403	0,8110
0,2	0,3368	-0,1332	0,2163	6,2617	0,6422
0,3	0,3321	-0,2000	0,1661	13,2167	0,5001
0,4	0,3294	-0,2665	0,1324	21,7740	0,4019
0,5	0,3286	-0,3333	0,1173	31,2094	0,3569
0,6	0,3294	-0,4000	0,1217	39,7025	0,3700
0,7	0,3321	-0,3333	0,2728	45,7331	0,8214
0,8	0,3368	-0,2665	0,4270	45,2922	1,2678
0,9	0,3444	-0,2000	0,5618	39,0042	1,6312
1,0	0,3490	-0,1332	0,6866	27,6769	1,9678
0,1	0,3444	-0,0666	0,7820	11,7830	2,3706
0,2	0,3368	0	0,8392	-7,7830	2,4917
0,3	0,3321		0,7899	-28,0196	2,3785
0,4	0,3294		0,7036	-45,5801	2,1342
0,5	0,3286		0,5863	-58,7252	1,7842
0,6	0,3294		6,4505	-66,2098	1,3706
0,7	0,3321		0,3081	-67,3523	0,9277
0,8	0,3368		0,1721	-62,1300	0,5109
0,9	0,3444		0,0547	-51,2091	0,1588
1,0	0,3490		-0,0341	-36,4491	0
0,1	0,3444		-0,0177	-20,4843	0
0,2	0,3368		-0,0010	-4,5172	0
0,3	0,3321		0,0478	+10,3100	0,1439
0,4	0,3294		0,0810	23,3111	0,2462
0,5	0,3286		0,1380	34,0684	0,4200
0,6	0,3294		0,2129	42,0591	0,6463
0,7	0,3321		0,2970	47,6167	0,8810
0,8	0,3368		0,3894	48,3906	1,1561
0,9	0,3444		0,4779	45,3907	1,3876

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3490	0	1
-0,0332	0,3150	1,6563	0,9147
-0,0666	0,2857	4,3187	0,8483
0,1000	0,2628	7,8168	0,7913
-0,1333	0,2479	11,9422	0,7523
-0,1666	0,2418	16,3899	0,7358
-0,2000	0,2448	20,8123	0,7432
-0,1666	0,3222	23,4955	0,9701
-0,1333	0,4014	22,9331	1,1918
-0,1000	0,4756	19,3930	1,3810
-0,0666	0,5395	13,2901	1,5460
-0,0333	0,5883	4,8489	1,7082
0	0,6177	-5,6110	1,8340
	0,5915	-16,5352	1,7810
	0,5444	-26,0969	1,6527
	0,4804	-33,2853	1,4619
	0,4052	-37,3418	1,2301
	0,3258	-37,8395	0,9810
	0,2496	-34,7208	0,7411
	0,1836	-27,9637	0,5033
	0,1349	-18,6986	0,3862
	0,1085	-8,2849	0,3150
	0,1028	+3,0017	0,3052
	0,1196	13,9603	0,3601
	0,1574	23,6419	0,4778
	0,2126	31,2035	0,6464
	0,2801	36,0044	0,8503
	0,3536	37,7008	1,0647
	0,4270	36,4290	1,2678
	0,4944	32,2492	1,4355

Продолжение динамической таблицы XXII.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
1,0	0,3490		0,5556	39.1288	1.5920	0,5504	25.7379		1.5770
0,1	0,3444		0,6166	29.8741	1.7903	0,5909	17.1491		1.7157
0,2	0,3368		0,6555	18.0176	1.9462	0,6120	6,8052		1.8171
0,3	0,3321		0,6681	4.5501	2.0117	0,6109	- 4.1798		1.8039
0,4	0,3294		0,6530	-9.1656	19.824	0,5880	-14.9068		1.7848
0,5	0,3286								
По уравнению А при $h=0,3363, a=0,4, l=66,$ $c=2965, k=152,75$ $max. y=0,8674$ по табл. $y_{max}=8392$ $\frac{8674}{8392}=1,033$						по уравнению А при $h=0,3363, a=0,2, l=66,$ $c=2965$ и $k=152,75$ $max. y=0,6018$ по табл. $y_{max}=0,6177$ $\frac{6018}{6177}=0,98$			
$\frac{8674}{8392}=1,033$						$\frac{6018}{6177}=0,98$			
0,3490						0,3490			
0	0,3490					0,3490	0		1
0,1	0,3444					0,3431	1.0506		0,9902
0,2	0,3368					0,3395	2.0587		1.0080
0,3	0,3321					0,3379	2.9260		1.0175
0,4	0,3294					0,3390	3.6718		1.0258
0,5	0,3286					0,3415	4.3173		1.0317
0,6	0,3294					0,3450	4.8819		1.0367
0,7	0,3321					0,3494	5.3889		1.0388
0,8	0,3368					0,3547	5.8800		1.0374
0,9	0,3444					0,3609	6.4196		1.0299
1,0	0,3490					0,3680	6.9660		1.0341
0,1	0,3444					0,3750	7.2256		1.0685
0,2	0,3368					0,3807	6.9142		1.1134
0,3	0,3321					0,3841	6.0442		1.1463
0,4	0,3294					0,3847	4.7958		1.1660
0,5	0,3286					0,3824	3.3722		1.1707
0,6	0,3294					0,3776	1.9864		1.1609
0,7	0,3321					0,3709	0,8448		1.1330
0,8	0,3368					0,3635	0,1343		1.1012
0,9	0,3449					0,3565	0,0101		1.0555
1,0	0,3490					0,3550	0,0146		1.0215
0,1	0,3444					0,3547	0,6480		1.0308
0,2	0,3368					0,3547	1.3821		1.0531
0,3	0,3321					0,3556	1.5201		1.0707

Кодесо совершенно круглое.

**Динамическая таблица XXIII.**

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 1.$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=15.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=61 \text{ сант.}, J=1.715 \text{ сант.}^4$$

Скорость  $V=75$  верст в часъ,  $v=2.223$  сант. в секунду.

$$a=6,1 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,002744, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000075295, m=7 \quad l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,002744 \omega_{i-1} + 0,0009233 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0009233 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,34593 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2632	0	0,2632	0	1
0,1	0,2608	-0,0800	0,1816	4,5586	0,6909
0,2	0,2582	-0,1600	0,1218	14,0700	0,4706
0,3	0,2576	-0,2400	0,0943	26,5689	0,3653
0,4	0,2572	-0,3200	0,1026	39,4776	0,3989
0,5	0,2568	-0,4000	0,1423	50,2155	0,5541
0,6	0,2572	-0,3200	0,3596	51,0562	1,3980
0,7	0,2576	-0,2400	0,5527	36,4298	2,1457
0,8	0,2588	-0,1600	0,6632	10,5596	2,5627
0,9	0,2608	-0,0800	0,7114	-20,7905	2,7276
1,0	0,2632	0	0,6719	-51,8815	2,5526
0,1	0,2608		0,4796	-73,8900	1,8388
0,2	0,2588		0,2530	-80,2712	0,9777
0,3	0,2576		0,0380	-69,8878	0,1475
0,4	0,2572		-0,1224	-49,5835	0
0,5	0,2568		-0,2201	-27,4033	0
0,6	0,2572		-0,2541	-4,9748	0
0,7	0,2576		-0,2266	17,4659	0
0,8	0,2588		-0,1322	39,6768	0
0,9	0,2608		-0,0067	61,4734	0
1,0	0,2632		0,1746	76,4645	0,6611
0,1	0,2608		0,3815	76,9399	1,4632
0,2	0,2588		0,5643	62,3634	2,1805
0,3	0,2576		0,6854	35,9331	2,6606
0,4	0,2572		0,7924	0,6490	3,0810
0,5	0,2568		0,7317		2,8493

По уравнению A  
при  $h=0,2589, a=0,4, l=61, c=2223,$   
 $k=174,10$   
 $\max y=0,8382$   
по табл.  $y_{\max}=0,7924$   
 $\frac{8382}{7924}=1,06.$

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2632	0	1
-0,0400	0,2227	3,0793	0,8538
-0,8000	0,1948	8,4666	0,7527
-0,1200	0,1836	15,1048	0,7129
-0,1600	0,1917	21,4318	0,7453
-0,2000	0,2155	26,5936	0,8391
-0,1600	0,3288	26,4735	1,2785
-0,1200	0,4278	18,3605	1,6610
-0,0800	0,4940	4,3391	1,9086
-0,0400	0,5162	-12,8856	1,9793
0	0,4893	-29,5012	1,8608
	0,3838	-41,0097	1,4716
	0,2600	-44,0165	1,0045
	0,1409	-37,4560	0,5047
	0,0640	-24,5956	0,2484
	0,0197	-6,2382	0,0741
	0,0295	13,4243	0,1148
	0,0905	30,3408	0,3514
	0,1895	40,8389	0,7322
	0,3051	44,0139	1,1695
	0,4310	36,7766	1,6374
	0,5167	20,2924	1,9812
	0,5392	-12,5282	2,0836
	0,4911		1,9068

По уравнению A  
при  $h=0,2589, a=0,2, l=61,$   
 $c=2223, k=174,10$   
 $\max y=0,5485$   
по табл.  $y_{\max}=0,5392$   
 $\frac{5485}{5392}=1,02.$

**Продолжение динамической таблицы XXIII.**

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 1.$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=15.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=61$  сант.,  $J=1.715$  сант.<sup>4</sup>.

Скорость  $V=75$  верст в час,  $v=2.223$  сант. в секунду.

$$a=6,1 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,002744, \frac{a^2}{v^2} = 0,0000075295, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,002744 \omega_{i-1} + 0,0009233 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0009233 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,34593 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

$\delta_i$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2632	0	0,2632	0	1
0,1	0,2608	- 0,0667	0,1945	4.0987	0,7458
0,2	0,2588	- 0,1333	0,1447	12.3234	0,5591
0,3	0,2576	- 0,2000	0,1224	22.9795	0,4755
0,4	0,2572	- 0,2667	0,1306	33.8940	0,5078
0,5	0,2568	- 0,3333	0,1662	42.8572	0,6472
0,6	0,2572	- 0,4000	0,2205	48.1070	0,8573
0,7	0,2576	- 0,4000	0,3455	46.3548	1.3412
0,8	0,2588	- 0,3333	0,5140	33.5401	1.9861
0,9	0,2608	- 0,2667	0,6280	10.3044	2.4079
1,0	0,2632	- 0,2000	0,6671	-18.0462	2.5346
0,1	0,2608	- 0,1333	0,6272	-46.1158	2.4049
0,2	0,2588	- 0,0667	0,5187	-68.6696	2.0055
0,3	0,2576	0	0,3643	-81.1430	1.4142
0,4	0,2572		0,1337	-78.7677	0,5198
0,5	0,2568		- 0,0623	-62.2647	0
0,6	0,2572		- 0,1950	-40.2450	0
0,7	0,2576		- 0,2639	-17.8454	0
0,8	0,2588		- 0,2708	+ 4.6970	0
0,9	0,2608		- 0,2176	27.1522	0
1,0	0,2632		- 0,1081	49.3008	0
0,1	0,2608		+ 0,0546	68.9646	0,2093
0,2	0,2588		0,2528	78.7444	0,9769
0,3	0,2576		0,4564	73.4126	1.7329
0,4	0,2572		0,6209	53.8474	2.4140
0,5	0,2568		0,7120	26.8316	2.7726
0,6	0,2502		0,7204	- 6.8444	2.8010
0,7	0,2576		0,6392		

По уравнению A

при  $h=0,2589$ ,  $a=0,4$ ,  $l=79,3$ ,  $c=2.223$ ,  $k=174,1$

$\max. y=0,7740$

по табл.  $y_{\max}=0,7204$

$$\frac{7740}{7204} = 1,074$$

**Динамическая таблица XXIV.**

Прямой рельсъ опирается на 4 опоры.

$$A = \frac{2}{3} = 0,6667$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=15.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=70$  сант.,  $J=1715$  сант. <sup>4</sup>.

Скорость  $V=75$  верстъ въ часъ,  $v=2.223$  сант. въ секунду.

$$a=7 \text{ сант.}, \frac{a}{v}=0,003147, \frac{a^2}{v^2}=0,0000099, m=7, l=5 \text{ сант}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,003147 \omega_{i-1} + 0,001214 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,001214 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)} = 1,029932$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,5433 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Для приведенныхъ данныхъ средняя величина погруженія  $h=0,2853$ .

По основнымъ уравненіямъ таблица не вычислена и приводятся только результаты вычисления по уравненію  $A$

при  $h=0,2853$ ,  $a=0,4$ ,  $l=70$ ,  $c=2.223$  и  $k=165.852$

*max.*  $y=0,8594$

при  $h=0,2853$ ,  $a=0,2$ ,  $l=70$ ,  $c=2.223$  и  $k=165.852$

*max.*  $y=0,5724$

**Динамическая таблица XXV.**

Прямой рельс опирается на 4 опоры.

$$A = 0,5$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=15.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=77 \text{ сант.}, J=1.715 \text{ сант.}^4$$

Скорость  $V=75$  верст в час,  $v=2223$  сант. в секунду.

$$a=7,7 \text{ сант.}, \frac{a}{v}=0,0034638, \frac{a^2}{v^2}=0,000011998, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0034638 \omega_{i-1} + 0,0014712 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,0014712 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,6990 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиной 0,2 сант.

Колесо со впадиной глубиной 0,4 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3029	0	0,3029	0	1
0,1	0,3049	-0,0400	0,2615	3.6516	0,8578
0,2	0,3057	-0,0800	0,2390	9.8623	0,7816
0,3	0,3080	-0,1200	0,2407	16.8431	0,7812
0,4	0,3095	-0,1600	0,2651	22.6797	0,8566
0,5	0,3096	-0,2000	0,3051	25.7260	0,9855
0,6	0,3095	-0,1600	0,4260	22.2258	1,3763
0,7	0,3080	-0,1200	0,5167	10.1803	1,6777
0,8	0,3057	-0,0800	0,5533	-7.1369	1,8101
0,9	0,3049	-0,0400	0,5265	-24.8699	1,7267
1,0	0,3029	0	0,4450	-38.0948	1,4687
0,1	0,3049		0,2937	-41.5892	0,9631
0,2	0,3057		0,1547	-32.9426	0,5059
0,3	0,3080		0,0662	-13.8565	0,2149
0,4	0,3095		0,0550	8.2688	0,1778
0,5	0,3096		0,1193	28.3412	0,3853
0,6	0,3095		0,2405	40.8459	0,7770
0,7	0,3080		0,3846	42.4514	1,2487
0,8	0,3057		0,5114	32,7564	1,6730
0,9	0,3049		0,5860	14,5736	1,9220

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3029	0	0
-0,0800	0,2236	5.1272	0,7333
-0,1600	0,1733	15.3318	0,5670
-0,2400	0,1643	27.6743	0,5334
-0,3200	0,1973	38.7419	0,6374
-0,4000	0,2615	45.4966	0,8446
-0,3200	0,4917	40.2360	1,5888
-0,2400	0,6681	18.6378	2,1690
-0,1600	0,7470	-12,0420	2,4762
-0,0800	0,7105	-46,0665	2,3301
0	0,5679	-72,1225	1,8748
	0,2826	-80,2797	0,9267
	0,0164	-65,4680	0,0538
-0,1588		-37,3055	0
-0,2307		-9,1950	0
-0,2057		+18,1623	0
-0,0908		46,0515	0
0,1118		68,8886	0,3613
0,3691		76,3781	1,1985
0,6115		53,8896	2,0002

Продолжение динамической таблицы XXV.

$\delta$	$h_i$ сант.	$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
0,1	0,3029		0,5883	— 6.9824	1.9422
1,0	0,3049		0,5265		1.7269
0,2	0,3057				
0,3	0,3080				
0,4	0,3095				
0,5	0,3096				
0,6	0,3095				
0,7	0,3080				

По уравнению A

при  $h=0,3069$ ,  $a=0,2$   $l=77$ ,  
 $c=2223$ ,  $k=149,367$

$\max y=0,5930$

по табл.  $y_{\max}=5.883$

$$\frac{5930}{5883} = 1,01.$$

$y'_i$ сант.	$y_i$ сант.	$\omega_i$ сант.	$\frac{y_i}{h_i}$
	0.7409	25.2194	2.4298
	0.7544	— 9.6728	2.4907
	0,6284	—39.9123	2.0611
	0,4427	—58.0466	1.4485
	0,2348	—58.7695	0.7625
	0,0483	—33.1826	0,1560
	—0,0243	— 7.9110	0
	— 0,0047	19.3658	0
	0,1052		0,3417

По уравнению A

при  $h=0,3069$ ,  $a=0,4$ ,  $l=77$ ,  
 $c=2223$ ,  $k=149,367$

$\max y=0,8791$

по табл.  $y_{\max}=0,7544$

$$\frac{8791}{7544} = 1,16.$$

**Динамическая таблица XXVI.**

Прямой рельс опирается на 6 опорь.

$$A = 2.$$

$P=10.000$  килогр.,  $K=10.000$  килогр.,  $E=2.000.000$  килогр.,  $L=60$  сант.,  $J=2.160$  сант.  
Скорость  $V=75$  верст в часъ,  $v=2223$  сант. в секунду.

$$a=6 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,0027, \frac{a^3}{v^3} = 0,00000729, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} + 0,0027 \omega_{i-1} + 0,000893 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3 y'_{i-1} - 3 y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,000896 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,3243 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной, глубиной 0,2,  
длиной  $l=72$  сант.

Колесо со впадиной,  
глубиной 0,2 и  $l=60$  сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3127	0	0,3127	0	1.
0,1	0,3132	-0,0332	0,2778	2.5147	0,8897
0,2	0,3139	-0,0666	0,2540	6.7835	0,8092
0,3	0,3146	-0,1000	0,2426	12.0932	0,7711
0,4	0,3155	-0,1333	0,2474	17.5241	0,7841
0,5	0,3165	-0,1666	0,2651	22.1734	0,8376
0,6	0,3155	-0,2000	0,2934	25.2621	0,9299
0,7	0,3146	-0,1666	0,3922	24.3237	1.2466
0,8	0,3139	-0,1333	0,4793	17.6301	1.5269
0,9	0,3132	-0,1000	0,5407	6.3369	1.7264
1.0	0,3127	-0,0666	0,5565	-7.6144	1.8116
0,1	0,3132	-0,0333	0,5435	-21.5303	1.7353
0,2	0,3139		0,4950	-33.0330	1.5769
0,3	0,3146		0,3893	-39.5717	1.2378
0,4	0,3155		0,2764	-38.4905	0,8760
0,5	0,3165		0,1770	-31.4468	0,5592
0,6	0,3155		0,1055	-19.1979	0,3344
0,7	0,3146		0,0730	-3.5879	0,2317
0,8	0,3139		0,0847	+12.6596	0,2698
0,9	0,3132		0,1381	26.8471	0,4409
1.0	0,3127		0,2239	36.6401	0,7160
0,1	0,3132		0,3274	40.4794	1.0453
0,2	0,3139		0,4321	37.8088	1.3766
0,3	0,3146		0,5191	29.1772	1.6500
0,4	0,3155		0,5753	13.1372	1.8235
0,5	0,3165		0,5840	1.0370	1.8451
0,6	0,3155		0,5547	-15.3605	1.7580

По уравнению A  
при  $h=0,3144$ ,  $a=0,2$ ,  $l=72$ ,  $c=2.223$  и  $k=157,99$   
 $max. y=0,6012$   
по табл.  $y_{max}=0,5840$   
 $\frac{6012}{5840} = 1,03$

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,3127	0	1.
-0,0400	0,2720	2.7094	0,8685
-0,0800	0,2421	7.5215	0,7713
-0,1200	0,2275	13.6156	0,7231
-0,1600	0,2303	19.9661	0,7300
-0,2000	0,2494	25.5288	0,7877
-0,1600	0,3595	27.0559	1.1395
-0,1200	0,4634	21.9818	1.4730
-0,0800	0,5443	11.2014	1.7340
-0,0400	0,5893	-3.4500	1.8815
0	0,5911	-20.4158	1.8903
0	0,5095	-33.8714	1.6268
0,4002	-41.2683	1.2749	
0,2817	-41.4534	0,8945	
0,1830	-34.6837	0,5800	
0,1025	-22.3981	0,3239	
0,0619	-6.3355	0,1962	
0,0674	+10.8045	0,2147	
0,1175	26.1904	0,3743	
0,2035	37.2914	0,6497	
0,3116	42.2648	0,9965	
0,4216	40.3778	1.3461	
0,5163	32.1027	1.6447	
0,5804	18.9023	1.8449	
0,6037	3.0620	1.9135	
0,5880	-12.9624	1.8578	

По уравнению A  
при  $h=0,3144$ ,  $a=0,2$ ,  $l=60$ ,  
 $c=2.223$  и  $k=157,99$   
 $max. y=0,6018$   
по табл.  $y_{max}=0,6037$   
 $\frac{6018}{6037} = 1$

### Динамическая таблица XXVII.

Прямой рельс опирается на 6 опоръ.

$$A = 0,5$$

$$P=10.000 \text{ кил.}, K=20.000 \text{ кил.}, E=2.000.000 \text{ кил.}, L=70 \text{ сант.}, J=1.715 \text{ сант.}^4.$$

Скорость  $V=75$  верстъ въ часъ,  $v=2223$  сант. въ секунду.

$$a = 7 \text{ сант.}, \frac{a}{v} = 0,003147, \frac{a^2}{v^2} = 0,00000990, m=7, l=5 \text{ сант.}$$

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y'_i - y'_{i-1} - 0,003147 \omega_{i-1} + 0,001214 \left[ 32 + 1,4 (y'_i + 3y'_{i-1} - 3y_{i-1}) - 24 \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right]}{1 + 0,001214 \left( \frac{8}{h_i} + 1,4 \right)}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + 1,5468 \left[ 16 - 1,4 (y_i + y_{i-1} - y'_i - y'_{i-1}) - 7 \left( \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right]$$

Колесо со впадиной глубиною 0,4 сант.

Колесо со впадиной глубиною 0,2 сант.

$\delta$	$h_i$ санти.	$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2204	0	0,2204	0	1
0,1	0,2205	-0,0800	0,1424	5.9698	0,6458
0,2	0,2213	-0,1600	0,0955	18.0191	0,4315
0,3	0,2221	-0,2400	0,0926	32.3082	0,4169
0,4	0,2227	-0,3200	0,1327	44.3881	0,5961
0,5	0,2229	-0,4000	0,2017	51.0857	0,8600
0,6	0,2227	-0,3200	0,4329	42.5434	1,9439
0,7	0,2221	-0,2400	0,5966	13.7172	2,6862
0,8	0,2213	-0,1600	0,6464	-25.8034	2,9209
0,9	0,2205	-0,0800	0,5688	-63.7631	2,5796
1,0	0,2204	0	0,3907	-88.4120	1,7727
0,1	0,2205	0	0,0934	-88.4922	0,4236
0,2	0,2213		-0,1521	-68.2029	0
0,3	0,2221		-0,3129	-42.4471	0
0,4	0,2227		-0,3883	-16.1798	0
0,5	0,2229		-0,3810	+10.2349	0
0,6	0,2227		-0,2946	36.4467	0
0,7	0,2221		-0,1335	62.1226	0
0,8	0,2213		+0,0971	82.1991	0,0439
0,9	0,2205		0,3757	87.0006	1,7038
1,0	0,2204		0,6090	61.2512	2,7631
0,1	0,2205		0,7240	17.7990	3,2834
0,2	0,2213		0,6787	-29.2428	3,0664
0,3	0,2221				
0,4	0,2227				
0,5	0,2229				

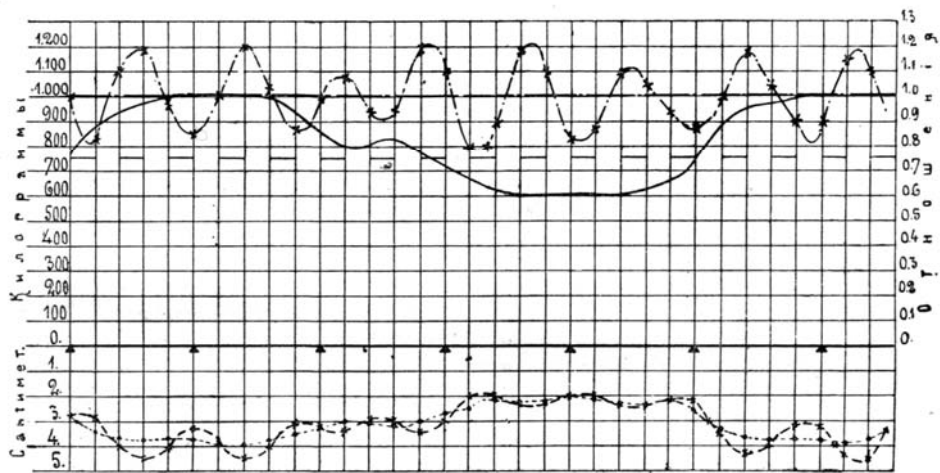
По уравненію A  
при  $h=0,2217, a=0,4, l=70, c=2223,$   
 $k=189,73$   
 $\max y = 0,7542$   
по табл.  $y_{\max}=0,7240$   
 $\frac{7542}{7240} = 1,04.$

$y'_i$ санти.	$y_i$ санти.	$\omega_i$ санти.	$\frac{y_i}{h_i}$
0	0,2204	0	1
-0,0400	0,1807	4.0928	0,8195
-0,0800	0,1600	11.1423	0,7230
-0,1200	0,1612	19.0754	0,7258
-0,1600	0,1886	25.4318	0,8469
-0,2000	0,2302	28.1426	1,0327
-0,1600	0,3492	22.6982	1,5680
-0,1200	0,4313	7.1467	1,9419
-0,0800	0,4525	-13.6179	2,0448
-0,0400	0,4076	-33.1131	1,8454
0	0,3120	-45.3180	1,4156
0	0,1580	-44.6782	0,7170
0	0,0331	-29.7266	0,1496
-0,0250		-6.6152	0
-0,0084		+18.2062	0
+0,0839	38.7160	0,3764	
0,2230	47.8830	1,0013	
0,3656	42.6922	1,6461	
0,4677	24.9301	2,1134	
0,4983	0,2552	2,2600	
0,4491	-23.5803	2,0376	
0,3368	-39.1338	1,5274	
0,1973	-41.7325	0,8915	
0,0744	-30.6964	0,3349	
0,0062	-10.0504	0,0279	
0,0120	+13.7735	0,0538	

По уравненію A  
при  $h=0,2217, a=0,2, l=70,$   
 $c=2223, k=189,73$   
 $\max y = 0,4879$   
по табл.  $y_{\max}=0,4983$   
 $\frac{4879}{4983} = 0,98.$

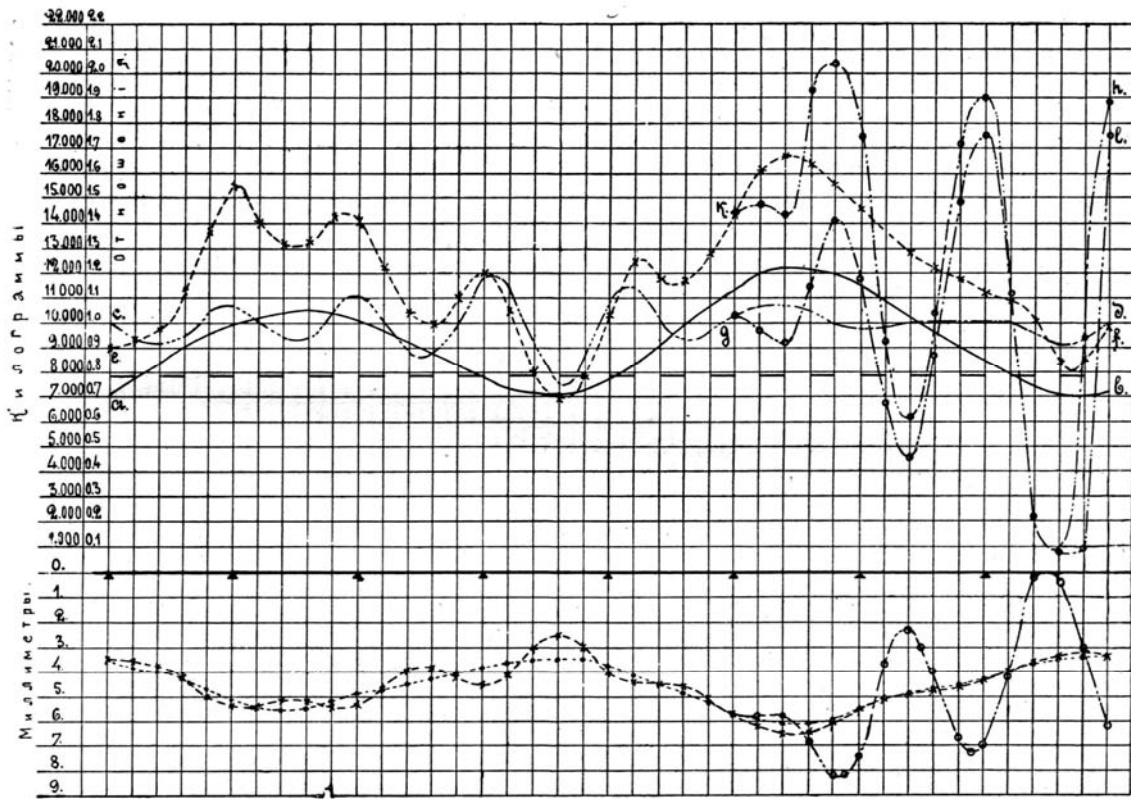
Графическая таблица I

діаграмма силъ по проф. Ю. В. Ломоносову.



- — — — — Линія статической нагрузки.
- — — — — Линія силъ прилагаемыхъ къ колесу во время движения.
- · — · — · — Линія отношеній  $\frac{y_i}{h_i}$
- ..... Линія прогибовъ  $h_i$  при статическомъ дѣйствіи силъ, сопровождающихъ движение.
- · — · — · — Линія прогибовъ  $y_i$  при динамическомъ дѣйствіи колеса.

Графическая таблица II  
по М. В. Гололобову и А. С. Раевскому.  
Скорость 52 километра.

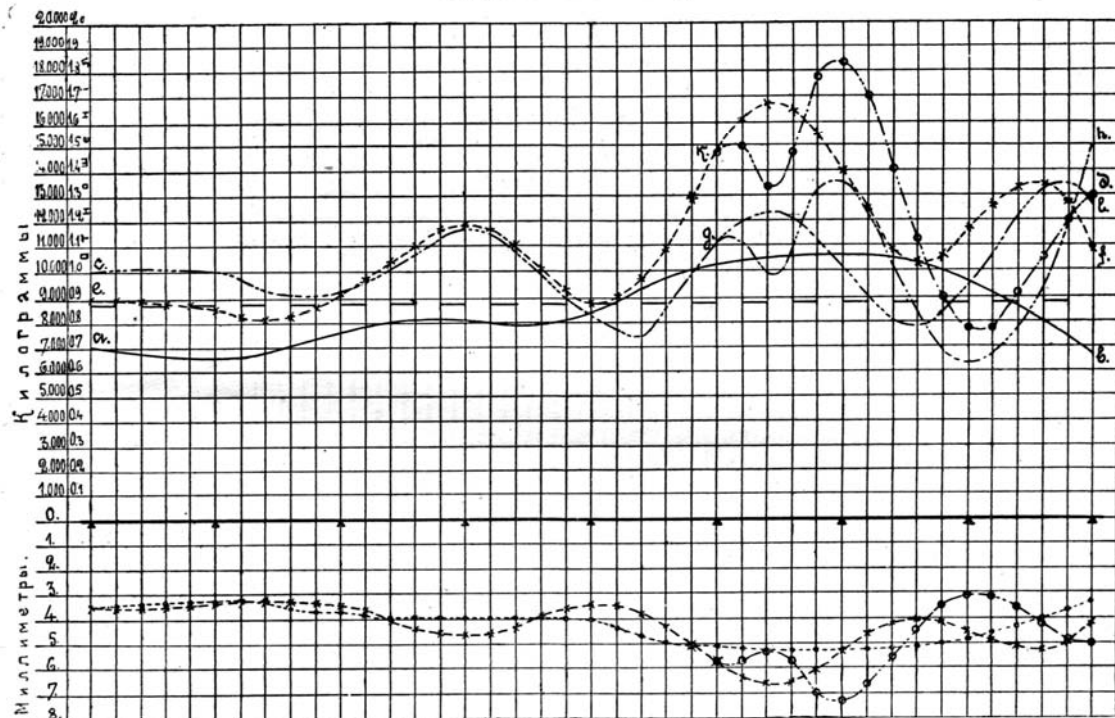


- Линия статических погружений круглого катящегося колеса.
- ..... Линия сил динамических погружений круглого катящегося колеса.
- · - · - · Линия динамических погружений колеса со впадиной 0.2 сант.
- a — b      Линия сил при 52 километрахъ.
- c — d      Линия отношений  $\frac{y_i}{h}$  при кругломъ колесѣ.
- e — f      Линия отношений  $\frac{s_i}{(1+m)q} \cdot \frac{y_i}{h_i}$  при кругломъ колесѣ.
- g — h      Линия отношений  $\frac{y_i}{h_i}$  при впадинѣ 0.2 сант.
- k — l      Линия отношений  $\frac{s}{(1+m)q} \cdot \frac{y_i}{h_i}$  при впадинѣ 0.2 сант.

### Графическая таблица III

по М. В. Гололобову и А. С. Раевскому.

Скорость 104 километра.



- Линия статического прогиба катящегося круглого колеса.  
 ----- Линия динамического прогиба катящегося круглого колеса.  
 ..... Линия динамического прогиба катящегося колеса со впадиной 0.2 сантимет.  
 a — b Линия сил прилагаемых къ катящемуся колесу.  
 c — d Линия отношений  $\frac{s_i}{(1+q)^m} \cdot \frac{y_i}{h_i}$   
 e — f Линия отношений  $\frac{s_i}{(1+q)^m} \cdot \frac{y_i}{h_i}$  колесо круглое,  
 g — h Линия отношений  $\frac{y_i}{h_i}$  при впадинѣ 0.2 сантимет.  
 k — l Линия отношений  $\frac{y_i}{h_i}$  при кругломъ колесѣ.

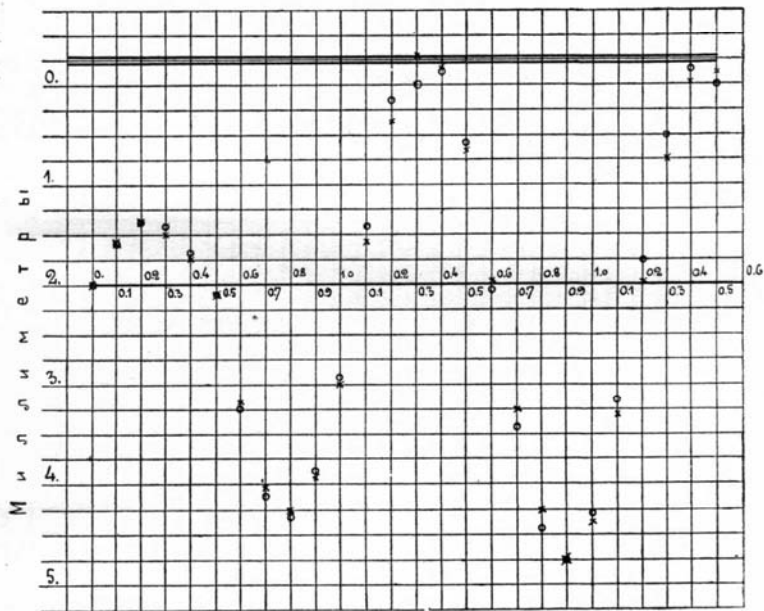
### Графическая таблица IV.

Увеличенныя въ 25 разъ.

×  $y_i - y_0 = y_i - 0.227$  сант. при 4 опорахъ.

○  $y_i - y_0 = y_i - 0.220$  сант. при 6 опорахъ.

По динамическимъ таб. X и XXVII при впадинѣ 0.2 сант.



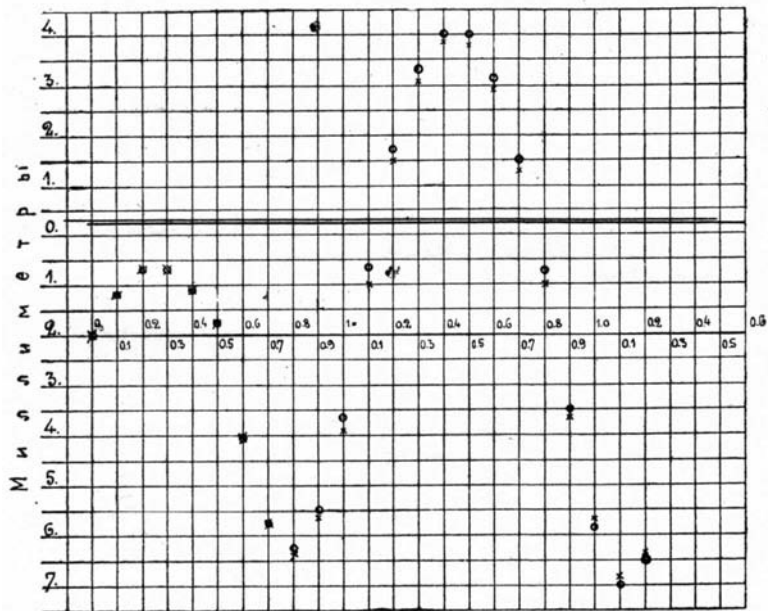
### Графическая таблица V.

Увеличенные в 10 разъ.

×  $y_i - y_0 = y_i - 0.227$  сант. при 4 опорахъ.

○  $y_i - y_0 = y_i - 0.220$  сант. при 6 опорахъ.

По динамическимъ табл. X и XXVII при впадинѣ 0.4 сант.



## Графическая таблица VI.

Увеличенныя въ 20 разъ.

×  $y_i - y_0 y_i = 0.3490$  при 4 опорахъ.

○  $y_i - y_0 y_i = 0.3127$  при 6 опорахъ.

По динамическимъ таб. XXI и XXVI при впадинѣ 0.2 сант.

